

# PERELMAN, IL FLUSSO DI RICCI E LA CONGETTURA DI POINCARÉ

CARLO MANTEGAZZA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI  
FEDERICO II

SSM   
Scuola Superiore Meridionale

## Poincaré e la topologia



Sebbene vari risultati che oggi chiamiamo “topologici” fossero stati trovati in precedenza, è con Poincaré (1854–1912), *l'ultimo universalista*, che la topologia (*Analysis Situs*) assume una forma moderna.

In particolare, per quanto riguarda le proprietà delle superfici o degli spazi di dimensione più alta.

Poincaré introduce il concetto fondamentale di *semplice connessione*.

## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):

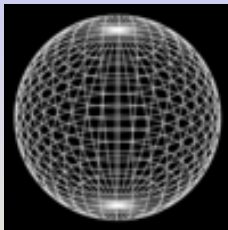
## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



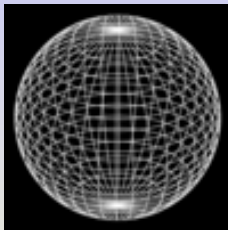
## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



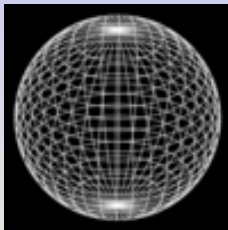
## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



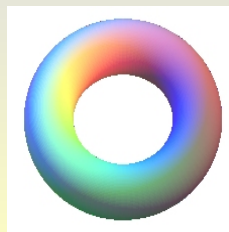
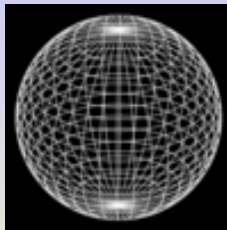
## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):

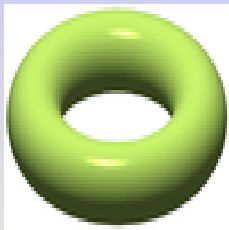


## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):

## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



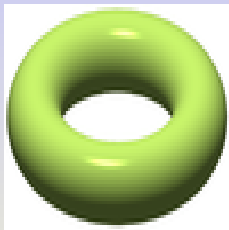
## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



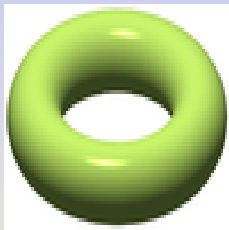
## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



### Teorema

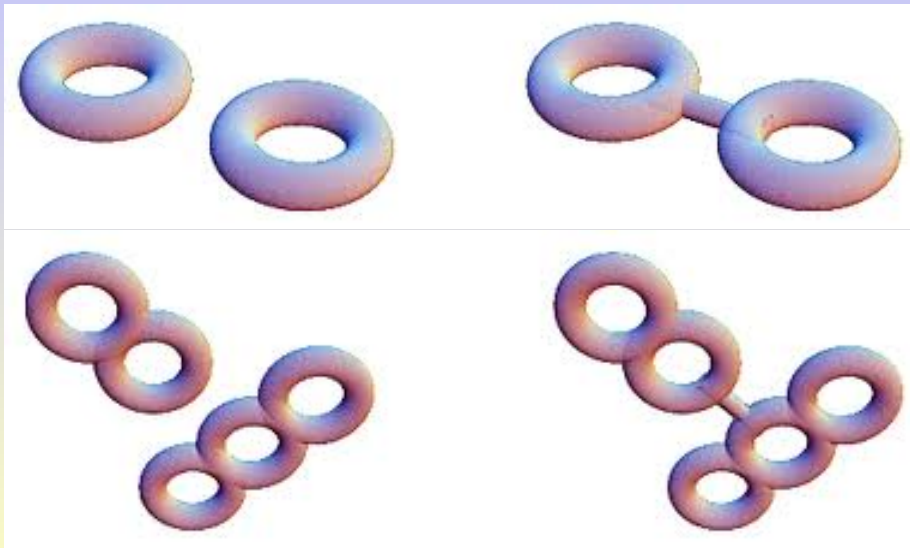
Ogni superficie chiusa è il bordo di un *bretzel*.

# Superfici – Esempi

## Superfici – Esempi



## Superfici – Esempi

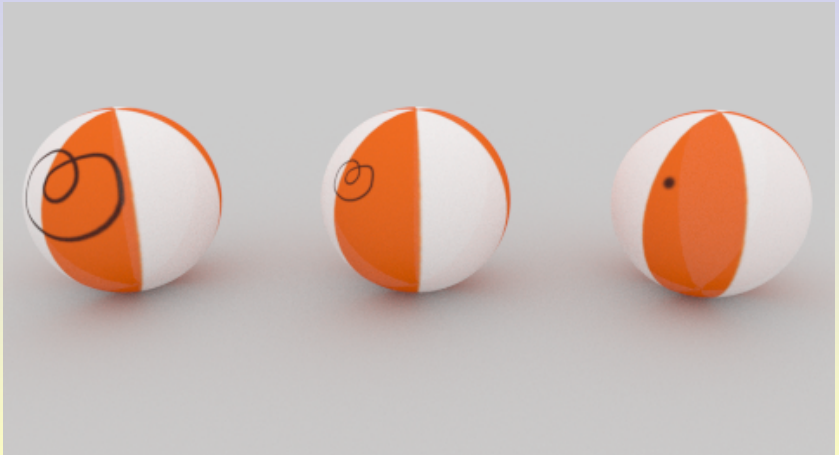


## Definizione

*Una superficie si dice **semplicemente connessa** se ogni curva su di essa si può deformare in modo continuo a un punto.*

## Definizione

Una superficie si dice **semplicemente connessa** se ogni curva su di essa si può deformare in modo continuo a un punto.



## Il Toro non è semplicemente connesso



## Il Toro non è semplicemente connesso



## Il Toro non è semplicemente connesso



### Teorema

Una superficie chiusa semplicemente connessa è omeomorfa alla sfera (omeomorfa = deformabile).

## Spazi multidimensionali

Poincaré si pose il problema se questo teorema fosse vero anche in spazi di dimensione più alta di due, con particolare interesse verso la dimensione tre. Questi spazi sono chiamati varietà.

Uno spazio tridimensionale è “localmente” come il nostro spazio ordinario (topologicamente), ma potrebbe avere “comportamenti strani” nel percorrerlo... esempio si potrebbe uscire dalla porta di una stanza e ritrovarsi nella stessa stanza rientrati da un'altra sua porta, così come percorrendo una circonferenza o la superficie di un toro si torna al punto di partenza. Oppure avere una struttura ancora più complicata.

Esistono la *3-sfera*, il *3-toro* e altri esempi di varietà tridimensionali, analoghi alle superfici che abbiamo visto.

## La congettura di Poincaré

Nell'ordine di idee di arrivare a un teorema di classificazione come per le superfici, una delle prime questioni che sollevò Poincaré fu la seguente.

## La congettura di Poincaré

Nell'ordine di idee di arrivare a un teorema di classificazione come per le superfici, una delle prime questioni che sollevò Poincaré fu la seguente.

### Congettura di Poincaré

Ogni varietà tridimensionale chiusa e semplicemente connessa è omeomorfa (deformabile) alla 3-sfera.

Proposta nel 1904 sui "Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo".

# La congettura di Poincaré

Si può inoltre generalizzare a dimensioni ancora più alte:

## La congettura di Poincaré

Si può inoltre generalizzare a dimensioni ancora più alte:

- $n \geq 5$  Stephen Smale (Medaglia Fields 1966).

## La congettura di Poincaré

Si può inoltre generalizzare a dimensioni ancora più alte:

- $n \geq 5$  Stephen Smale (Medaglia Fields 1966).
- $n = 4$  Michael Freedman (Medaglia Fields 1986).

## La congettura di Poincaré

Si può inoltre generalizzare a dimensioni ancora più alte:

- $n \geq 5$  Stephen Smale (Medaglia Fields 1966).
- $n = 4$  Michael Freedman (Medaglia Fields 1986).
- $n = 3$  Grisha Perelman (Medaglia Fields 2006).

Rifiutata!!!

## I flussi geometrici

Una possibile linea dimostrativa della congettura è “trasformare” in qualche modo (deformazioni, *chirurgie – taglia & cucì*), mantenendone le proprietà topologiche, un ipotetico controesempio alla congettura in uno spazio che si sappia poi riconoscere essere la sfera.

I tentativi in questo senso per via “topologica” sono falliti per circa un secolo.

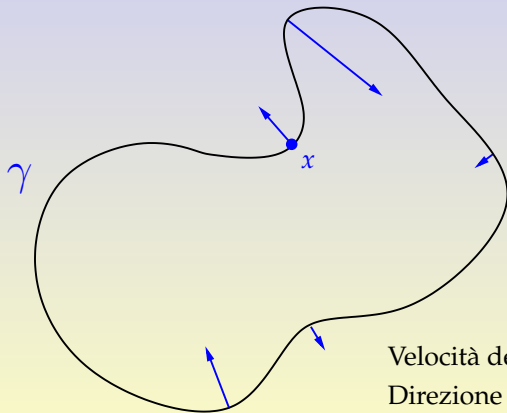
L’approccio “vincente”, sempre all’interno di questo quadro, si è rivelato deformare lo spazio in oggetto per mezzo di leggi di evoluzione date da equazioni differenziali alle derivate parziali.

Il vantaggio rispetto alle deformazioni di tipo topologico è che, essendo basate sull’*Analisi*, sono “quantitative”.

In generale, queste deformazioni prendono il nome di *flussi geometrici*.

## Un esempio: il moto di curve per curvatura nel piano

Data  $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$  una curva semplice chiusa, vogliamo che a ogni istante ogni punto si muova con velocità normale uguale alla curvatura della curva nel punto.



Velocità del punto  $x$ :  $k_\gamma(x)$   
Direzione perpendicolare a  $\gamma$

## Analiticamente...

Data  $\gamma = \gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva semplice chiusa, cerchiamo una funzione regolare  $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\theta, t) = k(\theta, t) \vec{N}(\theta, t) \\ \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0 \end{cases}$$

- $\vec{N}(\theta, t)$  = versore normale “interno”
- $k(\theta, t)$  = curvatura della curva  $\gamma_t = \gamma(\cdot, t)$  nel punto  $\gamma(\theta, t)$ .

## Analiticamente...

Data  $\gamma = \gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva semplice chiusa, cerchiamo una funzione regolare  $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\theta, t) = k(\theta, t) \vec{N}(\theta, t) \\ \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0 \end{array} \right.$$

- $\vec{N}(\theta, t)$  = versore normale “interno”
- $k(\theta, t)$  = curvatura della curva  $\gamma_t = \gamma(\cdot, t)$  nel punto  $\gamma(\theta, t)$ .

Sistema parabolico nonlineare di equazioni alle derivate parziali.

## Esempi

*Vediamo qualche esempio di evoluzione di curve per curvatura dal sito:*

<http://a.carapetis.com/csf/>

(nel terzo video la curva viene riscalata in modo da mantenere l'area contenuta costante).

## Il Teorema di Gage–Hamilton–Grayson

**Teorema (M. Gage & R. Hamilton, 1986 – M. Grayson, 1989)**

Una qualunque curva regolare, semplice e chiusa nel piano durante il flusso rimane regolare, semplice e chiusa. Dopo un tempo finito diventa convessa, poi sempre più circolare e “collassa” a un punto. Riscaldando in modo da tenere l’area contenuta costante, converge a una circonferenza.

## Il Teorema di Gage–Hamilton–Grayson

### Teorema (M. Gage & R. Hamilton, 1986 – M. Grayson, 1989)

Una qualunque curva regolare, semplice e chiusa nel piano durante il flusso rimane regolare, semplice e chiusa. Dopo un tempo finito diventa convessa, poi sempre più circolare e “collassa” a un punto. Riscaldando in modo da tenere l’area contenuta costante, converge a una circonferenza.

Questo è un esempio di un “buon” flusso geometrico che trasforma ogni elemento di una famiglia di oggetti geometrici in un elemento “rappresentante” che si conosce bene, inoltre l’oggetto deformato a ogni tempo sta sempre “all’interno” della famiglia (le proprietà definitorie della famiglia si mantengono).

## Il Teorema di Gage–Hamilton–Grayson

### Teorema (M. Gage & R. Hamilton, 1986 – M. Grayson, 1989)

Una qualunque curva regolare, semplice e chiusa nel piano durante il flusso rimane regolare, semplice e chiusa. Dopo un tempo finito diventa convessa, poi sempre più circolare e “collassa” a un punto. Riscaldando in modo da tenere l’area contenuta costante, converge a una circonferenza.

Questo è un esempio di un “buon” flusso geometrico che trasforma ogni elemento di una famiglia di oggetti geometrici in un elemento “rappresentante” che si conosce bene, inoltre l’oggetto deformato a ogni tempo sta sempre “all’interno” della famiglia (le proprietà definitorie della famiglia si mantengono).

Sebbene questo moto di curve sia il più semplice flusso geometrico di questo genere, questo teorema è assolutamente *non banale* e la sua dimostrazione richiede argomenti e idee sia dall’analisi che dalla geometria.

# Richard Streit Hamilton – Columbia University, NY

(nel 1982 alla Cornell University di Ithaca, NY)



## Il flusso di Ricci

Una proposta di analisi di una famiglia di flussi tra cui il flusso di Ricci viene suggerita da Jean–Pierre Bourguignon (“Ricci curvature and Einstein metrics”, Lecture Notes in Math 838, 1981).

Nel 1982 Richard Hamilton definisce e studia il flusso di Ricci, cioè il sistema di equazioni alle derivate parziali

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric_{g(t)}$$

che descrive l’evoluzione della metrica di una varietà riemanniana, dove  $Ric_{g(t)}$  è il *tensore di Ricci*.

“Three–manifolds with positive Ricci curvature”  
*Journal of Differential Geometry* **17**, 1982, pp. 255–306.

THREE-MANIFOLDS WITH  
POSITIVE RICCI CURVATURE

RICHARD S. HAMILTON

## INDEX

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| 1. Introduction                                        | 255 |
| 2. Notations and conventions                           | 257 |
| 3. The evolution equation                              | 259 |
| 4. Solution for a short time                           | 260 |
| 5. Evolution equations with an integrability condition | 262 |
| 6. Weakly parabolic linear systems                     | 265 |
| 7. Evolution of the curvature                          | 273 |
| 8. Curvature in dimension three                        | 276 |
| 9. Preserving positive Ricci curvature                 | 279 |
| 10. Pinching the eigenvalues                           | 283 |
| 11. The gradient of the scalar curvature               | 286 |
| 12. Interpolation inequalities for tensors             | 291 |
| 13. Higher derivatives of the curvature                | 294 |
| 14. Long time existence                                | 296 |
| 15. Controlling $R_{\max}/R_{\min}$                    | 299 |
| 16. Estimating the normalized equation                 | 300 |
| 17. Exponential convergence                            | 301 |

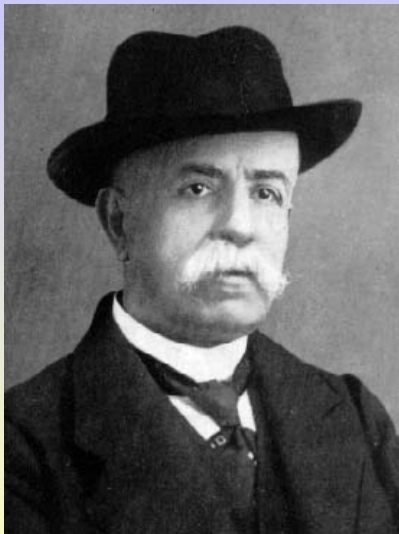
## 1. Introduction

Our goal in this paper is to prove the following result.

**1.1 Main Theorem.** *Let  $X$  be a compact 3-manifold which admits a Riemannian metric with strictly positive Ricci curvature. Then  $X$  also admits a metric of constant positive curvature.*

All manifolds of constant curvature have been completely classified by Wolf [6]. For positive curvature in dimension three there is a pleasant variety of examples, of which the best known are the lens spaces  $L_{p,q}$ . Wolf gives five

## Gregorio Ricci Curbastro (1853–1925), Lugo (RA)



## Proprietà di base

Il flusso deforma la metrica (e quindi la geometria locale) in maniera selettiva: contrae nelle direzioni per cui il tensore di Ricci è positivo e espande in quelle dove è negativo.

## Proprietà di base

Il flusso deforma la metrica (e quindi la geometria locale) in maniera selettiva: contrae nelle direzioni per cui il tensore di Ricci è positivo e espande in quelle dove è negativo.

L'equazione è nonlineare, della stessa famiglia dell'equazione del calore nei mezzi materiali.

## Proprietà di base

Il flusso deforma la metrica (e quindi la geometria locale) in maniera selettiva: contrae nelle direzioni per cui il tensore di Ricci è positivo e espande in quelle dove è negativo.

L'equazione è nonlineare, della stessa famiglia dell'equazione del calore nei mezzi materiali.

La forma iniziale può essere vista come una distribuzione di curvatura,

## Proprietà di base

Il flusso deforma la metrica (e quindi la geometria locale) in maniera selettiva: contrae nelle direzioni per cui il tensore di Ricci è positivo e espande in quelle dove è negativo.

L'equazione è nonlineare, della stessa famiglia dell'equazione del calore nei mezzi materiali.

La forma iniziale può essere vista come una distribuzione di curvatura, il flusso di Ricci muove e “diffonde” tale curvatura allo stesso modo dell'equazione del calore.

## Proprietà di base

Il flusso deforma la metrica (e quindi la geometria locale) in maniera selettiva: contrae nelle direzioni per cui il tensore di Ricci è positivo e espande in quelle dove è negativo.

L'equazione è nonlineare, della stessa famiglia dell'equazione del calore nei mezzi materiali.

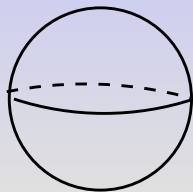
La forma iniziale può essere vista come una distribuzione di curvatura, il flusso di Ricci muove e “diffonde” tale curvatura allo stesso modo dell'equazione del calore.

È dunque ragionevole attendersi di ottenere asintoticamente una distribuzione uniforme, cioè una “geometria” molto simmetrica, per esempio come quella di una sfera.

# Esempi

## Esempi

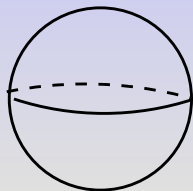
Sfera:  $g(t) = (1 - 4t)g_0$ .



$t = 1/4$

## Esempi

Sfera:  $g(t) = (1 - 4t)g_0$ .



$t = 1/4$

Superficie iperbolica (curvatura costante negativa):  $g(t) = (1 + 4t)g_0$ .



# Il Teorema di Hamilton

## Il Teorema di Hamilton

### Teorema (R. Hamilton, 1982)

Se una varietà tridimensionale compatta e semplicemente connessa ha una metrica con tensore di Ricci positivo, allora il flusso di Ricci (normalizzato) la deforma in una 3-sfera.

## Il Teorema di Hamilton

### Teorema (R. Hamilton, 1982)

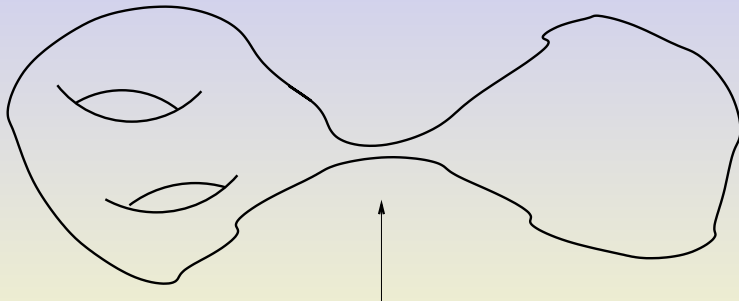
Se una varietà tridimensionale compatta e semplicemente connessa ha una metrica con tensore di Ricci positivo, allora il flusso di Ricci (normalizzato) la deforma in una 3-sfera.

### Corollario

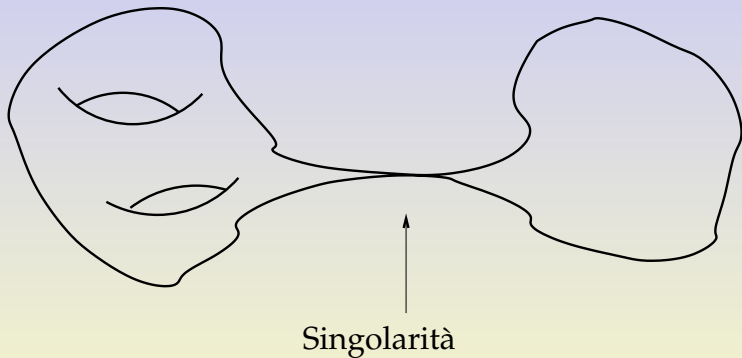
*Se su ogni varietà tridimensionale compatta e semplicemente connessa si può mettere una metrica con tensore di Ricci positivo, allora abbiamo una dimostrazione della congettura di Poincaré.*

## Esempi negativi: “collo” che si stringe

## Esempi negativi: “collo” che si stringe

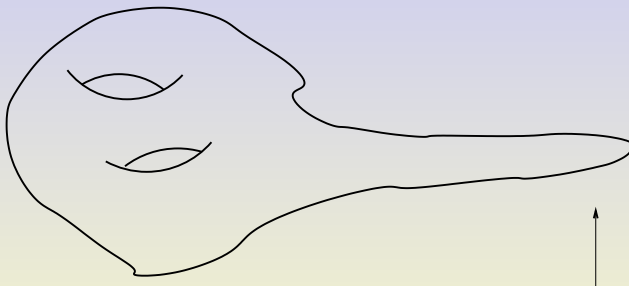


## Esempi negativi: “collo” che si stringe

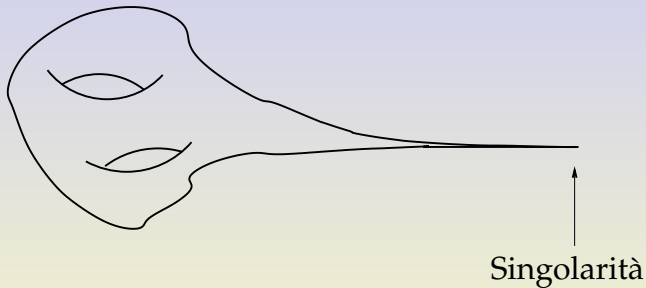


## Esempi negativi: formazione di una cuspid

## Esempi negativi: formazione di una cuspid



## Esempi negativi: formazione di una cuspid



## La linea dimostrativa – 1986/95

Supponiamo di avere una varietà tridimensionale semplicemente connessa, ipotetico controesempio alla congettura di Poincaré.

## La linea dimostrativa – 1986/95

Supponiamo di avere una varietà tridimensionale semplicemente connessa, ipotetico controesempio alla congettura di Poincaré.

- Deformiamo la metrica iniziale col flusso di Ricci.

## La linea dimostrativa – 1986/95

Supponiamo di avere una varietà tridimensionale semplicemente connessa, ipotetico controesempio alla congettura di Poincaré.

- Deformiamo la metrica iniziale col flusso di Ricci.
- Supponiamo che in tempo finito si formi una singolarità. Se tale singolarità è come una 3-sfera che “collassa”, allora un istante prima di “collassare” siamo riusciti a deformare la varietà iniziale in una sfera.

## La linea dimostrativa – 1986/95

Supponiamo di avere una varietà tridimensionale semplicemente connessa, ipotetico controesempio alla congettura di Poincaré.

- Deformiamo la metrica iniziale col flusso di Ricci.
- Supponiamo che in tempo finito si formi una singolarità. Se tale singolarità è come una 3-sfera che “collassa”, allora un istante prima di “collassare” siamo riusciti a deformare la varietà iniziale in una sfera.
- Se la singolarità non è come una 3-sfera che “collassa”, cerchiamo di ottenere il massimo di informazioni quantitative su cosa sta succedendo alla nostra varietà. Ciò è possibile se sappiamo “classificare” tutte le possibili singolarità.

## La linea dimostrativa – 1986/95

- Con le informazioni di cui al punto precedente facciamo una “chirurgia quantitativa” (tenendo sotto controllo le quantità geometriche rilevanti) ottenendo una o più nuove varietà.

## La linea dimostrativa – 1986/95

- Con le informazioni di cui al punto precedente facciamo una “chirurgia quantitativa” (tenendo sotto controllo le quantità geometriche rilevanti) ottenendo una o più nuove varietà.
- Facciamo “ripartire” il flusso di Ricci su queste varietà “figlie” e ricominciamo la procedura.

## La linea dimostrativa – 1986/95

- Con le informazioni di cui al punto precedente facciamo una “chirurgia quantitativa” (tenendo sotto controllo le quantità geometriche rilevanti) ottenendo una o più nuove varietà.
- Facciamo “ripartire” il flusso di Ricci su queste varietà “figlie” e ricominciamo la procedura.
- Dimostriamo che, assumendo l’ipotesi di semplice connessione della varietà iniziale, dopo un numero finito di “passi” (e in tempo finito) questa procedura termina e tutte le varietà finali sono 3–sfere che collassano.

## La linea dimostrativa – 1986/95

- Con le informazioni di cui al punto precedente facciamo una “chirurgia quantitativa” (tenendo sotto controllo le quantità geometriche rilevanti) ottenendo una o più nuove varietà.
- Facciamo “ripartire” il flusso di Ricci su queste varietà “figlie” e ricominciamo la procedura.
- Dimostriamo che, assumendo l’ipotesi di semplice connessione della varietà iniziale, dopo un numero finito di “passi” (e in tempo finito) questa procedura termina e tutte le varietà finali sono 3–sfere che collassano.
- Ricostruendo all’indietro la varietà iniziale, tenendo conto delle “chirurgie” effettuate, concludiamo che anch’essa era una 3–sfera, dimostrando quindi la congettura di Poincaré.

## La classificazione delle singolarità

### Congettura (R. Hamilton)

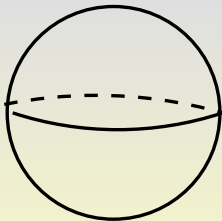
*Le situazioni di singolarità possibili sono solo le tre viste precedentemente: sfera che collassa, “collo” che si stringe, formazione di una cuspid.*

## La classificazione delle singolarità

### Congettura (R. Hamilton)

*Le situazioni di singolarità possibili sono solo le tre viste precedentemente: sfera che collassa, "collo" che si stringe, formazione di una cuspid.*

Sfera che collassa:

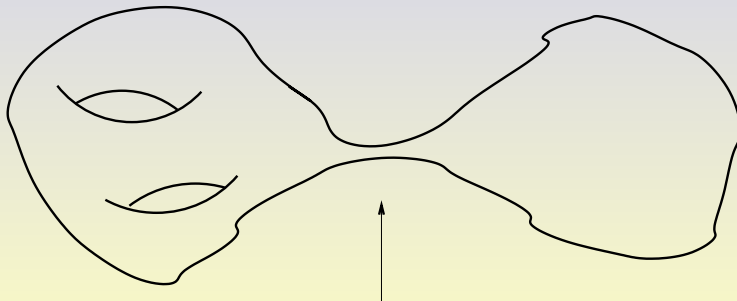


## La classificazione delle singolarità

### Congettura (R. Hamilton)

*Le situazioni di singolarità possibili sono solo le tre viste precedentemente: sfera che collassa, "collo" che si stringe, formazione di una cuspid.*

Collo che si stringe:

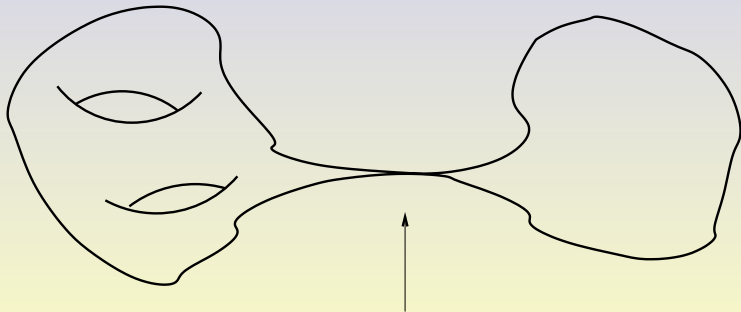


## La classificazione delle singolarità

### Congettura (R. Hamilton)

*Le situazioni di singolarità possibili sono solo le tre viste precedentemente: sfera che collassa, "collo" che si stringe, formazione di una cuspid.*

Collo che si stringe:



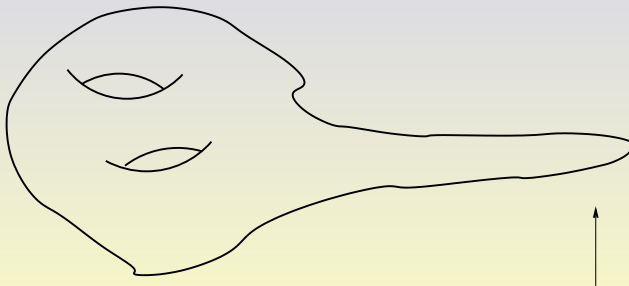
Singularità

## La classificazione delle singolarità

### Congettura (R. Hamilton)

*Le situazioni di singolarità possibili sono solo le tre viste precedentemente: sfera che collassa, "collo" che si stringe, formazione di una cuspid.*

Formazione di una cuspid:



## La classificazione delle singolarità

### Congettura (R. Hamilton)

*Le situazioni di singolarità possibili sono solo le tre viste precedentemente: sfera che collassa, "collo" che si stringe, formazione di una cuspid.*

Formazione di una cuspid:



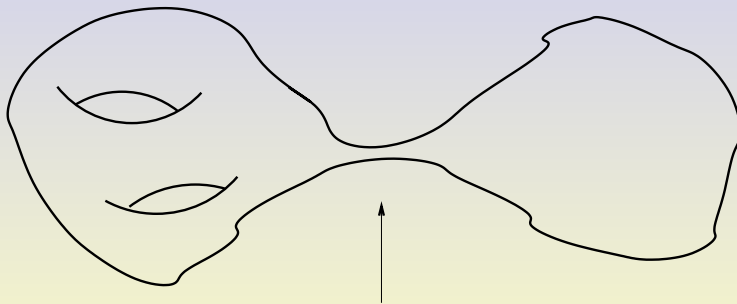
## La procedura di chirurgia

Ammettendo la validità della congettura di classificazione di Hamilton, come visto nella linea dimostrativa, nei casi di “collo” che si stringe e di formazione di una cuspidale, è necessario sviluppare una chirurgia “quantitativa” che deve inoltre permettere di dimostrare che in tempo finito e dopo un numero di “operazioni” finito produce un insieme “finale” di sole 3-sfere.

Malgrado vari risultati positivi, la mancanza di una dimostrazione completa della suddetta congettura e delle stime quantitative ad essa associate, non permetteva ancora di avere una procedura effettiva.

## La procedura di chirurgia – Collo che si stringe

*Prima:*

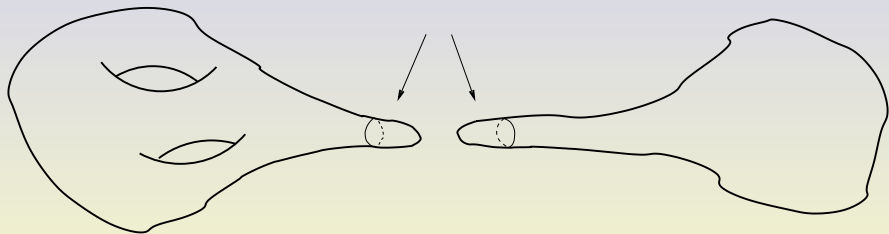


Curvatura alta

## La procedura di chirurgia – Collo che si stringe

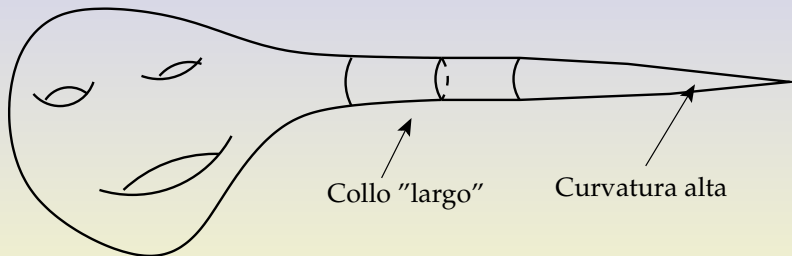
*Dopo:*

“Cappucci” con bassa curvatura



## La procedura di chirurgia – Cuspide

*Prima:*



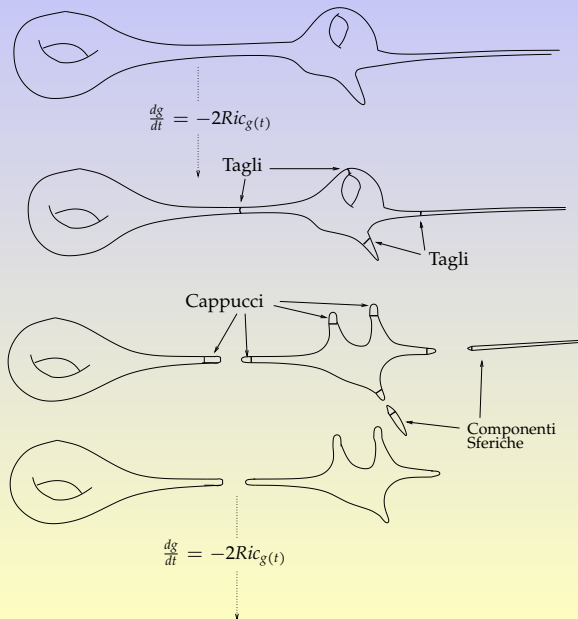
## La procedura di chirurgia – Cuspide

*Dopo:*



"Cappuccio" con bassa curvatura

# La procedura di chirurgia in azione



# Grigori Yakovlevich Perelman Steklov Institute, Saint Petersburg



## I preprint su ArXiv – 2002/2003

Nel Novembre 2002 Perelman pubblica sul preprint server ArXiv il primo di una serie di tre lavori (i due successivi saranno pubblicati nel Marzo e nel Luglio 2003).

## I preprint su ArXiv – 2002/2003

Nel Novembre 2002 Perelman pubblica sul preprint server ArXiv il primo di una serie di tre lavori (i due successivi saranno pubblicati nel Marzo e nel Luglio 2003).

- *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.*

## I preprint su ArXiv – 2002/2003

Nel Novembre 2002 Perelman pubblica sul preprint server ArXiv il primo di una serie di tre lavori (i due successivi saranno pubblicati nel Marzo e nel Luglio 2003).

- *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.*
- *Ricci flow with surgery on three-manifolds.*

## I preprint su ArXiv – 2002/2003

Nel Novembre 2002 Perelman pubblica sul preprint server ArXiv il primo di una serie di tre lavori (i due successivi saranno pubblicati nel Marzo e nel Luglio 2003).

- *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.*
- *Ricci flow with surgery on three-manifolds.*
- *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds.*

# The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications

Grisha Perelman\*

March 27, 2013

## Introduction

1. The Ricci flow equation, introduced by Richard Hamilton [H 1], is the evolution equation  $\frac{d}{dt}g_{ij}(t) = -2R_{ij}$  for a riemannian metric  $g_{ij}(t)$ . In his seminal paper, Hamilton proved that this equation has a unique solution for a short time for an arbitrary (smooth) metric on a closed manifold. The evolution equation for the metric tensor implies the evolution equation for the curvature tensor of the form  $Rm_t = \Delta Rm + Q$ , where  $Q$  is a certain quadratic expression of the curvatures. In particular, the scalar curvature  $R$  satisfies  $R_t = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2$ , so by the maximum principle its minimum is non-decreasing along the flow. By developing a maximum principle for tensors, Hamilton [H 1, H 2] proved that Ricci flow preserves the positivity of the Ricci tensor in dimension three and of the curvature operator in all dimensions; moreover, the eigenvalues of the Ricci tensor in dimension three and of the curvature operator in dimension four are getting pinched pointwisely as the curvature is getting large. This observation allowed him to prove the convergence results: the evolving metrics (on a closed manifold) of positive Ricci curvature in dimension three, or positive curvature operator

---

\*St.Petersburg branch of Steklov Mathematical Institute, Fontanka 27, St.Petersburg 191011, Russia. Email: perelman@pdmi.ras.ru or perelman@math.sunysb.edu ; I was partially supported by personal savings accumulated during my visits to the Courant Institute in the Fall of 1992, to the SUNY at Stony Brook in the Spring of 1993, and to the UC at Berkeley as a Miller Fellow in 1993-95. I'd like to thank everyone who worked to make those opportunities available to me.

## Lo scambio di email tra Vitali Kapovitch e Perelman

Date: Wed, 20 Nov 2002 11:46:49 +0300 (MSK)  
From: Grigory Perelman <perelman@euclid.pdmi.ras.ru>  
Reply-To: Grigory Perelman <perelman@euclid.pdmi.ras.ru>  
Subject: Re: geometrization  
To: Vitali Kapovitch <vitali@math.ucsb.edu>

That's correct.  
Grisha

On Tue, 19 Nov 2002, Vitali Kapovitch wrote:

> Hi Grisha,  
> Sorry to bother you but a lot of people are asking me  
> about your preprint "The entropy formula for the Ricci...".  
> Do I understand it correctly that while you can not yet  
> do all the steps in the Hamilton program you can do enough  
> so that using some collapsing results you can prove  
> geometrization?  
>  
> Vitali

# I risultati di Perelman

## I risultati di Perelman

- Scopre due nuove quantità geometriche monotone durante il flusso di Ricci: il *funzionale*  $W$  (una forma di entropia) e la *lunghezza ridotta* (una specie di funzione distanza nello spazio-tempo).

## I risultati di Perelman

- Scopre due nuove quantità geometriche monotone durante il flusso di Ricci: il *funzionale*  $W$  (una forma di entropia) e la *lunghezza ridotta* (una specie di funzione distanza nello spazio-tempo).
- Per mezzo di esse dimostra (non del tutto, ma una versione sufficiente per la procedura di chirurgia) la congettura di classificazione delle singolarità.

## I risultati di Perelman

- Scopre due nuove quantità geometriche monotone durante il flusso di Ricci: il *funzionale*  $W$  (una forma di entropia) e la *lunghezza ridotta* (una specie di funzione distanza nello spazio-tempo).
- Per mezzo di esse dimostra (non del tutto, ma una versione sufficiente per la procedura di chirurgia) la congettura di classificazione delle singolarità.
- Trova nuove stime sulle quantità geometriche durante la formazione di una singolarità.

## I risultati di Perelman

- Scopre due nuove quantità geometriche monotone durante il flusso di Ricci: il *funzionale*  $W$  (una forma di entropia) e la *lunghezza ridotta* (una specie di funzione distanza nello spazio-tempo).
- Per mezzo di esse dimostra (non del tutto, ma una versione sufficiente per la procedura di chirurgia) la congettura di classificazione delle singolarità.
- Trova nuove stime sulle quantità geometriche durante la formazione di una singolarità.
- Modifica tecnicamente la procedura di chirurgia in modo da renderla effettiva.

## I risultati di Perelman

- Scopre due nuove quantità geometriche monotone durante il flusso di Ricci: il *funzionale*  $W$  (una forma di entropia) e la *lunghezza ridotta* (una specie di funzione distanza nello spazio-tempo).
- Per mezzo di esse dimostra (non del tutto, ma una versione sufficiente per la procedura di chirurgia) la congettura di classificazione delle singolarità.
- Trova nuove stime sulle quantità geometriche durante la formazione di una singolarità.
- Modifica tecnicamente la procedura di chirurgia in modo da renderla effettiva.
- Dimostra infine che la procedura termina in tempo finito e dopo un numero finito di operazioni, producendo un insieme di 3-sfere.

## I risultati di Perelman

- Scopre due nuove quantità geometriche monotone durante il flusso di Ricci: il *funzionale*  $W$  (una forma di entropia) e la *lunghezza ridotta* (una specie di funzione distanza nello spazio-tempo).
- Per mezzo di esse dimostra (non del tutto, ma una versione sufficiente per la procedura di chirurgia) la congettura di classificazione delle singolarità.
- Trova nuove stime sulle quantità geometriche durante la formazione di una singolarità.
- Modifica tecnicamente la procedura di chirurgia in modo da renderla effettiva.
- Dimostra infine che la procedura termina in tempo finito e dopo un numero finito di operazioni, producendo un insieme di 3-sfere.

**Unendo tutto ciò ai precedenti risultati di Hamilton sul flusso di Ricci, si ottiene la dimostrazione della congettura di Poincaré.**

Dopo la pubblicazione online (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

## Dopo la pubblicazione online (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

- Bruce Kleiner e John Lott riconoscono immediatamente il valore dei lavori di Perelman e cominciano a scrivere delle note esplicative, sviluppando i dettagli tecnici mancanti ed espandendo le parti meno chiare.

## Dopo la pubblicazione online (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

- Bruce Kleiner e John Lott riconoscono immediatamente il valore dei lavori di Perelman e cominciano a scrivere delle note esplicative, sviluppando i dettagli tecnici mancanti ed espandendo le parti meno chiare.
- Nel Giugno 2006 l'Asian Journal of Mathematics pubblica (su carta) un lavoro di Zhu Xi-Ping della Zhongshan University in Cina e di Huai-Dong Cao della Lehigh University in Pennsylvania, contenente un'apparentemente completa dimostrazione della congettura di Poincaré basato sulle stesse idee. Il lavoro viene successivamente rivisto varie volte in seguito a numerose polemiche.

## Dopo la pubblicazione online (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

- Nel Luglio 2006 John Morgan della Columbia University e Gang Tian del Massachusetts Institute of Technology pubblicano in rete su ArXiv (ora un libro su carta) il lavoro “Ricci Flow and the Poincaré Conjecture” contenente una versione completa e dettagliata della dimostrazione di Perelman. Questo lavoro e la successiva assegnazione all’*International Congress of Mathematicians* in Madrid, nell’agosto dello stesso anno, della medaglia Fields (che rifiuterà) a Perelman, segnano l’accettazione formale e sostanziale da parte della comunità matematica della sua dimostrazione della congettura di Poincaré.

## Dopo la pubblicazione online (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

- Ad oggi non sono stati trovati errori o falle nella dimostrazione. Inoltre, una versione modificata e semplificata in alcuni punti della dimostrazione di Perelman è stata presentata nel 2007 da L. Bessi eres, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot e J. Porti.

## Dopo la pubblicazione online (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

- Ad oggi non sono stati trovati errori o falle nella dimostrazione. Inoltre, una versione modificata e semplificata in alcuni punti della dimostrazione di Perelman è stata presentata nel 2007 da L. Bessi eres, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot e J. Porti.
- Nel 2010 il Clay Mathematics Institute ha conferito a Perelman un “Millennium Prize” di un milione di dollari per la dimostrazione della congettura di Poincar e. Anche questo premio   stato rifiutato.

## Dopo la pubblicazione online (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

- Ad oggi non sono stati trovati errori o falle nella dimostrazione. Inoltre, una versione modificata e semplificata in alcuni punti della dimostrazione di Perelman è stata presentata nel 2007 da L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot e J. Porti.
- Nel 2010 il Clay Mathematics Institute ha conferito a Perelman un “Millennium Prize” di un milione di dollari per la dimostrazione della congettura di Poincaré. Anche questo premio è stato rifiutato.
- Perelman si è dimesso dalla sua posizione allo Steklov Institute in Saint Petersburg e ha dichiarato la sua intenzione di abbandonare la matematica.

## Dopo la pubblicazione online (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

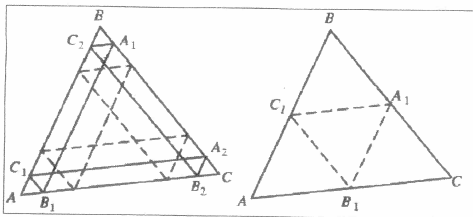
- Ad oggi non sono stati trovati errori o falle nella dimostrazione. Inoltre, una versione modificata e semplificata in alcuni punti della dimostrazione di Perelman è stata presentata nel 2007 da L. Bessi eres, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot e J. Porti.
- Nel 2010 il Clay Mathematics Institute ha conferito a Perelman un “Millennium Prize” di un milione di dollari per la dimostrazione della congettura di Poincar e. Anche questo premio   stato rifiutato.
- Perelman si   dimesso dalla sua posizione allo Steklov Institute in Saint Petersburg e ha dichiarato la sua intenzione di abbandonare la matematica.
- I suoi tre fondamentali lavori non sono mai stati pubblicati su una rivista cartacea, ma rimangono a disposizione sul preprint server pubblico <http://arxiv.org>.

## Giornale della metro di Roma – "CityRoma" 9/1/2004

CityRoma venerdì 9 gennaio 2004

I FATTI DELLA VITA

# Un russo risolve la Conggettura di Poincaré Il mistero matematico durava da 100 anni



Lo studioso francese Jules-Henri Poincaré (1854-1912) e la rappresentazione grafica della sua Conggettura, risalente al 1904. (voto AP)

SAN FRANCISCO (California, Usa) - Il mondo matematico è in fermento: il mistero della Conggettura di Poincaré sullo studio degli spazi tridimensionali è stato forse risolto 100 anni dopo la sua prima formulazione. Mancava ancora l'ufficialità, ma gli studi del russo Grigori "Grisha" Perelman stanno via via guadagnando credito da quando, nel novembre 2002, ne è iniziata la verifica da parte delle massime autorità matematiche.

Il caso non è semplice perché la congettura non è mai stata dimostrata neanche dal suo ideatore, lo studioso francese Jules-Henri Poincaré, il quale nel 1904 arrivò ad elaborare un metodo per applicare facilmente le regole di calcolo per le misurazioni bidimensionali (altezza-larghezza) a quelle tridimensionali (al-

tezza-larghezza-profondità). Il metodo funziona ma resta astratto, non essendo dimostrato matematicamente, per cui solo la sua applicazione ai problemi più complessi della materia può dire se è esatto o meno. Più volte, in passato, soluzioni proposte da insigni studiosi sono tramontate alla prova dei fatti. La teoria di

Perelman si rifà alle *correnti di Ricci* e alla geometria differenziale: "Sono studi molto complicati, con molte parti variabili. Ci vuole tempo ed è facile perdere il filo", ammette John Morgan, docente della Columbia University.

A complicare le cose c'è il carattere riservato dello studioso russo, che solo un anno fa è uscito dalla semi-reclusione nella quale si era rinchiuso da otto anni e ha esposto le sue scoperte ad alcuni colleghi statunitensi. Perelman, matematico dell'Istituto Steklav dell'Accademia russa del-

le scienze, ha anche rifiutato finora il milione di dollari messo in palio dal *Clay Mathematics Institute* di Cambridge, Massachusetts, per la soluzione di ognuno dei sette più grandi misteri matematici. La condizione per il premio Fields, una sorta di Nobel matematico, è infatti che la soluzione sia pubblicata su un giornale scientifico, cosa finora evitata da Perelman.

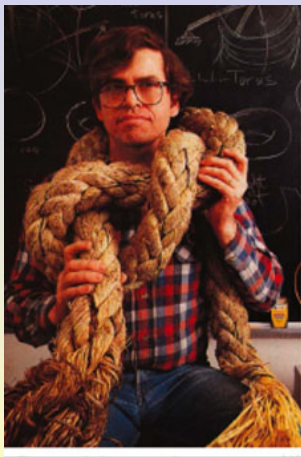
La soluzione della Conggettura di Poincaré sarebbe utile soprattutto nello studio dell'universo, ma non avrebbe applicazioni nella vita di tutti i giorni. (AP)

## La congettura di Thurston

Una congettura ancora più generale che descrive la struttura di *tutte* le varietà tridimensionali fu formulata da William P. Thurston (1946–2012), premiato con la Medaglia Fields nel 1982.

## La congettura di Thurston

Una congettura ancora più generale che descrive la struttura di *tutte* le varietà tridimensionali fu formulata da William P. Thurston (1946–2012), premiato con la Medaglia Fields nel 1982.



## La congettura di Thurston

Congettura (W. Thurston, 1970)

*Ogni varietà tridimensionale può essere “tagliata” in pezzi “geometrici”.*

# La congettura di Thurston

## Congettura (W. Thurston, 1970)

*Ogni varietà tridimensionale può essere “tagliata” in pezzi “geometrici”.*

- Solo 8 possibili “geometrie”: le tre a curvature costante e altre 5 “speciali” ma ben conosciute e analizzate.

## La congettura di Thurston

### Congettura (W. Thurston, 1970)

*Ogni varietà tridimensionale può essere “tagliata” in pezzi “geometrici”.*

- Solo 8 possibili “geometrie”: le tre a curvature costante e altre 5 “speciali” ma ben conosciute e analizzate.
- W. Thurston ne ottenne una dimostrazione parziale.

## La congettura di Thurston

### Congettura (W. Thurston, 1970)

*Ogni varietà tridimensionale può essere “tagliata” in pezzi “geometrici”.*

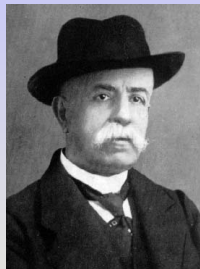
- Solo 8 possibili “geometrie”: le tre a curvature costante e altre 5 “speciali” ma ben conosciute e analizzate.
- W. Thurston ne ottenne una dimostrazione parziale.
- Il flusso di Ricci permette di affrontare e anche questo problema con le stesse tecniche. È dunque da attribuire al lavoro di Perelman anche la dimostrazione di questa congettura.

# I protagonisti...

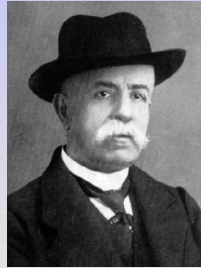
## I protagonisti...



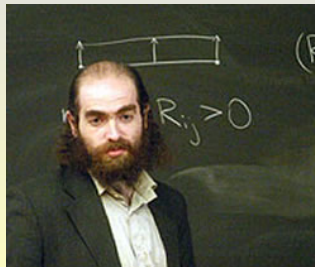
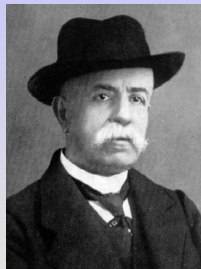
## I protagonisti...



## I protagonisti...



## I protagonisti...



# Grazie dell'attenzione

Un approfondimento più tecnico e dettagliato, si può trovare in:  
Rivista UMI – Matematica, Cultura e Società, Volume 2, Numero 3, 2017  
Riccardo Benedetti & Carlo Mantegazza, *La Congettura di Poincaré e il Flusso di Ricci*