

Richiamiamo alcune nozioni e fatti di geometria riemanniana che ci serviranno in seguito. Un riferimento per questo capitolo è il libro [20].

In tutto il testo adotteremo la convenzione di Einstein di somma sugli indici ripetuti. Inoltre, a meno che non sia esplicitamente indicato, tutte le varietà, le funzioni, i campi e i tensori considerati saranno di classe C^∞ .

Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n . In una carta locale, le componenti della metrica sono

$$g_{ij}(x) = g(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

e sia g^{ij} l'inversa della matrice g_{ij} , che dunque soddisfa

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k.$$

La misura riemanniana canonica di (M, g) è data da

$$d\mu = \sqrt{\det g_{ij}} \, dx.$$

Possiamo estendere la metrica g ai tensori, ottenendo sempre un prodotto scalare: per ogni coppia di tensori T e S dello stesso tipo (p, q) , definiamo

$$g(T, S) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} S_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p} g_{i_1 k_1} \dots g_{j_q h_q} \dots$$

ovvero, la contrazione totale di tutti gli indici tramite la metrica o la sua inversa.

In generale, questa operazione di contrarre due indici contravarianti o covarianti di un tensore con la metrica o la sua inversa, rispettivamente, verrà detta “prendere” una *traccia* o “tracciare” il tensore.

Abbiamo dunque una norma sui tensori:

$$|T|^2 = g(T, T)$$

e si vede facilmente che vale la disuguaglianza (di Cauchy–Schwarz)

$$g(T, S) \leq |T| |S|.$$

Indicheremo con ∇ la connessione di Levi–Civita di (M, g) con simboli di Christoffel in una carta coordinata definiti da

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

che possono essere ottenuti esplicitamente dalla metrica con la formula

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (1.1)$$

1.1 CURVATURA

Definizione 1.1 (Operatore e tensore di Riemann). Per ogni terna di campi vettoriali X, Y, Z , si definisce l'operatore di Riemann, che denotiamo con Riem , come il tensore di tipo $(1, 3)$,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z \quad (1.2)$$

(dove $[X, Y]$ sono le parentesi di Lie di X e Y) e il tensore di Riemann (sempre denotato con Riem) di tipo $(0, 4)$,

$$R(X, Y, W, Z) = g(R(X, Y)Z, W)$$

(si noti l'inversione di W e Z), per ogni quaterna di campi vettoriali X, Y, Z, W .

In una carta coordinata, l'operatore di Riemann ha componenti R_{ijk}^h definite da

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = R_{ijk}^h \frac{\partial}{\partial x_h}$$

ed esplicitando la formula in termini dei simboli di Christoffel, si ottiene

$$R_{ijk}^h = \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^h - \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^h + \Gamma_{i\ell}^h \Gamma_{jk}^\ell - \Gamma_{j\ell}^h \Gamma_{ik}^\ell \quad (1.3)$$

Usando la metrica per “abbassare” l'indice di controvarianza in alto, abbiamo le componenti del tensore di Riemann:

$$R_{ij\ell k} = R_{ijk}^h g_{h\ell},$$

dove si noti che tale indice “scende” in terza posizione.

Osservazione 1.2. Sottolineiamo che va prestata molta attenzione alla definizione e alle convenzioni riguardanti l'operatore e il tensore di Riemann nei vari testi e articoli, in quanto non vi è uno standard in letteratura. Per esempio, spesso il primo e il secondo indice sono invertiti rispetto alla nostra definizione (le derivate covarianti in X e Y sono scambiate nella formula (1.2)), dunque l'operatore di Riemann ha segno opposto al nostro.

Per una sfera con la metrica usuale, assumendo le nostre convenzioni, si ha

$$R(X, Y, X, Y) = R_{ijkl} X^i X^k Y^j Y^\ell > 0.$$

Il tensore di Riemann ha le seguenti proprietà di simmetria:

1. *Antisimmetria nella prima coppia* (per definizione):

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W).$$

2. *Antisimmetria nella seconda coppia* (segue dalla compatibilità di ∇ con la metrica g):

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z).$$

3. *I Identità di Bianchi – algebrica* (segue dal fatto che la torsione di ∇ è nulla, cioè $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$):

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0.$$

4. *Simmetria per scambio della prima con la seconda coppia* (segue algebricamente dalle precedenti):

$$R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y).$$

In coordinate locali, queste simmetrie si scrivono:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad R_{ijkl} = -R_{ijlk},$$

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0, \quad R_{ijkl} = R_{klij},$$

per ogni $i, j, k, \ell \in \{1, \dots, n\}$.

Da queste proprietà di simmetria del tensore di Riemann, si vede che esiste un'unica traccia (a meno del segno) non nulla, infatti,

- La traccia sul 1° e 2° indice è zero ($g^{ij}R_{ijk\ell} = 0$) per l'antisimmetria e analogamente, la traccia sul 3° e 4° indice è zero.
- La traccia sul 2° e 4° indice è uguale a quella sul 1° e 3° e all'opposto di quella sul 1° e 4° o 2° e 3°.

Definizione 1.3 (Tensore di Ricci). Il tensore di Ricci, che denotiamo con Ric , di tipo $(0, 2)$ è definito in coordinate locali come la traccia

$$R_{ij} = g^{k\ell} R_{ikj\ell}$$

del tensore di Riemann.

Si vede allora facilmente che per le simmetrie del tensore di Riemann, il tensore di Ricci è simmetrico.

Definizione 1.4 (Curvatura scalare). La curvatura scalare $R \in C^\infty(M)$ è la traccia del tensore di Ricci:

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} g^{k\ell} R_{ikj\ell}.$$

Definizione 1.5 (Curvatura sezionale). Sia $\pi \subseteq T_p M$ un piano (un sottospazio di dimensione 2 dello spazio tangente in $p \in M$) e sia $\{u, v\}$ una base che genera tale piano. Definiamo la curvatura sezionale $K(\pi)$ (o $\text{Sec}(\pi)$) di π come

$$K(\pi) = \frac{R(u, v, u, v)}{|u|^2 |v|^2 - g(u, v)^2}$$

(si ha che $K(\pi)$ non dipende dalla scelta della base $\{u, v\}$, dunque questa definizione è ben posta).

La curvatura sezionale in un punto $p \in M$ determina il tensore di Riemann in tale punto (serve conoscere la curvatura sezionale di *tutti* i piani in $T_p M$). Per una sfera con la metrica usuale (con le convenzioni che abbiamo adottato) si ha $R_{ii} > 0$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e la sua curvatura sezionale è positiva (e costante) in ogni punto e per ogni piano.

Definizione 1.6 (Operatore di curvatura). Per le sue simmetrie, il tensore di Riemann può essere visto come una forma bilineare simmetrica $\mathcal{R}$ sullo spazio $\Lambda^2 M$ dei bivettori alternanti, definita come segue:

$$\mathcal{R}(u \wedge v, w \wedge z) = R(u, v, w, z).$$

Essendo $\mathcal{R}$ simmetrica, esiste allora un operatore autoaggiunto $\mathfrak{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$, detto operatore di curvatura, tale che

$$\mathcal{R}(u \wedge v, w \wedge z) = g(\mathfrak{R}(u \wedge v), w \wedge z).$$

Definizione 1.7 (Varietà flat). Se tutte le curvatures sezionali sono nulle, il tensore di Riemann è nullo e viceversa (equivalentemente, l'operatore di curvatura è nullo), dunque anche il tensore di Ricci e la curvatura scalare sono nulli e la varietà si dice “flat” (piatta).

Definizione 1.8 (Varietà di Einstein). Se esiste una costante $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che in ogni punto di una varietà riemanniana si ha $\text{Ric} = \lambda g$, la varietà si dice “di Einstein” (di costante λ).

1.2 CALCOLO TENSORIALE

La connessione ∇ si può estendere ai tensori (covarianti e controvarianti) con le seguenti proprietà, per ogni campo vettoriale X :

1. $\nabla_X f = Xf$, se $f \in C^\infty(M)$;
2. $\nabla_X Y$ è la connessione di Levi-Civita, per ogni campo vettoriale Y ;
3. ∇_X commuta con le contrazioni;
4. ∇_X soddisfa la seguente “regola di Leibniz”

$$\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S,$$

per ogni coppia di tensori T e S .

Per esempio, se ω è una 1-forma, cioè un tensore di tipo $(0, 1)$, si ha

$$\begin{aligned} (\nabla_X \omega)(Y) &= c(\nabla_X \omega \otimes Y) = c(\nabla_X(\omega \otimes Y) - \omega \otimes \nabla_X Y) \\ &= \nabla_X(c(\omega \otimes Y)) - c(\omega \otimes \nabla_X Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \\ &= X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y). \end{aligned}$$

Se T è un tensore di tipo (p, q) , allora ∇T è dunque un tensore di tipo $(p, q + 1)$, dato da

$$(\nabla T)(X, X_1, \dots, X_q) = (\nabla_X T)(X_1, \dots, X_q).$$

Inoltre, la compatibilità con la metrica è mantenuta:

$$Xg(T, S) = g(\nabla_X T, S) + g(T, \nabla_X S).$$

Segue che si ha $\nabla g = 0$ (esercizio), il che implica che nei calcoli si può sempre “scambiare” o “portare fuori” il tensore metrico dalla connessione ∇ .

Utilizzeremo spesso la seguente convenzione: per un tensore $T = T_{\dots i \dots}^{\dots j \dots}$, scriveremo $T_{\dots i \dots}^{\dots j \dots}$ per il tensore $g^{ij} T_{\dots i \dots}^{\dots j \dots}$, cioè “l’innalzamento” di un indice covariante rappresenterà una contrazione del tensore con l’inversa della metrica su tale indice. Analogamente, se “abbassiamo” un indice a un tensore, stiamo contraendo un indice controvariante con la metrica (formalmente, si tratta dell’applicazione degli *operatori musicali* – si veda [20]). Per la compatibilità con la metrica, queste operazioni commutano con ∇ .

Indichiamo con $\nabla_i \nabla_j T$ o $\nabla_{ij}^2 T$ le componenti della derivata covariante seconda di un tensore T . Per esempio, se T è un tensore di tipo $(0, q)$, abbiamo

$$\nabla_{ij}^2 T_{\dots} = \nabla_i \nabla_j T_{\dots} = (\nabla(\nabla T))_{ij\dots} = (\nabla(\nabla T)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \dots \right)$$

e si ha, esplicitamente,

$$\begin{aligned} (\nabla_i \nabla_j T)(X_1, \dots, X_q) &= \left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (\nabla T) \right] \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, X_1, \dots, X_q \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\nabla T) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, X_1, \dots, X_q \right) \right) - (\nabla T) \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, X_1, \dots, X_q \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^q (\nabla T) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, X_1, \dots, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X_k, \dots, X_q \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} T(X_1, \dots, X_q) - \sum_{k=1}^q \frac{\partial}{\partial x_i} T(X_1, \dots, \nabla_j X_k, \dots, X_q) \\ &\quad - (\nabla T) \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, X_1, \dots, X_q \right) - \sum_{k=1}^q (\nabla_j T)(X_1, \dots, \nabla_i X_k, \dots, X_q). \end{aligned}$$

Notiamo dunque che considerando la differenza $\nabla_i \nabla_j T - \nabla_j \nabla_i T$, il primo termine si cancellerà, in quanto simmetrico in i, j , per il teorema

di Schwarz e lo stesso vale per il terzo, per la torsione nulla della connessione.

Riguardo al secondo termine, abbiamo

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^q \frac{\partial}{\partial x_i} T(X_1, \dots, \nabla_j X_k, \dots, X_q) &= -\sum_{k=1}^q (\nabla_i T)(X_1, \dots, \nabla_j X_k, \dots, X_q) \\ &\quad - \sum_{k=1}^q T(X_1, \dots, \nabla_i(\nabla_j X_k), \dots, X_q) \end{aligned}$$

e osserviamo che il primo termine a destra è uguale al quarto sopra, scambiando gli indici i e j , dunque entrambi si cancellano nella differenza $\nabla_i \nabla_j T - \nabla_j \nabla_i T$.

Concludiamo allora che

$$\begin{aligned} &(\nabla_i \nabla_j T - \nabla_j \nabla_i T)(X_1, \dots, X_q) \\ &= -\sum_{k=1}^q T(X_1, \dots, \nabla_i(\nabla_j X_k) - \nabla_j(\nabla_i X_k), \dots, X_q) \\ &= -\sum_{k=1}^q T\left(X_1, \dots, R_{ij\ell}^h X_k^\ell \frac{\partial}{\partial x_h}, \dots, X_q\right), \end{aligned}$$

dove abbiamo riconosciuto l'operatore di Riemann (poiché $[\partial_i, \partial_j] = 0$). Si ha quindi, per ogni tensore completamente covariante T di tipo $(0, q)$:

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j T_{\ell_1 \dots \ell_q} - \nabla_j \nabla_i T_{\ell_1 \dots \ell_q} &= -\sum_{k=1}^q R_{ij\ell_k}^h T_{\ell_1 \dots \ell_{k-1} h \ell_{k+1} \dots \ell_q} \\ &= -\sum_{k=1}^q R_{ijm\ell_k} g^{mh} T_{\ell_1 \dots \ell_{k-1} h \ell_{k+1} \dots \ell_q} \\ &= \sum_{k=1}^q R_{ij\ell_k m} g^{mh} T_{\ell_1 \dots \ell_{k-1} h \ell_{k+1} \dots \ell_q}. \end{aligned}$$

Nel caso di un campo vettoriale, si ha un calcolo analogo,

$$\nabla_i \nabla_j v^k - \nabla_j \nabla_i v^k = R_{ij\ell}^k v^\ell = g^{mk} R_{ijm\ell} v^\ell$$

e in generale, per un tensore T di tipo (p, q) , abbiamo che la differenza

$$\nabla_{ij}^2 T - \nabla_{ji}^2 T = \nabla_i \nabla_j T - \nabla_j \nabla_i T$$

è uguale a una somma di termini come segue:

- per ogni indice di controvarianza (alto) ℓ , si ha un termine del tipo $R_{ij\ell}^k T^{\dots\ell\dots}$;
- per ogni indice di covarianza (basso) h , si ha un termine del tipo $-R_{ijk}^h T^{\dots h\dots}$.

È quindi chiaro che l'operatore (o il tensore) di Riemann ci permette di esprimere l'errore nello "scambio" di derivate covarianti iterate di un tensore. Osserviamo infine che nel caso speciale di una funzione $f \in C^\infty(M)$, cioè un tensore di tipo $(0,0)$, il suo hessiano $\nabla^2 f$ è simmetrico (per la torsione nulla della connessione), quindi $\nabla_i \nabla_j f = \nabla_j \nabla_i f$.

1.3 OPERATORI DIFFERENZIALI E TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Data una funzione $f \in C^\infty(M)$, il suo gradiente ∇f è l'unico campo vettoriale su M tale che

$$g(\nabla f, X) = df(X) = Xf,$$

per ogni campo vettoriale X su M .

Definiamo l'hessiano di un tensore T come $\nabla_{ij}^2 T$ (ricordando che in generale è simmetrico solo se T è una funzione) e il laplaciano come la traccia dell'hessiano:

$$\Delta T = g^{ij} \nabla_{ij}^2 T.$$

Definiamo la divergenza di un campo vettoriale X come la traccia del tensore ∇X :

$$\operatorname{div} X = \nabla_i X^i = \operatorname{tr} \nabla X = g^{ij} \nabla_i X_j.$$

Analogamente, per una 1-forma ω , la divergenza è definita (coerentemente con la dualità data dalla metrica) come

$$\operatorname{div} \omega = g^{ij} \nabla_i \omega_j.$$

Più in generale, per un tensore T la divergenza $\operatorname{div} T$ è un tensore ottenuto contraendo l'indice di derivazione con uno degli indici (controvarianti o covarianti – solitamente il primo):

$$(\operatorname{div} T)^{\dots} = \nabla_k T^{k\dots} \quad \text{oppure} \quad (\operatorname{div} T)^{\dots} = g^{ij} \nabla_i T_{j\dots}$$

Osserviamo che (come nel caso di $\mathbb{R}^n$), si ha

$$\Delta T = \operatorname{div} \nabla T$$

Si ha il seguente fondamentale teorema della divergenza, perfettamente analogo a quello in $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.9 (Teorema della divergenza). Sia M una varietà compatta (senza bordo). Allora,

$$\int_M \operatorname{div} X \, d\mu = 0.$$

Corollario 1.10. Per una funzione $f \in C^\infty(M)$, il laplaciano è la divergenza del gradiente. Dunque, su una varietà (M, g) compatta oppure, se f ha supporto compatto,

$$\int_M \Delta f \, d\mu = \int_M \operatorname{div} \nabla f \, d\mu = 0.$$

Dal teorema della divergenza segue la formula di integrazione per parti: poiché

$$\operatorname{div}(fX) = g(\nabla f, X) + f \operatorname{div} X,$$

segue

$$\int_M f \operatorname{div} X \, d\mu = \int_M \operatorname{div}(fX) \, d\mu - \int_M g(\nabla f, X) \, d\mu = - \int_M g(\nabla f, X) \, d\mu.$$

Questa formula si estende poi ai tensori (almeno uno tra T e S a supporto compatto):

$$\int_M g(T, \operatorname{div} S) \, d\mu = - \int_M g(\nabla T, S) \, d\mu,$$

dove T è di tipo (p, q) e S di tipo $(p, q+1)$. In coordinate,

$$\int_M T_{j \dots}^{i \dots} \nabla^k S_{ki \dots}^{j \dots} \, d\mu = - \int_M \nabla^k T_{j \dots}^{i \dots} S_{ki \dots}^{j \dots} \, d\mu. \quad (1.4)$$

1.4 LA SECONDA IDENTITÀ DI BIANCHI

Il tensore di Riemann soddisfa un'identità differenziale fondamentale, detta "seconda identità di Bianchi" (differenziale). In coordinate locali, si ha

$$\nabla_i R_{jk\ell m} + \nabla_j R_{ki\ell m} + \nabla_k R_{ij\ell m} = 0. \quad (1.5)$$

Se contraiamo questa identità con g^{im} , tenendo presente le simmetrie del tensore di Riemann, otteniamo la “versione contratta”

$$\nabla^m R_{jk\ell m} + \nabla_j \text{Ric}_{k\ell} - \nabla_k \text{Ric}_{j\ell} = 0, \quad (1.6)$$

da cui

$$\text{div Riem}_{\ell kj} = \nabla^m R_{m\ell kj} = \nabla_k \text{Ric}_{j\ell} - \nabla_j \text{Ric}_{k\ell}.$$

Contraendo ulteriormente con $g^{j\ell}$ (cioè contraendo due volte l'identità (1.5)), si ha

$$\begin{aligned} 0 &= g^{j\ell} g^{im} (\nabla_i R_{jk\ell m} + \nabla_j R_{ki\ell m} + \nabla_k R_{ij\ell m}) \\ &= g^{j\ell} (g^{im} \nabla_i R_{jk\ell m} + \nabla_j \text{Ric}_{k\ell} - \nabla_k \text{Ric}_{j\ell}) \\ &= g^{im} \nabla_i R_{km} + g^{j\ell} \nabla_j R_{k\ell} - \nabla_k R \\ &= 2 \text{div Ric}_k - \nabla_k R, \end{aligned}$$

cioè,

$$\text{div Ric} = \frac{dR}{2}. \quad (1.7)$$

Lemma 1.11 (Lemma di Schur). Sia (M, g) una varietà connessa di dimensione $n \geq 3$. Se il tensore di Ricci è proporzionale alla metrica in ogni punto, ovvero

$$R_{ij}(p) = \lambda(p) g_{ij}(p),$$

per ogni $p \in M$, allora la funzione λ è costante, uguale a R/n . Dunque, la varietà (M, g) è di Einstein di costante λ .

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che si ha

$$R = g^{ij} R_{ij} = \lambda g^{ij} g_{ij} = n\lambda,$$

da cui $\lambda = R/n$.

Se prendiamo la divergenza di entrambi i membri dell'equazione $R_{ij} = \lambda g_{ij}$, otteniamo

$$\text{div Ric}_j = g^{ki} \nabla_k (\lambda g_{ij}) = g^{ik} \nabla_k \lambda g_{ij} = \delta_j^k \nabla_k \lambda = \nabla_j \lambda = \nabla_j R/n,$$

dunque, per la formula (1.7),

$$\nabla_j R/2 = \text{div Ric}_j = \nabla_j R/n.$$

Poiché $n \geq 3$, deve essere $\nabla R = \nabla \lambda = 0$, ovvero λ è costante su M . $\square$

Osservazione 1.12. In dimensione $n = 2$ vale sempre $R_{ij} = Rg/2$, ma questo non implica che R sia costante.

1.5 DECOMPOSIZIONE DEL TENSORE DI RIEMANN

Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Analizziamo lo spazio vettoriale dei tensori che soddisfano le simmetrie algebriche del tensore di Riemann. Fissato $p \in M$, definiamo $\mathcal{C}(T_p M)$ come lo spazio delle 4-forme covarianti A_{ijkl} su $T_p M$ tali che:

- $A_{ijkl} = -A_{jikl} = -A_{ijlk},$
- $A_{ijkl} = A_{klij},$
- $A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl} = 0.$

Date due forme bilineari simmetriche h e k su $T_p M$, definiamo il loro prodotto di Kulkarni–Nomizu $h \otimes k$ come

$$(h \otimes k)(X, Y, Z, W) = h(X, Z)k(Y, W) + h(Y, W)k(X, Z) \\ - h(X, W)k(Y, Z) - h(Y, Z)k(X, W).$$

Si vede allora facilmente che $h \otimes k$ è un elemento di $\mathcal{C}(T_p M)$. In coordinate, si ha

$$(h \otimes k)_{ijkl} = h_{ik}k_{jl} + h_{jl}k_{ik} - h_{il}k_{jk} - h_{jk}k_{il}.$$

Esercizio 1.13. Si dimostrino le seguenti formule:

$$g^{ik}(g \otimes g)_{ijkl} = 2(n-1)g_{jl}, \\ g^{jl}g^{ik}(g \otimes g)_{ijkl} = 2n(n-1).$$

Esercizio 1.14. Sia S una forma bilineare simmetrica su $T_p M$ con traccia nulla, cioè $g^{ij}S_{ij} = 0$. Si mostri la formula

$$g^{ik}(S \otimes g)_{ijkl} = (n-2)S_{jl}$$

e si osservi che dunque $g^{jl}g^{ik}(S \otimes g)_{ijkl} = 0$.

Il teorema di decomposizione sotto l'azione del gruppo ortogonale $O(n)$ afferma che lo spazio $\mathcal{C}(T_p M)$ si decompone in tre sottospazi ortogonali e irriducibili:

$$\mathcal{C}(T_p M) = \mathbb{R}(g \otimes g) \oplus^\perp (\mathcal{S}_0 \otimes g) \oplus^\perp \mathcal{W}$$

dove $\mathcal{S}_0$ è lo spazio vettoriale delle forme bilineari simmetriche con traccia nulla e $\mathcal{W}$, detto spazio dei tensori di Weyl, è definito dalla proprietà che per ogni suo elemento W tutte le tracce sono nulle, cioè (tenendo presente le simmetrie degli elementi di $\mathcal{C}(T_p M)$),

$$g^{ik} W_{ijk\ell} = 0,$$

per ogni $j, \ell \in \{1, \dots, n\}$.

Osservazione 1.15. Il termine “irriducibile” si riferisce alla non esistenza di ulteriori sottospazi invarianti per l'azione del gruppo ortogonale $O(n)$ (è la parte difficile del teorema).

Esercizio 1.16. Usando le formule degli Esercizi 1.13 e 1.14, si mostri che i tre sottospazi di $\mathcal{C}(T_p M)$ sono ortogonali tra loro.

Per mezzo di questa decomposizione dello spazio $\mathcal{C}(T_p M)$, se $n \geq 3$, possiamo scrivere il tensore di Riemann come la somma di tre termini ortogonali tra loro, come segue:

$$\text{Riem} = \frac{R}{2n(n-1)} g \otimes g + \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{R}{n} g \right) \otimes g + \text{Weyl}. \quad (1.8)$$

Il tensore $\text{Ric} - Rg/n$ è detto tensore di Ricci “tracefree” e denotato con $\overset{\circ}{\text{Ric}}$. Il tensore Weyl è chiamato tensore di Weyl e come detto sopra ha tutte le tracce nulle. Inoltre, si mostra che è invariante per trasformazioni conformi della metrica. Possiamo raggruppare i termini contenenti la metrica per riscrivere la decomposizione in una forma più compatta (spesso usata in letteratura):

$$\text{Riem} = \frac{1}{n-2} \overset{\circ}{\text{Ric}} \otimes g - \frac{R}{2(n-1)(n-2)} g \otimes g + \text{Weyl}, \quad (1.9)$$

dove questa volta i primi due termini non sono ortogonali tra loro. Chiaramente, questa decomposizione evidenzia come il tensore di Riemann sia univocamente determinato dai tensori di Ricci e di Weyl.

1.6 LA CURVATURA IN DIMENSIONE BASSA

I casi di dimensione bassa $n = 2, 3$ sono particolari. La formula (1.8) contiene $n - 2$ al denominatore, quindi è valida solo per $n \geq 3$. In dimensione 2, il tensore di Riemann ha essenzialmente una sola componente indipendente. Per le simmetrie di Riem, si ha infatti

$$R_{1212} = -R_{2112} = R_{2121} = -R_{1221}.$$

Lo spazio $\mathcal{C}(T_p M)$ dei tensori di curvatura ha allora dimensione 1 ed è generato interamente da $g \otimes g$. Segue che

$$\text{Riem} = \frac{R}{4} g \otimes g$$

e il tensore di Ricci tracefree è nullo, cioè $\text{Ric} = Rg/2$. Il tensore di Riemann è dunque interamente determinato dalla curvatura scalare.

In dimensione 3, lo spazio dei tensori di Weyl ha dimensione zero (si può dunque dire che il tensore di Weyl è nullo), dunque le formule (1.8) e (1.9) diventano

$$\text{Riem} = \frac{R}{12} g \otimes g + \left(\text{Ric} - \frac{R}{3} g \right) \otimes g, \quad (1.10)$$

$$\text{Riem} = \text{Ric} \otimes g - \frac{R}{4} g \otimes g. \quad (1.11)$$

Esplicitando i prodotti di Kulkarni–Nomizu, in coordinate, abbiamo

$$R_{ijk\ell} = R_{ik}g_{j\ell} + R_{j\ell}g_{ik} - R_{i\ell}g_{jk} - R_{jk}g_{i\ell} - \frac{R}{2}(g_{ik}g_{j\ell} - g_{i\ell}g_{jk}). \quad (1.12)$$

Poiché il tensore di Ricci è simmetrico, possiamo diagonalizzarlo in una base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ di autovettori in un punto $p \in M$. Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono gli autovalori associati, si ha

$$\lambda_i = R_{ii} = \sum_{j=1}^3 R_{ijij} = \sum_{j=1}^3 \text{Sec}(e_i, e_j),$$

per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$. Ponendo $K_{ij} = \text{Sec}(e_i, e_j) = R_{ijij}$ e sostituendo nella formula sopra (ricordando che $g_{ii} = 1$ e $g_{ij} = 0$ per $i \neq j$),

otteniamo un legame diretto tra gli autovalori del tensore di Ricci e le curvatures sezionali:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= R_{11} = \text{Sec}(e_1, e_2) + \text{Sec}(e_1, e_3) = K_{12} + K_{13} \\ \lambda_2 &= R_{22} = \text{Sec}(e_2, e_1) + \text{Sec}(e_2, e_3) = K_{12} + K_{23} \\ \lambda_3 &= R_{33} = \text{Sec}(e_3, e_1) + \text{Sec}(e_3, e_2) = K_{13} + K_{23}\end{aligned}$$

e possiamo poi invertire questo sistema lineare per esprimere le curvatures sezionali in funzione degli autovalori del tensore di Ricci:

$$\begin{aligned}K_{12} &= R_{1212} = \text{Sec}(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} - R_{33}) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \\ K_{13} &= R_{1313} = \text{Sec}(e_1, e_3) = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{33} - R_{22}) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2) \\ K_{23} &= R_{2323} = \text{Sec}(e_2, e_3) = \frac{1}{2}(R_{22} + R_{33} - R_{11}) = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)\end{aligned}$$

Cerchiamo di esprimere col tensore di Ricci la condizione che la curvatura sezionale di ogni piano di (M, g) sia positiva. Sia $\pi = \langle e_1, e_2 \rangle \subseteq T_p M$ un piano generato da due vettori unitari ortogonali tra loro e sia e_3 un vettore unitario che li completa a una base ortonormale di $T_p M$. Allora, argomentando come sopra (anche se la base e_1, e_2, e_3 non diagonalizza il tensore di Ricci), si ha

$$\text{Sec}(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} - R_{33}),$$

dunque, la condizione che tutte le curvatures sezionali siano positive è equivalente a richiedere che per ogni base ortonormale e_1, e_2, e_3 , si abbia

$$R_{11} + R_{22} > R_{33} \quad \Longleftrightarrow \quad R = R_{11} + R_{22} + R_{33} > 2R_{33}.$$

Segue allora che tale condizione è data dal fatto che $R/2$ sia maggiore del massimo autovalore del tensore di Ricci (scegliendo la base in modo che e_3 sia un autovettore unitario associato a tale autovalore).

In tutto il seguito del testo, per una forma bilineare simmetrica (o per un tensore simmetrico di tipo $(0, 2)$) T , scriveremo $T > 0$ o $T \geq 0$ per indicare che T è definita o semidefinita positiva e analogamente, $T < 0$ o $T \leq 0$, se T è definita o semidefinita negativa. Inoltre, per due forme bilineari, $T < S$ ($T \leq S$) significherà $T - S < 0$ ($T - S \leq 0$).

Con questa convenzione,

$$Rg - 2\text{Ric} > 0 \iff \text{curvatura sezionale positiva.} \quad (1.13)$$

Notiamo che $\text{Sec} > 0$ implica Ric definito positivo, ma il viceversa non vale, infatti la condizione sopra è più forte che $\text{Ric} > 0$. Analogamente, invertendo le disuguaglianze, la condizione per avere curvatura sezionale negativa è data da

$$Rg - 2\text{Ric} < 0 \iff \text{curvatura sezionale negativa.}$$

Anche qui, questa è una condizione più forte di Ric definito negativo. Inoltre, allo stesso modo, si ottiene

$$Rg - 2\text{Ric} \geq 0 \iff \text{curvatura sezionale nonnegativa,}$$

$$Rg - 2\text{Ric} \leq 0 \iff \text{curvatura sezionale nonpositiva.}$$

In ogni dimensione, sappiamo che se tutte le curvature sezionali sono nulle, la varietà è flat e il tensore di Ricci è nullo. In dimensione $n = 3$, per la formula di decomposizione (1.10) (non essendo presente il tensore di Weyl), vale anche l'implicazione inversa: se il tensore di Ricci è nullo, la varietà è flat.

Osservazione 1.17. Questo vale solo in dimensione 3 (e 2). In dimensione $n \geq 4$, esistono varietà con $\text{Ric} = 0$ ma $\text{Riem} \neq 0$. In tal caso la curvatura è concentrata interamente nel tensore di Weyl.

In generale, vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.18. In dimensione $n = 3$, una varietà è di Einstein se e solo se ha curvatura sezionale costante.

Dimostrazione. Se la varietà ha curvatura sezionale costante uguale a K , allora è di Einstein, in quanto dalle formule viste sopra i suoi tre autovalori coincidono con $2K$ in ogni punto della varietà (questo vale in ogni dimensione $n \in \mathbb{N}$, in tal caso $\text{Ric} = (n-1)K$).

Mostriamo l'implicazione inversa usando la formula di decomposizione del tensore di Riemann in dimensione 3. Se $R_{ij} = \lambda g_{ij}$, prendendo la traccia, si ha $R = g^{ij}R_{ij} = 3\lambda$, quindi $\lambda = R/3$ e $\text{Ric} = Rg/3$ e se sostituiamo nella formula (1.11), otteniamo

$$\text{Riem} = \text{Ric} \otimes g - \frac{R}{4} g \otimes g = \frac{R}{3} g \otimes g - \frac{R}{4} g \otimes g = \frac{R}{12} g \otimes g.$$

Questo implica che la curvatura sezionale è costante e vale $K = R/6 = \lambda/2$. $\square$

Osservazione 1.19. Sottolineiamo che questo risultato è specifico della dimensione 3. Se $n \geq 4$, una varietà di Einstein non ha necessariamente curvatura costante (a meno che il tensore di Weyl non sia nullo).

2.1 DEFINIZIONE ED ESISTENZA DEL FLUSSO

Sia M una varietà differenziabile C^∞ .

Un *flusso di Ricci* su M è una famiglia $g(t)$ di metriche C^∞ su M che soddisfa

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}(g(t))$$

per ogni t in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, dove $\text{Ric}(g(t))$ è il tensore di Ricci rispetto alla metrica $g(t)$ e la dipendenza della metrica che evolve dal punto di M e dal tempo $t \in I$ è C^∞ .

Dal punto di vista analitico, questo è un sistema *parabolico quasilineare degenere* (il simbolo principale ha degli autovalori nulli dovuti all'invarianza dell'equazione per diffeomorfismi).

Esempio 2.1. Supponiamo che (M, g_0) sia una varietà di Einstein, ovvero

$$\text{Ric}(g_0) = \lambda g_0$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ e cerchiamo un flusso di Ricci che faccia variare la metrica solo per un fattore di dilatazione dipendente da t e soddisfi $g(0) = g_0$. Poniamo dunque $g(t) = \alpha(t)g_0$ con la condizione $\alpha(0) = 1$. Sostituendo nell'equazione del flusso e osservando che il tensore di Ricci è invariante per riscalamenti della metrica, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = \alpha'(t)g_0 = -2\text{Ric}(\alpha(t)g_0) = -2\text{Ric}(g_0) = -2\lambda g_0.$$

Si ha dunque,

$$\alpha'(t) = -2\lambda \quad \implies \quad \alpha(t) = 1 - 2\lambda t,$$

da cui la soluzione $g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0$.

- Se $\lambda < 0$, la varietà si espande nel tempo. La soluzione esiste per ogni $t \in (1/2\lambda, +\infty)$.
- Se $\lambda = 0$, la metrica è stazionaria, $g(t) = g_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

- Se $\lambda > 0$, la varietà si contrae fino a collassare al tempo finito $T = 1/2\lambda$. La soluzione è definita nell'intervallo $(-\infty, 1/2\lambda)$.

Il seguente risultato di esistenza e unicità è dovuto a Hamilton [22]. DeTurck [16] ne ha successivamente fornito una dimostrazione alternativa, più semplice dell'originale.

Teorema 2.2. Per ogni metrica iniziale g_0 di classe C^∞ su una varietà differenziabile compatta M , esiste un unico tempo massimale $T = T(M, g_0) > 0$ e un'unica soluzione regolare $g(t)$ del flusso di Ricci definita per $t \in [0, T)$, tale che $g(0) = g_0$.

Osservazione 2.3. Nel caso in cui la varietà (M, g_0) sia completa ma non compatta, la questione è più delicata. È necessario richiedere che la curvatura sia limitata, cioè $|\text{Riem}| \leq C < +\infty$. Si veda [38, 39] per l'esistenza del flusso e [11] per l'unicità.

2.2 EVOLUZIONE DELLE QUANTITÀ GEOMETRICHE

Calcoliamo le equazioni di evoluzione per gli oggetti geometrici rilevanti durante il flusso di Ricci, determinate dall'equazione per la metrica g :

$$\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$$

in coordinate locali.

EVOLUZIONE DELL'INVERSA DELLA METRICA. Derivando la relazione $g_{i\ell} g^{\ell j} = \delta_i^j$, otteniamo

$$\partial_t g^{ij} = -g^{i\ell} (\partial_t g_{\ell m}) g^{mj} = -g^{i\ell} (-2R_{\ell m}) g^{mj} = 2R^{ij}, \quad (2.1)$$

dove $R^{ij} = g^{i\ell} g^{jm} R_{\ell m}$.

EVOLUZIONE DEI SIMBOLI DI CHRISTOFFEL. Fissiamo un punto $p \in M$ e calcoliamo in coordinate normali centrate in tale punto, dove quindi la metrica è l'identità, le derivate spaziali della metrica si annullano (si veda [20]) e le derivate covarianti coincidono con le derivate in coordinate. Osserviamo poi che sebbene i simboli di Christoffel Γ_{ij}^k non siano dei tensori, la differenza tra tali simboli di due connessioni lo è. In particolare, i rapporti incrementali e dunque

(passando al limite) la loro derivata temporale $\partial_t \Gamma_{ij}^k$ è un tensore. Dunque, il risultato del calcolo varrà poi per ogni generica carta coordinata.

Si ha quindi, per la formula (1.1)

$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \partial_t [g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij})] \\ &= \frac{1}{2} \partial_t g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}) + \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_t \partial_i g_{j\ell} + \partial_t \partial_j g_{i\ell} - \partial_t \partial_\ell g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_i \partial_t g_{j\ell} + \partial_j \partial_t g_{i\ell} - \partial_\ell \partial_t g_{ij}),\end{aligned}$$

da cui concludiamo, per quanto detto sopra, che la variazione dei simboli di Christoffel in una carta locale è data dalla seguente formula generale per una metrica che varia nel tempo:

$$\partial_t \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} (\nabla_i \partial_t g_{j\ell} + \nabla_j \partial_t g_{i\ell} - \nabla_\ell \partial_t g_{ij}) \quad (2.2)$$

Dunque, nel nostro caso del flusso di Ricci, abbiamo

$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{k\ell} (\nabla_i (-2R_{j\ell}) + \nabla_j (-2R_{i\ell}) - \nabla_\ell (-2R_{ij})) \\ &= -g^{k\ell} (\nabla_i R_{j\ell} + \nabla_j R_{i\ell} - \nabla_\ell R_{ij}) \\ &= -\nabla_i R_j^k - \nabla_j R_i^k + \nabla^k R_{ij}.\end{aligned} \quad (2.3)$$

EVOLUZIONE DEL TENSORE DI RIEMANN. Seguendo la linea di Hamilton [22], calcoliamo come sopra, in coordinate normali centrate nel punto dove vogliamo calcolare la derivata temporale del tensore di Riemann e dove dunque i simboli di Christoffel sono nulli. Derivando la formula (1.3) per il tensore di Riemann in termini dei simboli di Christoffel, si ottiene

$$\partial_t R_{ij\ell}^h = \partial_t \partial_i \Gamma_{j\ell}^h - \partial_t \partial_j \Gamma_{i\ell}^h = \partial_i \partial_t \Gamma_{j\ell}^h - \partial_j \partial_t \Gamma_{i\ell}^h,$$

da cui

$$\partial_t R_{ijk\ell} = g_{hk} (\partial_i \partial_t \Gamma_{j\ell}^h - \partial_j \partial_t \Gamma_{i\ell}^h) + \partial_t g_{hk} R_{ij\ell}^h.$$

Sostituendo l'espressione (2.2), per l'evoluzione dei simboli di Christoffel, abbiamo allora

$$\begin{aligned}
\partial_t R_{ijk\ell} &= g_{hk} \left[\nabla_i \left(\frac{1}{2} g^{hm} (\nabla_j \partial_t g_{\ell m} + \nabla_\ell \partial_t g_{jm} - \nabla_m \partial_t g_{j\ell}) \right) \right. \\
&\quad \left. - \nabla_j \left(\frac{1}{2} g^{hm} (\nabla_i \partial_t g_{\ell m} + \nabla_\ell \partial_t g_{im} - \nabla_m \partial_t g_{i\ell}) \right) \right] \\
&\quad + \partial_t g_{hk} R_{ij\ell}^h \\
&= \frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_j \partial_t g_{\ell k} + \nabla_i \nabla_\ell \partial_t g_{jk} - \nabla_i \nabla_k \partial_t g_{j\ell} \\
&\quad - \nabla_j \nabla_i \partial_t g_{\ell k} - \nabla_j \nabla_\ell \partial_t g_{ik} + \nabla_j \nabla_k \partial_t g_{i\ell}) + \partial_t g_{hk} R_{ij\ell}^h \\
&= \frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_\ell \partial_t g_{jk} - \nabla_i \nabla_k \partial_t g_{j\ell} - \nabla_j \nabla_\ell \partial_t g_{ik} + \nabla_j \nabla_k \partial_t g_{i\ell}) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_j \partial_t g_{\ell k} - \nabla_j \nabla_i \partial_t g_{\ell k}) + \partial_t g_{hk} R_{ij\ell}^h.
\end{aligned}$$

Usando la formula per l'errore nello scambio di due derivate covarianti di un tensore, vista nella Sezione 1.2, si ha

$$\begin{aligned}
\partial_t R_{ijk\ell} &= \frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_\ell \partial_t g_{jk} - \nabla_i \nabla_k \partial_t g_{j\ell} - \nabla_j \nabla_\ell \partial_t g_{ik} + \nabla_j \nabla_k \partial_t g_{i\ell}) \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{hq} R_{ijkq} \partial_t g_{h\ell} + \frac{1}{2} g^{hq} R_{ij\ell q} \partial_t g_{hk} + g^{hq} R_{ijq\ell} \partial_t g_{hk} \\
&= \frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_\ell \partial_t g_{jk} - \nabla_i \nabla_k \partial_t g_{j\ell} - \nabla_j \nabla_\ell \partial_t g_{ik} + \nabla_j \nabla_k \partial_t g_{i\ell}) \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{hq} (R_{ijkq} \partial_t g_{h\ell} + R_{ijq\ell} \partial_t g_{hk}),
\end{aligned}$$

che è dunque (in una qualunque carta locale) la formula di evoluzione del tensore di Riemann valida per qualsiasi metrica che varia nel tempo. Nel nostro caso del flusso di Ricci, $\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$, abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\partial_t R_{ijk\ell} &= \nabla_i \nabla_k R_{j\ell} - \nabla_i \nabla_\ell R_{jk} - \nabla_j \nabla_k R_{i\ell} + \nabla_j \nabla_\ell R_{ik} \\
&\quad - g^{hq} (R_{ijkq} R_{h\ell} + R_{ijq\ell} R_{hk}).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Definiamo i tensori

$$B_{ijkl} = g^{mr} g^{qs} R_{miqj} R_{rks\ell}$$

e notiamo che abbiamo le ovvie simmetrie

$$B_{ijkl} = B_{jilk} = B_{klij}.$$

Vale il seguente lemma.

Lemma 2.4. Per ogni metrica g il tensore di curvatura R_{ijkl} soddisfa l'identità

$$\begin{aligned} \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\ = \nabla_i \nabla_k R_{jl} - \nabla_i \nabla_\ell R_{jk} - \nabla_j \nabla_k R_{il} + \nabla_j \nabla_\ell R_{ik} \\ + g^{hq} (R_{hjk\ell} R_{qi} + R_{ihk\ell} R_{qj}). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Questa formula è ottenuta dalla seconda identità di Bianchi

$$\nabla_i R_{jk\ell m} + \nabla_j R_{ki\ell m} + \nabla_k R_{ij\ell m} = 0,$$

differenziando, scambiando le derivate, permutando gli indici e contraendo. Per iniziare, si ha

$$\Delta R_{ijkl} = g^{hq} \nabla_h \nabla_q R_{ijkl} = g^{hq} (\nabla_h \nabla_i R_{qjkl} - \nabla_h \nabla_j R_{qikl}), \quad (2.5)$$

differenziando la seconda identità di Bianchi e contraendo. Esaminiamo il primo termine, poiché il secondo si ottiene dal primo scambiando i e j . Invertendo l'ordine delle derivate, abbiamo che

$$g^{hq} \nabla_h \nabla_i R_{qjkl} - g^{hq} \nabla_i \nabla_h R_{qjkl}$$

è uguale a

$$g^{hq} g^{ms} (R_{hiqm} R_{sjkl} + R_{hijm} R_{qsk\ell} + R_{hikm} R_{qjls} + R_{hi\ell m} R_{qjks})$$

(sempre per la formula per l'errore nello scambio di due derivate covarianti). Il primo di questi termini si contrae a $g^{hq} R_{hjk\ell} R_{qi}$. Sul secondo termine possiamo usare la prima identità di Bianchi per scriverlo in termini del tensore B_{ijkl} , quindi

$$g^{hq} g^{ms} R_{hijm} R_{qsk\ell} = -B_{ijk\ell} + B_{ijlk}$$

e gli ultimi due termini sono $-B_{ikj\ell} + B_{i\ell jk}$. Inoltre, derivando la seconda identità di Bianchi contratta (1.6), si ha

$$g^{hq} \nabla_i \nabla_h R_{qjkl} = \nabla_i \nabla_k R_{jl} - \nabla_i \nabla_\ell R_{jk},$$

da cui otteniamo infine

$$\begin{aligned} g^{hq} \nabla_h \nabla_i R_{qj\ell} &= \nabla_i \nabla_k R_{j\ell} - \nabla_i \nabla_\ell R_{jk} - (B_{ijk\ell} - B_{ij\ell k} - B_{i\ell jk} + B_{ikj\ell}) \\ &\quad + g^{hq} R_{hj\ell} R_{qi}. \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nella formula (2.5) per $\Delta R_{ijk\ell}$ e facendo lo stesso per il termine con i e j scambiati, si ottiene la formula del lemma. $\square$

Sostituendo allora l'espressione trovata in questo lemma nella formula (2.4), otteniamo la seguente equazione di evoluzione (chiamata parabolica) del tensore di Riemann durante il flusso di Ricci:

$$\begin{aligned} \partial_t R_{ijk\ell} &= \Delta R_{ijk\ell} + 2(B_{ijk\ell} - B_{ij\ell k} - B_{i\ell jk} + B_{ikj\ell}) \\ &\quad - g^{hq} (R_{hj\ell} R_{qi} + R_{ihk\ell} R_{qj} + R_{ijh\ell} R_{qk} + R_{ijkh} R_{q\ell}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

EVOLUZIONE DEL TENSORE DI RICCI. Contraendo la precedente equazione (2.6) e tenendo presente l'equazione di evoluzione dell'inversa della metrica, si ottiene la seguente equazione per l'evoluzione del tensore di Ricci:

$$\partial_t R_{ik} = \Delta R_{ik} + 2g^{j\ell} (B_{ijk\ell} - 2B_{ij\ell k}) + 2g^{hr} g^{qs} R_{hiqk} R_{rs} - 2g^{hq} R_{hi} R_{qk}.$$

Ora, per la prima identità di Bianchi, si ha

$$\begin{aligned} g^{j\ell} B_{ijk\ell} &= g^{j\ell} g^{hr} g^{qs} R_{hiqj} R_{rks\ell} = g^{j\ell} g^{hr} g^{qs} R_{hqi j} R_{rsk\ell} \\ &= g^{j\ell} g^{hr} g^{qs} (R_{hiqj} - R_{hjqi}) (R_{rks\ell} - R_{r\ell sk}) = 2g^{j\ell} (B_{ijk\ell} - B_{ij\ell k}), \end{aligned}$$

il che implica

$$g^{j\ell} (B_{ijk\ell} - 2B_{ij\ell k}) = 0.$$

Dunque, il tensore di Ricci soddisfa l'equazione di evoluzione

$$\partial_t R_{ik} = \Delta R_{ik} + 2g^{hr} g^{qs} R_{hiqk} R_{rs} - 2R_{ik}^2,$$

dove con R_{ik}^2 abbiamo indicato il tensore simmetrico $R_{i\ell} R_k^\ell$ ("quadrato" del tensore di Ricci, la cui traccia è uguale a $|\text{Ric}|^2$).

Questa equazione si può ottenere anche direttamente (in particolare, se si è interessati solo al caso di dimensione $n = 3$, dove il tensore

di Ricci determina il tensore di Riemann), come segue.

Dalla formula (1.3), si ha la seguente espressione del tensore di Ricci in termini dei simboli di Christoffel:

$$R_{jk} = \partial_i \Gamma_{jk}^i - \partial_j \Gamma_{ik}^i + \Gamma_{jk}^\ell \Gamma_{\ell i}^i - \Gamma_{ik}^\ell \Gamma_{j\ell}^i.$$

Come sopra, calcoliamo in coordinate normali centrate nel punto dove vogliamo calcolare la derivata temporale del tensore di Ricci, dove dunque i simboli di Christoffel sono nulli. Allora, derivando l'espressione sopra, otteniamo

$$\partial_t R_{jk} = \partial_i \partial_t \Gamma_{jk}^i - \partial_j \partial_t \Gamma_{ik}^i,$$

dunque, in una carta locale generica,

$$\partial_t R_{jk} = \nabla_i \partial_t \Gamma_{jk}^i - \nabla_j \partial_t \Gamma_{ik}^i$$

e sostituendo l'espressione (2.3) per la variazione dei simboli di Christoffel,

$$\begin{aligned} \partial_t R_{jk} &= -\nabla_i (\nabla_j R_k^i + \nabla_k R_j^i - \nabla^i R_{jk}) + \nabla_j (\nabla_i R_k^i + \nabla_k R_i^i - \nabla^i R_{ik}) \\ &= \Delta R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R - \nabla_i \nabla_j R_k^i - \nabla_i \nabla_k R_j^i. \end{aligned}$$

Usando ora la formula di commutazione delle derivate seconde,

$$\nabla_i \nabla_k R_j^i - \nabla_k \nabla_i R_j^i = R_{ik\ell}^\ell R_j^\ell + R_{ikj}^\ell R_\ell^i = R_{k\ell} R_j^\ell + R_{ikj\ell} R^{\ell i},$$

per scambiare le derivate covarianti dei due ultimi termini a destra, otteniamo

$$\begin{aligned} \partial_t R_{jk} &= \Delta R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R - \nabla_j \nabla_i R_k^i - \nabla_k \nabla_i R_j^i \\ &\quad - R_{j\ell} R_k^\ell - R_{k\ell} R_j^\ell - R_{ijk\ell} R^{\ell i} - R_{ikj\ell} R^{\ell i} \\ &= \Delta R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R - \nabla_j \nabla_i R_k^i - \nabla_k \nabla_i R_j^i - 2R_{jk}^2 - 2R_{ijk\ell} R^{\ell i}. \end{aligned}$$

Infine, per l'uguaglianza (1.7), si ha $\nabla_i R_k^i = \nabla_k R/2$, dunque

$$\begin{aligned} \partial_t R_{jk} &= \Delta R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R - \nabla_j \nabla_k R/2 - \nabla_k \nabla_j R/2 - 2R_{jk}^2 - 2R_{ijk\ell} R^{\ell i} \\ &= \Delta R_{jk} - 2R_{jk}^2 - 2R_{ijk\ell} R^{\ell i}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

In dimensione 3, possiamo esprimere il tensore di Riemann per mezzo del tensore di Ricci con la formula (1.12),

$$R_{ijk\ell} = R_{ik}g_{j\ell} + R_{j\ell}g_{ik} - R_{i\ell}g_{jk} - R_{jk}g_{i\ell} - \frac{R}{2}(g_{ik}g_{j\ell} - g_{i\ell}g_{jk}),$$

vista nella Sezione 1.6. Contraendo questa espressione con $R^{\ell i}$, si ha

$$R_{ijk\ell}R^{\ell i} = 2R_{jk}^2 - |\text{Ric}|^2 g_{jk} - \frac{3}{2}RR_{jk} + \frac{R^2}{2}g_{jk}$$

e sostituendo nell'equazione (2.7), otteniamo l'equazione di evoluzione del tensore di Ricci in dimensione $n = 3$.

$$\partial_t R_{jk} = \Delta R_{jk} - 6R_{jk}^2 + 3RR_{jk} + 2|\text{Ric}|^2 g_{jk} - R^2 g_{jk}, \quad (2.8)$$

Si osservi che questa equazione è un'equazione (sistema) di reazione-diffusione per il tensore di Ricci.

Calcoliamo anche l'equazione di evoluzione del quadrato della norma del tensore di Ricci, per mezzo delle formule (2.7) e (2.1):

$$\begin{aligned} \partial_t |\text{Ric}|^2 &= \partial_t (R_{jk}g^{jm}g^{ki}R_{mi}) \\ &= 2(\Delta R_{jk} - 2R_{jk}^2 - 2R_{ijk\ell}R^{\ell i})R^{jk} + 4R_{jk}R^{jm}R_m^k \\ &= \Delta |\text{Ric}|^2 - 2|\nabla \text{Ric}|^2 + 4R_{ij}R_{ikj\ell}R^{k\ell}, \end{aligned}$$

che in dimensione $n = 3$, diventa

$$\partial_t |\text{Ric}|^2 = \Delta |\text{Ric}|^2 - 2|\nabla \text{Ric}|^2 + 10R|\text{Ric}|^2 - 2R^3 - 8g^{ij}R_{ij}^3, \quad (2.9)$$

dove R_{ij}^3 è il tensore simmetrico $R_i^k R_k^\ell R_{\ell j}$, "cubo" del tensore di Ricci.

EVOLUZIONE DELLA CURVATURA SCALARE. Per mezzo delle formule (2.7) e (2.1), calcoliamo

$$\partial_t R = \partial_t (g^{jk}R_{jk}) = 2R^{jk}R_{jk} + g^{jk}(\Delta R_{jk} - 2R_{jk}^2 - 2R_{ijk\ell}R^{\ell i})$$

e semplificando, abbiamo l'equazione

$$\partial_t R = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2,$$

valida in ogni dimensione $n \in \mathbb{N}$.

EVOLUZIONE DELLA MISURA RIEMANNIANA CANONICA. Consideriamo infine la forma di volume

$$d\mu = \sqrt{\det(g_{ij})} dx$$

e calcoliamo la sua derivata temporale:

$$\partial_t d\mu = \partial_t \sqrt{\det g} dx = \frac{1}{2\sqrt{\det g}} \partial_t \det g dx$$

Usando la formula per la derivata del determinante

$$\partial_t \det g = \det g g^{ij} \partial_t g_{ij},$$

otteniamo

$$\partial_t d\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\det g} g^{ij} (-2R_{ij}) dx = -\sqrt{\det g} R dx - R d\mu.$$

Quindi, nelle regioni dove la curvatura scalare è positiva, il “volume locale” decresce; dove è negativa, aumenta.

Segue che se M è compatta e $f: M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione C^1 , si ha la formula

$$\frac{d}{dt} \int_M f d\mu = \int_M (\partial_t f - Rf) d\mu.$$

In particolare, se $f = 1$, otteniamo la variazione del volume totale:

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(M, g(t)) = - \int_M R d\mu. \quad (2.10)$$

3

IL PRINCIPIO DEL MASSIMO

Prima di vedere l'enunciato e la dimostrazione della versione del *principio del massimo parabolico* su varietà riemanniane adatto al nostro contesto, discutiamo un esempio in $\mathbb{R}^n$.

Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ una soluzione periodica in $\mathbb{R}^n$ dell'equazione parabolica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \langle X, \nabla u \rangle + f, \quad (3.1)$$

con $X : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ entrambi regolari.

Mostriamo che se $u(x, 0) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e f è positiva dappertutto, allora $u \geq 0$ in $\mathbb{R}^n \times [0, T]$.

Consideriamo la funzione $v = u + \delta$, per $\delta > 0$ e osserviamo che anche v soddisfa l'equazione (3.1), inoltre per ipotesi, $v(x, 0) \geq \delta > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo per assurdo che esistano dei punti in $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ dove v si annulla. Sia $t_0 > 0$ il "primo" tempo in cui questo avviene, con $v(x_0, t_0) = 0$, per $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si vede facilmente che tale "primo" tempo esiste per l'ipotesi di periodicità e la sua positività a tempo zero. Segue che

$$\nabla v(x_0, t_0) = 0, \quad \Delta v(x_0, t_0) \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) \leq 0.$$

Dunque, usando l'equazione (3.1), si avrebbe la contraddizione

$$0 \geq \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) = \Delta v(x_0, t_0) + \langle X(x_0, t_0), \nabla v(x_0, t_0) \rangle + f(x_0, t_0) > 0,$$

essendo $f(x_0, t_0) > 0$, per ipotesi. Dunque, in $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, si ha $v > 0$, da cui $u > -\delta$ e per l'arbitrarietà di $\delta > 0$, concludiamo che $u \geq 0$ in ogni punto.

Con un argomento analogo si mostra che $u_{\min}(t) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, t)$ è nondecreciente nel tempo. Inoltre, l'ipotesi di positività di f si può indebolire richiedendo solo $f \geq 0$.

Osservazione 3.1. È importante sottolineare che il principio del massimo vale per equazioni scalari e non per sistemi in generale. Inoltre

è peculiare delle equazioni paraboliche (ed ellittiche) del secondo ordine (non vale per equazioni di ordine più alto, come ad esempio $\partial_t u = \Delta \Delta u$).

3.1 IL PRINCIPIO DEL MASSIMO PARABOLICO SU VARIETÀ

Vediamo ora un risultato molto generale, utile nel contesto dei flussi geometrici.

Teorema 3.2 (Principio del massimo parabolico – [30, Teorema 3.1.1]). Sia g_t , per $t \in [0, T)$, una famiglia di metriche riemanniane su una varietà connessa M , con eventuale bordo ∂M , tale che la dipendenza da t sia C^∞ .

Sia $u : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^∞ che soddisfa:

$$\partial_t u \leq \Delta_{g_t} u + g_t(X(p, u, \nabla u, t), \nabla u) + b(u),$$

dove X è un campo vettoriale qualunque e b una funzione localmente lipschitziana.

Supponiamo che per ogni $t \in [0, T)$, esista un valore $\delta > 0$ e un sottoinsieme compatto $K \subseteq M \setminus \partial M$ tale che per ogni istante $t' \in (t - \delta, t + \delta) \cap [0, T)$ il massimo di $u(\cdot, t')$ sia raggiunto in almeno un punto di K (questo è chiaramente vero se M è compatta senza bordo). Ponendo

$$u_{\max}(t) = \max_{p \in M} u(p, t),$$

si ha che questa funzione è localmente lipschitziana, quindi differenziabile per quasi ogni tempo $t \in [0, T)$ e per ogni istante di differenziabilità $t \in (0, T)$ vale

$$\frac{du_{\max}(t)}{dt} \leq b(u_{\max}(t)).$$

Di conseguenza, se $h : [0, T') \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione dell'ODE

$$\begin{cases} h'(t) = b(h(t)) \\ h(0) = u_{\max}(0) \end{cases}$$

per $T' \leq T$, allora $u \leq h$ in $M \times [0, T')$. Inoltre, se a un certo istante $\tau \in (0, T')$ si ha $u_{\max}(\tau) = h(\tau)$, allora $u = h$ in $M \times [0, \tau]$, ovvero $u(\cdot, t)$ è costante nello spazio.

Corollario 3.3. Nelle stesse ipotesi, se la funzione b è nonpositiva (in particolare se è identicamente nulla), se il massimo di u è non decrescente in un intervallo temporale $I \subseteq [0, T)$, la funzione u è costante in $M \times I$.

La prima parte del teorema è conseguenza del lemma seguente. L'ultima affermazione, detta *principio del massimo forte*, è più delicata (si veda il libro di Landis [28] per una dimostrazione e l'ampia discussione in [13, Capitolo 12]).

Lemma 3.4 (Hamilton's trick). Sia $u : M \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1 tale che per ogni tempo t , esistano un valore $\delta > 0$ e un sottoinsieme compatto $K \subseteq M \setminus \partial M$ tali che per ogni istante $t' \in (t - \delta, t + \delta)$ il massimo $u_{\max}(t') = \max_{p \in M} u(p, t')$ sia raggiunto in almeno un punto di K . Allora, $u_{\max}$ è una funzione localmente lipschitziana in $(0, T)$ e per ogni istante di differenziabilità $t \in (0, T)$ si ha:

$$\frac{du_{\max}(t)}{dt} = \frac{\partial u(p, t)}{\partial t},$$

dove $p \in M$ è un qualsiasi punto non appartenente al bordo di M tale che $u(\cdot, t)$ raggiunga il suo massimo in p .

Dimostrazione. Fissiamo $t \in (0, T)$; abbiamo $\delta > 0$ e K come nelle ipotesi, dunque su $K \times (t - \delta, t + \delta)$ la funzione u è lipschitziana con una certa costante $C > 0$. Consideriamo un valore $0 < \varepsilon < \delta$; allora abbiamo

$$u_{\max}(t + \varepsilon) = u(q, t + \varepsilon) \leq u(q, t) + \varepsilon C \leq u_{\max}(t) + \varepsilon C,$$

per un qualche $q \in K$. Quindi,

$$\frac{u_{\max}(t + \varepsilon) - u_{\max}(t)}{\varepsilon} \leq C.$$

Analogamente,

$$u_{\max}(t) = u(p, t) \leq u(p, t + \varepsilon) + \varepsilon C \leq u_{\max}(t + \varepsilon) + \varepsilon C,$$

per un qualche $p \in K$. Quindi,

$$\frac{u_{\max}(t) - u_{\max}(t + \varepsilon)}{\varepsilon} \leq C \implies \frac{u_{\max}(t + \varepsilon) - u_{\max}(t)}{\varepsilon} \geq -C.$$

Con lo stesso argomento, considerando $-\delta < \varepsilon < 0$, concludiamo che $u_{\max}$ è una funzione localmente lipschitziana in $(0, T)$ e quindi differenziabile quasi ovunque.

Supponiamo ora che t sia uno di tali istanti di differenziabilità e sia p un punto nell'insieme non vuoto

$$\{p \in M \setminus \partial M \mid u(p, t) = u_{\max}(t)\}.$$

Per il teorema di Lagrange, per ogni $0 < \varepsilon < \delta$, abbiamo

$$u(p, t + \varepsilon) = u(p, t) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(p, \xi)$$

per un qualche $\xi \in (t, t + \varepsilon)$, quindi

$$u_{\max}(t + \varepsilon) \geq u(p, t + \varepsilon) = u_{\max}(t) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(p, \xi),$$

il che implica, se scegliamo $\varepsilon > 0$,

$$\frac{u_{\max}(t + \varepsilon) - u_{\max}(t)}{\varepsilon} \geq \frac{\partial u}{\partial t}(p, \xi).$$

Mandando $\varepsilon \rightarrow 0$, otteniamo $u'_{\max}(t) \geq \frac{\partial u}{\partial t}(p, t)$.

Se invece scegliamo $-\delta < \varepsilon < 0$, dalla disuguaglianza

$$u_{\max}(t + \varepsilon) \geq u_{\max}(t) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(p, \xi)$$

dividendo per ε (che è negativo) si inverte il verso della disuguaglianza:

$$\frac{u_{\max}(t + \varepsilon) - u_{\max}(t)}{\varepsilon} \leq \frac{\partial u}{\partial t}(p, \xi)$$

e quando $\varepsilon \rightarrow 0$, abbiamo $u'_{\max}(t) \leq \frac{\partial u}{\partial t}(p, t)$, da cui segue la tesi del lemma. $\square$

Esercizio 3.5. Quando la funzione $u_{\max}$ non è differenziabile in t , si può dire comunque qualcosa usando la *derivata superiore*, ovvero il limite superiore dei rapporti incrementali (denotata con d^+). Si provi infatti che

$$\frac{d^+ u_{\max}(t)}{dt} = \sup_{\{p \in M \mid u(p, t) = u_{\max}(t)\}} \frac{\partial u(p, t)}{\partial t}.$$

Possiamo dunque dire informalmente che gli operatori di sup e di derivata superiore commutano. Lo stesso vale per inf e derivata inferiore.

Dimostrazione del Teorema 3.2 (prima parte). Grazie al lemma precedente, la funzione $u_{\max}$ è localmente lipschitziana. Sia t un istante di differenziabilità per $u_{\max}$. Scegliendo un qualunque punto $p \in M \setminus \partial M$ tale che $u(p, t) = u_{\max}(t)$, si ha:

$$u'_{\max}(t) = \frac{\partial u(p, t)}{\partial t} \leq \Delta_{g_t} u(p, t) + g_t(X, \nabla u(p, t)) + b(u(p, t)).$$

e poiché p è un punto di massimo spaziale, $\nabla u(p, t) = 0$ e $\Delta_{g_t} u(p, t) \leq 0$, di conseguenza:

$$u'_{\max}(t) \leq b(u(p, t)) = b(u_{\max}(t)).$$

Sia ora $h : [0, T'] \rightarrow \mathbb{R}$ come nelle ipotesi. Poiché $u_{\max}$ soddisfa quasi ovunque $u'_{\max}(t) \leq b(u_{\max}(t))$, definiamo per $\varepsilon > 0$, le funzioni approssimanti $h_\varepsilon : [0, T''] \rightarrow \mathbb{R}$ come le soluzioni massimali di:

$$\begin{cases} h'_\varepsilon(t) = b(h_\varepsilon(t)) \\ h_\varepsilon(0) = u_{\max}(0) + \varepsilon \end{cases}$$

È facile vedere che, poiché la funzione b è localmente lipschitziana, si ha $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon = h$ uniformemente sui compatti $[0, T' - \delta]$ (per la dipendenza continua dai dati iniziali, per ε sufficientemente piccolo, $T'' \geq T' - \delta$, per ogni $\delta > 0$ fissato). Supponiamo per assurdo che per un certo tempo positivo $\bar{t}$ si abbia $u_{\max}(\bar{t}) > h_\varepsilon(\bar{t})$ e sia $\bar{t} > 0$ l'estremo inferiore di tali tempi (al tempo zero $u_{\max}(0) = h_\varepsilon(0) - \varepsilon < h_\varepsilon(0)$). Allora $u_{\max}(\bar{t}) = h_\varepsilon(\bar{t})$. Poniamo $H_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t) - u_{\max}(t)$. In ogni tempo t di differenziabilità nell'intervallo $(0, \bar{t}]$, abbiamo allora

$$H'_\varepsilon(t) \geq b(h_\varepsilon(t)) - b(u_{\max}(t)) \geq -C|h_\varepsilon(t) - u_{\max}(t)| = -CH_\varepsilon(t),$$

dove $C > 0$ è una costante di Lipschitz locale per b . Allora,

$$(\log H_\varepsilon)'(t) \geq -C$$

e integrando tra 0 e t ,

$$\log \frac{H_\varepsilon(t)}{H_\varepsilon(0)} \geq -Ct \quad \implies \quad H_\varepsilon(t) \geq H_\varepsilon(0)e^{-Ct} = \varepsilon e^{-Ct}.$$

In particolare, per $t \rightarrow \bar{t}$, concludiamo $H_\varepsilon(\bar{t}) \geq \varepsilon e^{-C\bar{t}} > 0$, il che contraddice $H_\varepsilon(\bar{t}) = 0$. Quindi, $u_{\max}(t) \leq h_\varepsilon(t)$ per ogni t . Mandando $\varepsilon \rightarrow 0$, si ottiene $u_{\max}(t) \leq h(t)$ per ogni $t \in [0, T')$, concludendo la dimostrazione della prima parte del teorema. $\square$

Chiaramente, valgono risultati analoghi per il *minimo* di una soluzione di una disequazione alle derivate parziali. Inoltre, il principio del massimo per equazioni ellittiche segue facilmente come il caso speciale dove le quantità non dipendono dal tempo t .

3.2 APPLICAZIONI

Vediamo alcune applicazioni del principio del massimo all'evoluzione della curvatura durante il flusso di Ricci.

STIME SULLA CURVATURA SCALARE. La curvatura scalare R soddisfa, in ogni dimensione $n \in \mathbb{N}$,

$$\partial_t R = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2 \geq \Delta R + 2R^2/n,$$

per la disuguaglianza $|\text{Ric}|^2 \geq R^2/n$, che si ottiene applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz agli autovalori del tensore di Ricci.

Per il Teorema 3.2, otteniamo allora per il minimo della curvatura scalare $R_{\min}(t) = \min_{p \in M} R(p, t)$,

$$R'_{\min}(t) \geq 2R_{\min}^2(t)/n \geq 0$$

per quasi ogni $t \in [0, T)$. Dunque, per confronto con le soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria $y' = 2y^2/n$, abbiamo che se $R_{\min}(0) \geq 0$, allora $R(t) \geq 0$ per ogni $t > 0$ (*preservazione della curvatura scalare nonnegativa*). Inoltre, per la seconda parte del Teorema 3.2 (il principio del massimo forte), $R_{\min}(t) > 0$ per ogni $t > 0$, oppure R è identicamente nulla in $M \times [0, T)$, ovvero, se in almeno un punto di M a tempo $t = 0$, la curvatura scalare è positiva, si ha $R > 0$ in ogni punto, per ogni tempo positivo (*preservazione della curvatura scalare positiva*).

Se poi la curvatura scalare è positiva per la metrica iniziale, si ha

$$R_{\min}(t) \geq \frac{R_{\min}(0)}{1 - 2R_{\min}(0)t/n},$$

dunque, l'intervallo massimale di esistenza del flusso $[0, T_{\max})$ soddisfa

$$T_{\max} \leq n/2R_{\min}(0). \quad (3.2)$$

Infine, se $R_{\min}(0) < 0$, si ha la stima:

$$R_{\min}(t) \geq -\frac{n}{2t}.$$

STIME SULLA NORMA DEL TENSORE DI RICCI. Dall'equazione (2.9) di evoluzione di $|\text{Ric}|^2$ in dimensione $n = 3$, segue

$$\partial_t |\text{Ric}|^2 \leq \Delta |\text{Ric}|^2 + C |\text{Ric}|^3,$$

dove $C > 0$ è una costante reale. Per il Teorema 3.2, ponendo

$$|\text{Ric}|_{\max}(t) = \max_{p \in M} |\text{Ric}(p, t)|,$$

possiamo confrontare $|\text{Ric}|_{\max}^2$ con le soluzioni dell'ODE $y' = Cy^{3/2}$. Si ottiene allora la stima, per $0 \leq t \leq s < T$,

$$\frac{1}{|\text{Ric}|_{\max}(t)} - \frac{1}{|\text{Ric}|_{\max}(s)} \leq \frac{C}{2}(s - t).$$

Supponendo ora che $\limsup_{s \rightarrow T} |\text{Ric}|_{\max}(s) = +\infty$, cioè che Ric non sia limitato per $s \rightarrow T$, passando al $\limsup$, si ha

$$\frac{1}{|\text{Ric}|_{\max}(t)} \leq \frac{C(T - t)}{2} \quad \text{cioè} \quad |\text{Ric}|_{\max}(t) \geq \frac{2/C}{T - t},$$

per ogni $t \in [0, T)$. In altre parole, se in dimensione $n = 3$ la curvatura non è limitata al tendere di t a T , deve avere un tasso minimo di "scoppiamento" dell'ordine di $1/(T - t)$.

Esercizio 3.6. Usando l'equazione (2.6) di evoluzione del tensore di Riemann, si mostri che in generale, si ha

$$\partial_t |\text{Riem}|^2 \leq \Delta |\text{Riem}|^2 + C_n |\text{Riem}|^3,$$

per una costante C_n che dipende solo dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ e ragionando come sopra, se ne deduca l'analoga stima dal basso

$$|\text{Riem}|_{\max}(t) \geq \frac{2/C_n}{T - t},$$

se la curvatura non è limitata al tendere di t a T .

4

EVOLUZIONE DELLE DERIVATE DELLA CURVATURA

In questo capitolo analizziamo come evolvono le derivate covarianti del tensore di curvatura lungo il flusso di Ricci. L'obiettivo ultimo, che vedremo più avanti, è dimostrare che se il flusso esiste in un intervallo massimale $[0, T)$ con $T < +\infty$, allora la norma del tensore di curvatura deve "esplodere" avvicinandosi a T :

$$\limsup_{t \rightarrow T} |\text{Riem}|_{\max}(t) = +\infty.$$

Introduciamo una notazione comoda per i calcoli e le stime che seguono: se T e S sono due tensori, indichiamo con $T * S$ una qualsiasi combinazione lineare di tensori formati mediante contrazioni di $T \otimes S$ usando la metrica o la sua inversa.

Si mostra facilmente che vale la formula "di Leibniz"

$$\nabla(T * S) = \nabla T * S + T * \nabla S. \quad (4.1)$$

La proprietà più rilevante di questo prodotto- $*$ per i nostri scopi, è che si ha la stima

$$|T * S| \leq C |T| |S|,$$

con una costante $C \in \mathbb{R}$ che dipende solo dalla "struttura algebrica" della combinazione lineare e dalla scelta delle contrazioni.

Dimostriamo un lemma generale sull'evoluzione della derivata covariante di un tensore che soddisfa un'equazione di tipo calore (di reazione-diffusione).

Lemma 4.1. Sia $A(t)$ una famiglia di tensori che evolve secondo l'equazione

$$\partial_t A = \Delta A + B,$$

dove Δ è il laplaciano associato alla metrica $g(t)$ che evolve col flusso di Ricci e B è un tensore. Allora,

$$\partial_t \nabla A = \Delta \nabla A + \nabla \text{Riem} * A + \text{Riem} * \nabla A + \nabla B.$$

Dimostrazione. Calcoliamo l'evoluzione di ∇A in coordinate locali. Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \nabla_i A_{jk\dots}^{\ell q\dots} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} A_{jk\dots}^{\ell q\dots} - \Gamma_{ij}^s A_{sk\dots}^{\ell q\dots} - \Gamma_{ik}^s A_{js\dots}^{\ell q\dots} - \dots \right. \\
&\quad \left. + \Gamma_{ip}^\ell A_{jk\dots}^{pq\dots} + \Gamma_{ip}^q A_{jk\dots}^{\ell p\dots} + \dots \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial A_{jk\dots}^{\ell q\dots}}{\partial t} - \Gamma_{ij}^s \frac{\partial A_{sk\dots}^{\ell q\dots}}{\partial t} - \dots - \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial t} A_{sk\dots}^{\ell q\dots} - \dots \\
&\quad + \Gamma_{ip}^\ell \frac{\partial A_{jk\dots}^{pq\dots}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \Gamma_{ip}^\ell}{\partial t} A_{jk\dots}^{pq\dots} + \dots \\
&= \nabla_i \frac{\partial A_{jk\dots}^{\ell q\dots}}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial t} A_{sk\dots}^{\ell q\dots} - \dots + \frac{\partial \Gamma_{ip}^\ell}{\partial t} A_{jk\dots}^{pq\dots} + \dots
\end{aligned}$$

e ricordando la formula (2.3) per l'evoluzione dei simboli di Christoffel, che può esser scritta come

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial t} = \nabla \text{Ric} * g,$$

abbiamo la seguente formula di commutazione delle derivate covariante e temporale:

$$\partial_t \nabla A = \nabla \partial_t A + \nabla \text{Ric} * A. \quad (4.2)$$

Sostituendo l'ipotesi $\partial_t A = \Delta A + B$, otteniamo

$$\partial_t \nabla A = \nabla(\Delta A + B) + \nabla \text{Ric} * A = \nabla \Delta A + \nabla B + \nabla \text{Ric} * A.$$

Dobbiamo ora commutare la derivata covariante con il laplaciano. Osserviamo che la formula per l'interscambio di due derivate covarianti di un tensore T , calcolata nella Sezione 1.2, può essere espressa come

$$\nabla_i \nabla_j T_{\dots}^{\dots} - \nabla_j \nabla_i T_{\dots}^{\dots} = (\text{Riem} * T)_{ij\dots}^{\dots}$$

dunque,

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla_j \nabla_k A_{\dots}^{\dots} &= \nabla_j \nabla_i \nabla_k A_{\dots}^{\dots} + (\text{Riem} * \nabla A)_{ijk\dots}^{\dots} \\
&= \nabla_j (\nabla_k \nabla_i A_{\dots}^{\dots} + (\text{Riem} * A)_{ik\dots}^{\dots}) + (\text{Riem} * \nabla A)_{ijk\dots}^{\dots} \\
&= \nabla_j \nabla_k \nabla_i A_{\dots}^{\dots} + (\nabla \text{Riem} * A)_{ijk\dots}^{\dots} + (\text{Riem} * \nabla A)_{ijk\dots}^{\dots},
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la formula (4.1). Contraendo con g^{jk} , si ottiene la formula di interscambio tra derivata covariante e laplaciano:

$$\nabla \Delta A = \Delta \nabla A + \nabla \text{Riem} * A + \text{Riem} * \nabla A. \quad (4.3)$$

Infine, osserviamo che $\nabla \text{Ric} * A = \nabla \text{Riem} * A$ e concludiamo che

$$\begin{aligned} \partial_t \nabla A &= \nabla \Delta A + \nabla B + \nabla \text{Ric} * A \\ &= \Delta \nabla A + \nabla \text{Riem} * A + \text{Riem} * \nabla A + \nabla B + \nabla \text{Ric} * A \\ &= \Delta \nabla A + \nabla \text{Riem} * A + \text{Riem} * \nabla A + \nabla B. \end{aligned}$$

□

4.1 EVOLUZIONE DELLE DERIVATE DEL TENSORE DI RIEMANN

Applicando iterativamente il Lemma 4.1 all'equazione di evoluzione del tensore di Riemann, otteniamo la seguente proposizione.

Proposizione 4.2. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, la derivata covariante k -esima del tensore di Riemann soddisfa un'equazione di evoluzione della forma:

$$\partial_t \nabla^k \text{Riem} = \Delta \nabla^k \text{Riem} + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem}.$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $k \in \mathbb{N}$. Per $k = 0$, l'affermazione è l'equazione (2.6) di evoluzione del tensore di Riemann che può chiaramente essere scritta come

$$\partial_t \text{Riem} = \Delta \text{Riem} + \text{Riem} * \text{Riem}.$$

Supponiamo dunque la formula vera per $k \in \mathbb{N}$ e applichiamo la formula (4.2) di commutazione delle derivate covariante e temporale con $A = \nabla^k \text{Riem}$:

$$\partial_t \nabla^{k+1} \text{Riem} = \partial_t \nabla (\nabla^k \text{Riem}) = \nabla \partial_t (\nabla^k \text{Riem}) + \nabla \text{Ric} * \nabla^k \text{Riem}.$$

Allora, per l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned}
\partial_t \nabla^{k+1} \text{Riem} &= \nabla \left(\Delta \nabla^k \text{Riem} + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem} \right) \\
&\quad + \nabla \text{Ric} * \nabla^k \text{Riem} \\
&= \nabla \Delta \nabla^k \text{Riem} + \sum_{i+j=k} \nabla^{i+1} \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem} \\
&\quad + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^{j+1} \text{Riem} \\
&\quad + \nabla \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem} \\
&= \nabla \Delta \nabla^k \text{Riem} + \sum_{\ell+m=k+1} \nabla^\ell \text{Riem} * \nabla^m \text{Riem}
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la “regola di Leibniz” per il prodotto $*$ e il fatto che $\nabla \text{Ric} * \nabla^k \text{Riem}$ è della forma $\nabla \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem}$.

Applicando poi la formula (4.3) di interscambio tra derivata covariante e laplaciano, otteniamo

$$\nabla \Delta \nabla^k \text{Riem} = \Delta \nabla^{k+1} \text{Riem} + \nabla \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem} + \text{Riem} * \nabla^{k+1} \text{Riem}$$

e sostituendo nella formula sopra, concludiamo

$$\partial_t \nabla^{k+1} \text{Riem} = \Delta \nabla^{k+1} \text{Riem} + \sum_{\ell+m=k+1} \nabla^\ell \text{Riem} * \nabla^m \text{Riem},$$

da cui la tesi, per induzione. $\square$

Da questa proposizione possiamo dedurre la struttura delle equazioni di evoluzione per le norme quadratiche delle derivate del tensore di curvatura.

Corollario 4.3. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale la seguente equazione di evoluzione:

$$\begin{aligned}
\partial_t |\nabla^k \text{Riem}|^2 &= \Delta |\nabla^k \text{Riem}|^2 - 2 |\nabla^{k+1} \text{Riem}|^2 \\
&\quad + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem}. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Dimostrazione. La derivata temporale della norma al quadrato di un tensore T che dipende dal tempo, si può esprimere schematicamente come

$$\partial_t |T|^2 = 2g(\partial_t T, T) + \partial_t g * T * T.$$

Nel nostro caso, $T = \nabla^k \text{Riem}$, dunque sostituendo le equazioni di evoluzione per $\nabla^k \text{Riem}$ e per la metrica (e la sua inversa), otteniamo

$$\begin{aligned} \partial_t |\nabla^k \text{Riem}|^2 &= 2g\left(\Delta \nabla^k \text{Riem} + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem}, \nabla^k \text{Riem}\right) \\ &\quad + \text{Ric} * \nabla^k \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem} \\ &= 2g(\Delta \nabla^k \text{Riem}, \nabla^k \text{Riem}) \\ &\quad + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem}, \end{aligned}$$

dove abbiamo “assorbito” il termine con Ric nella sommatoria generale, essendo Ric una contrazione di Riem.

Usando infine la seguente identità generale per il laplaciano della norma al quadrato di un tensore,

$$\Delta |T|^2 = 2g(\Delta T, T) + 2|\nabla T|^2,$$

si ha la tesi. $\square$

Per mezzo di queste equazioni di evoluzione, possiamo ottenere delle stime sull’evoluzione degli integrali quadratici delle derivate del tensore di Riemann, se la varietà M è compatta.

Proposizione 4.4. Sia $(M, g(t))$ una soluzione del flusso di Ricci su una varietà compatta. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha la disuguaglianza

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu + 2 \int_M |\nabla^{k+1} \text{Riem}|^2 d\mu \\ \leq C_k \sum_{i+j=k} \int_M |\nabla^i \text{Riem}| |\nabla^j \text{Riem}| |\nabla^k \text{Riem}| d\mu, \end{aligned}$$

dove C_k è una costante che dipende solo dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ e dall’ordine k .

Dimostrazione. Usando l'equazione (4.4), calcoliamo la derivata temporale dell'integrale di $|\nabla^k \text{Riem}|^2$, ricordando che la forma di volume evolve come $\partial_t d\mu = -R d\mu$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu &= \int_M \partial_t |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu + \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 \partial_t d\mu \\ &= \int_M \left(\Delta |\nabla^k \text{Riem}|^2 - 2 |\nabla^{k+1} \text{Riem}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem} \right) d\mu \\ &\quad - \int_M R |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Per il teorema della divergenza, l'integrale del laplaciano $\Delta |\nabla^k \text{Riem}|^2$ è nullo su una varietà compatta e il termine con la curvatura scalare R può essere assorbito nella sommatoria generale dei termini di reazione (essendo R una traccia di Riem). Portando il termine negativo $-2 |\nabla^{k+1} \text{Riem}|^2$ a sinistra e stimando i termini non lineari con la disuguaglianza $|T * S| \leq C|T||S|$, otteniamo allora la stima nell'enunciato della proposizione. $\square$

Da questa proposizione, possiamo ottenere stime puntuali sulle derivate del tensore di Riemann usando il principio del massimo, se la varietà n -dimensionale M è compatta.

L'equazione (4.4) implica infatti, per le proprietà del prodotto $*$, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \partial_t |\nabla^k \text{Riem}|^2 &\leq \Delta |\nabla^k \text{Riem}|^2 + C \sum_{i+j=k} |\nabla^i \text{Riem}| |\nabla^j \text{Riem}| |\nabla^k \text{Riem}| \\ &\leq \Delta |\nabla^k \text{Riem}|^2 + C_1 \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j < k}} |\nabla^i \text{Riem}|^2 |\nabla^j \text{Riem}|^2 + C_2 |\nabla^k \text{Riem}|^2, \end{aligned}$$

con due costanti C_1, C_2 dipendenti solo da k e n e dove abbiamo utilizzato la disuguaglianza tra media geometrica e media quadratica. Se dunque supponiamo che per ogni $i < k$, $\nabla^i \text{Riem}$ sia uniformemente limitato nell'intervallo $[0, T)$, allora esiste una costante C tale che

$$\partial_t |\nabla^k \text{Riem}|^2 \leq \Delta |\nabla^k \text{Riem}|^2 + C |\nabla^k \text{Riem}|^2 + C,$$

per ogni $t \in [0, T)$. Quindi, per il principio del massimo, Teorema 3.2, ponendo

$$u_k(t) = |\nabla^k \text{Riem}|_{\max}^2(t) = \max_{p \in M} |\nabla^k \text{Riem}(p, t)|^2,$$

si ha la disuguaglianza differenziale lineare (non omogenea)

$$u'_k \leq Cu_k + C,$$

che implica che anche $\nabla^k \text{Riem}$ è uniformemente limitato nell'intervallo $[0, T)$ (in dipendenza da $|\nabla^k \text{Riem}|_{\max}$ al tempo iniziale).

Usando questo argomento come passo induttivo, si ottiene allora la seguente conclusione.

Proposizione 4.5. Se il tensore di Riemann è uniformemente limitato nell'intervallo $[0, T)$, anche tutte le sue derivate (spaziali) lo sono. Più precisamente, se $|\text{Riem}| \leq C_0$, si ha $|\nabla^k \text{Riem}| \leq C_k$, dove le costanti C_k dipendono solo dalla metrica iniziale, dalla dimensione e dalla costante C_0 .

Nelle prossime sezioni, vedremo come riottenere questo risultato attraverso stime integrali che seguono da disuguaglianze di interpolazione del tipo di Gagliardo–Nirenberg per tensori su varietà riemanniane. Oltre a fornire una linea dimostrativa alternativa, vari risultati e tecniche che seguiranno si applicano in generale ai flussi geometrici, non soltanto al flusso di Ricci, in particolare ai flussi di ordine più alto di due, dove il principio del massimo non è disponibile. Inoltre, le disuguaglianze integrali che otterremo saranno invarianti per riscalamento, proprietà che è fondamentale nello studio delle singolarità del flusso.

4.2 DISUGUAGLIANZE DI INTERPOLAZIONE PER TENSORI

In questa sezione deriviamo alcune disuguaglianze che permettono di stimare le norme L^p delle derivate di ordine intermedio di un tensore in termini delle norme delle derivate di ordine superiore e del tensore stesso (genericamente, queste sono dette disuguaglianze di interpolazione e nel caso “classico” di $\mathbb{R}^n$, di Gagliardo–Nirenberg – si veda [9], per esempio). Queste stime saranno cruciali per controllare i

termini non lineari che appaiono nell'equazione di evoluzione della curvatura.

Sottolineiamo che le costanti che appaiono nelle varie disuguaglianze (Sobolev, Poincaré, interpolazione, etc) che si usano regolarmente per ottenere stime per i flussi geometrici, in genere dipendono dalla varietà (dalle sue proprietà/quantità geometriche associate, come la curvatura, per esempio), dunque prima di utilizzarle va assolutamente mostrato che tali costanti rimangono equilimitate durante il flusso (per esempio, se nello stimare la curvatura usiamo una disuguaglianza la cui costante dipende dalla curvatura stessa, rischiamo di cadere in un circolo vizioso).

In alcuni casi, come quelli che vedremo in questa sezione, tali costanti sono "universali" (in un certo senso, "algebriche"), indipendenti dalla varietà, dunque, le disuguaglianze associate potranno essere utilizzate direttamente. In altri casi, va sviluppata un'analisi preliminare del loro comportamento (si veda [29, Sezione 5], per esempio).

Proposizione 4.6. Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta e senza bordo, di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

con $p, q, r \geq 1$, allora

$$\left(\int_M |\nabla T|^{2r} d\mu \right)^{1/r} \leq (2r - 2 + n) \left(\int_M |\nabla^2 T|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_M |T|^q d\mu \right)^{1/q},$$

per ogni tensore T su M .

Dimostrazione. Vediamo nel dettaglio il caso in cui T è una 1-forma, il caso generale è solo più elaborato, ma con gli stessi calcoli.

Usando la formula di integrazione per parti (1.4), abbiamo

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla T|^{2r} d\mu &= \int_M \nabla^i T_j \nabla_i T^j g(\nabla T, \nabla T)^{r-1} d\mu \\ &= - \int_M T_j \nabla^i (\nabla_i T^j g(\nabla T, \nabla T)^{r-1}) d\mu \\ &= - \int_M T_j \Delta T^j |\nabla T|^{2r-2} d\mu \\ &\quad - \int_M T_j \nabla_i T^j [2(r-1)] \nabla^i \nabla_k T_\ell \nabla^k T^\ell |\nabla T|^{2r-4} d\mu \end{aligned}$$

e osservando che, per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz e quella tra media aritmetica e quadratica,

$$\begin{aligned} |T_j \Delta T^j| &\leq |T| |\Delta T| \leq n |T| |\nabla^2 T|, \\ |T_j \nabla_i T^j \nabla^i \nabla_k T_\ell \nabla^\ell T^k| |\nabla T|^{2r-4} &\leq |T| |\nabla^2 T| |\nabla T|^2 |\nabla T|^{2r-4}, \end{aligned}$$

concludiamo

$$\int_M |\nabla T|^{2r} d\mu \leq (2r - 2 + n) \int_M |T| |\nabla^2 T| |\nabla T|^{2r-2} d\mu.$$

Usiamo ora la disuguaglianza di Hölder per stimare l'integrale a destra con

$$\left(\int_M |T|^q d\mu \right)^{1/q} \left(\int_M |\nabla^2 T|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_M |\nabla T|^{(2r-2)\frac{r}{r-1}} d\mu \right)^{(r-1)/r},$$

in quanto

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r/(r-1)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{r-1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1 = 1,$$

per l'ipotesi su p, q, r . Quindi

$$\int_M |\nabla T|^{2r} d\mu$$

è minore o uguale di

$$(2r - 2 + n) \left(\int_M |T|^q d\mu \right)^{1/q} \left(\int_M |\nabla^2 T|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_M |\nabla T|^{2r} d\mu \right)^{1-1/r}$$

da cui si ha la tesi, dividendo per l'ultimo integrale (se è zero la tesi è ovvia). $\square$

Osservazione 4.7. Sottolineiamo il caso speciale $p = q = 2$ e $r = 1$,

$$\int_M |\nabla T|^2 d\mu \leq n \left(\int_M |\nabla^2 T|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_M |T|^2 d\mu \right)^{1/2}. \quad (4.5)$$

Ponendo $q = +\infty$ (o più precisamente, mandando $q \rightarrow +\infty$), si ha $r = p$, da cui il seguente corollario.

Corollario 4.8. Se $p \geq 1$, si ha

$$\left(\int_M |\nabla T|^{2p} d\mu \right)^{1/p} \leq (2p - 2 + n) \max_M |T| \left(\int_M |\nabla^2 T|^p d\mu \right)^{1/p}. \quad (4.6)$$

Ragionando per induzione, usando le disuguaglianze (4.5) e (4.6) come caso iniziale, si ottengono allora facilmente le seguenti due proposizioni (le si mostri per esercizio, oppure si veda [22, Sezione 12]).

Proposizione 4.9. Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta e senza bordo, di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste una costante $C = C(k, n)$ dipendente solo dalla dimensione e k (indipendente da (M, g)) tale che per ogni $i \in \{0, \dots, k\}$, si ha

$$\int_M |\nabla^i T|^2 d\mu \leq C(k, n) \left(\int_M |\nabla^k T|^2 d\mu \right)^{i/k} \left(\int_M |T|^2 d\mu \right)^{1-i/k}.$$

Proposizione 4.10. Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta e senza bordo, di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste una costante $C = C(k, n)$ dipendente solo dalla dimensione e k (indipendente da (M, g)) tale che per ogni $i \in \{0, \dots, k\}$, si ha

$$\int_M |\nabla^i T|^{2k/i} d\mu \leq C(k, n) \max_M |T|^{2(k/i-1)} \int_M |\nabla^k T|^2 d\mu \quad (4.7)$$

4.3 STIME UNIFORMI SULLE DERIVATE DELLA CURVATURA

Utilizzando le disuguaglianze di interpolazione appena dimostrate, possiamo ottenere delle stime per le derivate (spaziali) del tensore di Riemann.

Supponiamo che per un flusso di Ricci $(M, g(t))$ nell'intervallo $[0, T)$, la curvatura sia uniformemente limitata, ovvero esista una costante $K < +\infty$ tale che:

$$\sup_{t \in [0, T)} \max_{p \in M} |\text{Riem}(p, t)| \leq K.$$

Vogliamo mostrare che allora anche tutte le derivate covarianti sono limitate in norma L^2 (si tenga presente la Proposizione 4.5).

Riprendiamo la disuguaglianza differenziale che si ottiene dalla Proposizione 4.4:

$$\frac{d}{dt} \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu \leq C_k \sum_{i+j=k} \int_M |\nabla^i \text{Riem}| |\nabla^j \text{Riem}| |\nabla^k \text{Riem}| d\mu,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, dove C_k è una costante che dipende solo dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ di M e dall'ordine k .

Usando la disuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati $2k/i$, $2k/j$ e 2, che soddisfano

$$\frac{i}{2k} + \frac{j}{2k} + \frac{1}{2} = 1,$$

poiché $i + j = k$, stimiamo il termine a destra con

$$\begin{aligned} C \left(\int_M |\nabla^i \text{Riem}|^{2k/i} d\mu \right)^{i/2k} & \left(\int_M |\nabla^j \text{Riem}|^{2k/j} d\mu \right)^{j/2k} \\ & \cdot \left(\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

e poi applichiamo le disuguaglianze di interpolazione (4.7) ai primi due integrali:

$$\left(\int_M |\nabla^i \text{Riem}|^{2k/i} d\mu \right)^{i/2k} \leq C \max_M |\text{Riem}|^{1-i/k} \left(\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu \right)^{i/2k}$$

$$\left(\int_M |\nabla^j \text{Riem}|^{2k/j} d\mu \right)^{j/2k} \leq C \max_M |\text{Riem}|^{1-j/k} \left(\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu \right)^{j/2k}$$

ottenendo che il prodotto (4.8) è minore o uguale di

$$\begin{aligned} C \max_M |\text{Riem}|^{2-i/k-j/k} & \left(\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu \right)^{i/2k+j/2k+1/2} \\ & = C \max_M |\text{Riem}| \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu, \end{aligned}$$

essendo $i + j = k$.

Dunque, concludiamo che nell'ipotesi che $|\text{Riem}| \leq K$, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu \leq C \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, dove C è una costante che dipende solo da k , dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ di M e dalla costante K .

Osservazione 4.11. Più precisamente, non tralasciando il termine $2 \int_M |\nabla^{k+1} \text{Riem}|^2 d\mu$ nella disuguaglianza della Proposizione 4.4, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu \leq & -2 \int_M |\nabla^{k+1} \text{Riem}|^2 d\mu \\ & + C \max_M |\text{Riem}| \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ponendo $u_k(t) = \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu$, si ha la disuguaglianza differenziale lineare $u'_k(t) \leq u_k(t)$ che implica che u_k , cioè $\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 d\mu$, è limitato in $[0, T)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (in dipendenza da $\int_M |\nabla^k \text{Riem}| d\mu$ al tempo iniziale).

Usando poi le disuguaglianze d'interpolazione date dalla Proposizione 4.10 e osservando che il volume di $(M, g(t))$ è uniformemente limitato in $[0, T)$, si ottiene facilmente che per ogni $p \geq 2$ esiste una costante $C_{p,k,n}$ indipendente da $t \in [0, T)$ tale che:

$$\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^p d\mu \leq C_{p,k,n}.$$

Quando allora $p > n$, vorremmo concludere, utilizzando le immersioni di Sobolev (si veda [2]), che si ha la stima puntuale

$$|\nabla^k \text{Riem}| \leq \tilde{C}(k, n)$$

con una costante $\tilde{C}(k, n)$ indipendente da $t \in [0, T)$.

Per poter fare questo è necessario che le metriche siano tutte equivalenti, al variare di $t \in [0, T)$ (sempre sotto l'ipotesi che $|\text{Riem}|$ sia limitato).

Lemma 4.12. Sia $g(t)$ una famiglia di metriche definita per $t \in [0, T)$, con T eventualmente uguale a $+\infty$. Supponiamo che

$$\int_0^T \max_M |\partial_t g|_{g(t)} dt \leq C < +\infty.$$

Allora tutte le metriche $g(t)$ sono equivalenti tra loro, ovvero esiste una costante $A > 0$ tale che per ogni vettore $v \in TM$ e per ogni $t, s \in [0, T)$, si ha

$$\frac{1}{A}|v|_{g(s)} \leq |v|_{g(t)} \leq A|v|_{g(s)}.$$

Inoltre, la metrica $g(t)$ converge uniformemente, per $t \rightarrow T$, a una metrica limite $g(T)$ continua e definita positiva, nel senso che in ogni carta locale, le componenti $g_{ij}(t)$ convergono uniformemente sui compatti a $g_{ij}(T)$.

Dimostrazione. Sia $v \in T_p M$ un vettore fissato non nullo (indipendente dal tempo). Calcoliamo la derivata temporale della sua norma al quadrato rispetto alla metrica che evolve,

$$\frac{d}{dt}|v|_{g(t)}^2 = \frac{d}{dt}(g_{ij}(t)v^i v^j) = \partial_t g_{ij}(t)v^i v^j$$

e stimiamo questa quantità, come segue:

$$\left| \frac{d}{dt}|v|_{g(t)}^2 \right| \leq |\partial_t g|_{g(t)} |v|_{g(t)}^2.$$

Dividendo per $|v|_{g(t)}^2$, otteniamo

$$\left| \frac{d}{dt} \log |v|_{g(t)}^2 \right| \leq |\partial_t g|_{g(t)}$$

e integrando in un intervallo $[s, r] \subseteq [0, T)$, concludiamo

$$\left| \log \frac{|v|_{g(r)}^2}{|v|_{g(s)}^2} \right| \leq \int_s^r \left| \frac{d}{dt} \log |v|_{g(t)}^2 \right| dt \leq \int_s^r |\partial_t g|_{g(t)} dt \leq C < +\infty, \quad (4.10)$$

per ogni $0 \leq s < r < T$. Quindi,

$$e^{-C}|v|_{g(s)}^2 \leq |v|_{g(r)}^2 \leq e^C|v|_{g(s)}^2, \quad (4.11)$$

il che dimostra l'equivalenza delle metriche. Inoltre, la stima (4.10) implica anche (per l'assoluta continuità dell'integrale) che le funzioni $v \mapsto \log |v|_{g(t)}$ sono una successione di Cauchy rispetto alla norma

uniforme su TM , garantendo l'esistenza, per $t \rightarrow T$, di una funzione limite $|\cdot|_{g(T)}$ (che è una norma su tutti gli spazi tangenti di M) che soddisfa anch'essa le disuguaglianze (4.11), cioè è una norma equivalente a tutte le $|\cdot|_{g(t)}$, per ogni $t \in [0, T)$. Segue che le funzioni $v \mapsto |v|_{g(t)}$ convergono uniformemente sui compatti di TM a $|\cdot|_{g(T)}$. Infatti, per l'equivalenza delle norme, dato un compatto $K \subseteq TM$, esiste una costante C_K tale che per ogni $v \in K$ e $t \in [0, T)$, si ha $|v|_{g(t)}^2 \leq C_K$, dunque

$$\begin{aligned} \left| |v|_{g(r)}^2 - |v|_{g(s)}^2 \right| &\leq \int_s^r \left| \frac{d}{dt} |v|_{g(t)}^2 \right| dt \leq \int_s^r |\partial_t g|_{g(t)} |v|_{g(t)}^2 dt \\ &\leq C_K \int_s^r |\partial_t g|_{g(t)} dt \leq C_K C < +\infty, \end{aligned}$$

per ogni $0 \leq s < r < T$ e questo implica, come sopra, che le funzioni $v \mapsto |v|_{g(t)}$ ristrette a K sono una successione di Cauchy in norma uniforme.

Utilizzando poi l'identità di polarizzazione, cioè che per ogni coppia di vettori $v, w \in T_x M$, si ha

$$g(t)(v, w) = \frac{1}{4} \left(|v + w|_{g(t)}^2 - |v - w|_{g(t)}^2 \right),$$

abbiamo che anche tutti i prodotti scalari $g(t)(v, w)$ convergono, per $t \rightarrow T$ e determinano un tensore limite $g(T)$ di tipo $(0, 2)$ che genera la norma $|\cdot|_{g(T)}$, dunque è definito positivo ed è quindi una metrica su M (equivalente a tutte le metriche $g(t)$).

Inoltre, segue che in una qualunque carta locale, le componenti $g_{ij}(t)$ convergono uniformemente sui compatti a $g_{ij}(T)$, quindi $g(T)$ è una metrica continua. $\square$

Osservazione 4.13. Sottolineiamo che in generale la metrica limite $g(T)$ in questo lemma potrebbe non essere C^∞ , ma soltanto continua.

Nel caso specifico del flusso di Ricci, si ha $\partial_t g = -2\text{Ric}$ e se dunque assumiamo che la curvatura sia limitata nell'intervallo $[0, T)$, allora anche il tensore di Ricci è limitato, di conseguenza,

$$\int_0^T \max_M |\partial_t g|_{g(t)} dt = 2 \int_0^T |\text{Ric}|_{\max}(t) dt \leq 2 \int_0^T C dt = 2CT < +\infty.$$

La condizione del lemma è quindi soddisfatta e questo dimostra che se la curvatura rimane limitata, la metrica converge a una metrica limite $g(T)$ ben-definita.

Ritornando alle stime, sappiamo che se la curvatura è limitata, abbiamo

$$\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^p d\mu \leq C_{p,k,n}$$

per delle costanti $C(p, k, n)$ indipendenti da $t \in [0, T)$.

Ponendo dunque $E_k = |\nabla^k \text{Riem}|^2$, per ogni $p < +\infty$, abbiamo le stime

$$\int_M (|E_k|^p + |\nabla E_k|^p) d\mu \leq \tilde{C}_{p,k,n},$$

poiché anche ∇E_k può essere espresso in termini del tensore di Riemann e delle sue derivate covarianti.

Essendo E_k una funzione, per la disuguaglianza di Sobolev, se $p > n$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, si ha

$$\max_M |f|^p \leq C_t \int_M (|f|^p + |\nabla f|^p) d\mu,$$

con la costante C_t che dipende dalla metrica $g_{ij}(t)$ e quindi dal tempo t , ma non dalle derivate spaziali delle componenti $g_{ij}(t)$, poiché la metrica entra nell'espressione a destra solo attraverso $|\nabla f|^2 = g^{ij} \nabla_i f \nabla_j f$ e la misura $d\mu = \sqrt{\det g_{ij}}$, inoltre, la derivata $\nabla_i f = \partial f / \partial x^i$ è indipendente dalla connessione. Quindi, per le funzioni, le costanti di Sobolev C_t sono uniformemente limitate per ogni $t \in [0, T)$, essendo le metriche tutte equivalenti, per il Lemma 4.12. Applicando dunque questa disuguaglianza alla funzione E_k , riotteniamo la conclusione della Proposizione 4.5.

Proposizione 4.14. Se il tensore di Riemann è uniformemente limitato nell'intervallo $[0, T)$, anche tutte le sue derivate (spaziali) lo sono. Più precisamente, se $|\text{Riem}| \leq C_0$, si ha $|\nabla^k \text{Riem}| \leq C_k$, dove le costanti C_k dipendono solo dalla metrica iniziale, dalla dimensione e dalla costante C_0 .

Inoltre, tutte le metriche $g(t)$, per $t \in [0, T)$, sono equivalenti e convergono uniformemente (nelle componenti in ogni carta locale), per $t \rightarrow T$, a una metrica limite equivalente $g(T)$ di classe C^0 .

4.4 IL FLUSSO AL TEMPO MASSIMALE DI ESISTENZA

Supponendo la curvatura uniformemente limitata durante il flusso di Ricci $g(t)$ su una varietà compatta M nell'intervallo $[0, T)$, abbiamo visto che tutte le derivate del tensore di Riemann sono anch'esse limitate, tutte le metriche $g(t)$ sono equivalenti e $g_{ij}(t) \rightarrow g_{ij}(T)$, per $t \rightarrow T$.

Abbiamo dunque che

$$|\nabla^k \partial_t g| = |-2\nabla^k \text{Ric}| \leq C |\nabla^k \text{Riem}| \leq C$$

e analogamente, per i simboli di Christoffel, dalla formula (2.3), segue

$$|\nabla^k \partial_t \Gamma| \leq 3 |\nabla^k \nabla \text{Ric}| \leq C |\nabla^{k+1} \text{Riem}| \leq C,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Con un argomento per induzione, possiamo dimostrare la seguente formula (dove evitiamo di indicare gli indici) che mette in relazione le derivate covarianti iterate e le derivate in coordinate di un tensore S ,

$$\nabla^k S = \partial^k S + \sum_{i=1}^k \sum_{j_1 + \dots + j_i + m \leq k-1} \partial^{j_1} \Gamma \dots \partial^{j_i} \Gamma \partial^m S.$$

Ponendo $S = \partial_t \Gamma$ in questa formula e ragionando sempre per induzione, segue che

$$|\partial_t \partial^k \Gamma_{ij}^\ell| = |\partial^k \partial_t \Gamma_{ij}^\ell| \leq C \quad \implies \quad |\partial^k \Gamma_{ij}^\ell| \leq C,$$

per delle costanti indipendenti da $t \in [0, T)$. Dunque, per mezzo di tale formula, concludiamo che controllare le derivate covarianti di un tensore è equivalente a controllarne quelle in coordinate.

Questo vale in particolare per il tensore metrico, dunque $|\partial^k g_{ij}| \leq C$. Poiché poi

$$|\partial_t^m \partial^k g_{ij}| = |\partial^k \partial_t^m g_{ij}| = |-2\partial^k \partial_t^{m-1} \text{Ric}_{ij}| \leq C |\nabla^k \partial_t^{m-1} \text{Ric}_{ij}|$$

e si vede facilmente che $\partial_t^{m-1} \text{Ric}_{ij}$, per mezzo delle equazioni di evoluzione per il tensore di curvatura e per le sue derivate covarianti, si scrive come un'espressione in tali derivate covarianti (fino all'ordine $2m-2$), si ha $|\partial_t^m \partial^k g_{ij}| \leq C$.

Dunque, tutte le derivate spaziali e temporali in coordinate della metrica che evolve sono equilimitate, indipendentemente da $t \in [0, T)$. Per il teorema di Ascoli-Arzelà, questo implica che le funzioni $g_{ij}(t)$ convergono a $g_{ij}(T)$ in C^∞ , quindi $(M, g(T))$ è ancora una varietà C^∞ e l'equazione $\partial_t g_{ij} = -2\text{Ric}_{ij}$ è soddisfatta nell'intervallo $[0, T]$. Possiamo allora “far ripartire” il flusso col dato iniziale $g(T)$, per mezzo del teorema di esistenza per tempi piccoli (Teorema 2.2), ottenendo un flusso C^∞ su un intervallo $[0, T')$ con $T' > T$, da cui T non può essere il tempo massimale di esistenza.

In conclusione, ricordando il risultato dell'Esercizio 3.6, abbiamo il seguente teorema.

Teorema 4.15. Se $T < +\infty$ è il tempo massimale di esistenza di un flusso di Ricci su una varietà compatta M , allora la curvatura non è limitata in $[0, T)$ e

$$|\text{Riem}|_{\max}(t) \geq \frac{2/C_n}{T-t},$$

per una costante C_n che dipende solo dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ di M .

Osservazione 4.16. In dimensione 3, si ha $|\text{Riem}| \leq C|\text{Ric}|$ per una costante C (segue dalla formula (1.12)), quindi nel teorema precedente possiamo sostituire Riem con Ric . In dimensione 2, la stessa conclusione vale con la curvatura scalare.

4.5 LE STIME DI BERNSTEIN-BANDO-SHI

Una delle proprietà fondamentali delle equazioni (strettamente) paraboliche è l'effetto di “regolarizzazione istantanea”: anche se il dato iniziale non è regolare, per ogni tempo positivo la soluzione diventa C^∞ (analitica). Nel caso del flusso di Ricci, in cui l'operatore è parabolico *degenere* (a causa dell'invarianza per diffeomorfismi – si veda l'Appendice), questa conclusione è più delicata.

Teorema 4.17 (Bando [4]). Se $(M, g(t))$ è una soluzione del flusso di Ricci su una varietà compatta, esiste un atlante compatibile con la struttura C^∞ di M , tale che nelle coordinate date da ogni carta di tale atlante (che sono *coordinate armoniche* – si veda [37]), le componenti della metrica sono funzioni analitiche nello spazio e nel tempo, per ogni $t > 0$.

L'ingrediente principale per ottenere questo risultato è mostrare che in tali coordinate, se la curvatura è limitata, anche senza richiedere un controllo sulle derivate della curvatura al tempo $t = 0$ (come invece abbiamo assunto nelle sezioni precedenti), il flusso “produce” comunque una soluzione C^∞ (analitica), in quanto tutte tali derivate sono automaticamente controllate, per ogni tempo $t > 0$ nell'intervallo di esistenza del flusso. Questo si ottiene per mezzo di stime che sono note come “stime di Bernstein–Bando–Shi”.

L'idea, che risale al lavoro di Bernstein sulle equazioni ellittiche e che è stata adattata al flusso di Ricci da Bando e Shi, consiste nell'applicare il principio del massimo a opportune quantità che combinano la norma della curvatura e delle sue derivate. Bando in [4] è stato il primo a introdurre questa tecnica, nel caso di una varietà compatta, mentre Shi in [38, 39] ha esteso i risultati anche a varietà soltanto complete.

Queste stime saranno poi rilevanti anche per il metodo di blow-up, allo scopo di studiare la formazione di singolarità durante il flusso.

Teorema 4.18 (Stime di Bernstein–Bando–Shi). Sia $(M, g(t))$ una soluzione del flusso di Ricci su una varietà compatta n -dimensionale, nell'intervallo $[0, T)$. Supponiamo che esista una costante $C_0 > 0$ tale che

$$|\text{Riem}(x, t)| \leq C_0$$

per ogni $(x, t) \in M \times [0, T)$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste una costante C_k che dipende solo da n, T e C_0 , tale che

$$|\nabla^k \text{Riem}(x, t)|^2 \leq C_k / t^k,$$

per ogni $(x, t) \in M \times (0, T)$.

Dimostrazione. Dimostriamo il caso $k = 1$ in dettaglio; il caso generale segue per induzione con una scelta simile delle funzioni test.

Ricordiamo le equazioni di evoluzione per le norme al quadrato di Riem e ∇Riem . Per il Corollario 4.3, abbiamo:

$$(\partial_t - \Delta)|\text{Riem}|^2 \leq -2|\nabla \text{Riem}|^2 + c_0|\text{Riem}|^3 \leq -2|\nabla \text{Riem}|^2 + c_0 C_0^3,$$

$$(\partial_t - \Delta)|\nabla \text{Riem}|^2 \leq C_2|\text{Riem}||\nabla \text{Riem}|^2 \leq c_1 C_0|\nabla \text{Riem}|^2,$$

per due costanti c_0 e c_1 che dipendono solo dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ e dove abbiamo usato la stima su $|\text{Riem}|$.

Consideriamo ora la funzione

$$F_1(t) = t|\nabla \text{Riem}|^2 + \alpha|\text{Riem}|^2,$$

dove α è una costante positiva che sceglieremo in seguito e calcoliamo l'equazione di evoluzione di F_1 :

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)F_1 &= |\nabla \text{Riem}|^2 + t(\partial_t - \Delta)|\nabla \text{Riem}|^2 + \alpha(\partial_t - \Delta)|\text{Riem}|^2 \\ &\leq |\nabla \text{Riem}|^2 + tc_1C_0|\nabla \text{Riem}|^2 + \alpha(-2|\nabla \text{Riem}|^2 + c_0C_0^3) \\ &= (1 + c_1C_0t - 2\alpha)|\nabla \text{Riem}|^2 + \alpha c_0C_0^3 \\ &\leq (1 + c_1C_0T - 2\alpha)|\nabla \text{Riem}|^2 + \alpha c_0C_0^3. \end{aligned}$$

Se dunque scegliamo $\alpha = 1 + c_1C_0T$, abbiamo che

$$(\partial_t - \Delta)F_1 \leq C(n, C_0, T)$$

e applicando il principio del massimo, concludiamo che in $M \times (0, T)$, si ha

$$\begin{aligned} F_1(x, t) &\leq \max_{x \in M} F_1(x, 0) + C(n, C_0, T)T \\ &= \alpha \max_{x \in M} |\text{Riem}(x, 0)| + C(n, C_0, T)T \\ &\leq \alpha C_0 + C(n, C_0, T)T = C_1(n, C_0, T). \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $(x, t) \in M \times [0, T]$, si ha

$$t|\nabla \text{Riem}|^2(x, t) \leq F_1(x, t) \leq C_1(n, C_0, T)$$

e dividendo per $t > 0$, otteniamo $|\nabla \text{Riem}|^2 \leq C_1/t$, che è quanto volevamo dimostrare, per $k = 1$.

Per il caso generale $k > 1$, si procede per induzione definendo la funzione

$$F_k(t) = t^k |\nabla^k \text{Riem}|^2 + \alpha_{k-1} t^{k-1} |\nabla^{k-1} \text{Riem}|^2 + \dots + \alpha_0 |\text{Riem}|^2$$

e scegliendo (iterativamente) in modo appropriato delle costanti positive $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$, nonché utilizzando le stime ottenute ai passi precedenti (si mostrino i dettagli per esercizio). $\square$

Ovviamente, questo teorema fornisce un'altra dimostrazione della Proposizione 4.5.

Esercizio 4.19. Si applichi questa analisi alle soluzioni dell'equazione del calore standard in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,

$$\partial_t u = \Delta u,$$

con dato iniziale “periodico” cioè tale che $u(x + \lambda_i e_i, 0) = u(x, 0)$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e $e_1, \dots, e_n$ una base di $\mathbb{R}^n$.
Si deducano delle stime di decadimento, quando $t \rightarrow +\infty$, per le derivate spaziali di u .

In questo capitolo mostriamo la seguente versione “geometrica”, sviluppata da Hamilton in [22], del principio del massimo, che si applica all’evoluzione di tensori simmetrici.

Teorema 5.1 (Principio del massimo di Hamilton per tensori). Sia $g(t)$ una metrica su una varietà n -dimensionale compatta che evolve in modo C^∞ , per $t \in [0, T]$. Sia L un tensore simmetrico di tipo $(0, 2)$, dipendente dal tempo che soddisfa in coordinate locali, l’equazione di evoluzione:

$$\partial_t L_{ij} = \Delta L_{ij} + X^k \nabla_k L_{ij} + N_{ij}(L, g), \quad (5.1)$$

dove X^k è un campo vettoriale dipendente dal tempo e $N(\cdot, g) = p(\cdot, g)$ è un tensore di tipo $(0, 2)$, polinomiale nel suo argomento e nella metrica, che soddisfa la seguente condizione, detta *di autovalore nullo*: se $v \in T_{x_0}M$ è un autovettore nullo di Z in un punto $(x_0, t_0) \in M \times [0, T]$, cioè $v \neq 0$ e $Z_{ij}(x_0, t_0)v^i = 0$, per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, si ha

$$N_{ij}(Z, g)(x_0, t_0)v^i v^j \geq 0.$$

Allora, se $L_{ij}(x, 0) \geq 0$ per ogni $x \in M$ (cioè L al tempo $t = 0$ è semidefinito positivo in ogni punto), allora $L_{ij}(x, t) \geq 0$ per ogni $t \in [0, T]$.

Osservazione 5.2. Euristicamente, la condizione di autovalore nullo dice che il termine di reazione $N_{ij}(L, g)$ nell’equazione (sistema di equazioni parabolico) di evoluzione (5.1), “non spinge in basso” nelle direzioni in cui L è nullo.

Sottolineiamo inoltre che è una condizione *sul polinomio p , non sul tensore L* .

Dimostrazione. Consideriamo il tensore perturbato

$$\tilde{L}_{ij} = L_{ij} + \varepsilon(\delta + t)g_{ij},$$

dove $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ è una costante piccola che sceglieremo in seguito. Allora chiaramente, $\tilde{L}_{ij} > 0$ al tempo $t = 0$.

Calcoliamo l'evoluzione di $\tilde{L}_{ij}$:

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{L}_{ij} &= \partial_t L_{ij} + \varepsilon g_{ij} + \varepsilon(\delta + t) \partial_t g_{ij} \\ &= \Delta L_{ij} + X^k \nabla_k L_{ij} + N_{ij}(L, g) + \varepsilon g_{ij} + \varepsilon(\delta + t) \partial_t g_{ij} \\ &= \Delta \tilde{L}_{ij} + X^k \nabla_k \tilde{L}_{ij} + N_{ij}(L, g) + \varepsilon g_{ij} + \varepsilon(\delta + t) \partial_t g_{ij}.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Supponiamo per assurdo che esista un “primo” tempo $\theta \in (0, \delta)$ in cui $\tilde{L}_{ij}$ ha un autovettore nullo $v \in T_{x_0}M$ in un punto x_0 (tale “primo” tempo esiste in quanto M è compatta), cioè $\tilde{L}_{ij}(x_0, \theta) v^i v^j = 0$. Costruiamo la funzione scalare

$$f(x, t) = \tilde{L}_{ij}(x, t) v^i(x) v^j(x),$$

estendendo il vettore $v \in T_{x_0}M$ a un campo vettoriale $x \mapsto v(x)$ di classe C^∞ su tutta M , tale che

$$\nabla_{g(\theta)} v(x_0) = \nabla_{g(\theta)}^2 v(x_0) = 0$$

(si mostri per esercizio che si può fare).

Poiché $\tilde{L}$ è semidefinito positivo in $M \times [0, \theta]$, la funzione $x \mapsto f(x, \theta)$ ha minimo uguale a zero in x_0 e deve essere $\partial_t f(x_0, \theta) \leq 0$, dunque

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_{g(\theta)} f(x_0, \theta) = \nabla \tilde{L}_{ij}(x_0, \theta) v^i v^j, \\ 0 &\leq \Delta_{g(\theta)} f(x_0, \theta) = \Delta \tilde{L}_{ij}(x_0, \theta) v^i v^j, \\ 0 &\geq \partial_t f(x_0, \theta) = \partial_t \tilde{L}_{ij}(x_0, \theta) v^i v^j,\end{aligned}\quad (5.3)$$

per come abbiamo costruito il campo $x \mapsto v(x)$.

Allora, se $|\partial_t g_{ij}(x, t)| \leq C$ per ogni $(x, t) \in M \times [0, T]$, nel punto (x_0, θ) abbiamo, per l'equazione (5.2),

$$\begin{aligned}\partial_t f &= \partial_t \tilde{L}_{ij} v^i v^j = (\Delta \tilde{L}_{ij} + X^k \nabla_k \tilde{L}_{ij} + N_{ij} + \varepsilon g_{ij} + \varepsilon(\delta + t) \partial_t g_{ij}) v^i v^j \\ &\geq \Delta f + X^k \nabla_k f + N_{ij} v^i v^j + \varepsilon |v|^2 - C\varepsilon(\delta + \theta) |v|^2 \\ &\geq N_{ij} v^i v^j + \varepsilon(1 - 2C\delta) |v|^2 \\ &\geq N_{ij} v^i v^j + \varepsilon |v|^2 / 2,\end{aligned}\quad (5.4)$$

se $\delta < C/4$ (ricordiamo che $0 < \theta < \delta$).

Se consideriamo $\tilde{N} = p(\tilde{L}, g)$, per la condizione di autovalore nullo, poiché $\tilde{L}_{ij}(x_0, \theta)v^i v^j = 0$, abbiamo

$$\tilde{N}_{ij}(x_0, \theta)v^i v^j \geq 0,$$

inoltre, essendo p polinomiale,

$$|\tilde{N} - N| = |p(\tilde{L}, g) - p(L, g)| \leq \bar{C}|\tilde{L} - L| = |\bar{C}\varepsilon(\delta + t)|g| = \bar{C}\varepsilon(\delta + t)\sqrt{n},$$

in $M \times [0, T]$, per una costante $\bar{C} > 0$ (indipendente da $(x, t) \in M \times [0, T]$), quindi,

$$|\tilde{N} - N| \leq 2\bar{C}\sqrt{n\varepsilon\delta}$$

in $M \times [0, \delta]$.

Allora, concludiamo che in (x_0, θ) , si ha

$$N_{ij}v^i v^j \geq \tilde{N}_{ij}v^i v^j - 2\bar{C}\sqrt{n\varepsilon\delta}|v|^2 \geq -2\bar{C}\sqrt{n\varepsilon\delta}|v|^2,$$

quindi, dalla disuguaglianza (5.4), segue

$$\partial_t f \geq -2\bar{C}\sqrt{n\varepsilon\delta}|v|^2 + \varepsilon|v|^2/2 = \varepsilon(1/2 - 2\bar{C}\sqrt{n\delta})|v|^2.$$

Dunque, scegliendo inizialmente $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, tale che $\delta < \max_{M \times [0, T]} |\partial_t g_{ij}|/4$ e $\delta < 1/4\bar{C}\sqrt{n}$, abbiamo che $\partial_t f(x_0, \theta) > 0$ (ricordiamo che $v \neq 0$) e questo è in contraddizione con la disuguaglianza (5.3), da cui un punto dove $\tilde{L}$ ha un autovalore nullo non può esistere in $M \times [0, \delta]$. Quindi $\tilde{L}_{ij} \geq 0$ e facendo tendere $\varepsilon \rightarrow 0$, si conclude che $L_{ij} \geq 0$ in $[0, \delta]$.

Iterando tutto questo argomento su $M \times [\delta, 2\delta]$, $M \times [2\delta, 3\delta]$ e così via, dopo un numero finito di passi, si ottiene la conclusione $L_{ij} \geq 0$ su tutto $M \times [0, T]$ ($\delta > 0$ non dipende da t). $\square$

Questo risultato, come il principio del massimo per equazioni, ha anche una versione “forte”, mostrata da Hamilton in [23, Sezione 8].

Teorema 5.3 (Principio del massimo forte per tensori). Nelle ipotesi del teorema precedente, se M è connessa, si ha:

- Il rango di L è costante su $M \times (0, T]$.
- Il kernel di L , definito come $K_x = \{v \in T_x M \mid L_{ij}v^j = 0\}$, è una distribuzione invariante per trasporto parallelo, per ogni $t \in (0, T]$.

- Se il rango non è massimo, il rivestimento universale della varietà si “spezza” isometricamente come un prodotto riemanniano $(M', h) \times (\mathbb{R}^k, \text{can})$, dove $k \in \mathbb{N}$ è la dimensione del kernel di L .

In particolare, se esiste un punto $x_0 \in M$ e un tempo $t_0 > 0$ tale che $L(x_0, t_0) > 0$, allora $L(x, t) > 0$ per ogni $x \in M$ e per ogni $t > 0$.

5.1 CONDIZIONI DI CURVATURA PRESERVATE

Sappiamo dalla Sezione 3.2 che la nonnegatività o la positività della curvatura scalare si mantengono durante il flusso di Ricci di una varietà compatta (in ogni dimensione). Vediamo altre condizioni sulla curvatura che sono preservate.

DIMENSIONE $n = 3$. Sia $(M, g(t))$ un flusso di Ricci su una varietà tridimensionale compatta, per $t \in [0, T]$.

L'equazione di evoluzione (2.8) per il tensore di Ricci in dimensione 3 si può scrivere come

$$\partial_t R_{ij} = \Delta R_{ij} - Q_{ij},$$

dove

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= 6R_{ij}^2 - 3RR_{ij} + (R^2 - 2|\text{Ric}|^2)g_{ij} \\ &= 6S_{ij} - 3RR_{ij} + (R^2 - 2S)g_{ij}, \end{aligned}$$

con $S_{ij} = R_{ik}R_j^k$ e $S = g^{ij}S_{ij} = |\text{Ric}|^2$.

Applicando il Teorema 5.1 al tensore di Ricci, se il tensore $-Q$ soddisfa la condizione di autovalore nullo, concludiamo che se il tensore di Ricci è semidefinito positivo al tempo iniziale, rimane semidefinito positivo durante il flusso.

Sia dunque v^k un vettore tale che $R_{ik}v^k = 0$ (autovettore nullo del Ricci), allora

$$Q_{ij}v^i v^j = 6S_{ij}v^i v^j - 3RR_{ij}v^i v^j + (R^2 - 2S)|v|^2 = (R^2 - 2S)|v|^2,$$

dunque la condizione di autovalore nullo per $-Q$ è verificata se

$$R^2 \leq 2S = 2|\text{Ric}|^2.$$

Siano λ, μ, ν gli autovalori del Ricci, uno dei quali è nullo, diciamo $\lambda = 0$, quindi $R = \mu + \nu$ e $|\text{Ric}|^2 = \mu^2 + \nu^2$ e la disuguaglianza sopra diventa

$$(\mu + \nu)^2 \leq 2(\mu^2 + \nu^2) \iff 0 \leq (\mu - \nu)^2,$$

che è ovviamente soddisfatta.

Teorema 5.4. Se $\text{Ric} \geq 0$ al tempo $t = 0$, allora $\text{Ric} \geq 0$ per ogni $t \in [0, T]$.

Dal principio del massimo forte, Teorema 5.3, segue inoltre la seguente “tricotomia” per ogni $t > 0$:

- Il tensore di Ricci diventa immediatamente definito positivo ovunque.
- Il tensore di Ricci è identicamente nullo (dunque la varietà è flat).
- La varietà ammette un campo vettoriale parallelo globale (corrispondente al kernel del tensore di Ricci), il che implica che il rivestimento universale della varietà è un prodotto riemanniano $(S^2, h) \times (\mathbb{R}, \text{can})$, dove h è una metrica su S^2 con curvatura positiva che evolve per il flusso di Ricci

Si noti che in questa classificazione, apparentemente manca il caso in cui il kernel del tensore di Ricci ha dimensione due. Infatti, questo caso è geometricamente impossibile: se il kernel avesse dimensione 2, sempre per il Teorema 5.3, il rivestimento universale della varietà sarebbe un prodotto riemanniano del piano euclideo con la metrica canonica e di una varietà unidimensionale, che dunque avrebbe curvatura nulla. Quindi, saremmo nel caso in cui la varietà è flat.

Osserviamo pertanto che questo risultato esclude chiaramente la possibilità che la curvatura si annulli in qualche punto senza che vi sia una struttura geometrica globale di prodotto.

Per proseguire l’analisi, abbiamo bisogno del seguente lemma.

Lemma 5.5. Se $R \neq 0$, si ha

$$\partial_t \left(\frac{\text{Ric}_{ij}}{R} \right) = \Delta \left(\frac{\text{Ric}_{ij}}{R} \right) + \frac{2}{R} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q \left(\frac{\text{Ric}_{ij}}{R} \right) - \frac{R Q_{ij} + 2S \text{Ric}_{ij}}{R^2}.$$

Dimostrazione. Poiché

$$\partial_t \text{Ric}_{ij} = \Delta \text{Ric}_{ij} - Q_{ij} \quad \text{e} \quad \partial_t R = \Delta R + 2S,$$

abbiamo

$$\partial_t \left(\frac{\text{Ric}_{ij}}{R} \right) = \frac{R(\Delta \text{Ric}_{ij} - Q_{ij}) - \text{Ric}_{ij}(\Delta R + 2S)}{R^2}.$$

D'altra parte

$$\Delta \left(\frac{\text{Ric}_{ij}}{R} \right) = \frac{R\Delta \text{Ric}_{ij} - \text{Ric}_{ij}\Delta R}{R^2} - \frac{2}{R} g^{k\ell} \nabla_k R \nabla_\ell \left(\frac{\text{Ric}_{ij}}{R} \right),$$

da cui segue immediatamente la tesi. $\square$

Teorema 5.6. Se $R \geq 0$ e $\text{Ric}_{ij} \geq \varepsilon R g_{ij}$ per una qualche costante $\varepsilon > 0$ al tempo $t = 0$, allora entrambe le condizioni continuano a valere per ogni $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. Se $R > 0$ al tempo $t = 0$, sappiamo che $R > 0$ per ogni $t > 0$. Applichiamo allora il Teorema 5.1 al tensore

$$L_{ij} = \frac{\text{Ric}_{ij}}{R} - \varepsilon g_{ij},$$

con

$$X^k = \frac{2}{R} g^{k\ell} \nabla_\ell R \quad \text{e} \quad N_{ij} = 2\varepsilon \text{Ric}_{ij} - \left(\frac{RQ_{ij} + 2S\text{Ric}_{ij}}{R^2} \right).$$

È una conseguenza immediata del Lemma 5.5 che l'equazione nel Teorema 5.1 è soddisfatta. Consideriamo cosa accade a N_{ij} quando il tensore L ha un autovettore nullo. Si noti che l'analisi è semplice, poiché quando Ric è diagonale, lo sono anche L ed N .

Supponiamo che l'autovalore nullo di L corrisponda all'autovalore λ di Ric (nel senso che sono relativi allo stesso autovettore), allora $\lambda = \varepsilon(\lambda + \mu + \nu)$. L'autovalore relativo di $R^2 N_{ij}$ è quindi

$$2\varepsilon\lambda(\lambda + \mu + \nu)^2 - (\lambda + \mu + \nu)(2\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - \lambda\mu - \lambda\nu + 2\mu\nu) - 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2).$$

Usando l'identità $\lambda = \varepsilon(\lambda + \mu + \nu)$ per eliminare ε , moltiplicando e raccogliendo i termini, abbiamo che tale autovalore è uguale a

$$(\lambda + \mu + \nu)[\lambda(\mu + \nu) + (\mu - \nu)^2] - 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2),$$

che si semplifica ulteriormente a

$$\lambda^2(\mu + \nu - 2\lambda) + (\mu + \nu)(\mu - \nu)^2.$$

Ora, poiché $\text{Ric}_{ij} \geq \varepsilon R g_{ij}$, tracciando si ha $R \geq 3\varepsilon R$ ed essendo $R > 0$, concludiamo che $\varepsilon \leq 1/3$. Ma allora $\mu + \nu = (1/\varepsilon - 1)\lambda \geq 2\lambda$, quindi $\mu + \nu - 2\lambda \geq 0$.

Pertanto, se v è un autovettore nullo per L , si ha $N_{ij}v^i v^j \geq 0$, cioè la condizione di autovalore nullo è soddisfatta, quindi $L \geq 0$ per ogni tempo positivo, per il Teorema 5.1, il che implica la tesi.

Se a tempo $t = 0$ abbiamo solo $R \geq 0$, sappiamo che o R è identicamente nulla durante il flusso, dunque la conclusione è ovvia, oppure $R > 0$ per ogni tempo positivo. In tal caso, osserviamo che per ogni $\varepsilon' < \varepsilon$, esiste $t_0 > 0$ piccolo a piacere, tale che $\text{Ric}_{ij} \geq \varepsilon' R g_{ij}$, per continuità. Se allora consideriamo il flusso nell'intervallo $[t_0, T]$, possiamo applicare quanto appena dimostrato, ottenendo che $\text{Ric}_{ij} \geq \varepsilon' R g_{ij}$ in $M \times [t_0, T]$ e per l'arbitrarietà di t_0 , in tutto $M \times [0, T]$. Mandando infine $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon$, abbiamo la tesi del teorema anche in questo caso. $\square$

Osserviamo che per una varietà riemanniana generale (in ogni dimensione e indipendentemente dal flusso), se $\text{Ric}_{ij} \geq 0$, allora $\text{Ric}_{ij} \leq R g_{ij}$, in quanto tutti gli autovalori del tensore di Ricci sono nonnegativi e R ne è la somma.

Se allora $\text{Ric} > 0$ al tempo iniziale, si ha $R > 0$ e per la compattezza di M , esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\text{Ric}_{ij} \geq \varepsilon R g_{ij} > 0$, stima che si mantiene durante il flusso. Quindi Ric rimane definito positivo e abbiamo

$$0 < \varepsilon R g_{ij} \leq \text{Ric}_{ij} \leq R g_{ij},$$

dunque i suoi tre autovalori λ, μ, ν soddisfano

$$0 < \varepsilon R = \varepsilon(\lambda + \mu + \nu) \leq \lambda, \mu, \nu \leq (\lambda + \mu + \nu) = R.$$

Una facile conseguenza è un limite uniforme $\lambda/\mu \leq C$ sul rapporto di due qualsiasi autovalori, finché la soluzione esiste.

Teorema 5.7. Se $\varepsilon Rg_{ij} \leq \text{Ric}_{ij} \leq \beta Rg_{ij}$ per delle costanti ε e β con $0 < \varepsilon \leq 1/3 \leq \beta \leq 1$ al tempo $t = 0$, allora tali disuguaglianze continuano a valere per ogni $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. La prima disuguaglianza è data dal teorema precedente, dunque dobbiamo dimostrare solo la seconda. Si noti inoltre che se $\varepsilon = 1/3$ o $\beta = 1/3$ allora la varietà ha curvatura costante (lo si mostri per esercizio) e il risultato è banale, mentre se $\beta = 1$, la disuguaglianza vale sempre. Appliciamo il Teorema 5.1 al tensore

$$L_{ij} = \beta g_{ij} - \frac{\text{Ric}_{ij}}{R},$$

con

$$X^k = \frac{2}{R} g^{k\ell} \nabla_\ell R \quad \text{e} \quad N_{ij} = \left(\frac{RQ_{ij} + 2S\text{Ric}_{ij}}{R^2} \right) - 2\beta \text{Ric}_{ij}.$$

Segue immediatamente dal Lemma 5.5 che l'equazione nel Teorema 5.1 è soddisfatta. Consideriamo come sopra, cosa accade a N_{ij} , se L_{ij} acquisisce un autovettore nullo corrispondente all'autovalore λ di Ric . In questo caso $\lambda = \beta(\lambda + \mu + \nu)$ e l'autovalore relativo di $R^2 N_{ij}$ è dato da

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu + \nu)(2\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - \lambda\mu - \lambda\nu + 2\mu\nu) \\ & + 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - 2\beta\lambda(\lambda + \mu + \nu)^2. \end{aligned}$$

Eliminando β con l'identità precedente e raccogliendo i termini, questa espressione si riduce a

$$\lambda^2(2\lambda - \mu - \nu) - (\mu + \nu)(\mu - \nu)^2,$$

che possiamo riordinare come

$$2\lambda^2(\lambda - \mu) + (\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2)(\mu - \nu), \quad (5.5)$$

oppure

$$2\lambda^2(\lambda - \nu) + (\lambda^2 - \nu^2 + \mu^2)(\nu - \mu),$$

da cui segue che è chiaramente nonnegativa se $\lambda \geq \mu \geq \nu \geq 0$ oppure se $\lambda \geq \nu \geq \mu \geq 0$.

Per gestire la possibilità che λ non sia l'autovalore più grande usiamo

un argomento di continuità. Sia θ il massimo tempo tale che nell'intervallo $[0, \theta]$ si abbia $\text{Ric}_{ij} \leq (\beta + \delta)Rg_{ij}$, dove $\delta > 0$ sarà scelto piccolo rispetto a β ed ε . Se riusciamo a mostrare che $\text{Ric}_{ij} \leq \beta Rg_{ij}$ fino al tempo θ , segue che dev'essere $\theta = T$. Ora, poiché $\lambda = \beta(\lambda + \mu + \nu)$ e $\beta \geq 1/3$, vediamo che λ non può essere minore degli altri due. Assumiamo $\mu \geq \lambda \geq \nu$. Fino al tempo θ si ha $\mu \leq (\beta + \delta)(\lambda + \mu + \nu)$ e dal Teorema 5.6, $\nu \geq \varepsilon(\lambda + \mu + \nu)$. Poiché

$$\mu \geq \lambda = \beta(\lambda + \mu + \nu) \quad \text{e} \quad \nu \leq (\lambda + \mu + \nu)/3,$$

abbiamo $\mu - \nu \geq (\beta - 1/3)(\lambda + \mu + \nu)$.

Se $\beta = 1/3$ la varietà ha curvatura costante e la tesi segue, dunque assumiamo che $\beta > 1/3$. L'espressione (5.5) si può riscrivere come

$$\nu^2(\mu - \nu) - (\mu - \lambda)[2\lambda^2 + (\lambda + \mu)(\mu - \nu)],$$

che è almeno

$$\{\varepsilon^2(\beta - 1/3) - \delta[2\beta^2 + (2\beta + \delta)(\beta + \delta)]\}(\lambda + \mu + \nu)^3.$$

Questa espressione sarà positiva se $\delta > 0$ è abbastanza piccolo rispetto a β ed ε e questo completa la dimostrazione. $\square$

Corollario 5.8. Se la curvatura sezionale è positiva (o nonnegativa) al tempo $t = 0$, allora rimane tale per ogni $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. Abbiamo visto nella Sezione 1.6 (formula (1.13)) che la curvatura sezionale è positiva (che implica $\text{Ric} > 0$) se e solo se $\text{Ric}_{ij} < Rg_{ij}/2$, dunque tale condizione si mantiene, per il Teorema 5.7, in quanto al tempo iniziale possiamo trovare $\varepsilon > 0$ e $\beta < 1/2$ come nelle ipotesi di tale teorema.

La stessa conclusione vale per la curvatura sezionale nonnegativa (che implica $\text{Ric} \geq 0$), considerando $\beta = 1/2$ (e tenendo presente l'argomento nella parte finale della dimostrazione del Teorema 5.6). $\square$

Ricapitolando, in dimensione 3 (grazie alla struttura speciale del tensore di Riemann, che è interamente determinato dal tensore di Ricci), le seguenti proprietà si mantengono durante il flusso:

- Curvatura scalare positiva o nonnegativa.
- Tensore di Ricci definito o semidefinito positivo.
- Curvatura sezionale positiva o nonnegativa.
- *Pinching* del tensore di Ricci: condizioni del tipo $\text{Ric} \geq \varepsilon Rg$.

DIMENSIONE GENERALE. In dimensione superiore a 3, la situazione è radicalmente diversa. La positività o nonnegatività del tensore di Ricci non è generalmente preservata e analogamente, la curvatura sezionale nonnegativa o positiva.

Tuttavia, esistono alcune condizioni “più forti” che sono preservate dal flusso in ogni dimensione.

Sempre per mezzo del Teorema 5.1, in [23] Hamilton ha dimostrato che la positività o la nonnegatività dell’operatore di curvatura $\mathfrak{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$ (Definizione 1.6), o meglio, della forma bilineare associata $\mathcal{R}$ su $\Lambda^2 M$, si mantengono durante il flusso di Ricci, in ogni dimensione.

Con questo risultato, Hamilton in dimensione 4, sempre in [23] e Böhm e Wilking in ogni dimensione in [6], hanno mostrato che il flusso di Ricci (riscalato) deforma una varietà riemanniana compatta con operatore di curvatura positivo in una varietà con curvatura sezionale costante positiva, cioè un quoziente della sfera standard. Ciò ha permesso a Hamilton di classificare completamente le 4-varietà compatte con operatore di curvatura positivo o nonnegativo (utilizzando la versione “forte” del principio di massimo, Teorema 5.3): se l’operatore di curvatura è strettamente positivo, la varietà è diffeomorfa a S^4 oppure a $\mathbb{RP}^4$; se l’operatore è solo semidefinito positivo, il suo rivestimento universale è diffeomorfo a S^4 , oppure isometrico a $\mathbb{CP}^2$ (il piano proiettivo complesso con la metrica di Fubini–Study, che è una metrica di Einstein a curvatura sezionale strettamente positiva ma con operatore $\mathfrak{R}$ degenere – si veda [20]), $S^2 \times S^2$, $\mathbb{R}^4$, o al prodotto riemanniano di una varietà diffeomorfa a S^3 per $\mathbb{R}$, o di una 2-varietà diffeomorfa a S^2 per $\mathbb{R}^2$. Böhm e Wilking (sfruttando anche vari risultati classici) hanno poi esteso la classificazione in ogni dimensione, ottenendo il seguente teorema strutturale generale.

Teorema 5.9 (Teorema di classificazione di Hamilton/Böhm–Wilking). Sia M una varietà riemanniana compatta di dimensione $n \in \mathbb{N}$ con operatore di curvatura nonnegativo. Allora il suo rivestimento universale è isometrico a un prodotto riemanniano della forma:

$$\mathbb{R}^k \times M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_i,$$

dove ogni M_j è una varietà compatta semplicemente connessa diffeomorfa alla sfera standard S^m oppure uno spazio simmetrico compatto

(per esempio $\mathbb{C}P^m$).

Se l'operatore di curvatura è positivo, il rivestimento universale di M è diffeomorfo a S^n , cioè M è un quoziente della sfera standard.

Una condizione intermedia, più debole che richiedere un operatore di curvatura positivo, ma più forte della semplice positività della curvatura scalare, è la proprietà di *curvatura isotropica* positiva (spesso indicata con l'acronimo PIC – positive isotropic curvatures – in letteratura). Il concetto di curvatura isotropica è stato introdotto da Micallef e Moore in [32], come segue. Se (M, g) è una varietà Riemanniana di dimensione $n \geq 4$ e $p \in M$, per ogni quaterna di vettori ortonormali $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subseteq T_p M$, si definisce la curvatura isotropica associata a tale quaterna come

$$K_{\text{iso}}(e_1, e_2, e_3, e_4) = R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234}.$$

Dunque, una varietà ha curvatura isotropica positiva (PIC) se questa quantità è positiva per qualsiasi scelta di una quaterna di vettori ortonormali in ogni spazio tangente a M .

Hamilton in [25] ha mostrato che in dimensione $n = 4$, la condizione PIC è preservata dal flusso di Ricci. Successivamente, questa conclusione è stata mostrata valere in ogni dimensione da Nguyen [33] e indipendentemente, da Brendle e Schoen [8].

La rilevanza di questo risultato è dovuta al fatto che ha permesso a Brendle e Schoen (sempre in [8], sfruttando una tecnica introdotta da Böhm e Wilking in [6]) di dimostrare per mezzo del flusso di Ricci, il famoso *teorema della sfera differenziale*, che era un problema aperto da circa mezzo secolo.

Teorema 5.10 (Teorema della sfera differenziabile). Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta e semplicemente connessa di dimensione $n \geq 4$. Supponiamo che la curvatura sezionale di M sia strettamente $1/4$ -*pinched*, ovvero che per ogni punto $p \in M$ e per ogni 2-piano $\pi \subseteq T_p M$, si abbia

$$1/4 < \text{Sec}(\pi) \leq 1.$$

Allora M è diffeomorfa a S^n con la sua struttura differenziale standard.

Dopo che Berger e Klingenberg (intorno al 1960) dimostrarono la “versione topologica” del teorema, cioè che nelle stesse ipotesi, M è *omeomorfa* a S^n , (teorema della sfera topologico), la questione se tale

condizione di “pinching” garantisse anche un diffeomorfismo, divenne uno dei problemi centrali della geometria riemanniana globale. La scoperta delle sfere “esotiche” da parte di Milnor nel 1956 aveva infatti reso il problema non banale: esistevano varietà omeomorfe ma non diffeomorfe alla sfera standard.

Micallef e Moore [32] avevano mostrato che se una varietà (M, g) è strettamente $1/4$ -pinched, allora soddisfa la condizione PIC, mentre Brendle e Schoen [8] hanno osservato che è implicata una condizione ancora più forte, cioè che il prodotto $(M, g) \times (\mathbb{R}, \text{can})$ ha curvatura isotropica positiva e che anche questa proprietà si mantiene facendo evolvere (M, g) col flusso di Ricci. Utilizzando poi le tecniche sviluppate da Böhm e Wilking, hanno provato che a meno di “riscaldamento”, tale flusso di Ricci (riscalato) deforma (M, g) in una sfera standard (in virtù della stabilità di tale proprietà), da cui il Teorema 5.10.

Riassumendo, in dimensione arbitraria, le seguenti proprietà si mantengono durante il flusso:

- Curvatura scalare positiva o nonnegativa.
- Operatore di curvatura definito o semidefinito positivo.
- Curvatura isotropica positiva o nonnegativa.

Abbiamo visto nel primo capitolo che in dimensione 3 il tensore di Weyl è assente e il tensore di Riemann di una varietà è interamente determinato dal tensore di Ricci. Di conseguenza, studiare l'evoluzione della curvatura durante il flusso di Ricci equivale a studiare l'evoluzione di tale tensore. Questa semplificazione è drastica: il sistema di reazione-diffusione per il tensore di Riemann (un oggetto con 4 indici) si riduce a un sistema per un tensore simmetrico di tipo $(0, 2)$.

Hamilton osservò che se il tensore di Ricci è positivo, i suoi autovalori tendono ad avvicinarsi tra loro, rendendo la metrica asintoticamente "rotonda". Per formalizzare precisamente questo fatto, studiare la geometria della "varietà limite" ed estrarre informazioni topologiche, risulta molto più conveniente modificare dinamicamente la scala spaziale in modo tale che il volume totale rimanga costante durante l'evoluzione. Introduciamo dunque il seguente *flusso di Ricci normalizzato*.

Definizione 6.1. Sia M una varietà riemanniana compatta di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Il *flusso di Ricci normalizzato* è una famiglia $g(t)$ di metriche C^∞ su M che soddisfa l'equazione di evoluzione

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}(g(t)) + 2r(t)g(t)/n,$$

per t in un intervallo I , dove la quantità $r(t)$ rappresenta la *curvatura scalare media* della varietà al tempo t , definita in termini della curvatura scalare R come

$$r(t) = \frac{\int_M R d\mu_{g(t)}}{\int_M d\mu_{g(t)}}, \quad (6.1)$$

dove $\mu_{g(t)}$ è la misura riemanniana canonica della varietà $(M, g(t))$.

L'aggiunta del termine spazialmente costante (ma dipendente dal tempo) $2r(t)g(t)/n$ all'equazione del flusso di Ricci agisce come un'omotetia dinamica che bilancia esattamente a ogni tempo, la "perdita di

volume" causata dal termine -2Ric . Infatti, calcolando come abbiamo fatto alla fine della Sezione 2.2 per ottenere l'equazione (2.10), abbiamo

$$\begin{aligned}\partial_t d\mu_{g(t)} &= \frac{1}{2} \sqrt{\det g(t)} g^{ij}(t) (-2R_{ij}(t) + 2r(t)g_{ij}(t)/n) dx \\ &= -\sqrt{\det g(t)} (R(t) - r(t)) dx = -(R - r) d\mu_{g(t)},\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(M, g(t)) = - \int_M (R - r) d\mu_{g(t)} = 0,$$

per l'equazione (6.1), quindi il volume della varietà rimane costante durante l'evoluzione del flusso di Ricci normalizzato.

Sia ora $g(t)$ una soluzione del flusso di Ricci (non normalizzato) su una varietà riemanniana compatta M di dimensione $n \in \mathbb{N}$, definita per $t \in [0, T)$. Indichiamo con $\text{Vol}(t) = \int_M d\mu_{g(t)}$ il volume e con $r(t)$ la curvatura scalare media della varietà $(M, g(t))$. Durante il flusso, il volume evolve secondo l'equazione (2.10):

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(t) = - \int_M R(g(t)) d\mu_{g(t)} = -r(t) \text{Vol}(t).$$

Introduciamo un fattore di riscaldamento spaziale $\psi : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ definito come segue:

$$\psi(t) = \left(\frac{\text{Vol}(0)}{\text{Vol}(t)} \right)^{2/n},$$

che quindi soddisfa

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{2}{n} \left(\frac{\text{Vol}(0)}{\text{Vol}(t)} \right)^{2/n-1} \left(- \frac{\text{Vol}(0)}{\text{Vol}(t)^2} \frac{d}{dt} \text{Vol}(t) \right) \\ &= - \frac{2}{n} \frac{\psi(t)}{\text{Vol}(t)} (-r(t) \text{Vol}(t)) = 2\psi(t)r(t)/n.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Definiamo la metrica riscalata $\tilde{g}$ e un nuovo parametro temporale τ come segue:

$$\tilde{g}(\tau) = \psi(t)g(t) \quad \text{e} \quad \tau(t) = \int_0^t \psi(s) ds.$$

Esaminiamo come cambiano le quantità geometriche passando dalla metrica $g(t)$ alla metrica $\tilde{g}(\tau)$. Essendo $\tilde{g}(\tau)$ un riscaldamento omotetico di $g(t)$, il tensore di Ricci è invariante, ovvero $\text{Ric}(\tilde{g}(\tau)) = \text{Ric}(g(t))$, mentre la curvatura scalare riscalda con l'inverso del fattore di omotetia, per cui la curvatura scalare media $\tilde{r}(\tau)$ rispetto alla metrica $\tilde{g}(\tau)$ è legata a $r(t)$ dalla relazione

$$\tilde{r}(\tau) = \psi(t)^{-1}r(t). \quad (6.3)$$

Calcoliamo l'evoluzione temporale della nuova metrica $\tilde{g}$ rispetto al nuovo tempo τ . Si ha

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{g}(\tau) = \frac{dt}{d\tau}(\tau) \frac{\partial}{\partial t} (\psi(t)g(t)) = \frac{1}{\psi(t)} \left(\psi'(t)g(t) + \psi(t) \frac{\partial g}{\partial t}(t) \right)$$

e sostituendo in questa espressione l'equazione di evoluzione del flusso di Ricci per $g(t)$, ricordando che $g(t) = \psi(t)^{-1}\tilde{g}(\tau)$, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{g}(\tau) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} (\psi(t)^{-1}\tilde{g}(\tau)) + \frac{\partial g}{\partial t}(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)^2} \tilde{g}(\tau) - 2\text{Ric}(\tilde{g}(\tau)).$$

essendo $\text{Ric}(g(t)) = \text{Ric}(\tilde{g}(\tau))$.

Infine, inserendo l'espressione per la derivata $\psi'(t)$ data dalla formula (6.2), concludiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{g}(\tau) &= 2\psi(t)^{-1}r(t)\tilde{g}(\tau)/n - 2\text{Ric}(\tilde{g}(\tau)) \\ &= -2\text{Ric}(\tilde{g}(\tau)) + 2\tilde{r}(\tau)\tilde{g}(\tau)/n, \end{aligned}$$

per la relazione (6.3). Questo dimostra che il flusso così riscalato è un flusso di Ricci normalizzato e viceversa, si vede facilmente che con un opportuno riscaldamento, da un flusso di Ricci normalizzato si ottiene un flusso di Ricci "standard", mostrando l'equivalenza analitica e geometrica dei due problemi.

Il risultato mostrato da Hamilton nel 1982 per le 3-varietà con tensore di Ricci positivo è il seguente.

Teorema 6.2 (Hamilton [22]). Sia (M, g_0) una 3-varietà Riemanniana compatta con tensore di Ricci definito positivo. Allora il flusso di Ricci *normalizzato* con dato iniziale g_0 esiste per tutti i tempi $t \in [0, +\infty)$

e converge esponenzialmente nella topologia C^∞ a una metrica con curvatura sezionale costante positiva. In particolare, M è diffeomorfa alla sfera S^3 con la sua metrica standard o a un suo quoziente per un gruppo finito di isometrie.

Le sezioni che seguono sono dedicate a sviluppare in dettaglio i passi della dimostrazione.

Osservazione 6.3. Questo teorema ha rappresentato il primo passo fondamentale verso la dimostrazione della *congettura di Poincaré*. La condizione $\text{Ric} > 0$ assicura che non si formino singolarità “a collo” (neckpinch) o di altro tipo, ma che l’intera varietà si contragga a un punto diventando sferica. Se la condizione $\text{Ric} > 0$ non è soddisfatta, il flusso può sviluppare singolarità più complesse, che richiedono l’analisi successiva di Perelman in [34, 35, 36] per essere gestite.

6.1 PINCHING DEGLI AUTOVALORI DEL TENSORE DI RICCI

Ricordiamo che il tensore di Ricci tracefree di una varietà tridimensionale è definito come

$$\overset{\circ}{\text{Ric}} = \text{Ric} - Rg/3$$

e osserviamo che

$$\begin{aligned} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 &= |\text{Ric} - Rg/3|^2 = |\text{Ric}|^2 - R^2/3 = S - R^2/3 \\ &= \frac{1}{3} [(\lambda - \mu)^2 + (\lambda - \nu)^2 + (\mu - \nu)^2], \end{aligned}$$

dove $S = \text{tr } R_{ij}^2 = |\text{Ric}|^2$ e λ, μ, ν sono i tre autovalori del tensore di Ricci. Chiaramente si ha $S - R^2/3 \geq 0$ e si annulla solo quando $\lambda = \mu = \nu$. Dunque questa quantità misura quanto gli autovalori divergono l’uno dall’altro.

Supponiamo di avere un flusso di Ricci di una varietà compatta tridimensionale con $\text{Ric} > 0$ in un intervallo temporale $[0, T)$. La seguente stima di Hamilton mostra che gli autovalori del tensore di Ricci si avvicinano tra loro in quei punti in cui la curvatura scalare diventa grande.

Proposizione 6.4. Esistono una costante $\delta > 0$ e una costante $C > 0$ dipendente solo dalla varietà iniziale, tali che per ogni $t \in [0, T)$, si ha

$$S - R^2/3 \leq CR^{2-\delta},$$

in ogni punto di M .

Dimostrazione. Sia $\gamma = 2 - \delta$ con $\gamma \in (1, 2)$. Ricordiamo, per comodità, che

$$\partial_t R_{ij} = \Delta R_{ij} - Q_{ij} \quad \text{e} \quad \partial_t R = \Delta R + 2S,$$

con

$$Q_{ij} = 6S_{ij} - 3RR_{ij} + (R^2 - 2S)g_{ij},$$

e

$$S = |\text{Ric}|^2 = g^{ik}g^{jl}R_{ij}R_{kl} = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

inoltre, poniamo

$$T = g^{in}g^{jk}g^{lm}R_{ij}R_{kl}R_{mn} = \lambda^3 + \mu^3 + \nu^3$$

e

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}g^{ik}g^{jl}Q_{ij}R_{kl} = \frac{1}{2}(R^3 - 5RS + 6T) \\ &= (\lambda^3 + \mu^3 + \nu^3) - (\lambda^2\mu + \lambda\mu^2 + \lambda^2\nu + \lambda\nu^2 + \mu^2\nu + \mu\nu^2) + 3\lambda\mu\nu, \end{aligned}$$

dove λ, μ e ν sono gli autovalori del tensore di Ricci.

Per il calcolo che porta all'equazione (2.9) per l'evoluzione della norma quadratica S del tensore di Ricci S , segue che

$$\partial_t S = \Delta S - 2|\nabla \text{Ric}|^2 + 4(T - C).$$

Vediamo alcuni "lemmi di calcolo".

Lemma 6.5. Se $R > 0$, allora per ogni γ si ha

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{S}{R^\gamma} \right) &= \Delta \left(\frac{S}{R^\gamma} \right) + \frac{2(\gamma-1)}{R} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q \left(\frac{S}{R^\gamma} \right) \\ &\quad - \frac{2}{R^{\gamma+2}} |R \nabla \text{Ric} - \nabla R \text{Ric}|^2 \\ &\quad - \frac{(2-\gamma)(\gamma-1)}{R^{\gamma+2}} S |\nabla R|^2 + \frac{4R(T-C) - 2\gamma S^2}{R^{\gamma+1}}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Dimostrazione. Calcoliamo le derivate

$$\begin{aligned}\partial_t \left(\frac{S}{R^\gamma} \right) &= \frac{R \frac{\partial S}{\partial t} - \gamma S \frac{\partial R}{\partial t}}{R^{\gamma+1}}, \\ \nabla_q \left(\frac{S}{R^\gamma} \right) &= \frac{R \nabla_q S - \gamma S \nabla_q R}{R^{\gamma+1}}, \\ \Delta \left(\frac{S}{R^\gamma} \right) &= \frac{R \Delta S - \gamma S \Delta R}{R^{\gamma+1}} - \frac{2\gamma}{R^{\gamma+1}} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S + \frac{\gamma(\gamma+1)}{R^{\gamma+2}} S |\nabla R|^2.\end{aligned}$$

Poiché,

$$g^{pq} \nabla_p R \nabla_q \left(\frac{S}{R^\gamma} \right) = \frac{1}{R^\gamma} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S - \frac{\gamma}{R^{\gamma+1}} S |\nabla R|^2,$$

e vale inoltre l'identità

$$S |\nabla R|^2 = |\nabla R \text{Ric}|^2,$$

si ha che la somma dei termini nell'equazione di evoluzione per S/R^γ che sono quadratici nelle derivate prime della curvatura è uguale a $1/R^{\gamma+2}$ moltiplicato per

$$\begin{aligned}-2R^2 |\nabla \text{Ric}|^2 + 2\gamma R g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S - \gamma(\gamma+1) S |\nabla R|^2 \\ = -2 |R \nabla \text{Ric} - \nabla R \text{Ric}|^2 \\ + 2(\gamma-1) (R g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S - \gamma S |\nabla R|^2) \\ + (\gamma-2)(\gamma-1) S |\nabla R|^2,\end{aligned}$$

da cui segue la formula (6.4), sostituendo. $\square$

Lemma 6.6. Se $R > 0$, allora per ogni γ si ha

$$\begin{aligned}\partial_t R^{2-\gamma} &= \Delta R^{2-\gamma} + \frac{2(\gamma-1)}{R} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q R^{2-\gamma} \\ &\quad - \frac{(2-\gamma)(\gamma-1)}{R^{\gamma+2}} R^2 |\nabla R|^2 + 2(2-\gamma) R^{1-\gamma} S.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Dimostrazione. Calcoliamo le derivate

$$\begin{aligned}\partial_t R^{2-\gamma} &= (2-\gamma) R^{1-\gamma} (\Delta R + 2S), \\ \Delta R^{2-\gamma} &= (2-\gamma) R^{1-\gamma} \Delta R + (2-\gamma)(1-\gamma) R^{-\gamma} |\nabla R|^2,\end{aligned}$$

$$\frac{2(\gamma-1)}{R} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q R^{2-\gamma} = 2(2-\gamma)(\gamma-1) R^{-\gamma} |\nabla R|^2,$$

da cui segue la formula (6.5). $\square$

Lemma 6.7. Sia $f = S/R^\gamma - R^{2-\gamma}/3$. Allora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \Delta f + \frac{2(\gamma-1)}{R} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q f - \frac{2}{R^{\gamma+2}} |R \nabla \text{Ric} - \nabla R \text{Ric}|^2 \\ & - \frac{(2-\gamma)(\gamma-1)}{R^{\gamma+2}} (S - R^2/3) |\nabla R|^2 \\ & + \frac{2}{R^{\gamma+1}} [(2-\gamma)S(S - R^2/3) - 2P], \end{aligned} \quad (6.6)$$

dove $P = S^2 + R(C - T)$.

Dimostrazione. Questa identità segue direttamente dai Lemmi 6.5 e 6.6, per sottrazione. $\square$

La tesi della Proposizione 6.4 segue dal principio di massimo per la funzione f se i termini di reazione hanno segno nonpositivo. L'unico termine che non è chiaramente tale è l'ultimo, nella formula (6.6), dunque dobbiamo analizzare il termine P , che è un polinomio simmetrico di grado 4 negli autovalori λ , μ e ν del tensore di Ricci. Infatti, utilizzando le formule per S , R , T e C in termini di λ , μ e ν , si ha facilmente

$$\begin{aligned} P = & (\lambda^4 + \mu^4 + \nu^4) - (\lambda^3\mu + \lambda\mu^3 + \lambda^3\nu + \lambda\nu^3 + \mu^3\nu + \mu\nu^3) \\ & + (\lambda^2\mu\nu + \lambda\mu^2\nu + \lambda\mu\nu^2) \\ = & \lambda^2(\lambda - \mu)(\lambda - \nu) + \mu^2(\mu - \lambda)(\mu - \nu) + \nu^2(\nu - \lambda)(\nu - \mu). \end{aligned}$$

Lemma 6.8. Se $R > 0$ e $\text{Ric} \geq \varepsilon Rg$, allora $P \geq \varepsilon^2 S(S - R^2/3)$.

Dimostrazione. Poiché entrambi i membri della disuguaglianza sono polinomi omogenei di grado 4 in λ , μ e ν , possiamo assumere che $S = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ e supponiamo $\lambda \geq \mu \geq \nu > 0$. Poiché

$$(\lambda + \mu + \nu)^2 \geq \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

abbiamo $\nu \geq \varepsilon(\lambda + \mu + \nu) \geq \varepsilon$, essendo $R_{ij} \geq \varepsilon Rg_{ij}$. Riscriviamo P come

$$P = (\lambda - \mu)^2 [\lambda^2 + (\lambda + \mu)(\mu - \nu)] + \nu^2 (\lambda - \nu)(\mu - \nu),$$

da cui è evidente che

$$P \geq \lambda^2(\lambda - \mu)^2 + \nu^2(\lambda - \nu)(\mu - \nu) \geq \lambda^2(\lambda - \mu)^2 + \nu^2(\mu - \nu)^2$$

e poiché $\lambda \geq \nu \geq \varepsilon$, otteniamo

$$P \geq \varepsilon^2[(\lambda - \mu)^2 + (\mu - \nu)^2].$$

D'altra parte, poiché

$$(\lambda - \nu)^2 = [(\lambda - \mu) + (\mu - \nu)]^2 \leq 2[(\lambda - \mu)^2 + (\mu - \nu)^2],$$

vediamo che

$$S - R^2/3 = \frac{1}{3}[(\lambda - \mu)^2 + (\lambda - \nu)^2 + (\mu - \nu)^2] \leq (\lambda - \mu)^2 + (\mu - \nu)^2$$

e questo conclude la dimostrazione del lemma. $\square$

Da questa stima su P , se $\delta \leq 2\varepsilon^2$, si ha che l'ultimo termine nella formula (6.6) è nonpositivo, dunque dal Lemma 6.7, segue

$$\frac{\partial f}{\partial t} \leq \Delta f + X^k \nabla_k f,$$

dove $X^k = \frac{2(\gamma-1)}{R} g^{kl} \nabla_l R$.

Se quindi $C > 0$ è una costante tale che

$$f = \frac{S}{R^\gamma} - \frac{1}{3} R^{2-\gamma} \leq C$$

al tempo $t = 0$, allora per il principio del massimo, abbiamo $f \leq C$ per ogni $t \in [0, T)$, cioè $S - R^2/3 \leq C R^{2-\delta}$, come volevamo dimostrare. $\square$

6.2 STIMA DEL GRADIENTE DELLA CURVATURA SCALARE

Come nella sezione precedente, assumiamo che la nostra varietà sia compatta e tridimensionale, che la metrica iniziale abbia curvatura di Ricci strettamente positiva e che l'equazione di evoluzione non normalizzata ammetta una soluzione per $t \in [0, T)$.

Proposizione 6.9. Per ogni $\eta > 0$ possiamo trovare una costante $C(\eta)$, dipendente solo da η e dalla metrica al tempo iniziale, tale che per ogni $t \in [0, T)$, si ha

$$|\nabla R|^2 \leq \eta R^3 + C(\eta),$$

in ogni punto di M .

Dimostrazione. Calcoliamo l'equazione di evoluzione per $|\nabla R|^2 = g^{ij} \nabla_i R \nabla_j R$. Si ha

$$\partial_t |\nabla R|^2 = 2g^{ij} \nabla_i \Delta R \nabla_j R + 4g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S + 2g^{ik} g^{jl} R_{kl} \nabla_i R \nabla_j R,$$

mentre

$$\Delta |\nabla R|^2 = 2g^{ij} \Delta \nabla_i R \nabla_j R + 2|\nabla^2 R|^2$$

e sfruttando l'identità

$$\Delta \nabla_i R = \nabla_i \Delta R + g^{jk} R_{ij} \nabla_k R,$$

che segue dal contrarre la formula di interscambio di derivate covarianti di ∇R , si ottiene

$$\partial_t |\nabla R|^2 = \Delta |\nabla R|^2 - 2|\nabla^2 R|^2 + 4g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S.$$

Segue che abbiamo la seguente equazione di evoluzione:

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} \right) &= \Delta \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} \right) - \frac{2}{R^3} |R \nabla^2 R - \nabla R \otimes \nabla R|^2 \\ &\quad + \frac{4}{R} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S - \frac{2S}{R^2} |\nabla R|^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Calcoliamo infatti

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} \right) &= \frac{R \Delta |\nabla R|^2 - |\nabla R|^2 \Delta R}{R^2} \\ &\quad - \frac{2}{R^3} |R \nabla^2 R|^2 + \frac{4}{R} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S - \frac{2S}{R^2} |\nabla R|^2, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} \right) &= \frac{R \Delta |\nabla R|^2 - |\nabla R|^2 \Delta R}{R^2} \\ &\quad - \frac{4}{R^2} g^{ik} g^{jl} R_{kl} \nabla_{ij}^2 R \nabla_i R \nabla_j R + \frac{2}{R^3} |\nabla R \otimes \nabla R|^2, \end{aligned}$$

e la formula (6.7) segue.

Ricordiamo le equazioni di evoluzione

$$\partial_t R^2 = \Delta R^2 - 2|\nabla R|^2 + 4RS, \quad (6.8)$$

$$\partial_t S = \Delta S - 2|\nabla \text{Ric}|^2 + 4(T - C),$$

$$\partial_t (S - R^2/3) = \Delta (S - R^2/3) - 2(|\nabla \text{Ric}|^2 - |\nabla R|^2/3) + 4Q, \quad (6.9)$$

dove $Q = T - RS/3 - C$ e vediamo che si ha

$$Q \leq R(S - R^2/3). \quad (6.10)$$

Infatti, dalla sezione precedente, sappiamo che $P = S^2 + R(C - T) \geq 0$ e poiché $S \leq R^2$, otteniamo

$$QR \leq P + QR = S(S - R^2/3) \leq R^2(S - R^2/3),$$

e la formula (6.10) segue dividendo per R .

Poiché $\nabla_i R = g^{jk} \nabla_i R_{jk}$, è immediato osservare che

$$|\nabla R|^2 \leq 3|\nabla \text{Ric}|^2,$$

per la disuguaglianza tra media aritmetica e quadratica. È in realtà piuttosto sorprendente che valga una stima leggermente migliore.

Lemma 6.10. In dimensione $n = 3$, si ha la disuguaglianza $|\nabla R|^2 \leq \frac{20}{7}|\nabla \text{Ric}|^2$.

Per un generico tensore simmetrico T_{ij} , la sua derivata covariante $\nabla_i T_{jk}$ (che è un tensore di tipo $(0,3)$, simmetrico negli ultimi due indici) possiede due contrazioni (tracce) algebricamente indipendenti: la derivata della traccia $g^{jk} \nabla_i T_{jk} = \nabla_i \text{tr } T$ e la divergenza $g^{ij} \nabla_i T_{jk} = \text{div } T_k$. Di conseguenza, la parte di ∇T legata alle tracce dipenderebbe da due campi vettoriali distinti, impedendo di ottenere una stima su un unico scalare.

Nel caso del tensore di Ricci R_{ij} , tuttavia, entra in gioco la seconda identità di Bianchi contratta (1.7), che in coordinate si scrive come

$$g^{ij} \nabla_i R_{jk} = \frac{1}{2} \nabla_k R, \quad (6.11)$$

la quale mostra un legame tra la divergenza e il gradiente della traccia del tensore di Ricci. Grazie a questa identità, entrambe le tracce di

∇Ric sono proporzionali al solo vettore ∇R e questo permette di migliorare la costante nella disuguaglianza, cosa che non si ha per un tensore generico.

Dimostrazione del Lemma 6.10. È sempre una buona idea provare a scrivere un tensore come somma delle sue componenti irriducibili. Decomponiamo quindi ∇Ric come

$$\nabla_i R_{jk} = E_{ijk} + F_{ijk},$$

dove E è un tensore che “raccolge” le parti di traccia di ∇Ric , mentre F è allora totalmente a traccia nulla. Poiché E_{ijk} deve essere simmetrico in negli indici j e k , lo cerchiamo sotto la forma

$$E_{ijk} = g_{ij}A_k + g_{ik}A_j + g_{jk}B_i,$$

per delle costanti A_k e B_i da determinare. Per assicurarci che $F_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - E_{ijk}$ sia a traccia nulla, dobbiamo imporre che le tracce di E_{ijk} coincidano con quelle di $\nabla_i R_{jk}$, dunque:

- contraendo con g^{jk} , si ha

$$g^{jk}E_{ijk} = g^{jk}(g_{ij}A_k + g_{ik}A_j + g_{jk}B_i) = 2A_i + 3B_i = g^{jk}\nabla_i R_{jk} = \nabla_i R,$$

per ogni $i = 1, 2, 3$;

- contraendo con g^{ij} ,

$$g^{ij}E_{ijk} = g^{ij}(g_{ij}A_k + g_{ik}A_j + g_{jk}B_i) = 4A_k + B_k = g^{ij}\nabla_i R_{jk} = \nabla_k R/2,$$

per ogni $k = 1, 2, 3$, per l'identità di Bianchi (6.11).

Risolviendo questo sistema lineare, troviamo immediatamente $A_k = \frac{1}{20}\nabla_k R$ e $B_i = \frac{3}{10}\nabla_i R$, dunque

$$E_{ijk} = \frac{1}{20}(g_{ij}\nabla_k R + g_{ik}\nabla_j R) + \frac{3}{10}g_{jk}\nabla_i R,$$

da cui

$$|E_{ijk}|^2 = \frac{7}{20}|\nabla R|^2.$$

Per costruzione, il tensore $F_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - E_{ijk}$ è a traccia nulla su ogni coppia di indici, ovvero

$$g^{ij}F_{ijk} = 0, \quad g^{ik}F_{ijk} = 0 \quad \text{e} \quad g^{jk}F_{ijk} = 0.$$

Ne consegue che i tensori E ed F sono mutuamente ortogonali rispetto al prodotto indotto dalla metrica:

$$\begin{aligned} g(E, F) &= g^{il}g^{jp}g^{kq}E_{ijk}F_{lpq} \\ &= \left(\frac{1}{20}(g^{lp}\nabla_k R + g^{lq}\nabla_j R) + \frac{3}{10}g^{pq}\nabla_i R \right) F_{lpq} = 0. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$|\nabla \text{Ric}|^2 = |E_{ijk}|^2 + |F_{ijk}|^2 \geq \frac{7}{20}|\nabla R|^2,$$

il che dimostra il lemma. $\square$

Dunque, per la disuguaglianza (6.10) e quella di questo lemma, dall'uguaglianza (6.9) otteniamo

$$\partial_t(S - R^2/3) \leq \Delta(S - R^2/3) - \frac{2}{21}|\nabla \text{Ric}|^2 + 4R(S - R^2/3). \quad (6.12)$$

Tornando all'equazione (6.7) per l'evoluzione di $|\nabla R|^2/R$, l'unico termine di reazione che potrebbe avere segno positivo è $g^{pq}\nabla_p R \nabla_q S$, che stimiamo nel modo seguente:

$$g^{pq}\nabla_p R \nabla_q S = 2g^{pq}g^{il}g^{jk}\nabla_p R R_{ij}\nabla_q R_{lk} \leq 2|\nabla R||\text{Ric}||\nabla \text{Ric}|$$

e quest'ultimo termine è minore o uguale a $4R|\nabla \text{Ric}|^2$ in quanto $|\nabla R|^2 \leq 3|\nabla \text{Ric}|^2 \leq 4|\nabla \text{Ric}|^2$ (l'ultima disuguaglianza è per evitare radici quadrate).

Dunque, usando questa stima per l'equazione (6.7) e ricordando la formula (6.8), si ha per $\eta \leq 1/3$,

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} - \eta R^2 \right) &\leq \Delta \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} - \eta R^2 \right) + 16|\nabla \text{Ric}|^2 - \frac{2S}{R^2}|\nabla R|^2 \\ &\quad + 2\eta|\nabla R|^2 - 4\eta RS \\ &\leq \Delta \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} - \eta R^2 \right) + 16|\nabla \text{Ric}|^2 - \frac{4}{3}\eta R^3, \end{aligned} \quad (6.13)$$

in quanto $S \geq R^2/3$ e il termine $2(S/R^2)|\nabla R|^2$ domina $2\eta|\nabla R|^2$ quando $\eta \leq 1/3$.

L'idea ora è di "aggiungere" a $|\nabla R|^2/R$ un multiplo di $S - R^2/3$ tale che il suo termine di reazione $-\frac{2}{21}|\nabla \text{Ric}|^2$ nell'equazione 6.12 (che non sarebbe presente senza l'analisi raffinata del tensore ∇Ric vista sopra nel Lemma 6.10) sia sufficiente a cancellare il termine nonnegativo $|\nabla \text{Ric}|^2$, per poi invocare la Proposizione 6.4 che ci dice che l'altro termine di reazione $R(S - R^2/3)$ è piccolo rispetto a R^3 .

Osserviamo che $168 \frac{2}{21} = 16$ e poniamo

$$F = \frac{|\nabla R|^2}{R} - \eta R^2 + 168(S - R^2/3).$$

Allora, per ogni $\eta \leq 1/3$, esiste una costante $C(\eta)$ dipendente unicamente da η e dal valore iniziale della metrica al tempo iniziale tale che

$$\frac{\partial F}{\partial t} \leq \Delta F + C(\eta). \quad (6.14)$$

Infatti, sommando i contributi forniti dalle stime (6.13) e (6.12), gli unici termini di reazione che non si annullano sono

$$672R(S - R^2/3) - \frac{4}{3}\eta R^3$$

e in virtù della Proposizione 6.4, è possibile determinare una costante $\delta > 0$ e una costante $C > 0$ dipendente solo dalla metrica iniziale, tali che $S - R^2/3 \leq CR^{2-\delta}$. Conseguentemente, per un'opportuna costante $\tilde{C}(\eta)$ dipendente solo da δ , C ed $\eta > 0$, otteniamo

$$672R(S - R^2/3) - \frac{4}{3}\eta R^3 \leq CR^{3-\delta} - \frac{4}{3}\eta R^3 \leq \tilde{C}(\eta),$$

da cui segue la formula (6.14).

Tale formula, per il principio di massimo, implica che

$$\frac{|\nabla R|^2}{R} - \eta R^2 \leq F_{\max}(t) \leq F_{\max}(0) + \tilde{C}(\eta)t \leq F_{\max}(0) + \tilde{C}(\eta)T$$

per ogni $t \in [0, T)$ e in ogni punto di M .

Ricordando la stima (3.2) sul tempo massimale di esistenza del flusso, anch'essa dipendente solo dalla metrica iniziale, si ha $T \leq 3/2R_{\min}(0)$, dunque concludiamo che

$$\frac{|\nabla R|^2}{R} \leq \eta R^2 + \bar{C}(\eta),$$

in $M \times [0, T)$, con $\bar{C}(\eta)$ dipendente solo dalla metrica iniziale. Questo implica che

$$|\nabla R|^2 \leq \eta R^3 + \bar{C}(\eta)R \leq 2\eta R^3 + C(\eta),$$

con $C(\eta)$ dipendente solo dalla metrica iniziale. Dunque, cambiando variabile da η a 2η , poiché $R > 0$ e possiamo scegliere η arbitrariamente piccolo, abbiamo la tesi della Proposizione 6.9. $\square$

6.3 IL CONTROLLO DEL RAPPORTO $R_{\max}/R_{\min}$

Sappiamo che se T è il tempo massimale di esistenza del flusso, $S_{\max} = |\text{Ric}|_{\max}^2 \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow T$, che nel nostro caso di curvatura di Ricci positiva, è equivalente a $R_{\max} \rightarrow +\infty$. Vogliamo studiare il rapporto $R_{\max}/R_{\min}$ all'avvicinarsi a tale tempo massimale.

Proposizione 6.11. Si ha $R_{\max}/R_{\min} \rightarrow 1$, per $t \rightarrow T$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 6.9 sappiamo che per ogni $\eta > 0$ possiamo trovare una costante $C(\eta)$ con

$$|\nabla R| \leq \frac{1}{2}\eta^2 R^{3/2} + C(\eta)$$

per ogni $t \in [0, T)$. Poiché $R_{\max} \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow T$, possiamo trovare un tempo θ tale che $C(\eta) \leq \frac{1}{2}\eta^2 R_{\max}^{3/2}$ per ogni $t \in [\theta, T)$, dunque,

$$|\nabla R| \leq \eta^2 R_{\max}^{3/2},$$

per ogni $t \geq \theta$. Fissato allora un tale tempo t e un punto $p \in M$ dove $R(\cdot, t)$ assume il suo massimo spaziale, su qualsiasi geodetica uscente da p di lunghezza $\ell = 1/(\eta R_{\max}^{1/2})$ si ha $R \geq (1 - \eta)R_{\max}$.

Mostriamo che se $\eta > 0$ è sufficientemente piccolo (indipendentemente da t), su tale geodetica vi è un punto coniugato a p . Dunque per il *teorema di Hopf–Rinow* (si veda [20]), la famiglia di queste geodetiche “copre” tutta M e di conseguenza, la stima $R \geq (1 - \eta)R_{\max}$ vale per ogni punto della varietà. Chiaramente segue che

$$R_{\min} \geq (1 - \eta)R_{\max}.$$

Infatti, poiché sappiamo dal Teorema 5.6 che $\text{Ric} \geq \varepsilon Rg$, per un certo $\varepsilon > 0$, indipendente da t , lungo una tale geodetica si ha

$$\text{Ric} \geq \varepsilon Rg \geq \varepsilon(1 - \eta)R_{\max}g$$

e possiamo applicare la seguente versione del *teorema di Bonnet-Myers* (si veda [20]).

Teorema 6.12. Se $\text{Ric} \geq (n-1)k$ lungo una geodetica di lunghezza almeno $\pi/\sqrt{k}$ su una varietà di dimensione n , allora lungo tale geodetica vi sono punti coniugati.

Dunque, se

$$\ell = \frac{1}{\eta R_{\max}^{1/2}} \geq \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon(1-\eta)}R_{\max}}, \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{\eta} \geq \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon(1-\eta)}},$$

abbiamo la conclusione e questo si verifica se scegliamo η sufficientemente piccolo, per ogni $t \geq \theta$.

Segue che

$$\liminf_{t \rightarrow T} R_{\min}/R_{\max} \geq 1 - \eta$$

e per l'arbitrarietà di η , concludiamo che $R_{\max}/R_{\min} \rightarrow 1$, per $t \rightarrow T$. $\square$

Per il Teorema 4.15 e l'Osservazione 4.16, sappiamo non solo che $|\text{Ric}|_{\max} \rightarrow +\infty$, per $t \rightarrow T$, ma anche che per una costante $C > 0$ (che nelle seguenti stime può variare da riga a riga), si ha

$$|\text{Ric}|_{\max}(t) \geq \frac{C}{T-t},$$

per ogni $T \in [0, T)$, dunque nella nostra situazione di $\text{Ric} > 0$, ciò è equivalente a

$$R_{\max}(t) \geq \frac{C}{T-t}.$$

Come facile conseguenza della proposizione appena vista, si ha allora anche

$$R_{\min}(t) \geq \frac{C}{T-t} \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad r(t) \geq \frac{C}{T-t} \rightarrow +\infty, \quad (6.15)$$

per ogni $t \in [0, T)$, dove r è la curvatura scalare media al tempo t (la costante C nelle precedenti stime può variare da riga a riga).

Segue chiaramente che

$$\int_0^T R_{\max} dt = +\infty, \quad \int_0^T R_{\min} dt = +\infty \quad \text{e} \quad \int_0^T r dt = +\infty.$$

Proposizione 6.13. Si ha $S/R^2 - 1/3 \rightarrow 0$, per $t \rightarrow T$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 6.4, abbiamo

$$\frac{S}{R^2} - \frac{1}{3} \leq CR^{-\delta} \leq CR_{\min}^{-\delta},$$

e $R_{\min} \rightarrow +\infty$, se $t \rightarrow T$. □

6.4 STIME PER IL FLUSSO NORMALIZZATO

Nelle stesse ipotesi delle sezioni precedenti, consideriamo il flusso di Ricci normalizzato $\tilde{g}(t)$ associato al flusso di Ricci $g(t)$ su M nell'intervallo massimale $[0, T)$, che dunque soddisfa (si veda l'analisi all'inizio del capitolo)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{g}_{ij} = \frac{2}{3} \tilde{r} \tilde{g}_{ij} - 2 \tilde{R}_{ij}$$

in un intervallo $[0, \tilde{T})$, dove

$$\tilde{g}(\tau) = \psi(t)g(t) \quad \text{e} \quad \tau(t) = \int_0^t \psi(s) ds, \quad (6.16)$$

con

$$\psi(t) = \left(\frac{\text{Vol}(0)}{\text{Vol}(t)} \right)^{2/3}, \quad (6.17)$$

per ogni $t \in [0, T)$. In particolare, ricordiamo che

$$\tilde{r}(\tau) = \psi(t)^{-1} r(t). \quad (6.18)$$

Per i risultati visti, riscalandolo le quantità geometriche, abbiamo allora le seguenti conclusioni:

- $\tilde{R}_{\max}/\tilde{R}_{\min} \rightarrow 1$, per $\tau \rightarrow \tilde{T}$. In particolare, questo rapporto è uniformemente limitato.
- $\tilde{\text{Ric}} \geq \varepsilon \tilde{R} \tilde{g}$, per un certo $\varepsilon > 0$.

Lemma 6.14. Esiste una costante $C > 0$ tale che $\tilde{R}_{\max} \leq C < +\infty$, per ogni $\tau \in [0, \tilde{T})$.

Dimostrazione. Siano $\widetilde{\text{Vol}}$ il volume e $\widetilde{d}$ il diametro di $(M, \widetilde{g}(\tau))$. Avendo tensore di Ricci positivo, il *teorema di Bishop–Gromov* (si veda [20]) ci dice che i volumi delle palle di $(M, \widetilde{g}(\tau))$ sono minori di quelli delle palle euclidee tridimensionali di stesso raggio. Segue che esiste una costante uniforme $\overline{C} > 0$ ($1/8$ il volume della palla unitaria di $\mathbb{R}^3$) tale che $\widetilde{\text{Vol}} \leq \overline{C} \widetilde{d}^3$ e poiché $\widetilde{\text{Ric}} \geq \varepsilon \widetilde{R}_{\min} \widetilde{g}$, si ha $\widetilde{d} \leq C_\varepsilon \widetilde{R}_{\min}^{-1/2}$, per il teorema di Bonnet–Myers (dove $C_\varepsilon = \pi \sqrt{2/\varepsilon}$). Pertanto, $\widetilde{\text{Vol}} \widetilde{R}_{\min}^{3/2} \leq \overline{C} C_\varepsilon^3$. Poiché per costruzione $\widetilde{\text{Vol}} = 1$, concludiamo che $\widetilde{R}_{\min} \leq \overline{C} C_\varepsilon^3$. Di conseguenza, si ha anche $\widetilde{R}_{\max} \leq C$, per una costante $C > 0$, in quanto $\widetilde{R}_{\max}/\widetilde{R}_{\min}$ è uniformemente limitato. $\square$

Lemma 6.15. Si ha $\widetilde{T} = +\infty$.

Dimostrazione. Poiché $d\tau/dt = \psi$ e $\psi\widetilde{r} = r$, si ha

$$\int_0^{\widetilde{T}} \widetilde{r} d\tau = \int_0^T r dt = +\infty,$$

per le stime (6.15). Ma $\widetilde{r} \leq \widetilde{R}_{\max} \leq C$, dunque si deve necessariamente avere $\widetilde{T} = +\infty$. $\square$

Dalla Proposizione 6.13 segue che (essendo invariante per riscaldamento)

$$\widetilde{S}/\widetilde{R}^2 - 1/3 \rightarrow 0,$$

per $t \rightarrow +\infty$ e poiché abbiamo visto che vale la relazione

$$\widetilde{S} - \frac{1}{3} \widetilde{R}^2 = \frac{1}{3} [(\widetilde{\lambda} - \widetilde{\mu})^2 + (\widetilde{\lambda} - \widetilde{\nu})^2 + (\widetilde{\mu} - \widetilde{\nu})^2],$$

ne consegue che il rapporto $\widetilde{\lambda}/\widetilde{\mu}$ tra due qualsiasi autovalori del tensore di Ricci $\widetilde{\text{Ric}}$ converge a 1 per $\tau \rightarrow +\infty$ (essendo equilimitati). Dato che anche $\widetilde{R}_{\max}/\widetilde{R}_{\min} \rightarrow 1$ per $\tau \rightarrow +\infty$, deve inevitabilmente accadere che la curvatura sezionale diventi ad un certo tempo *1/4-pinched*, cioè che il rapporto $\widetilde{\text{Sec}}_{\min}/\widetilde{\text{Sec}}_{\max}$ appartenga all'intervallo $(1/4, 1]$. Dunque, per il *teorema della sfera* (si veda [37, Sezione 12.3]) si ha che il rivestimento universale di M è una sfera. Tuttavia, possiamo evitare di invocare tale teorema e utilizzare soltanto un lemma chiave della sua dimostrazione (detto “del raggio di iniettività di Klingenberg” – si veda [10, Theorem 5.10] per una dimostrazione).

Lemma 6.16 (Klingenberg [26, 27]). Sia M una varietà semplicemente connessa di dimensione maggiore o uguale a 3, tale che tutte le sue curvature sezionali appartengono all'intervallo $(K/4, K]$. Allora il raggio di iniettività di M è almeno $\pi/\sqrt{K}$.

Applichiamo questo risultato al rivestimento universale riemanniano (compatto) $\tilde{M}$ di M , che ha un numero finito $m \in \mathbb{N}$ di fogli, per il teorema di Bonnet–Myers. Inoltre, se le curvature sezionali appartengono all'intervallo $(K/4, K]$ (in particolare, sono minori o uguali a K), per il *teorema di Günther* (si veda [20]), il volume di una palla $\tilde{B}$ in $\tilde{M}$ di raggio $\text{inj}(\tilde{M})$ sarà maggiore di quello di una palla B di stesso raggio nella varietà semplicemente connessa con curvatura sezionale costante uguale a K .

Poiché K è limitato dall'alto da una costante (un multiplo fissato di $\tilde{R}_{\min}$ o equivalentemente, di $\tilde{R}_{\max}$, che sono uniformemente limitate per $\tau \in [0, +\infty)$), si ha

$$\text{Vol}^K(B) \geq C_K \text{inj}(\tilde{M})^3,$$

per una qualche costante $C_K > 0$ (si osservi che anche $\text{inj}(\tilde{M})$ è limitato da una costante uniforme, per il teorema di Bonnet–Myers). Dunque, per il Lemma 6.16, si ha

$$\pi^3 K^{-3/2} \leq \text{inj}(\tilde{M})^3 \leq C_K^{-1} \text{Vol}^K(B) \leq C_K^{-1} \text{Vol}(\tilde{B}) \leq C_K^{-1} \text{Vol}(\tilde{M}).$$

Poiché il volume di $\tilde{M}$ è uguale a m volte quello di M , che è uguale a 1 e ricordando che K è minore o uguale a un multiplo (fissato) di $\tilde{R}_{\min}$, otteniamo

$$\tilde{R}_{\min}^{-3/2} \leq K^{-3/2} \leq C,$$

per una costante $C > 0$, per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

Concludiamo quindi che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\tilde{R}_{\min} \geq \varepsilon$, per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

6.5 CONVERGENZA ESPONENZIALE

Per concludere la dimostrazione del Teorema 6.2, dobbiamo mostrare che le quantità geometriche della metrica normalizzata non solo si avvicinano a quelle di una sfera, ma lo fanno con una rapidità tale da garantire la convergenza della metrica stessa nella topologia C^∞ . Questo è garantito da delle stime di decadimento esponenziale.

Iniziamo con un principio generale per convertire le quantità dal flusso di Ricci non normalizzato a quello normalizzato. Siano P e Q due espressioni costruite a partire dalla metrica e dai tensori di curvatura e siano $\tilde{P}$ e $\tilde{Q}$ le corrispondenti espressioni per il flusso normalizzato. Poiché differiscono per dilatazioni, differiscono per una potenza di ψ (si ricordino le equazioni (6.16) e (6.17)). Diciamo che P ha grado n se $\tilde{P} = \psi^n P$. Pertanto, g ha grado 1, Ric ha grado 0, R ha grado -1 e S ha grado -2 .

Lemma 6.17. Supponiamo che P soddisfi

$$\partial_t P = \Delta P + Q$$

per il flusso non normalizzato e che P abbia grado n . Allora Q ha grado $n - 1$ e per il flusso normalizzato vale

$$\partial_\tau \tilde{P} = \tilde{\Delta} \tilde{P} + \tilde{Q} + \frac{2}{3} n \tilde{r} \tilde{P}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che Q ha grado $n - 1$ poiché $\partial\tau/\partial t = \psi$ e $\tilde{\Delta} = \psi \tilde{\Delta}$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \psi \partial_\tau (\psi^{-n} \tilde{P}) &= \psi \tilde{\Delta} (\psi^{-n} \tilde{P}) + \psi^{-n+1} \tilde{Q}, \\ \partial_\tau \tilde{P} &= \tilde{\Delta} \tilde{P} + \tilde{Q} + \frac{n}{\psi} \frac{d\psi}{d\tau} \tilde{P}. \end{aligned}$$

Poiché dall'equazione (6.2) segue

$$\frac{d \log \psi}{dt} = 2r/3, \quad \text{da cui} \quad \frac{d \log \psi}{d\tau} = \frac{1}{\psi} \frac{d \log \psi}{dt} = 2\psi^{-1}r/3 = 2\tilde{r}/3,$$

per la formula (6.18), abbiamo la tesi del lemma. $\square$

Dalla sezione precedente, sappiamo che il flusso normalizzato soddisfa, per ogni $\tau \in [0, +\infty)$,

$$0 < \varepsilon \leq \tilde{R}_{\min} \leq \tilde{R}_{\max} \leq \tilde{C}, \quad (6.19)$$

$$\varepsilon \tilde{R} \tilde{g} \leq \tilde{\text{Ric}} \leq \tilde{R} \tilde{g},$$

per delle costanti positive $\tilde{C}$ ed ε , inoltre

$$\tilde{R}_{\max}/\tilde{R}_{\min} \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad \tilde{S}/\tilde{R}^2 - 1/3 \rightarrow 0,$$

per $\tau \rightarrow +\infty$.

Lemma 6.18. Possiamo trovare delle costanti $C, \delta > 0$ tali che

$$\tilde{S} - \tilde{R}^2/3 \leq Ce^{-\delta\tau},$$

per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

Dimostrazione. Poniamo $\tilde{f} = \tilde{S}/\tilde{R}^2 - 1/3$ e notiamo che $\tilde{f}$ ha grado 0. Allora, per il Lemma 6.7 con $\gamma = 2$ e il Lemma 6.17, abbiamo

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} \leq \tilde{\Delta} \tilde{f} + \frac{2}{\tilde{R}} \tilde{g}^{pq} \tilde{\nabla}_p \tilde{R} \tilde{\nabla}_q \tilde{f} - 4 \frac{\tilde{P}}{\tilde{R}^3}$$

e dal Lemma 6.8, si ha

$$\tilde{P} \geq \varepsilon^2 \tilde{S} (\tilde{S} - \tilde{R}^2/3) = \varepsilon^2 \tilde{S} \tilde{R}^2 \tilde{f}.$$

Dunque,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} \leq \tilde{\Delta} \tilde{f} + \tilde{X}^q \tilde{\nabla}_q \tilde{f} - \delta \tilde{f},$$

con $\tilde{X}^q = 2 \tilde{g}^{qp} \tilde{\nabla}_p \tilde{R} / \tilde{R}$ e $\delta = 4\varepsilon^3/3$, in quanto

$$4 \frac{\tilde{P}}{\tilde{R}^3} \geq 4\varepsilon^2 \frac{\tilde{S} \tilde{f}}{\tilde{R}} \geq 4\varepsilon^2 \tilde{f} \tilde{R} / 3 \geq 4\varepsilon^3 \tilde{f} / 3 = \delta \tilde{f},$$

essendo $\tilde{S} \geq \tilde{R}^2/3$ e $\tilde{R} \geq \varepsilon$ (disuguaglianze (6.19)). Quindi,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (e^{\delta\tau} \tilde{f}) \leq \tilde{\Delta} (e^{\delta\tau} \tilde{f}) + \tilde{X}^k \tilde{\nabla}_k (e^{\delta\tau} \tilde{f}),$$

e per il principio del massimo segue che $e^{\delta\tau} \tilde{f} \leq C$, per una costante $C > 0$ dipendente dal massimo di $\tilde{f}(\cdot, 0)$ (cioè dalla metrica iniziale). Dunque, $\tilde{f} \leq Ce^{-\delta\tau}$ per ogni $\tau \in [0, +\infty)$ e poiché $\tilde{R}$ è uniformemente limitata dall'alto e positivamente dal basso, questo risulta equivalente alla tesi del lemma. $\square$

Corollario 6.19. Si ha $|\tilde{\text{Ric}} - \tilde{R}\tilde{g}/3| \leq Ce^{-\delta\tau}$, per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

Dimostrazione. Gli autovalori di $\tilde{\text{Ric}} - \tilde{R}\tilde{g}/3$ sono della forma

$$\lambda - (\lambda + \mu + \nu)/3 = [(\lambda - \mu) + (\lambda - \nu)]/3,$$

mentre

$$\tilde{S} - \tilde{R}^2/3 = [(\lambda - \mu)^2 + (\lambda - \nu)^2 + (\mu - \nu)^2]/3,$$

dunque la stima segue immediatamente dal lemma precedente. $\square$

Lemma 6.20. Possiamo trovare delle costanti $C, \delta > 0$ tali che

$$\tilde{R}_{\max} - \tilde{R}_{\min} \leq Ce^{-\delta\tau},$$

per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

Dimostrazione. Poniamo

$$\tilde{F} = \frac{|\tilde{\nabla}\tilde{R}|^2}{\tilde{R}} + 168(\tilde{S} - \tilde{R}^2/3),$$

che ha grado -2 . Dalle formule (6.12) e (6.13) (scegliendo $\eta = 0$) segue

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{F} \leq \tilde{\Delta}\tilde{F} + 672\tilde{R}(\tilde{S} - \tilde{R}^2/3) - \frac{4}{3}\tilde{r}\tilde{F},$$

(il Lemma 6.17 vale anche per le disuguaglianze differenziali). Utilizzando la stima del Lemma 6.18, si ha

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{F} \leq \tilde{\Delta}\tilde{F} + \bar{C}e^{-\delta\tau} - \delta\tilde{F},$$

per delle costanti $\bar{C}, \delta, \varepsilon > 0$, poiché $\tilde{R} \leq \tilde{C}$ e $\tilde{r} \geq \tilde{R}_{\min} \geq \varepsilon > 0$. Dunque,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(e^{\delta\tau}\tilde{F} - \bar{C}\tau) \leq \tilde{\Delta}(e^{\delta\tau}\tilde{F} - \bar{C}\tau)$$

e dal principio del massimo, concludiamo che $e^{\delta\tau}\tilde{F} - \bar{C}\tau \leq C$, per una costante $C > \bar{C}$ dipendente solo dalla metrica iniziale. Ne deriva che $\tilde{F} \leq C(1 + \tau)e^{-\delta\tau}$ per ogni $\tau \in [0, +\infty)$ e ciò conclude la dimostrazione del lemma, in quanto è sufficiente considerare un valore di $\delta > 0$ leggermente minore di quello trovato. $\square$

Lemma 6.21. Si ha $|\tilde{\text{Ric}} - \tilde{r}\tilde{g}/3| \leq Ce^{-\delta\tau}$, per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

Dimostrazione. Sappiamo che $\tilde{R}_{\min} \leq \tilde{r} \leq \tilde{R}_{\max}$, dunque $|\tilde{R} - \tilde{r}| \leq \tilde{R}_{\max} - \tilde{R}_{\min} \leq Ce^{-\delta\tau}$, per il lemma precedente. Poiché per il Corollario 6.19, abbiamo $|\tilde{\text{Ric}} - \tilde{R}\tilde{g}/3| \leq Ce^{-\delta\tau}$, la tesi segue dalla disuguaglianza triangolare. $\square$

Per il Lemma 4.12 e le precedenti stime di decadimento esponenziale, si ha il seguente risultato.

Proposizione 6.22. Le metriche $\tilde{g}(\tau)$ sono tutte equivalenti e convergono uniformemente per $\tau \rightarrow +\infty$ a una metrica continua definita positiva $\tilde{g}(\infty)$ su M .

Per stimare le derivate della curvatura, ricordiamo la formula (4.9) nell'Osservazione 4.11 e vediamo che tutti e tre i termini hanno lo stesso grado di omogeneità ($\tilde{\nabla} = \nabla$ e $\tilde{\mu} = \psi^3\mu$), di conseguenza la stessa formula vale per il flusso normalizzato. Poiché in dimensione tre il tensore di di Riemann è interamente determinato da quello di Ricci, abbiamo la stima

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_M |\tilde{\nabla}^k \tilde{\text{Ric}}|^2 d\tilde{\mu} &\leq -2 \int_M |\tilde{\nabla}^{k+1} \tilde{\text{Ric}}|^2 d\tilde{\mu} + \tilde{C} \max_M |\tilde{\text{Ric}}| \int_M |\tilde{\nabla}^k \tilde{\text{Ric}}|^2 d\tilde{\mu} \\ &\leq -2 \int_M |\tilde{\nabla}^{k+1} \tilde{\text{Ric}}|^2 d\tilde{\mu} + \bar{C} \int_M |\tilde{\nabla}^k \tilde{\text{Ric}}|^2 d\tilde{\mu}, \quad (6.20) \end{aligned}$$

in quanto $|\tilde{\text{Ric}}|$ è uniformemente limitato, per $\tau \in [0, +\infty)$. Introduciamo il tensore $\tilde{E} = \tilde{\text{Ric}} - \tilde{r}\tilde{g}/3$ e osserviamo che $\tilde{\nabla}^k \tilde{\text{Ric}} = \tilde{\nabla}^k \tilde{E}$, per $k \geq 1$, dal momento che $\tilde{r}$ è costante in spazio. Quindi, interpolando per mezzo della Proposizione 4.9, si ha

$$\bar{C} \int_M |\tilde{\nabla}^k \tilde{\text{Ric}}|^2 d\tilde{\mu} \leq \hat{C} \left(\int_M |\tilde{\nabla}^{k+1} \tilde{\text{Ric}}|^2 d\tilde{\mu} \right)^{k/(k+1)} \left(\int_M |\tilde{E}|^2 d\tilde{\mu} \right)^{1/(k+1)},$$

per $k \geq 1$ e applicando la disuguaglianza di Young, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\bar{C} \int_M |\tilde{\nabla}^k \tilde{\text{Ric}}|^2 d\tilde{\mu} \leq C' \varepsilon \int_M |\tilde{\nabla}^{k+1} \tilde{\text{Ric}}|^2 d\tilde{\mu} + C' \varepsilon^{-k} \int_M |\tilde{E}|^2 d\tilde{\mu},$$

per una costante $C' > 0$ dipendente solo da k (e non da ε). Scegliendo dunque $\varepsilon > 0$ tale che $C' \varepsilon < 2$ e sostituendo questa stima nella formula (6.20), otteniamo

$$\frac{d}{d\tau} \int_M |\tilde{\nabla}^k \tilde{\text{Ric}}|^2 d\tilde{\mu} \leq C'' \int_M |\tilde{E}|^2 d\tilde{\mu} \leq C e^{-2\delta\tau},$$

dove la seconda disuguaglianza segue dal Lemma 6.21. Segue che

$$\int_M |\tilde{\nabla}^k \tilde{\text{Ric}}|^2 d\tilde{\mu} \leq C_k,$$

per ogni $k \geq 1$ e per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

Usiamo poi la stima di interpolazione data dalla Proposizione 4.10, per ottenere, per ogni $k, n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$,

$$\int_M |\tilde{\nabla}^k \widetilde{\text{Ric}}|^{2n/k} d\tilde{\mu} \leq C \max_M |\tilde{E}|^{2(n/k-1)} \int_M |\tilde{\nabla}^n \widetilde{\text{Ric}}|^2 d\tilde{\mu} \leq \tilde{C}_{n,k} e^{-\delta' \tau},$$

per delle costanti $C, \tilde{C}_{n,k} \delta' > 0$ dipendenti da n e k .

Infine, ripetendo l'argomento che conduce alla Proposizione 4.14 (alla fine della Sezione 4.3), essendo tutte le metriche $\tilde{g}(\tau)$ equivalenti tra loro (cioè applicando le immersioni di Sobolev con una costante uniforme), concludiamo che per ogni $k \geq 1$, si ha

$$\max_M |\tilde{\nabla}^k \widetilde{\text{Ric}}| \leq C_k e^{-\delta \tau},$$

per delle costanti $C_k, \delta > 0$, per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

La seguente proposizione conclude la dimostrazione del Teorema 6.2.

Proposizione 6.23. Per $\tau \rightarrow +\infty$, le metriche $\tilde{g}(\tau)$ convergono alla metrica limite $\tilde{g}(\infty)$, data dalla Proposizione 6.22, nella topologia C^∞ . Dunque, $\tilde{g}(\infty)$ è una metrica C^∞ e $\widetilde{\text{Ric}}(\tau) \rightarrow \widetilde{\text{Ric}}(\infty)$. Di conseguenza, $(M, \tilde{g}(\infty))$ ha curvatura sezionale costante positiva.

Dimostrazione. La convergenza C^∞ delle metriche a $\tilde{g}(\infty)$ segue dal teorema di Ascoli–Arzelà e dall'equazione del flusso normalizzato, da cui la convergenza delle curvature.

Per il Lemma 6.21, il tensore $\widetilde{\text{Ric}} - \tilde{r}\tilde{g}/3$ converge uniformemente a zero, dunque $(M, \tilde{g}(\infty))$ ha il tensore di Ricci proporzionale alla metrica, quindi è a curvatura costante positiva, per il lemma di Schur. $\square$

BIBLIOGRAFIA

- [1] B. Andrews and C. Hopper, *The Ricci flow in Riemannian geometry. A complete proof of the differentiable $1/4$ -pinching sphere theorem*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2011, Springer-Verlag, 2011.
- [2] T. Aubin, *Métriques riemanniennes et courbure*, J. Differential Geom. **4** (1970), 383–519.
- [3] ———, *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer-Verlag, 1998.
- [4] S. Bando, *Real analyticity of solutions of Hamilton's equation*, Math. Z. **195** (1987), 93–97.
- [5] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, 2008.
- [6] C. Böhm and B. Wilking, *Manifolds with positive curvature operators are space forms*, Ann. of Math. (2) **167** (2008), 1079–1097.
- [7] V. Bour, *Fourth order curvature flows and geometric applications*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2010.
- [8] S. Brendle and R. Schoen, *Manifolds with $1/4$ -pinched curvature are space forms*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), 287–307.
- [9] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. theorie et applications*, Masson, 1983.
- [10] J. Cheeger and D. G. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry*, Amer. Math. Soc., 2008.
- [11] B.-L. Chen and X.-P. Zhu, *Uniqueness of the Ricci flow on complete noncompact manifolds*, J. Differential Geom. **74** (2006), 119–154.
- [12] B. Chow, S.-C. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo, and L. Ni, *The Ricci flow: techniques and applications. Part I. Geometric aspects*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 135, Amer. Math. Soc., 2007.

- [13] B. Chow, S.-C. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo, and L. Ni, *The Ricci flow: techniques and applications. Part II. Analytic aspects*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 144, Amer. Math. Soc., 2008.
- [14] B. Chow and R. S. Hamilton, *The cross curvature flow of 3-manifolds with negative sectional curvature*, Turkish J. Math. **28** (2004), 1–10.
- [15] B. Chow and D. Knopf, *The Ricci flow: an introduction*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 110, Amer. Math. Soc., 2004.
- [16] D. M. DeTurck, *Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors*, J. Differential Geom. **18** (1983), 157–162.
- [17] ———, *Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors (improved version)*, Collected Papers on Ricci Flow (H.-D. Cao, B. Chow, S.-C. Chu, and S.-T. Yau, eds.), Series in Geometry and Topology, vol. 37, Int. Press, 2003, pp. 163–165.
- [18] J. Jr. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.
- [19] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice–Hall Inc., 1964.
- [20] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, third ed., Universitext, Springer–Verlag, Berlin, 2004.
- [21] M. Giaquinta, *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, 1993.
- [22] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17** (1982), 255–306.
- [23] ———, *Four-manifolds with positive curvature operator*, J. Differential Geom. **24** (1986), 153–179.
- [24] ———, *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in differential geometry, Vol. II, Int. Press, 1995, pp. 7–136.

- [25] ———, *Four-manifolds with positive isotropic curvature*, *Comm. Anal. Geom.* **5** (1997), 1–92.
- [26] W. Klingenberg, *Contributions to Riemannian geometry in the large*, *Ann. of Math. (2)* **69** (1959), 654–666.
- [27] ———, *Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung*, *Comment. Math. Helv.* **35** (1961), 47–54.
- [28] E. M. Landis, *Second order equations of elliptic and parabolic type*, *Translations of Mathematical Monographs*, vol. 171, Amer. Math. Soc., 1998.
- [29] C. Mantegazza, *Smooth geometric evolutions of hypersurfaces*, *Geom. Funct. Anal.* **12** (2002), 138–182.
- [30] ———, *Lecture notes on mean curvature flow*, *Progress in Mathematics*, vol. 290, Birkhäuser/Springer, 2011.
- [31] C. Mantegazza and L. Martinazzi, *A note on quasilinear parabolic equations on manifolds*, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* **11** (5) (2012), 857–874.
- [32] M. J. Micallef and J. D. Moore, *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, *Ann. of Math. (2)* **127** (1988), 199–227.
- [33] H. T. Nguyen, *Isotropic curvature and the Ricci flow*, *Int. Math. Res. Notices* (2010), 536–558.
- [34] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, *ArXiv Preprint Server* – <http://arxiv.org>, 2002.
- [35] ———, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, *ArXiv Preprint Server* – <http://arxiv.org>, 2003.
- [36] ———, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, *ArXiv Preprint Server* – <http://arxiv.org>, 2003.
- [37] P. Petersen, *Riemannian geometry*, third ed., *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 171, Springer, 2016.

- [38] W.-X. Shi, *Deforming the metric on complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **30** (1989), 223–301.
- [39] ———, *Ricci deformation of the metric on complete noncompact Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **30** (1989), 303–394.
- [40] P. Topping, *Lectures on the Ricci flow*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 325, Cambridge University Press, 2006.