INTRODUZIONE AL FLUSSO DI RICCI

CARLO MANTEGAZZA

Nel corso vogliamo presentare alcuni risultati di base e una panoramica delle recenti applicazioni del flusso di Ricci per ottenere conclusioni geometriche/topologiche sulle varietà.

Il flusso di Ricci, introdotto nel 1982 da Richard Hamilton è il sistema di PDE

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric_{g(t)}$$

che descrive l'evoluzione nel tempo di una metrica $g(t)$ di una varietà riemanniana.

R. Hamilton – "Three–manifolds with positive Ricci curvature", *Journal of Differential Geometry* **17**, 1982, 255–306.

In particolare, verranno affrontati i problemi di esistenza e unicità, l'analisi delle singolarità e il comportamento asintotico del flusso, che può essere considerato una sorta di equazione del calore geometrica, infatti, il tensore di Ricci si può esprimere come

$$Ric_g = -\frac{2}{3}\Delta g$$

in una scelta appropriata di coordinate locali, da cui segue che, in effetti, abbiamo un sistema parabolico (degenere) quasilineare di equazioni alle derivate parziali su una varietà.

Vedremo che si ha un teorema di esistenza e unicità (e dipendenza continua dai dati iniziali) per tempi piccoli, se la varietà iniziale è compatta, inoltre le soluzioni soddisfano principi di confronto e stime sulle derivate simili al caso delle equazioni paraboliche nello spazio euclideo, ma sfortunatamente, le soluzioni non esistono in generale per ogni tempo, infatti per ragioni geometriche o analitiche si possono formare delle singolarità. Lo studio di tali singolarità è generalmente il punto cruciale del problema. In molte situazioni, il profilo asintotico di una singolarità è dato da soluzioni "autosimili", dette solitoni. Il loro studio e classificazione sono necessari per "continuare" il flusso dopo una singolarità, eseguendo una "chirurgia" topologica per ottenere asintoticamente conclusioni geometriche, come per esempio il teorema di Hamilton che asserisce che se una 3–varietà compatta ha un tensore di Ricci positivo, il flusso di Ricci (normalizzato) la deforma in una sfera (asintoticamente), oppure la (molto più difficile) dimostrazione di Grisha Perelman della congettura di Poincaré che verrà brevemente illustrata nei suoi punti principali.