Problema di uniformità di Serre nel caso split Cartan

Gabriele Ranieri (Centro Ennio De Giorgi)

Sia E una curva ellittica definita su $\mathbb{Q}$, non CM su $\overline{\mathbb{Q}}$. Serre ha dimostrato che esiste una costante $p_0(E)$ tale che, per ogni numero primo $p > p_0(E)$, la rappresentazione di Galois

$$\rho_{E,p}\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(E[p]) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

è suriettiva. Inoltre ha posto la seguente domanda :

Problema di uniformità di Serre. Esiste una costante assoluta P_0 tale che, per ogni curva ellittica E definita su $\mathbb{Q}$ non CM su $\overline{\mathbb{Q}}$ e per ogni numero primo $p > P_0$, la rappresentazione di Galois $\rho_{E,p}$ è suriettiva ?

È ben noto che il gruppo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ha la seguente lista di sottogruppi massimali propri : normalizzatori di gruppi di Cartan (split o non-split), sottogruppi di Borel e sottogruppi eccezionali.

In un recente lavoro, Bilu e Parent hanno fornito una risposta parziale al **Problema di uniformità di Serre**, dimostrando che esiste una costante assoluta tale che, per ogni curva ellittica E definita su $\mathbb{Q}$, non CM su $\overline{\mathbb{Q}}$ e per ogni numero primo p maggiore di tale costante, l'immagine di $\rho_{E,p}$ non è contenuta nel normalizzatore di un sottogruppo split di Cartan.

Nei nostri due seminari intendiamo spiegare gli strumenti utilizzati da Bilu e Parent per la dimostrazione del loro risultato e dare un'idea della loro dimostrazione.