Divergence-measure fields: generalizations of Gauss-Green formula with applications

Giovanni Eugenio Comi
matricola 839273

Relatore
Kevin Ray Payne

2014-2015

La formula di Gauss-Green classica

Teorema

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un aperto regolare; ossia, E è limitato, $(\bar{E})^\circ = E$ e ∂E è una $(N-1)$-varietà di classe C^1. Allora $\forall \phi \in C^1_c(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$

$$\int_E \mathrm{div}\phi \, dx = - \int_{\partial E} \phi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

dove ν_E è il versore normale interno a ∂E e $\mathcal{H}^{N-1}$ è la misura di Hausdorff $(N-1)$-dimensionale.

- Una funzione $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è *a variazione limitata*, $u \in BV(\Omega)$, se $u \in L^1(\Omega)$ e il gradiente distribuzionale Du è una misura di Radon finita; ossia, una misura di Borel a valori vettoriali con variazione totale su Ω finita.
- Un insieme di *perimetro (localmente) finito* E è un insieme la cui funzione caratteristica χ_E è (localmente) una funzione BV.
- Sottoinsiemi rilevanti del bordo topologico di E:
  - *bordo ridotto*, $\partial^* E$, sul quale è ben definito un versore ν_E, chiamato (a meno di un segno) *measure theoretic interior unit normal*;
  - *measure theoretic boundary*, $\partial^m E$, che coincide, a meno di un insieme di misura $\mathcal{H}^{N-1}$ nulla, con $\partial^* E$.
- $D\chi_E = \nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$.
- Regola di Leibniz: se $u, v \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, allora $uv \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e

$$D(uv) = u^* Dv + v^* Du,$$

dove u^* è il preciso rappresentante di u.

La formula di Gauss-Green per insiemi di perimetro finito

Teorema (De Giorgi e Federer)

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme di perimetro localmente finito. Allora, $\forall \phi \in C_c^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$,

$$\int_E \mathrm{div}\phi \, dx = -\int_{\partial^* E} \phi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

- Obiettivo: indebolire le ipotesi di regolarità sul campo vettoriale.
- Strategia: caratterizzare la divergenza in un senso debole (come una misura di Radon) e la traccia come limite approssimato o come densità di una misura di Radon.

Teorema (Vol'pert)

Sia $u \in BV(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ e sia $E \subset\subset \Omega$ un insieme di perimetro finito,

$$\int_{E^1} d\,\mathrm{div}(u) = \mathrm{div}u(E^1) = -\int_{\partial^* E} u_{\nu_E} \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

$$\int_{E^1 \cup \partial^* E} d\,\mathrm{div}(u) = \mathrm{div}u(E^1 \cup \partial^* E) = -\int_{\partial^* E} u_{-\nu_E} \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

dove E^1 è il measure theoretic interior di E e $u_{\pm\nu_E}$ sono rispettivamente la traccia interna ed esterna; ossia, il limite approssimato di u in $\mathcal{H}^{N-1}$-q.o. $x \in \partial^* E$ ristretto a $\Pi_{\pm\nu_E}(x) := \{y \in \mathbb{R}^N : (y-x)\cdot(\pm\nu_E(x)) \geq 0\}$.

Riepilogo della teoria preesistente

- Formula di Gauss-Green classica: campi $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ e aperti regolari come insiemi d'integrazione.
- Teoria BV: nuova caratterizzazione degli insiemi in base alle proprietà del gradiente distribuzionale della loro funzione caratteristica e regola di Leibniz nel senso delle misure di Radon.
- De Giorgi e Federer: estensione ad insiemi di perimetro finito.
- Vol'pert: estensione a campi vettoriali in $BV(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Divergence-measure fields: definizione

Definizione

- Un campo vettoriale $F \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N), 1 \leq p \leq \infty$ si dice *divergence-measure field*, e si scrive $F \in \mathcal{DM}^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$, se $\mathrm{div} F$ è una misura finita di Radon su Ω.
- Un campo vettoriale F è *localmente divergence-measure field*, e si scrive $F \in \mathcal{DM}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, se $F \in \mathcal{DM}^p(W; \mathbb{R}^N)$ per ogni $W \subset\subset \Omega$ aperto.

Confronto con $BV(\Omega;\mathbb{R}^N)$

- $BV(\Omega;\mathbb{R}^N)\cap L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)\subset\mathcal{DM}^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Infatti se $F=(F_1,...,F_N)\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ con $F_j\in BV(\Omega)$ per $j=1,...N$, allora risulta che D_iF_j sono misure di Radon finite per ogni i,j e quindi $\mathrm{div}F=\sum_{j=1}^N D_jF_j$ è una misura di Radon finita.
- La condizione $\mathrm{div}F=\mu$, con μ misura di Radon, ammette delle cancellazioni; perciò, per $N\geq 2$, l'inclusione è stretta. Ad esempio,

$$F(x,y)=(\sin\left(\frac{1}{x-y}\right),\sin\left(\frac{1}{x-y}\right))$$

soddisfa

$$F\in\mathcal{DM}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)\setminus BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2).$$

- Se $N \geq 2$ e $F \in \mathcal{DM}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ per $\frac{N}{N-1} \leq p \leq \infty$, allora si ha $||\mathrm{div} F|| \ll \mathcal{H}^{N-q}$, dove $q := \frac{p}{p-1}$ è l'esponente coniugato di p. Quindi, se $F \in \mathcal{DM}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$, allora $||\mathrm{div} F|| \ll \mathcal{H}^{N-1}$.
- Se $g \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ con supporto compatto in Ω e $F \in \mathcal{DM}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$, si ha $gF \in \mathcal{DM}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$

$$\mathrm{div}(gF) = g^* \mathrm{div} F + \overline{F \cdot Dg},$$

dove g^* è il preciso rappresentante di g e $\overline{F \cdot Dg}$ è il limite weak-star di $F \cdot \nabla(g * \rho_\delta)$ per $\delta \to 0$, che soddisfa $||\overline{F \cdot Dg}|| \ll ||Dg||$. Quindi in particolare è possibile usare questa formula nel caso $g = \chi_E$ con $E \subset\subset \Omega$ di perimetro finito.

Risultato Principale

Teorema

Sia $F \in \mathcal{DM}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$. *Se* $E \subset\subset \Omega$ *è un insieme di perimetro finito, allora esistono la traccia normale interna e quella esterna di* F *su* $\partial^* E$*; ossia, esistono* $(\mathcal{F}_i \cdot \nu_E), (\mathcal{F}_e \cdot \nu_E) \in L^\infty(\partial^* E; \mathcal{H}^{N-1})$ *tali che*

$$\mathrm{div} F(E^1) = -2\overline{\chi_E F \cdot D\chi_E}(\partial^* E) = -\int_{\partial^* E} \mathcal{F}_i \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

$$\mathrm{div} F(E^1 \cup \partial^* E) = -2\overline{\chi_{\Omega \setminus E} F \cdot D\chi_E}(\partial^* E) = -\int_{\partial^* E} \mathcal{F}_e \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

dove $\overline{\chi_E F \cdot D\chi_E}$ *e* $\overline{\chi_{\Omega\setminus E} F \cdot D\chi_E}$ *sono il limite weak-star, rispettivamente, delle successioni* $\chi_E F \cdot \nabla(\chi_E * \rho_\delta)$ *e* $\chi_{\Omega \setminus E} F \cdot \nabla(\chi_E * \rho_\delta)$ *per* $\delta \to 0$*. Inoltre,*

$$||\mathcal{F}_i \cdot \nu_E||_{L^\infty(\partial^* E; \mathcal{H}^{N-1})} \leq ||F||_{L^\infty(E^1;\mathbb{R}^N)},$$

$$||\mathcal{F}_e \cdot \nu_E||_{L^\infty(\partial^* E; \mathcal{H}^{N-1})} \leq ||F||_{L^\infty(\Omega \setminus E;\mathbb{R}^N)}.$$

Fonti

L'enunciato di questo teorema è analogo ai risultati esposti negli articoli

[CT] G.-Q. CHEN, M. TORRES, *Divergence-measure fields, sets of finite perimeter, and conservation laws*, Arch. Ration. Mach. Anal. **175** no. 2, 245-267 (2005).

[CTZ] G.-Q. CHEN, M. TORRES, W.P. ZIEMER, *Gauss-Green Theorem for Weakly Differentiable Vector Fields, Sets of Finite Perimeters, and Balance Laws*, Comm. on Pure and Applied Mathematics, Vol. LXII, 0242-0304 (2009).

[S] M. ŠILHAVÝ, *Divergence measure fields and Cauchy's stress theorem* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 113 (2005), 15-45.

Tuttavia il metodo della dimostrazione esposto nella tesi segue l'idea di Vol'pert di utilizzare la regola di Leibniz in modo da ottenere identità fra misure di Radon, e in seguito di valutarle su tutto Ω, senza avvalersi della teoria di approssimazione tramite insiemi con bordo liscio presentata in [CTZ].

Componente di salto della divergenza

- Si ha la seguente formula di rappresentazione della componente di salto della divergenza di F; ossia, per ogni insieme di perimetro finito $E \subset\subset \Omega$ si ha

$$\chi_{\partial^* E} \mathrm{div} F = (\mathcal{F}_i \cdot \nu_E - \mathcal{F}_e \cdot \nu_E)\, \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$$

nel senso delle misure di Radon su Ω. Perciò si ha anche

$$||\mathrm{div} F||(\partial^* E) = \int_{\partial^* E} |\mathcal{F}_i \cdot \nu_E - \mathcal{F}_e \cdot \nu_E| \, d\mathcal{H}^{N-1}$$

e, per ogni insieme di Borel $B \subset \partial^* E$,

$$\mathrm{div} F(B) = \int_B (\mathcal{F}_i \cdot \nu_E - \mathcal{F}_e \cdot \nu_E) \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

- Se F è continua, la traccia normale interna e quella esterna su $\partial^* E$ coincidono come funzioni in $L^\infty(\partial^* E; \mathcal{H}^{N-1})$, e ammettono un rappresentante che è il prodotto scalare classico $F \cdot \nu_E$. Quindi campi vettoriali continui non hanno componente di salto nella divergenza.

Teoremi di incollamento ed estensione

Grazie alla formula di Gauss-Green si ottengono teoremi di incollamento ed estensione:

- siano $F_1 \in \mathcal{DM}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$, $F_2 \in \mathcal{DM}^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \overline{W}; \mathbb{R}^N)$ e $W \subset\subset E \subset\subset \Omega$ per un insieme di perimetro finito E, allora si possono incollare F_1 e F_2 lungo il bordo di E; ossia, se si pone

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{se} \quad x \in E \\ F_2(x) & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus E \end{cases}$$

  si ha $F \in \mathcal{DM}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$;
- se $F \in \mathcal{DM}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega) < \infty$, allora si può estendere F a 0 fuori da Ω, in modo che l'estensione $\hat{F}$ sia in $\mathcal{DM}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$.

Applicazioni a sistemi non lineari iperbolici di leggi di conservazione

- Un sistema non lineare iperbolico di leggi di conservazione è il seguente problema di Cauchy

$$u_t + \operatorname{div}_x f(u) = 0 \ \text{ in } \ \mathbb{R}^{d+1}_+ := (0, +\infty) \times \mathbb{R}^d,$$
$$u = g \ \text{ su } \ \{0\} \times \mathbb{R}^d,$$

  dove $u : \mathbb{R}^{d+1}_+ \to U \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(U; \mathbb{R}^{m \times d})$, $\operatorname{div}_x f(u)$ è (almeno formalmente) la divergenza rispetto ad x della matrice f e g è il dato iniziale.
- In modo di selezionare un'unica soluzione debole si impone che venga soddisfatta la disuguaglianza di entropia di Lax

$$\partial_t \eta(u) + \operatorname{div}_x q(u) \leq 0$$

  nel senso delle distribuzioni per ogni coppia di entropia (η, q).
- Data una soluzione debole d'entropia $u(t, x) \in L^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_+; \mathbb{R}^m)$, il campo $(\eta(u), q(u))$ è in $\mathcal{DM}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d+1}_+; \mathbb{R}^{d+1})$ ed esiste una misura di Radon positiva μ_η tale che $\operatorname{div}_{(t,x)}(\eta(u), q(u)) = -\mu_\eta$.

Traccia sugli iperpiani

Per ogni $\tau > 0$, se una soluzione debole d'entropia u soddisfa una proprietà di annullamento in media sulle mezze bolle $B^+((\tau, y), r) := B((\tau, y), r) \cap \{(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1} : t > \tau\}$, allora $\eta(u)$ ha una traccia essenzialmente limitata $\eta(u)_{tr}$ $\mathcal{H}^d$-quasi ovunque sull'iperpiano $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1} : t = \tau\}$; ossia,

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\omega_d r^{d+1}} \int_{C^+((\tau, y), r)} \eta(u(t, x))\, dt\, dx = \eta(u)_{tr}(\tau, y),$$

dove $C^+((\tau, y), r)$ è il cilindro $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 < t - \tau < r, |x - y| < r\}$. Quindi, se scegliamo $\eta(u) = u_j$, $j = 1, ..., m$, otteniamo la traccia di ogni componente di u.

Vi ringrazio per l'attenzione!