

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Anno Accademico 1995/1996

TESI DI LAUREA

*Il teorema del disco topologico  
di Reifenberg  
ed il problema di Plateau  
in codimensione qualunque*

CANDIDATO

Emanuele Paolini

RELATORE

Chiar. mo Prof. Mariano Giaquinta

CONTRORELATORE

Chiar. mo Prof. Luigi Ambrosio

Typeset in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>, versione 1/12/1995, Bibliografia generata con B<sub>I</sub>B<sub>T</sub>E<sub>X</sub>.

Le figure che rappresentano le superfici minime sono state generate in formato PostScript mediante un programma ideato e scritto dal candidato in linguaggio C++. Tutte le altre figure sono state preparate mediante il package P<sub>S</sub>Tricks.

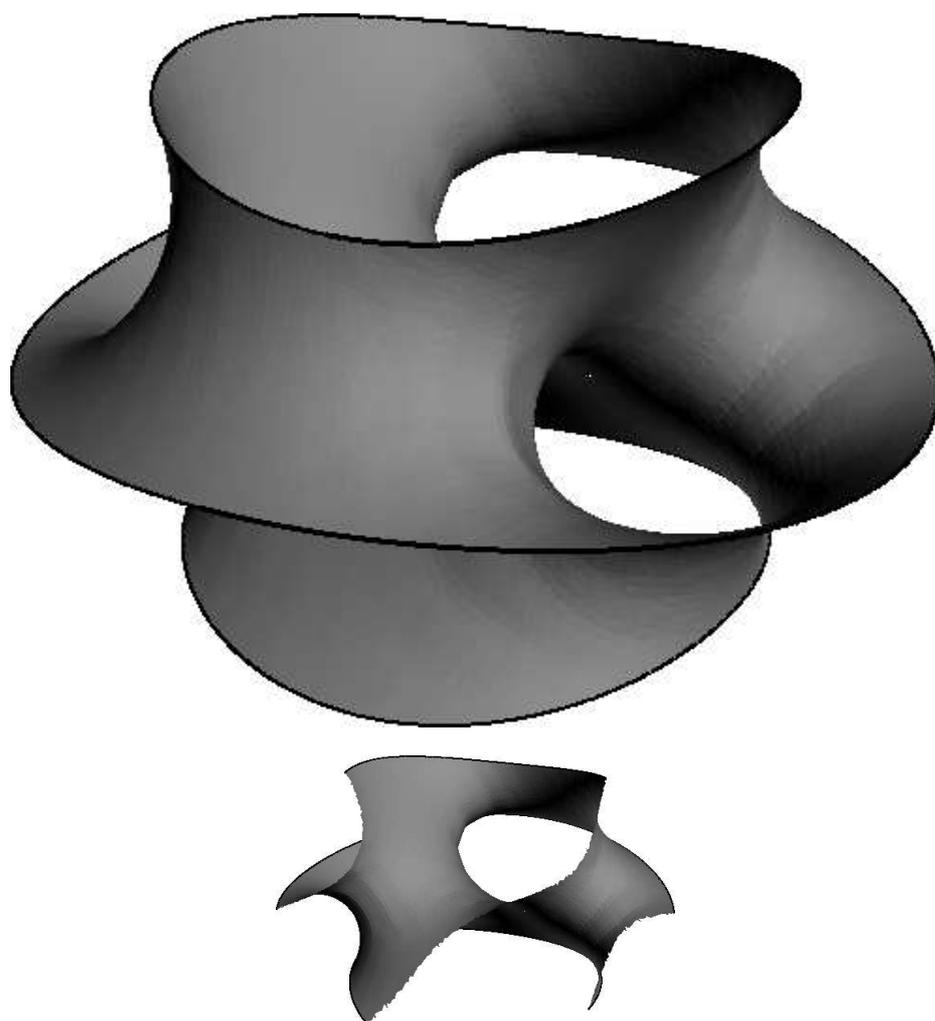


Figura 1: Una superficie minima con un manico e tre bordi (vista anche in sezione).



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>ix</b>
<b>1 Superfici, bordi e area</b>	<b>1</b>
1.1 Alcuni esempi di “superfici”	1
1.2 L’omologia di Čech	5
1.3 L’omologia aumentata	6
1.4 La distanza di Hausdorff	7
1.5 La misura sferica di Hausdorff	11
1.6 Proprietà del bordo $b(S, A)$	14
1.7 Coni e disuguaglianza isoperimetrica	17
<b>2 Il teorema del disco topologico</b>	<b>25</b>
2.1 Lemmi preliminari	26
2.2 Dimostrazione del teorema del disco topologico	27
2.2.1 Costruzione della successione $M_j$	28
2.2.2 Costruzione della successione $\sigma_j$	32
2.2.3 Definizione della mappa $\tau$ e verifica dell’iniettività	36
2.2.4 Surgettività di $\tau$	37
2.2.5 Hölderianità di $\tau$	38
<b>3 Regolarità delle superfici minime</b>	<b>41</b>
3.1 Stime di densità	43
3.2 La dimostrazione del teorema di regolarità	58
<b>4 Esistenza delle superfici minime</b>	<b>63</b>
4.1 Costruzione della successione minimizzante	63
4.2 La dimostrazione del teorema di esistenza	68
<b>Ringraziamenti</b>	<b>73</b>



# Elenco delle figure

1	Una superficie minima con un manico e tre bordi . . . . .	iii
2	Una superficie orientabile con bordo il nodo trifoglio . . . . .	ix
3	Superficie minima in forma parametrica. . . . .	x
4	Una curva chiusa per cui la superficie minima ha genere infinito. . . . .	x
1.1	Il nastro di Möbius: una superficie minima non orientabile. . . . .	2
1.2	Due dischi e la catenoide che ha lo stesso bordo. . . . .	3
1.3	Il triplo nastro di Möbius, la superficie orientata e quella non orientata con lo stesso bordo. . . . .	3
1.4	Una superficie con bordo gli spigoli del cubo. . . . .	4
1.5	Una superficie $S$ ottenibile come pellicola di sapone ma che si retrae sul proprio bordo $A$ . . . . .	5
1.6	Una disuguaglianza triangolare mista. . . . .	8
1.7	Un caso in cui $D(S, \Sigma)$ è molto piccolo rispetto a $D_{(p,r)}(S, \Sigma)$ . . . . .	9
1.8	Il primo passo della dimostrazione del Lemma 1.24. . . . .	10
1.9	Il secondo passo della dimostrazione del Lemma 1.24. . . . .	11
1.10	Una successione di superfici, con bordo fissato, che minimizza l'area ma il cui limite è una superficie con area infinita. . . . .	12
1.11	La costruzione fatta nella dimostrazione del Lemma 1.42. . . . .	17
1.12	La costruzione usata nel Lemma 1.44. . . . .	19
1.13	La superficie $A$ viene "affettata" con piani paralleli a $\Sigma$ . . . . .	21
3.1	Se $S_0$ incontrasse tutte le palle di raggio $2r_1$ contenute in $B(x_0, \frac{r_0}{4})$ , dovrebbe avere una misura molto maggiore di $\gamma_m \frac{r_0^m}{4}$ . . . . .	46
3.2	La superficie $S_k$ , l'iperpiano $\Sigma$ e il cono $C_\theta$ . . . . .	48
3.3	Il disco colorato ha raggio $\frac{1}{2}(1 - \cos \theta - \varepsilon)r_i$ . . . . .	57



# Introduzione

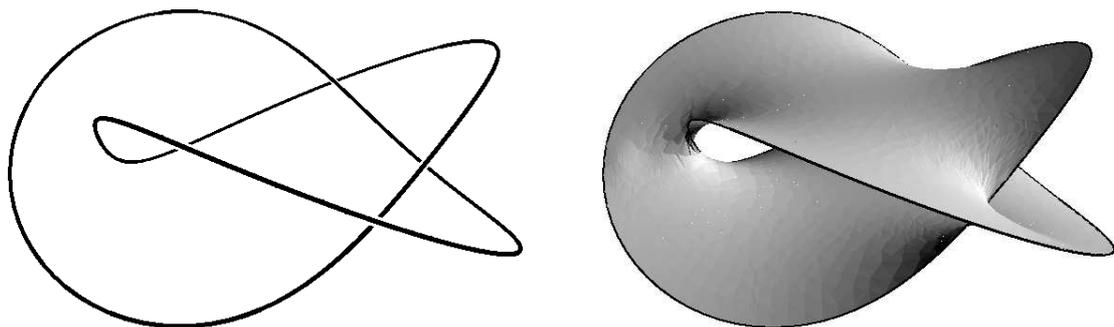


Figura 2: È possibile trovare una superficie orientabile che ha come bordo il nodo trifoglio. Questa superficie è topologicamente un disco con un manico.

Il *problema di Plateau* è il problema di trovare una superficie  $S$  di area minima con bordo  $A$  assegnato. Questo problema deve il suo nome al fisico belga J. Plateau (1801–1883) che studiò, essenzialmente in modo sperimentale, le superfici che si formano mettendo un telaio di fil di ferro nell'acqua saponata [22]. Trascurando la forza di gravità l'energia di una pellicola di sapone è dovuta alla tensione superficiale ed è quindi proporzionale all'area della superficie. Si scopre dunque che la superficie di una pellicola di sapone minimizza l'area. Matematicamente l'interesse per le *superfici minime* è dato dal fatto che queste sono dei buoni rappresentanti di classi di superfici. Per la trattazione matematica, la difficoltà iniziale e in qualche modo sostanziale è dare una buona definizione di *superficie*, di *area* e di *bordo*. Scelte diverse di queste nozioni portano a diverse formulazioni del problema di Plateau e all'uso di varie tecniche geometriche ed analitiche.

Nei primi approcci al problema di Plateau si considerano come superfici, le immagini di applicazioni continue con dominio fissato e con valori al bordo fissati (superfici in forma parametrica). Le difficoltà in questo approccio nascono essenzialmente dal fatto che riparametrizzando il dominio di base si possono ottenere più funzioni diverse che rappresentano la stessa superficie, rendendo quindi necessario lo studio delle classi di equivalenza del quoziente delle funzioni continue per il gruppo delle riparametrazioni. Il problema è però che tale gruppo non è compatto e quindi le classi di equivalenza non sono neppure chiuse nella topologia della convergenza uniforme.

Un'altro fenomeno dell'approccio parametrico è il fatto che le superfici minime risultanti non sono quelle che uno troverebbe usando le pellicole di sapone. Questo in quanto il processo di minimizzazione viene fatto mantenendo invariato il dominio di base, cosicché risulta fissato a priori il tipo di topologia della superficie risultante (si veda l'esempio in Figura 3). Inoltre, anche riuscendo a trovare la superficie di area minima tra tutte quelle con un certo genere<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Le superfici “classiche”, orientabili e con un solo bordo, sono topologicamente dei dischi con manici. Il genere di tali superfici è il numero di manici.

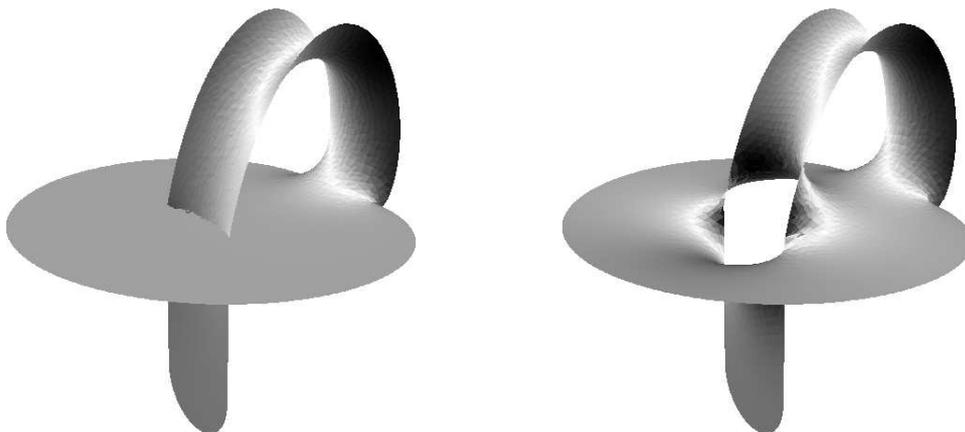


Figura 3: Un esempio di soluzione al problema di Plateau formulato in modo parametrico, e la soluzione ottenuta come pellicola di sapone. Si noti che la prima è un'immersione con autointersezioni di un disco topologico, mentre la seconda, di area minore, è un'immersione regolare di un disco con un manico.

può succedere che il minimo assoluto dell'area si abbia proprio quando il genere tende ad infinito (Figura 4). Osserviamo comunque che anche il problema di trovare superfici minime o immersioni minime di genere assegnato è di notevole interesse.

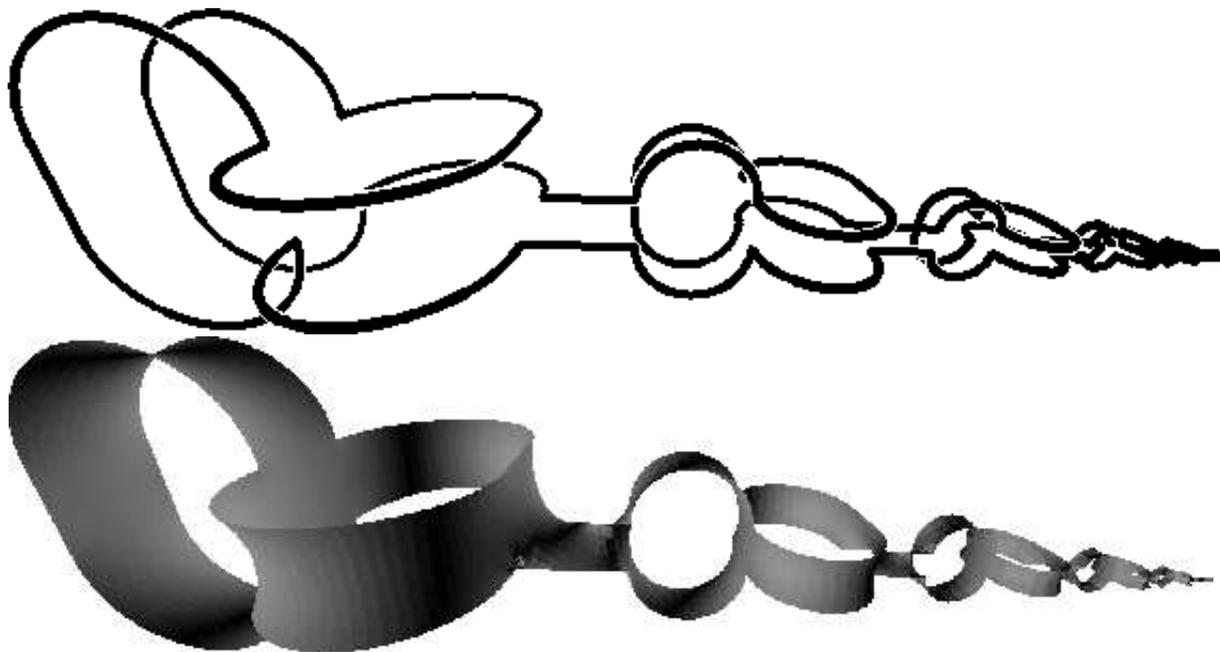


Figura 4: Una curva chiusa per cui la superficie minima ha genere infinito.

Il problema di Plateau per le superfici con dominio di tipo disco fu comunque risolto lavorando con parametrizzazioni conformi, in questo modo le superfici parametriche di area minima risultano essere sia conformi che armoniche. Le prime dimostrazioni vennero fatte da Douglas [10] e Radò [24, 23], successivamente queste dimostrazioni vennero semplificate da Courant [6, 7] e Tonelli [28] (si veda ad esempio [9]). Non si riuscì però, a risolvere il problema più generale di superfici di dimensione  $m$  in  $\mathbf{R}^n$ , in quanto, in questo caso, non si riescono a trovare delle funzioni per rappresentare le superfici che svolgano un ruolo analogo a quello delle funzioni conformi.

Negli anni '60, quasi contemporaneamente, De Giorgi, Reifenberg e Federer e Fleming trovarono delle formulazioni “deboli” che permisero di risolvere il problema di Plateau, in dimensione maggiore di due.

Nell’approccio di De Giorgi [8] una *superficie*  $m$ -dimensionale in  $\mathbf{R}^{m+1}$  viene rappresentata come frontiera d’insieme e l’*area* è la variazione totale della funzione caratteristica di tale insieme. Questo metodo delle *frontiere minime*, può essere applicato solo in codimensione uno e ovviamente le superfici risulteranno sempre orientate.

Federer e Fleming [14, 12, 15] hanno invece risolto il problema definendo come  $m$ -superfici le *correnti rettificabili*. Queste superfici sono rappresentate da un insieme rettificabile, (un insieme che è unione al più numerabile di immagini lipschitziane di sottoinsiemi misurabili di  $\mathbf{R}^m$ ) dotato di una struttura indicante l’orientazione e la molteplicità e che permette quindi di associare all’insieme una “corrente” (cioè un funzionale lineare sulle  $m$ -forme differenziali). Tramite le “correnti” si definisce semplicemente cosa sono il bordo e l’area di una superficie. Mentre le teorie di De Giorgi e di Federer e Fleming, sono state lungamente studiate ed estese dagli anni '60 fino ad oggi, l’approccio di Reifenberg, a parte i contributi di Morrey e Almgren<sup>2</sup>, è stato un poco trascurato. Forse una ragione di questo, oltre all’obiettiva difficoltà di lettura, è il fatto che le fondamenta dell’approccio di Reifenberg da una parte sono più di tipo algebrico-topologico che analitico-funzionale, e dall’altra richiedono di lavorare in un contesto estremamente generale, a priori privo di una qualsiasi struttura differenziale. In questa tesi si è voluto rivisitare questo approccio generale quasi di tipo insiemistico-topologico e presentare in modo organico alcune delle idee e delle tecniche sviluppate da Reifenberg.

Una *superficie*  $S$  è per Reifenberg un generico insieme compatto di  $R^n$ . Il *bordo* viene dato fissando un insieme  $L$  di cicli omologici in un compatto  $A$ . Si dice quindi che  $S$  ha bordo  $L$  se contiene  $A$  e se tutti i cicli omologici di  $L$  sono bordi omologici in  $S$ . Questa definizione di bordo, dipende anche dal gruppo dei coefficienti con cui si definisce l’omologia, variando i quali si possono ottenere diversi tipi di superfici. Infine, l’*area* della superficie è semplicemente la misura di Hausdorff dell’insieme  $S$ . Queste definizioni verranno date con precisione nel Capitolo 1, insieme ad alcuni esempi e alle proprietà di base di queste superfici che verranno ridimostrate a volte in modo più semplice.

In [25], Reifenberg dimostra che, con queste definizioni, esistono superfici di area minima (si noti che il funzionale area, in questo contesto, non è semicontinuo) e che su tali superfici, in un intorno di quasi tutti i punti, si può trovare un omeomorfismo con un disco. Ulteriori risultati, di tipo analiticità, vengono poi sviluppati in [26].

Come strumento fondamentale per studiare la regolarità dei minimi, Reifenberg dimostra un teorema (il “Teorema del disco topologico”) che dà delle condizioni geometriche per garantire che un dato insieme sia localmente omeomorfo ad un disco. Nel Capitolo 2 di questa tesi, viene data una dimostrazione più semplice di questo teorema, basandosi anche sulla riscrittura fatta da Morrey [20]. Inoltre, dimostreremo che l’omeomorfismo con il disco è Hölderiano. Il teorema del disco topologico è indipendente dalla teoria delle superfici minime, un’applicazione di questo teorema si ha ad esempio nello studio dell’insieme singolare di applicazioni armoniche [17].

Nei Capitoli 3 e 4, viene completata la trattazione del problema di Plateau, basandosi fondamentalmente sull’articolo originale di Reifenberg. In particolare si dimostra l’esistenza di superfici di area minima con bordo assegnato e che tali superfici nell’intorno di quasi

---

<sup>2</sup>Morrey [20] estende i risultati di Reifenberg alle varietà Riemanniane e Almgren [2, 3], basandosi sulle idee di Reifenberg, introduce la nozione di “varifold” e con Allard [1] ne sviluppa la teoria.

ogni punto verificano le ipotesi del Teorema del disco topologico e conseguentemente sono localmente delle varietà topologiche.

# Capitolo 1

## Superfici, bordi e area

In questo capitolo, daremo le definizioni necessarie a spiegare cosa si intende nell'articolo [25] di Reifenberg per superficie  $S$  con bordo  $A$ . Prendendo come  $S$  semplicemente un sottoinsieme compatto di  $\mathbf{R}^n$  riusciremo a esprimere il concetto di superficie, bordo e area, sfruttando solamente le proprietà metriche di  $S$  o meglio dell'ambiente.

Per esprimere il fatto che  $S$  ha bordo  $A$ , imponremo che  $A$  sia contenuto in  $S$ , e che  $A$  sia un "bordo" in  $S$  col significato di bordo dato dalla topologia algebrica e cioè nel senso che ogni ciclo omologico in  $A$  deve essere un bordo omologico in  $S$ . Per quanto riguarda la nozione di area, scegliamo la misura di Hausdorff sferica  $m$ -dimensionale che denoteremo con  $\mathcal{H}^m$  (si veda la Sezione 1.5).

Fissato un gruppo compatto abeliano  $G$ , se  $X$  e  $Y$  sono spazi topologici indicheremo con  $H_q(X, Y; G)$  (o più semplicemente  $H_q(X, Y)$  o ancora  $H_q(X)$  quando  $Y$  è vuoto) il  $q$ -esimo gruppo di omologia di Čech (si veda la Sezione 1.2).

**Definizione 1.1** *Siano  $A$  e  $S$  due compatti con  $A \subseteq S$ . Definiamo bordo algebrico  $b(S, A)$  di  $S$  rispetto ad  $A$  il nucleo dell'omomorfismo  $i_*: H_{m-1}(A) \rightarrow H_{m-1}(S)$  indotto dalla mappa di inclusione  $i: A \rightarrow S$  di  $A$  in  $S$ . Fissato un compatto  $A$  e  $L$  un sottogruppo di  $H_{m-1}(A)$ , diciamo che  $S$  è una  $m$ -superficie con bordo  $L$  se  $b(S, A) \supseteq L$ .*

**Definizione 1.2** *Dati  $A$  un compatto di  $\mathbf{R}^n$ ,  $G$  un gruppo compatto abeliano e  $L$  un sottogruppo di  $H_{m-1}(A; G)$ , indichiamo con  $\mathcal{S}(G, L)$  (o più semplicemente  $\mathcal{S}(L)$ ) lo spazio metrico di tutti i compatti  $S \supseteq A$  con bordo  $L$  munito della distanza di Hausdorff (si veda la Sezione 1.4).*

**Osservazione 1.3** Se prendiamo come  $L$  il sottogruppo generato da un elemento  $h \in H_{m-1}(A)$ , dire che  $b(S, A) \supseteq L$  è equivalente al dire che esiste un elemento  $k \in H_m(S, A)$  tale che  $\partial k = h$ . Questo perché la successione:

$$H_m(S, A) \xrightarrow{\partial} H_{m-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{m-1}(S)$$

è esatta.

### 1.1 Alcuni esempi di "superfici"

Si trova facilmente (vedi Proposizione 1.16) che nel caso  $m = 1$  qualunque connesso  $S \supseteq A$  è ammissibile come superficie con bordo  $A$ . Gli esempi dunque saranno tutti per semplicità con  $m = 2$  e  $n = 3$ .

Si noti innanzitutto che se  $H_{m-1}(S; G) = 0$  allora  $S$  è una superficie con bordo  $A$ , qualunque sia la scelta di  $L$  e di  $A \subseteq S$ . Se invece  $S$  si retrae su  $A$ , si trova (Lemma 1.33) che il bordo algebrico  $b(S, A)$  è nullo, e quindi la superficie  $S$  non ha bordo  $A$ , se non nel caso banale  $L = 0$ . Si può anche dimostrare che se  $A$  è una  $(m - 1)$ -sfera topologica,  $G = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  e  $\mathcal{H}^m(S) < \infty$  allora  $S$  si retrae su  $A$  se e solo se  $b(S, A) = 0$  ([25, Lemma 20A]).

**Esempio 1.4** Prendiamo  $A = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$  e  $L = H_1(A)$ . Allora il disco  $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$  è una superficie con bordo  $L$ , qualunque sia il gruppo  $G$  dei coefficienti, in quanto  $S$  è contrattile (si veda il Corollario 1.35).

Se invece prendiamo un qualunque  $S'$  chiuso  $A \subseteq S' \subseteq S$ ,  $S' \neq S$  e se  $L \neq 0$  allora  $S'$  non è una superficie con bordo  $L$ , in quanto  $S'$  si retrae su  $A$  (si veda il Lemma 1.38).

Scegliendo come gruppo di coefficienti  $G = \mathbf{Z}/_2\mathbf{Z}$ , si può rendere ammissibili, anche le superfici non orientabili. In generale se  $G = \mathbf{Z}/_k\mathbf{Z}$ , o comunque se in  $G$  ci sono elementi di ordine  $k$ , è possibile ottenere delle superfici con  $k$  fogli che si incontrano su un insieme di dimensione minore. Può essere utile scegliere  $G = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  in quanto tale gruppo ha elementi di ordine  $k$  per ogni  $k$  ( $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  può essere rappresentato dal segmento  $[0; 1]$  con l'identificazione  $0 = 1$ ).

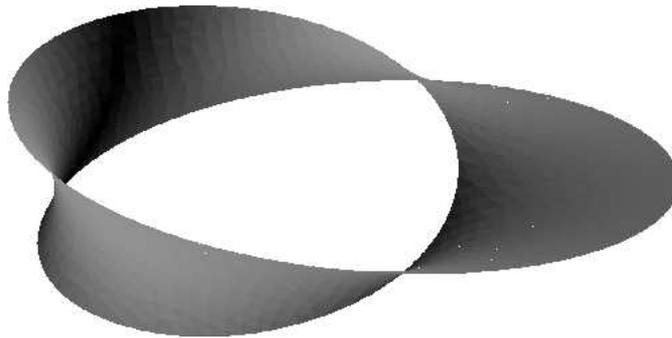


Figura 1.1: Il nastro di Möbius: una superficie minima non orientabile.

**Esempio 1.5** Sia  $S$  il nastro di Möbius e  $A$  la curva bordo di  $S$  (Figura 1.1). Se scegliamo  $G = \mathbf{Z}/_2\mathbf{Z}$  e  $L$  un qualunque sottogruppo di  $H_1(A)$ , otteniamo che  $b(S, A) \supseteq L$ , cioè  $S$  ha bordo  $L$ . Questa scelta di  $G$  corrisponde infatti a trascurare le orientazioni.

Sia ora invece  $G = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  e consideriamo l'isomorfismo  $\lambda: G \rightarrow H_1(A; G)$ . Possiamo ancora trascurare le orientazioni scegliendo un opportuno  $L$ . Se infatti come  $L$  si prende il sottogruppo generato da  $\lambda(\frac{1}{2})$ , abbiamo ancora che  $b(S, A) \supseteq L$ . Per qualunque altra scelta di  $L \neq 0$ , si ha  $S \notin \mathcal{S}(L)$  e quindi la superficie minima dovrà essere quella orientata.

Queste considerazioni si applicano a qualunque varietà  $S$  con bordo  $A$  nel senso che se  $S$  è orientabile, per ogni scelta di  $L$  e  $G$  si ha  $b(S, A) \supseteq L$  se invece  $S$  non è orientabile, perché sia una superficie ammissibile bisognerà scegliere un gruppo  $L$  con tutti gli elementi di ordine 2.

**Esempio 1.6** Prendiamo  $A = \{(x, y, z) \text{ t.c. } x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = \pm 1\}$  l'unione disgiunta di due circonferenze  $A_1, A_2$  (Figura 1.2). La superficie  $S_1$  data dai due dischi che bordano  $A_1$  e  $A_2$  è in ogni caso una superficie ammissibile, in quanto  $H_1(S_1; G) = 0$ .

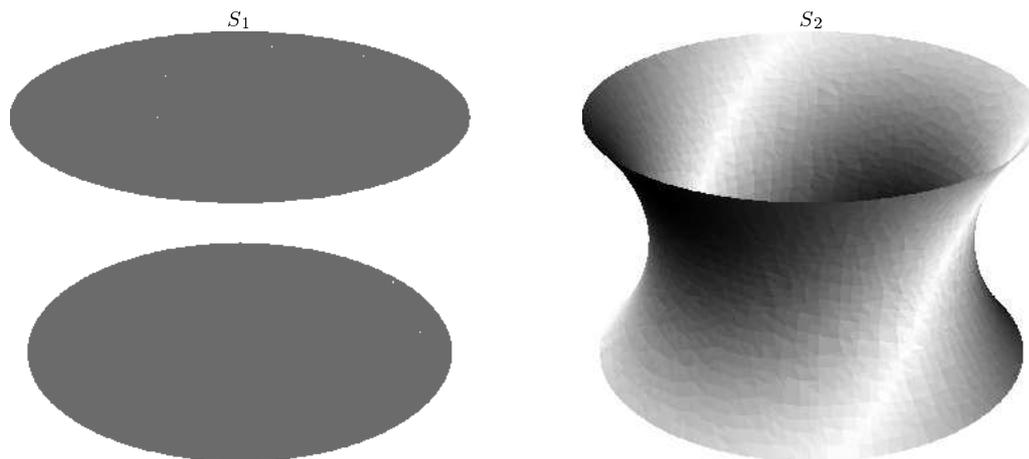


Figura 1.2: Due dischi e la catenoide che ha lo stesso bordo.

Vediamo invece, se  $S_2$  è la catenoide (Figura 1.2), per quali  $L$  e  $G$  si ha  $b(S_2, A) \supseteq L$ . Consideriamo dunque l'isomorfismo  $\lambda: G \oplus G \rightarrow H_1(A)$ . Se scegliamo come  $L$  il sottogruppo di  $H_1(A)$  generato da  $\lambda(g, -g)$  per un qualche  $g \in G$ , si trova facilmente che  $i_*(L) = 0$  e quindi  $b(S_2, A) \supseteq L$ . Questa scelta corrisponde ad orientare in senso opposto le due circonferenze. Scegliendo invece come  $L$  il sottogruppo generato da  $\lambda(g, g)$ , otterrei di nuovo i due dischi, in quanto si sta orientando le due circonferenze nello stesso verso.

Si può ottenere ancora la catenoide se si sceglie un sottogruppo  $L$  con tutti gli elementi di ordine 2. Questo corrisponde a trascurare le orientazioni.

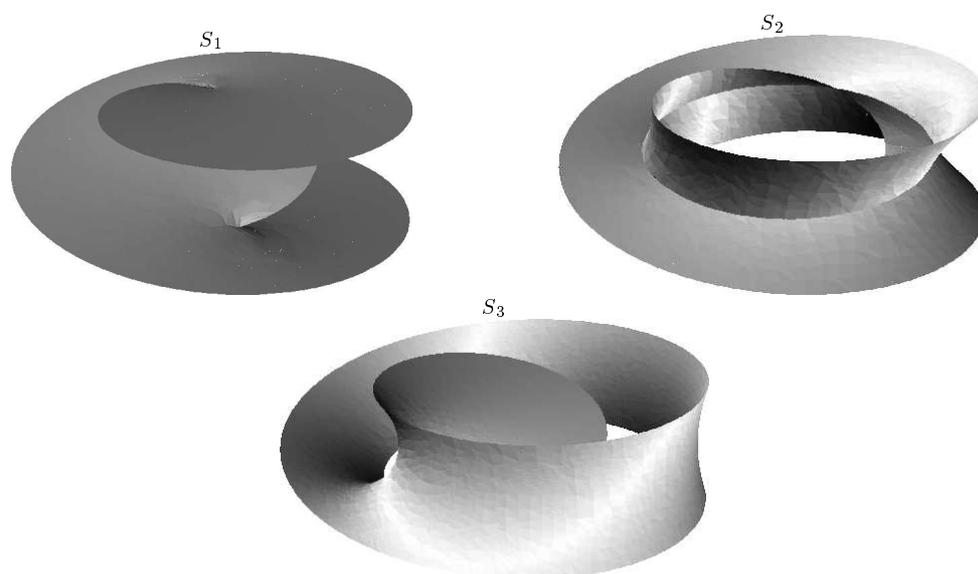


Figura 1.3: Il triplo nastro di Möbius ( $S_2$ ), la superficie orientata ( $S_1$ ) e quella non orientata ( $S_3$ ) con lo stesso bordo.

**Esempio 1.7** Sia  $A$  il bordo del “triplo nastro di Möbius”. Si consideri la superficie  $S_1$  della Figura 1.3, che corrisponde a tre dischi collegati mediante due “twist”. Essendo  $H_1(S_1) = 0$  tale superficie è sempre ammissibile come superficie bordante  $A$ .

Consideriamo ora  $G = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  e sia dato l'isomorfismo  $\lambda: G \rightarrow H_1(A)$ . Se si prende come  $L$  il sottogruppo generato da  $\lambda(\frac{1}{3})$ , una superficie  $S_2$  di area minore dell'area di  $S_1$  risulterà quella della Figura 1.3, cioè una superficie che non copre il buco centrale lasciato da  $A$  e con una curva singolare in cui si “attaccano” tre fogli ad un angolo di 120 gradi. Questa superficie non è una varietà, ma è realizzabile anche come pellicola di sapone.

Se invece si sceglie come  $L$  il sottogruppo generato da  $\lambda(\frac{1}{2})$ , si potrà ottenere come superficie, la superficie  $S_3$  rappresentata in Figura 1.3, cioè una superficie formata da un nastro di Möbius con attaccato un disco. L'area di  $S_3$  sarà minore di quella di  $S_1$  ma maggiore di quella di  $S_2$ .

Possiamo anche trovare superfici che bordano un insieme  $A$  che non sia esso stesso regolare, come nel seguente esempio.

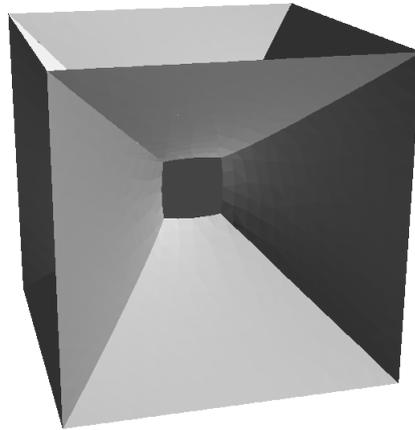


Figura 1.4: Una superficie con bordo gli spigoli del cubo.

**Esempio 1.8** Sia  $A$  l'insieme degli spigoli di un cubo. Allora esistono superfici  $S$  con  $b(S, A) = H_1(A)$ . Un esempio è la superficie minima raffigurata in Figura 1.4. Questa superficie ha un insieme di punti singolari sul perimetro di un quadrato “arrotondato”. Sui lati di tale quadrato si incontrano 3 fogli ad un angolo di 120 gradi, mentre sui vertici se ne incontrano 4 ad un angolo di circa 109 gradi (queste sono esattamente le singolarità che Plateau aveva osservato nelle pellicole di sapone).

Il numero di fogli che si incontrano in un punto, è legato alla densità dell'insieme in quel punto (se abbiamo 3 fogli che si incontrano su un segmento, tale segmento avrà densità  $\frac{3}{2}$ ). In base a questi esempi è dunque chiaro che non possiamo aspettarci che la densità di una superficie minima sia 1 ovunque, nè possiamo aspettarci la regolarità nei punti con densità maggiore di uno.

Anche questa nozione generale di superficie non risponde a tutte le possibili esigenze. Nell'appendice, scritta da Adams, all'articolo di Reifenberg [25], è dato un esempio di una superficie realizzabile come pellicola di sapone ma non ammissibile come superficie con le nostre definizioni.

**Esempio 1.9** Consideriamo la superficie  $S$  riprodotta nella Figura 1.5, cioè un nastro di Möbius unito con una sottile striscia ad un triplo nastro di Möbius. Siano dati  $G$  ed  $L$  qualunque. Sapendo che  $A$  è omeomorfo ad una curva chiusa abbiamo  $H_{m-1}(A) \cong G$

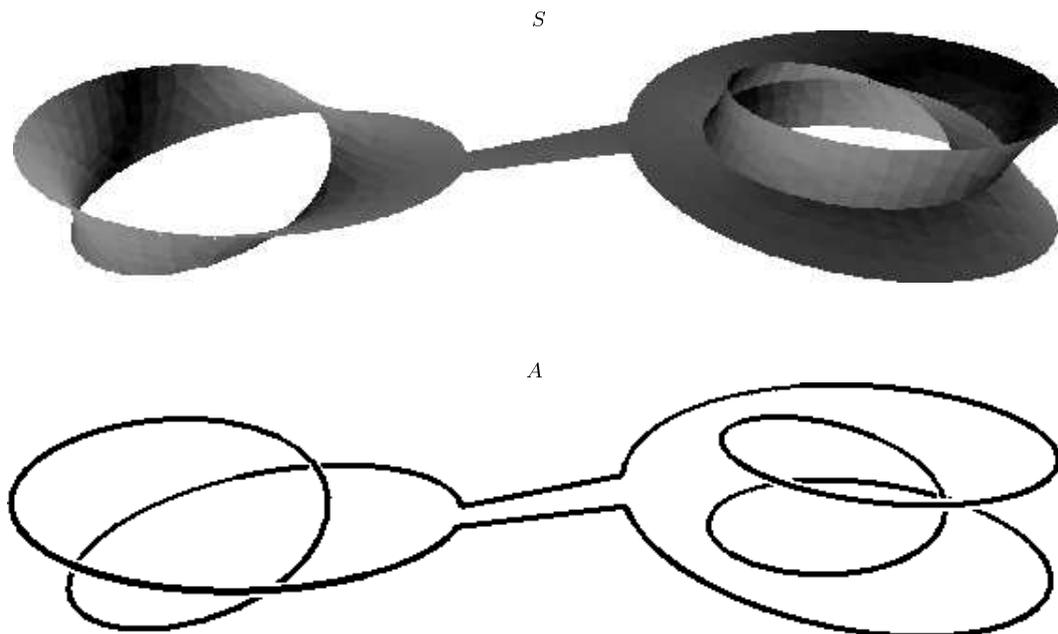


Figura 1.5: Una superficie  $S$  ottenibile come pellicola di sapone ma che si retrae sul proprio bordo  $A$ .

mentre  $S$  si retrae su due curve chiuse unite da un segmento e quindi  $H_{m-1}(S) \cong G \oplus G$ . A meno di isomorfismi possiamo dunque scrivere

$$\begin{aligned} i(S, A)_* : G &\rightarrow G \oplus G \\ x &\mapsto (2x, 3x) \end{aligned}$$

Perché sia  $b(S, a) \supseteq L$ , bisogna che preso un qualunque ciclo  $\alpha \cong g \in G$ , si abbia  $(2g, 3g) = (0, 0)$  che può succedere solo se  $g = 0$ . Dunque se  $L \neq 0$ , la superficie  $S$  non è ammissibile come superficie con bordo  $A$ .

La caratteristica peculiare di questa superficie  $S$  è che essa ammette una retrazione sul proprio bordo  $A$ . Di fatto, per avere un fenomeno di questo tipo, bisogna scegliere una superficie  $S$  che abbia “punti singolari”, come il triplo nastro di Möbius, in quanto una varietà non si retrae mai sul proprio bordo.

## 1.2 L'omologia di Čech

Richiamiamo brevemente la teoria omologica di Čech e alcune sue caratteristiche peculiari che la rendono molto utile nel trattare spazi compatti (per maggiori dettagli si veda [11]).

Dato un ricoprimento aperto  $\alpha: V_\alpha \rightarrow \tau(X)$  di  $X$ , dove  $V_\alpha$  è l'insieme degli indici e  $\tau(X)$  è la famiglia degli aperti di  $X$ , si definisce il gruppo  $H_{q,\alpha}(X)$  come il  $q$ -esimo gruppo di omologia simpliciale fatto sull'insieme di vertici  $V_\alpha$  prendendo come semplici gli insiemi di indici  $V \subseteq V_\alpha$  per i quali  $\bigcap_{v \in V} \alpha(v) \neq \emptyset$ . Il gruppo di omologia di Čech  $H_q(X)$  viene definito come limite inverso del sistema di gruppi  $H_{q,\alpha}(X)$ . Analogamente si definisce il gruppo di omologia relativa  $H_q(X, Y)$ .

Questi gruppi omologici  $H_q(X, Y)$  sono definiti quando  $G$  è un qualunque  $R$ -modulo, e se la coppia  $(X, Y)$  è compatta possono essere definiti anche con  $G$  un gruppo abeliano compatto. In effetti, l'omologia di Čech, non coincide esattamente con le altre teorie omologiche in quanto, in generale, non soddisfa il seguente

**Assioma 1.10 (di esattezza)** Sia  $(X, Y)$  una coppia di spazi topologici (cioè  $Y \subseteq X$ ). E siano  $i : Y \rightarrow X$  e  $j : X \rightarrow (X, Y)$  le mappe di inclusione. Allora la successione di omologia di  $(X, Y)$ :

$$\dots \xrightarrow{\partial} H_q(Y) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(Y) \xrightarrow{i_*} \dots$$

è esatta.

L'assioma è però verificato se la coppia  $(X, Y)$  è compatta (cioè  $X$  e  $Y$  compatti) e  $G$  è compatto, come del resto abbiamo imposto nella Definizione 1.1.

Il vantaggio dell'omologia di Čech, rispetto alle usuali teorie omologiche è la *continuità*: se la coppia compatta  $(X, Y)$  è il limite inverso delle coppie compatte  $(X_\alpha, Y_\alpha)$ , allora  $H_q(X, Y)$  è il limite inverso dei gruppi  $H_q(X_\alpha, Y_\alpha)$ .

In particolare, vale la seguente

**Proposizione 1.11** Se  $X_n$  è una successione decrescente ( $X_n \supseteq X_{n+1}$ ) di spazi topologici e  $X = \bigcap_n X_n$ , allora se definitivamente in  $n$  i gruppi  $H_q(X_n)$  sono uguali ad un certo gruppo  $H$ , allora  $H$  è il limite inverso di  $H_q(X_n)$  e  $H_q(X) = H$ .

Dalla continuità si può anche trovare che l'assioma di escissione vale in condizioni molto più generali.

**Assioma 1.12 (di escissione)** Sia  $(X, Y)$  una coppia di spazi topologici, e  $U$  un aperto di  $X$  tale che la sua chiusura  $\overline{U}$  sia contenuta nella parte interna di  $Y$ . Allora la mappa di inclusione  $i : (X \setminus U, Y \setminus U) \rightarrow (X, Y)$  induce un isomorfismo  $i_* : H_q(X \setminus U, Y \setminus U) \rightarrow H_q(X, Y)$  per ogni  $q$ .

**Proposizione 1.13** Se la coppia  $(X, Y)$  è compatta e  $G$  è un gruppo compatto, l'assioma di escissione vale per l'omologia di Čech preso qualunque aperto  $U \subseteq X$ .

### 1.3 L'omologia aumentata

In questa sezione definiremo i gruppi di omologia aumentata  $H_{m-1}^\sharp$  (augmented homology), che semplificheranno le notazioni nel caso particolare  $m = 1$  (si veda come riferimento [16]). Se si è interessati solamente al caso  $m > 1$ , basta ricordare che per  $m > 1$  si ha  $H_{m-1}^\sharp = H_{m-1}$ .

**Definizione 1.14** Sia  $X$  uno spazio topologico, e  $p_0 \in X$ . Consideriamo la mappa costante  $f : X \rightarrow \{p_0\}$  e sia  $\gamma$  l'isomorfismo tra  $H_0(\{p_0\})$  e  $G$ . Definiamo allora  $\partial^\sharp : H_0(X) \rightarrow G$  come  $\partial^\sharp = \gamma \circ f_*$ . Il gruppo di omologia aumentata  $H_q^\sharp$  viene definito come segue:

$$\begin{aligned} H_0^\sharp(X) &= \text{Ker } \partial^\sharp \\ H_q^\sharp(X) &= H_q(X) \quad \forall q > 0. \end{aligned}$$

Le successione esatte, restano esatte anche con l'omologia aumentata, ed essendo  $H_0^\sharp(\{p_0\})$  nullo, molte dimostrazioni si semplificano.

Nel nostro caso, l'utilità dell'omologia aumentata si può capire dalla seguente

**Proposizione 1.15** Dato un qualunque compatto  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $H_{m-1}^\sharp(A)$  è il più grande sottogruppo  $L$  di  $H_{m-1}(A)$  per cui si può trovare un compatto  $S$  con  $b(S, A) \supseteq L$ .

*Dimostrazione:*

Se prendiamo come  $S$  una palla chiusa contenente  $A$ , dal Lemma 1.34 abbiamo  $b(S, A) \supseteq H_{m-1}^\sharp(A)$ . D'altro canto l'unico caso in cui  $H_{m-1}^\sharp(A)$  non coincide con  $H_{m-1}(A)$  si ha per  $m = 1$ . Siano  $g: S \rightarrow \{p_0\}$  e  $f: A \rightarrow \{p_0\}$  le mappe costanti su un punto  $p_0 \in A$  e  $i: A \rightarrow S$  la mappa inclusione. Si ha ovviamente  $f_* = g_* \circ i_*$ . Se prendiamo un ciclo omologico  $\sigma \in b(S, A)$ , abbiamo  $i_*(\sigma) = 0$  quindi  $f_*(\sigma) = 0$  e anche  $\partial^\sharp(\sigma) = 0$  cioè  $\sigma \in H_0^\sharp(A)$ .  $\square$

Inoltre, per il caso  $m = 1$  si ha anche

**Proposizione 1.16** Comunque siano dati un compatto  $A$  e  $L$  un sottogruppo di  $H_0^\sharp(A)$ , se  $S \supseteq A$  è un compatto connesso, allora  $b(S, A) \supseteq L$ .

*Dimostrazione:*

Essendo  $S$  connesso abbiamo  $H_0^\sharp(S) = 0$  ed è facile verificare che

$$i_*(H_0^\sharp(A)) \subseteq H_0^\sharp(S)$$

dove  $i: A \rightarrow S$  è la mappa inclusione. Si ha dunque  $i_*(L) = 0$ .  $\square$

## 1.4 La distanza di Hausdorff

Vediamo ora alcune proprietà della distanza di Hausdorff che ci serviranno in seguito, soprattutto nel Capitolo 2 (si veda ad esempio [5]).

Se  $x$  e  $y$  sono due punti di  $\mathbf{R}^n$ , denoteremo con  $|x - y|$  la loro distanza. Dato poi un sottoinsieme  $Y$  di  $\mathbf{R}^n$  indichiamo con

$$d(x, Y) = \inf_{y \in Y} |x - y|$$

la distanza del punto dall'insieme.

**Definizione 1.17** Siano  $X$  e  $Y$  due sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^n$ . Definiamo la distanza puntuale di insiemi o distanza di Hausdorff:

$$D(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X) \right\}.$$

**Osservazione 1.18** Si noti che  $D(\{x\}, Y) = \sup_{y \in Y} |x - y|$  indica il raggio della più piccola palla chiusa centrata in  $x$  contenente  $Y$ . E si ha quindi  $d(x, Y) \neq D(\{x\}, Y)$ .

La proprietà caratterizzante di questa distanza, che si userà continuamente in seguito, è che se  $D(X, Y) \leq \varepsilon$  allora si ha che  $X$  è contenuto in un  $\varepsilon$ -intorno di  $Y$  e  $Y$  è contenuto in un  $\varepsilon$ -intorno di  $X$ . Per indicare gli  $\varepsilon$ -intorni degli insiemi, useremo la notazione

$$X + B(0, \varepsilon) = \{x + y \quad \text{t.c.} \quad x \in X \quad \text{e} \quad |y| < \varepsilon\}.$$

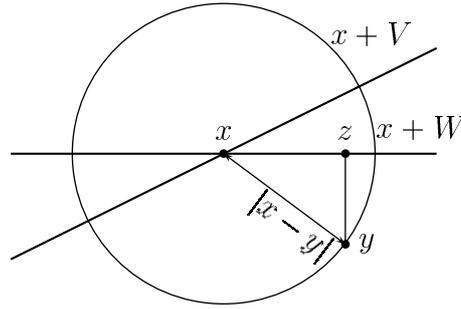


Figura 1.6: Una disuguaglianza triangolare mista:  $d(y, x + V) \leq d(y, x + W) + |x - y| D_{0,1}(W, V)$ .

**Osservazione 1.19** Si trova facilmente che  $D$  verifica la disuguaglianza triangolare. Tuttavia  $D$  è una distanza solo se ristretta ad insiemi chiusi, essendo

$$D(X, Y) = D(\overline{X}, \overline{Y}).$$

**Teorema 1.20** Una famiglia di compatti equilimitati (cioè tutti contenuti in una palla fissata) è un insieme compatto per la metrica di Hausdorff.

*Dimostrazione:*

In generale, se  $X$  è uno spazio metrico si può definire lo spazio degli insiemi chiusi  $\sigma(X)$  dotato della distanza di Hausdorff. Si dimostra quindi che se  $X$  è compatto, anche  $\sigma(X)$  lo è (si veda [19]). Avendo una famiglia di compatti equilimitati, possiamo prendere come  $X$  una palla chiusa contenente tali compatti.  $\square$

**Definizione 1.21** Per comodità useremo la seguente notazione

$$D_{x,r}(X, Y) = D(X \cap \overline{B}(x, r), Y \cap \overline{B}(x, r))$$

dove si intende anche  $D_{x,\infty}(X, Y) = D(X, Y)$ .

Se  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}^n$ , indicheremo con  $x + V$  il sottospazio affine parallelo a  $V$  e passante per  $x \in \mathbf{R}^n$ . Essendo gli spazi vettoriali invarianti per omotetia si può fare la seguente

**Osservazione 1.22** Se  $V$  e  $W$  sono due sottospazi vettoriali  $m$ -dimensionali di  $\mathbf{R}^n$ , dato un punto  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  e  $r > 0$ , si ha

$$D_{0,1}(V, W) = \frac{1}{r} D_{x_0,r}(x_0 + V, x_0 + W).$$

Il seguente lemma espone una disuguaglianza triangolare “mista” per le distanze  $d$  e  $D$ .

**Lemma 1.23** Siano  $x, y$  due punti e  $V, W$  due sottospazi vettoriali  $m$ -dimensionali di  $\mathbf{R}^n$ . Abbiamo allora

$$d(y, x + V) \leq d(y, x + W) + |x - y| D_{0,1}(W, V).$$

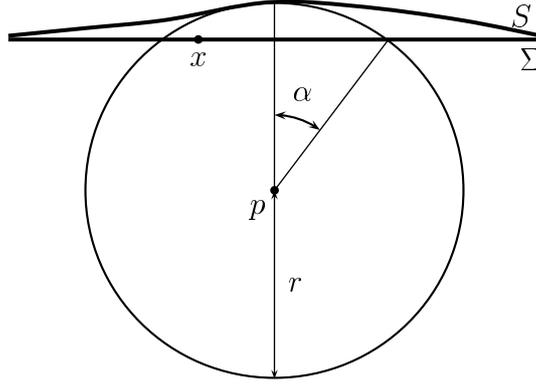


Figura 1.7: Un caso in cui  $D(S, \Sigma)$  è molto piccolo rispetto a  $D_{(p,r)}(S, \Sigma)$ .

*Dimostrazione:*

Sia  $z \in x + W$  il punto di minima distanza da  $y$  (si veda la Figura 1.6). Ovviamente abbiamo che  $|x - z| \leq |x - y|$  e quindi, in base all'Osservazione 1.22,  $d(z, x + V) \leq D_{x,|x-y|}(x + W, x + V)$ . Dunque disuguaglianza  $d(y, x + V) \leq |y - z| + d(z, x + V)$  si ottiene dunque subito la tesi.  $\square$

**Lemma 1.24** *Siano  $\Sigma$  un  $m$ -sottospazio affine,  $S$  un chiuso,  $p$  e  $p'$  due punti di  $\mathbf{R}^n$ ,  $0 < r < \infty$  e  $0 < r' \leq \infty$ . Supponiamo che  $d(p, \Sigma) \leq \frac{r}{2}$ ,  $\overline{B(p, r)} \cap S \neq \emptyset$  e  $B(p', r') \supseteq B(p, r)$ . Allora si ha la stima*

$$D_{p,r}(\Sigma, S) \leq 4 D_{p',r'}(\Sigma, S).$$

Il fattore 4 nella stima del lemma precedente non è ottimale, ma per quello che ci servirà in seguito avremmo potuto mettere una qualunque costante positiva. È invece interessante notare che è necessario che il piano  $\Sigma$  non sia troppo lontano dal punto  $p$ . Se ad esempio prendiamo un piano  $\Sigma$  ad una distanza  $r \cos \alpha$  da  $p$ , possiamo trovare un insieme  $S$  che disti meno di  $r - r \cos \alpha$  da  $\Sigma$  pur rimanendo fuori dalla palla  $B(p, r)$  (Figura 1.7). Se poi consideriamo l'insieme  $S' = S \cup \{x\}$  con  $x$  un qualunque punto di  $\Sigma \cap B(p, r)$  quando andiamo ad intersecare con la palla  $B(p, r)$  abbiamo

$$D_{p,r}(S', \Sigma) = D_{p,r}(\{x\}, \Sigma) \geq r \sin \alpha$$

e quindi

$$\frac{D_{p,r}(S', \Sigma)}{D_{p',r'}(S', \Sigma)} \geq \frac{r \sin \alpha}{r - r \cos \alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \infty$$

che ci impedisce di fissare una qualunque costante nella stima.

*Dimostrazione:*

Poniamo:

$$\begin{aligned} d &= D_{p,r}(\Sigma, S) \\ a &= \sup_{x \in \Sigma \cap \overline{B(p,r)}} d(x, S \cap \overline{B(p,r)}) \\ b &= \sup_{x \in S \cap \overline{B(p,r)}} d(x, \Sigma \cap \overline{B(p,r)}) \end{aligned}$$

e analogamente definiamo le quantità  $d'$ ,  $a'$  e  $b'$  in funzione di  $p'$  e  $r'$ . Abbiamo dunque  $d = \max(a, b)$  e  $d' = \max(a', b')$  e valgono le seguenti proprietà:

$$\forall x \in \Sigma \cap \overline{B(p, r)} \exists y \in S \cap \overline{B(p, r)} \quad \text{t.c.} \quad |x - y| = a \quad (1.1)$$

$$\forall x \in S \cap \overline{B(p, r)} \exists y \in \Sigma \cap \overline{B(p, r)} \quad \text{t.c.} \quad |x - y| = b \quad (1.2)$$

e le proprietà analoghe si hanno per  $a'$  e  $b'$ .

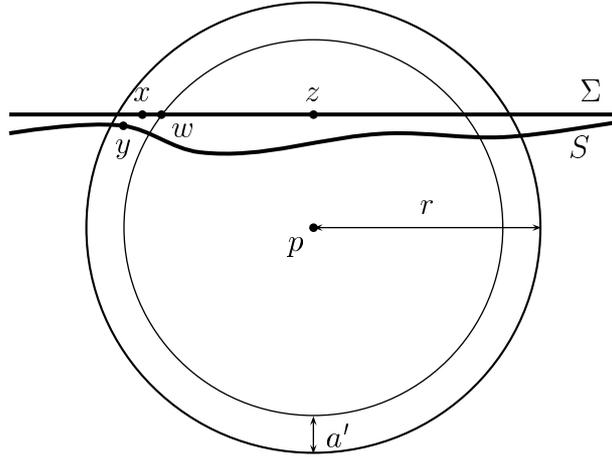


Figura 1.8: Il primo passo della dimostrazione del Lemma 1.24.

*Dimostriamo ora che  $a < 4a'$*  (Figura 1.8). Dato un punto generico  $x \in \Sigma \cap \overline{B(p, r)}$  bisogna trovare un punto  $y \in S \cap \overline{B(p, r)}$  per cui si abbia  $|x - y| \leq 4a'$ . Se abbiamo  $a' \geq r/2$  possiamo scegliere un qualunque punto  $y \in S \cap \overline{B(p', r')}$  per ottenere  $a \leq |x - y| \leq 2r \leq 4a'$ . Supponiamo dunque che sia  $a' < r/2$ . Sia  $z$  il punto di  $\Sigma$  a minima distanza da  $p$ : per ipotesi abbiamo  $|z - p| \leq \frac{r}{2}$ . Se prendiamo il punto  $w \in \Sigma \cap \overline{B(p, r - a')}$  più vicino a  $x$ , per la proprietà (1.1) riferita ad  $a'$  abbiamo che esiste un punto  $y \in S \cap \overline{B(p', r')}$  per cui  $|w - y| \leq a'$  e quindi  $y \in \overline{B(p, r)}$ . Otteniamo

$$|x - y| \leq |x - w| + |w - y| \leq |x - w| + a'$$

e basterà dunque verificare la disuguaglianza  $|x - w| \leq 3a'$  per ottenere  $a \leq 4a'$ . Considerando sul piano (bidimensionale) passante per  $p$ ,  $x$  e  $z$  le circonferenze con centro  $p$  di raggio  $r$  e  $r - a'$ , si vede facilmente che il caso peggiore si ha quando  $|z - p| = r/2$  e  $|x - p| = r$ , ottenendo dunque:

$$\begin{aligned} |x - w| &\leq \sqrt{3} \frac{r}{2} - \sqrt{(r - a')^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{3} \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{3}{4} r^2 - 2ra' + a'^2} = \\ &= \sqrt{3} \frac{r}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4a'}{3r} \left(2 - \frac{a'}{r}\right)}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{4a'}{3r} \left(2 - \frac{a'}{r}\right)\right)\right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{4}{3} a' \left(2 - \frac{a'}{r}\right) \leq 4 \frac{\sqrt{3}}{3} a' \leq 3a' \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\sqrt{1 - t} \geq 1 - t$  se  $t \in [0; 1]$ .

*Dimostriamo che anche  $b \leq 4b'$* . Sia stavolta  $x \in S \cap \overline{B(p, r)}$  un punto generico. Per la Proprietà 1.2 per  $b'$  sappiamo che esiste un punto  $y \in \Sigma \cap \overline{B(p', r')}$  per

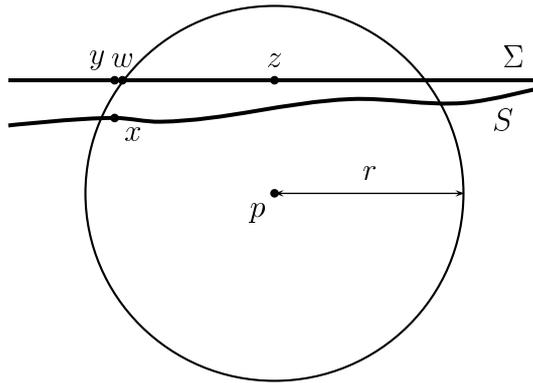


Figura 1.9: Il secondo passo della dimostrazione del Lemma 1.24.

cui vale  $|x - y| \leq b'$ . Sia ancora  $z$  il punto di  $\Sigma$  di minima distanza da  $p$ . Se vale  $b' \geq r/2$  abbiamo banalmente

$$|x - z| \leq |x - p| + |p - z| \leq r + \frac{r}{2} \leq 4b'$$

Supponiamo dunque che sia  $b' < r/2$ . Se prendo un punto  $w \in \Sigma \cap \overline{B(p, r)}$  trovo che vale

$$|x - w| \leq |x - y| + |y - w| \leq b' + |y - w|$$

e basterà dunque dimostrare che esiste un tale  $w$  per cui  $|y - w| \leq 3b'$ . Ancora, considerando sul piano per  $y, z$  e  $p$  la circonferenza centrata in  $p$  di raggio  $r$  si trova (si nota che il caso peggiore si ha per  $|x - p| = r$  e  $|z - p| = r/2$ , Figura 1.9)

$$\begin{aligned} |w - y| &\leq \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2} - b'\right)^2} - \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} r \left( \sqrt{1 + \frac{4b'}{3r} \left(1 - \frac{b'}{r}\right)} - 1 \right) \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} r \left( \frac{2b'}{3r} \left(1 - \frac{b'}{2}\right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} b' \left(1 - \frac{b'}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3} b' \leq 3b' \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\sqrt{1+x} \leq 1 + x/2$ .

Abbiamo dunque  $b \leq 4b'$  che insieme a  $a \leq 4a'$  ci porta alla tesi  $d \leq 4d'$ .  $\square$

## 1.5 La misura sferica di Hausdorff

Per calcolare l'area di una "superficie" (nel senso della Definizione 1.2) adatteremo la misura sferica di Hausdorff definita qui di seguito (per maggiori dettagli si veda [13, 2.10.2]).

**Definizione 1.25** Denoteremo con  $\gamma_m$  la misura di Lebesgue della palla  $m$ -dimensionale di  $\mathbf{R}^m$ .

**Definizione 1.26** Sia  $S$  un qualunque sottoinsieme di  $\mathbf{R}^n$ . Poniamo

$$\mathcal{H}_\delta^m(S) = \inf_{\{B(x_i, r_i)\} \in C} \sum_i \gamma_m r_i^m$$

dove  $C$  è la classe di tutti i ricoprimenti di  $S$  con palle aperte  $B(x_i, r_i)$  per cui si abbia  $r_i < \delta$ . Definiamo la misura sferica  $m$ -dimensionale di Hausdorff

$$\mathcal{H}^m(S) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^m(S) \quad \text{se } m > 0$$

e poniamo  $\mathcal{H}^0(S)$  uguale al numero di punti di  $S$ .

Normalmente quando si parla di misura di Hausdorff  $\mathcal{H}$ , si intende la misura ottenuta approssimando l'insieme con ricoprimenti qualunque, non solo con ricoprimenti composti esclusivamente da palle. Ci sono degli esempi di insiemi sui quali le due misure danno valori diversi (si veda [4]) ma se abbiamo insiemi abbastanza regolari, ad esempio rettificabili, le due misure coincidono. Siccome le superfici minime risulteranno essere regolari in questo senso, il tipo di misura usata non è così determinante.

La scelta, d'altra parte forzata in questo contesto generale, porta però a dei problemi. Infatti la misura di Hausdorff  $\mathcal{H}^m: \mathcal{S}(L) \rightarrow \mathbf{R}$ , non è semicontinua inferiormente rispetto alla distanza di Hausdorff, come vedremo nell'Esempio 1.29. La mancanza di semicontinuità ci costringerà, per trovare i minimi di  $\mathcal{H}^m$  su  $\mathcal{S}(L)$ , a scegliere opportune successioni minimizzanti sulle quali si abbia semicontinuità (si veda la Sezione 4.1).

Prima dell'esempio diamo la seguente definizione che ci servirà anche nel Capitolo 2

**Definizione 1.27** Dato un insieme  $S$  e un raggio  $r$ , diciamo che un insieme finito di punti  $X$  è un  $r$ -reticolo per  $S$  se

$$X \subseteq S, \quad \bigcup_{x \in X} B(x, r) \supseteq S$$

$$|x_1 - x_2| \geq r \quad \text{se } x_1, x_2 \in X \quad \text{e } x_1 \neq x_2$$

**Osservazione 1.28** In base alla definizione si ha ovviamente che per ogni  $r$  e  $S$  esiste un  $r$ -reticolo di  $S$ .

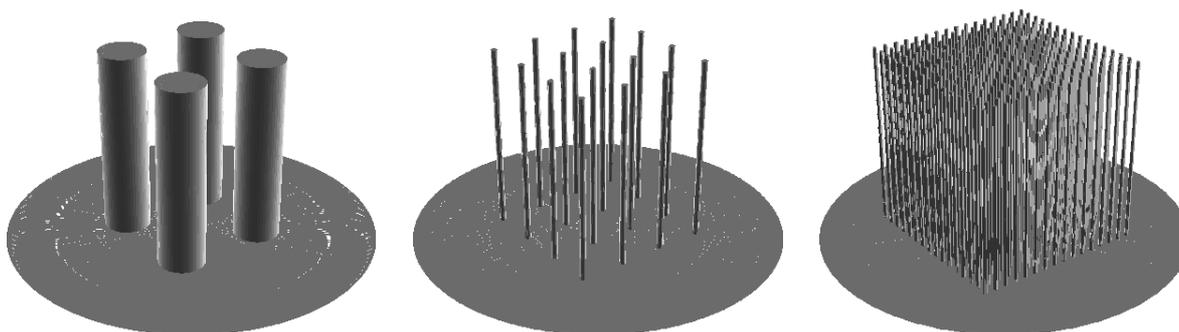


Figura 1.10: Una successione di superfici, con bordo fissato, che minimizza l'area ma il cui limite è una superficie con area infinita.

**Esempio 1.29** Siano date la circonferenza

$$A = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \quad \text{t.c.} \quad x^2 + y^2 = 1\}$$

ed il disco

$$S = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \quad \text{t.c.} \quad x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Prendiamo la successione infinitesima  $r_k = 2^{-k}$  e per ogni  $k \geq 1$  scegliamo un  $r_k$ -reticolo  $X_k$  di  $S \cap B(0, 1/2)$ . Possiamo costruire una superficie  $S_k$  prendendo tutti i punti di  $S$  che distano più di  $r_k^3$  da  $X_k$  e aggiungendoci i cilindri con base su  $S$  centrati nei punti di  $X_k$  di raggio  $r_k^3$  e altezza 1 (nella Figura 1.10 sono rappresentate le superfici  $S_0$ ,  $S_1$  e  $S_2$ ). Se  $N_k$  è il numero di punti di  $X_k$  abbiamo

$$\mathcal{H}^2(S_k) = \mathcal{H}^2(S) + N_k 2\pi r_k^3$$

dove il secondo addendo la somma delle aree delle superfici laterali dei cilindri. Stimmiamo  $N_k$  sapendo che le palle  $B(x, r_k/2)$  sono disgiunte al variare di  $x \in X_k$ :

$$\pi = \mathcal{H}^2(B(0, 1)) \geq \mathcal{H}^2\left(\bigcup_{x \in X_k} B(x, r_k)\right) = N_k \pi r_k^2$$

e quindi  $N_k \leq r_k^{-2}$  da cui si trova che  $\mathcal{H}^2(S_k) \rightarrow \pi = \mu(H_1(A))$  cioè  $S_k$  è una successione minimizzante. Si verifica però facilmente che  $S_k$  converge, per la distanza di Hausdorff all'insieme

$$S_0 = S \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.c. } x^2 + y^2 \leq 1/2 \text{ e } z \in [0; 1]\}$$

che è un compatto con misura 2-dimensionale infinita.

Ovviamente potevamo modificare di poco gli  $S_k$  in modo da renderli grafico di una funzione  $C^\infty$  e quindi il problema non sta tanto nella scelta della classe di superfici, quanto nel tipo di convergenza.

Nel dimostrare la regolarità delle superfici minime useremo spesso il seguente teorema classico di teoria della misura:

**Teorema 1.30 (Besicovitch-Vitali)** *Se  $\mathcal{H}^m(S) < \infty$ , data una famiglia di palle tale che in ogni punto di  $S$  sono centrate delle palle di raggio arbitrariamente piccolo (e che in particolare ricoprono  $S$ ), allora possiamo trovare una sottofamiglia di palle disgiunte che ricoprono  $S$  a meno di un sottoinsieme  $\mathcal{H}^m$ -trascurabile.*

Un'altro strumento che ci servirà in seguito è il seguente lemma, che è di per sè interessante in quanto esprime un legame tra il gruppo di omologia  $H_m$  e la misura di Hausdorff  $\mathcal{H}^m$ .

**Lemma 1.31** *Se  $\mathcal{H}^m(S) = 0$ , allora  $H_m(S) = 0$ .*

La dimostrazione di questo lemma è riconducibile alla nozione di dimensione topologica. Infatti si dimostra che se  $\mathcal{H}^m(S) = 0$  allora la sua dimensione topologica può essere al massimo  $m - 1$ . Questo significa che nell'insieme  $S$  non si trovano semplici di dimensione  $m$  e quindi  $H_m(S) = 0$ .

Il seguente lemma deriva da argomenti classici di teoria della misura (si veda ad esempio [13, 2.9.11, 2.10.19]).

**Lemma 1.32** *Se  $\mathcal{H}^m(S) < \infty$  e  $X \subseteq S$  è l'insieme dei punti  $x$  di  $S$  con*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^m(S \cap B(x, r))}{\gamma_m r^m} > 1$$

*e  $Y \subseteq S$  è l'insieme dei punti  $y$  di  $S$  con*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^m(S \cap B(y, r))}{\gamma_m r^m} = 0,$$

*allora  $\mathcal{H}^m(X) = 0$  e  $\mathcal{H}^m(Y) = 0$ .*

## 1.6 Proprietà del bordo $b(S, A)$

Assumeremo sempre che  $S$  e  $A$  siano insiemi compatti. Se  $Y \subseteq X$ , indichiamo con

$$\begin{aligned} i(X, Y): Y &\rightarrow X \\ i(X, X): X &\rightarrow X \end{aligned}$$

rispettivamente la mappa di inclusione la mappa identità. Fissato  $m$  sia  $b(S, A) = \text{Ker } i(S, A)_*$  con  $i(S, A)_*: H_{m-1}(A) \rightarrow H_{m-1}(S)$ , come dalla Definizione 1.1.

**Lemma 1.33** *Sia  $S \supseteq A$ . Se  $S$  si retrae su  $A$  (cioè esiste una mappa  $r: S \rightarrow A$  tale che  $r|_A = i(A, A)$ ) allora  $b(S, A) = 0$ .*

*Dimostrazione:*

Poniamo  $i = i(S, A)$  e  $I = i(A, A)$ . Per le proprietà di  $r$  si ha che  $r \circ i = I$ . Passando all'omologia otteniamo che  $r_* \circ i_* = I_*$  e quindi in particolare l'omomorfismo  $i_*$  dovrà essere iniettivo. Dunque  $b(S, A) = \text{Ker } i_* = 0$ .  $\square$

**Lemma 1.34** *Se  $H_{m-1}^\sharp(S) = 0$  (in particolare se  $S$  è contrattile) allora  $b(S, A) = H_{m-1}^\sharp(A)$ .*

*Dimostrazione:*

Si ha banalmente

$$\mathcal{H}_{m-1}^\sharp(A) \xrightarrow{i_*} \mathcal{H}_{m-1}^\sharp(S) = 0$$

e quindi, essendo  $i_* = 0$ , si ha la tesi.  $\square$

**Corollario 1.35** *Sia  $S = \overline{B^m}$  un disco topologico  $m$ -dimensionale e  $A$  il suo bordo. Sia  $L = H_{m-1}^\sharp(A)$ . Allora  $b(S, A) \supseteq L$ .*

**Lemma 1.36** *Sia  $f: (S, A) \rightarrow (S', A')$  e  $L$  un sottogruppo di  $H_{m-1}(A)$ . Sia  $L' = (f|_A)_*(L)$  e supponiamo  $b(S, A) \supseteq L$ . Allora  $b(S', A') \supseteq L'$ .*

*Dimostrazione:*

Siano  $i = i(S, A)$  e  $i' = i(S', A')$ . Allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H_{m-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{m-1}(S) \\ (f|_A)_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ H_{m-1}(A') & \xrightarrow{i'_*} & H_{m-1}(S') \end{array}$$

commuta. Preso un elemento  $\tau \in L' \subseteq H_{m-1}(S')$  questo deve provenire per ipotesi da un elemento  $\sigma \in L \subseteq H_{m-1}(A)$ . Dunque  $i'_*(\tau) = f_*(i_*(\sigma)) = f_*(0) = 0$  essendo  $i_*(L) = 0$ .  $\square$

**Corollario 1.37** *Sia  $L$  un sottogruppo di  $H_{m-1}(A)$ ,  $L \subseteq b(S, A)$  e sia  $S' \supseteq S$ .*

*Allora  $L \subseteq b(S', A)$ .*

**Lemma 1.38** *Sia  $A$  la sfera unitaria  $(m-1)$ -dimensionale di  $\mathbf{R}^m$  e  $D$  il disco chiuso di cui  $A$  è bordo. Allora  $b(S, A) = H_{m-1}^\sharp(A)$  se  $S \supseteq D$ , altrimenti  $b(S, A) = 0$ .*

*Dimostrazione:*

Se  $S \supseteq D$  per il Corollario 1.35 sappiamo che  $b(D, A) = H_{m-1}^\sharp(A)$  e per il Corollario 1.37 possiamo concludere che  $b(S, A) \supseteq b(D, A)$ . In caso contrario esiste un punto  $p_0 \in D \setminus A$  che non appartiene a  $S$ . Proiettando  $S$  su  $A$  lungo le rette passanti per  $p_0$  si può costruire una retrazione di  $S$  su  $A$  e dunque per il Lemma 1.33 si ha la tesi.  $\square$

Il seguente teorema mostra che una superficie  $S$  con bordo  $A$  “riempie”  $A$  nel senso della misura di Hausdorff.

**Teorema 1.39** *Sia  $\Sigma$  un sottospazio affine  $m$ -dimensionale di  $\mathbf{R}^n$ , sia  $A$  una sfera  $(m-1)$ -dimensionale contenuta in  $\Sigma$  e sia  $D$  il disco  $m$ -dimensionale del quale  $A$  è bordo. Allora  $b(D, A) = H_{m-1}^\sharp(A)$  e se  $S \supseteq A$  è una qualunque superficie, per cui  $b(S, A) \neq 0$  allora si ha  $\mathcal{H}^m(S) \geq \mathcal{H}^m(D)$ .*

*Dimostrazione:*

Il fatto che  $b(D, A) = H_{m-1}^\sharp(A)$  segue direttamente dal Lemma 1.38. Sia  $\pi: \mathbf{R}^n \rightarrow \Sigma$  la proiezione ortogonale su  $\Sigma$ , sia  $S' = \pi(S)$  e  $f = \pi|_S: S \rightarrow S'$ . Per il Lemma 1.36, essendo  $f|_A = i(A)$  si ha  $b(S', A) = b(S, A) \neq 0$  e quindi per il Lemma 1.38 si ha  $S' \supseteq D$ . Essendo  $f$  una funzione 1-lipschitziana otteniamo

$$\mathcal{H}^m(D) \leq \mathcal{H}^m(S') \leq \mathcal{H}^m(S).$$

$\square$

Il seguente teorema, insieme al Teorema 1.20 di compattezza, è fondamentale per la ricerca di minimi nella classe  $\mathcal{S}(L)$  delle  $m$ -superfici con bordo  $L \subseteq H_{m-1}(A)$ .

**Teorema 1.40** *Lo spazio  $\mathcal{S}(L)$  delle superfici con bordo  $L$ , è chiuso nello spazio dei compatti di  $\mathbf{R}^n$  munito della distanza di Hausdorff  $D$ .*

*Dimostrazione:*

Presa  $S'_k \subseteq \mathcal{S}(L)$  una successione di superfici e  $S$  un compatto tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D(S'_k, S) = 0$$

dobbiamo dimostrare che  $S \in \mathcal{S}(L)$ . Poniamo  $S_k = \overline{\bigcup_{l \geq k} S'_l}$ . Chiaramente gli  $S_k$  sono una successione decrescente di compatti e si ha  $S = \bigcap_k S_k$ . Essendo  $b(S_k, A) \supseteq L$  per ogni  $k$ , per la Proposizione 1.11 sulla continuità dell'omologia di Čech, si ha che  $b(S, A) \supseteq L$  e quindi  $S \in \mathcal{S}(L)$ .  $\square$

Data una superficie  $S \in \mathcal{S}(L)$  e una palla  $U = B(x, r)$  centrata su  $S$ , una costruzione che useremo spesso nel seguito è la seguente: si “taglia”  $S_1 = U \cap S$  da  $S$  e si “cuce” al suo posto una “toppa”  $S'_1$ , ottenendo la superficie  $S' = (S \setminus B(x, r)) \cup S'_1$ . Il teorema seguente ci dice che, con opportune ipotesi, vale  $S' \in \mathcal{S}(L)$ . Se  $S'_1$  è una superficie di cui si conosce l'area e l'omologia (ad esempio il cono  $C(x, S \cap \partial U)$ ), e se  $S$  è una superficie minima otteniamo, in questo modo, delle stime sull'area di  $S \cap U$ , sapendo che  $S'$  non può avere area minore di  $S$ .

**Teorema 1.41 (“taglia e cuci”)** *Sia  $L$  un sottogruppo di  $H_{m-1}(A)$  e  $b(S, A) \supseteq L$ . Sia  $U$  un aperto tale che  $\bar{U} \cap A$  sia vuoto,  $S_1 = S \cap \bar{U}$ ,  $S_2 = S \setminus U$  e  $A_1 = S_1 \cap S_2$ . Sia  $S'$  la superficie  $S_2 \cup S'_1$  ottenuta togliendo  $U$  da  $S$  e aggiungendo un compatto  $S'_1$  (la “toppa”) tale che  $b(S'_1, A_1) \supseteq b(S_1, A_1)$  e  $S'_1 \cap S_2 \subseteq A_1$ . Allora  $b(S', A) \supseteq L$ .*

*Dimostrazione:*

In base all’assioma di escissione nelle ipotesi “deboli” (si veda la Proposizione 1.13) sappiamo che la terna  $(S_1, S_2, A_1)$  è esatta, in quanto  $S_1 \setminus S_2$  e  $S_2 \setminus S_1$  sono aperti in  $S = S_1 \cup S_2$ . Dunque sappiamo che le successioni di Mayer-Vietoris

$$H_{m-1}(A_1) \xrightarrow{j_1} H_{m-1}(S_1) \oplus H_{m-1}(S_2) \xrightarrow{j_2} H_{m-1}(S) \tag{1.3}$$

e

$$H_{m-1}(A_1) \xrightarrow{j'_1} H_{m-1}(S'_1) \oplus H_{m-1}(S_2) \xrightarrow{j'_2} H_{m-1}(S') \tag{1.4}$$

sono esatte (dove  $j_1 = (i(S_1, A_1)_*, i(S_2, A_1)_*)$ ,  $j_2 = i(S, S_1)_* - i(S, S_2)_*$  ed in modo analogo abbiamo scelto  $j'_1$  e  $j'_2$ ).

Prendiamo un ciclo  $\alpha \in L \subseteq H_{m-1}(A)$ , e poniamo  $\beta = i(S_2, A)_*(\alpha)$ . Consideriamo poi l’elemento  $(0, \beta) \in H_{m-1}(S_1) \oplus H_{m-1}(S_2)$ . Sappiamo per ipotesi che  $i(S, S_2)_*(\beta) = i(S, A)_*(\alpha) = 0$  e quindi  $j_2(0, \beta) = i(S, S_1)_*(0) - i(S, S_2)_*(\beta) = 0$ . Per l’esattezza di (1.3) dovrà esistere un ciclo  $\alpha_1 \in H_{m-1}(A_1)$  con  $j_1(\alpha_1) = (0, \beta)$ , come nel diagramma riprodotto nella Tabella 1.1. Cioè

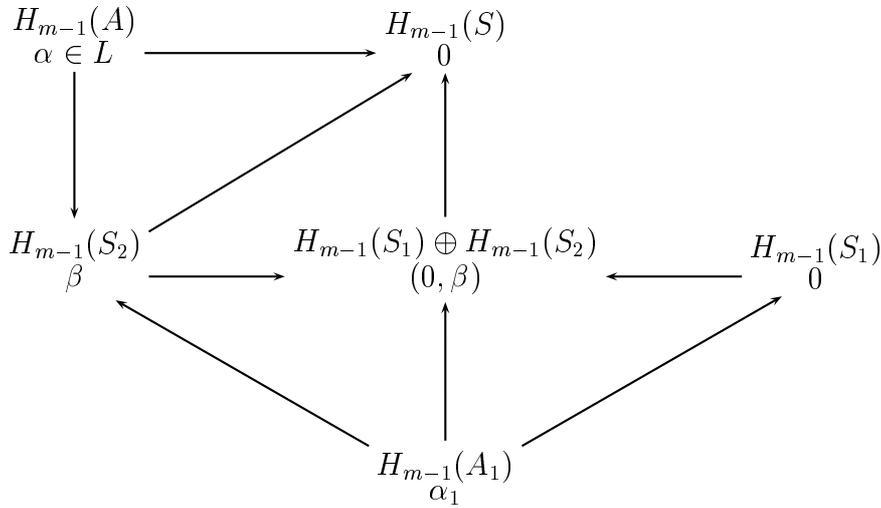


Tabella 1.1: Il diagramma commutativo usato nella dimostrazione del Teorema 1.41

$$i(S_1, A_1)_*(\alpha_1) = 0, \tag{1.5}$$

$$i(S_2, A_1)_*(\alpha_1) = \beta. \tag{1.6}$$

Dalla (1.5) otteniamo  $\alpha_1 \in b(S_1, A_1)$  e quindi per ipotesi  $\alpha_1 \in b(S'_1, A_1)$  cioè  $i(S'_1, A_1)_*(\alpha_1) = 0$ . Considerando ora la successione (1.4), usando anche (1.6), otteniamo  $j'_1(\alpha_1) = (0, \beta)$  e dall’esattezza di (1.4) otteniamo  $j'_2(0, \beta) = 0$  cioè  $i(S', S_2)_*(\beta) = 0$ . Ricordano infine che  $i(S', A)_*(\alpha) = i(S', S_2)_*(\beta) = 0$  otteniamo la tesi.  $\square$

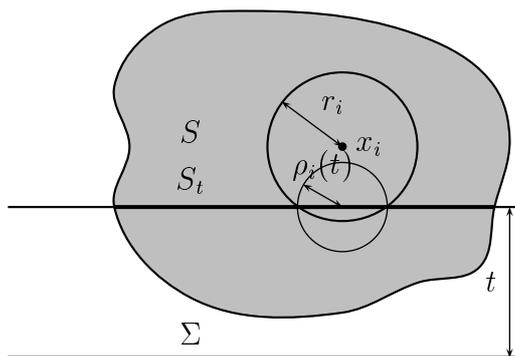


Figura 1.11: La costruzione fatta nella dimostrazione del Lemma 1.42.

## 1.7 Coni e disuguaglianza isoperimetrica

Gli insiemi che abbiamo scelto come superfici, avendo solo proprietà topologiche, possono risultare piuttosto difficili da trattare per quanto riguarda la teoria della misura. In particolare tali insiemi non è detto che siano rettificabili, quindi molti teoremi che risultano semplici per gli insiemi rettificabili, non saranno utilizzabili in questo contesto, se non modificandone leggermente gli enunciati e rifacendone la dimostrazione.

Un primo esempio si ha col seguente lemma, che supponendo  $S$  rettificabile sarebbe una semplice conseguenza della *formula di coarea*.

**Lemma 1.42** *Sia  $S$  un compatto di  $\mathbf{R}^n$  e sia  $S_t$  l'insieme dei punti di  $S$  ad una distanza  $t$  da un piano  $k$ -dimensionale  $\Sigma$ . Allora per ogni  $m$  si ha*

$$\int_0^\infty \mathcal{H}^{m-1}(S_t) dt \leq \mathcal{H}^m(S) \quad (1.7)$$

*Dimostrazione:*

Possiamo supporre che  $S$  sia disgiunto da  $\Sigma$ , infatti se il lemma vale in questo caso, varrà al limite, anche per un generico  $S$ .

Fissati  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$ , prendiamo un ricoprimento  $\{B(x_i, r_i)\}$  di  $S$  con  $r_i \leq \delta$ , tale che

$$\sum_i \gamma_m r_i^m \leq \mathcal{H}_\delta^m(S) + \varepsilon.$$

Se  $\rho_i(t)$  è il raggio della più piccola palla che contiene  $S_t \cap B(x_i, r_i)$ , si ha ovviamente

$$\mathcal{H}_\delta^{m-1}(S_t \cap B(x_i, r_i)) \leq \gamma_{m-1} \rho_i(t)^{m-1}.$$

Avendo supposto  $S$  disgiunto da  $\Sigma$ , se  $\delta < d(x_i, \Sigma)$  possiamo affermare che (Figura 1.11)

$$\rho_i(t) = \sqrt{r_i^2 - (t - d(x_i, \Sigma))^2} + o(\delta)$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \mathcal{H}_\delta^{m-1}(S_t) dt \\ & \leq \sum_i \int_{|t-d(x_i, \Sigma)| \leq r_i} \gamma_{m-1} \left( \sqrt{r_i^2 - (t - d(x_i, \Sigma))^2} \right)^{m-1} + o(\delta) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \int_{-r_i}^{r_i} \gamma_{m-1} \left( \sqrt{r_i^2 - s^2} \right)^{m-1} ds + o(\delta) \\
&= \sum_i \gamma_m r_i^m + o(\delta) \leq \mathcal{H}_\delta^m(S) + \varepsilon + o(\delta).
\end{aligned}$$

Facendo tendere  $\varepsilon$  e  $\delta$  a zero, si ha la tesi.  $\square$

L'esempio seguente illustra un caso in cui nell'equazione (1.7) si ha la disuguaglianza stretta e mostra che, per avere l'uguaglianza, bisogna che l'insieme  $S$  sia "perpendicolare" a  $\Sigma$ .

**Esempio 1.43** Sia  $\Sigma$  la retta  $y = 0$  nel piano  $\mathbf{R}^2 = \{(x, y)\}$  e sia  $S$  il segmento  $[(0, 0); (1, 1)]$ . Ovviamente si ha  $\mathcal{H}^1(S) = \sqrt{2}$ , mentre essendo  $S_t = \{(t, t)\}$  si ha

$$\int_0^\infty \mathcal{H}^0(S_t) dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Un'operazione che dovrà essere possibile fare sulle nostre superfici, è quella del "taglia e cuci". Sappiamo dal Teorema 1.41 che è possibile dato un qualunque aperto  $U$  tagliare  $S \cap U$  dalla superficie  $S$  e incollarci una "toppa"  $D \supseteq A = \partial U \cap S$ , se  $b(D, A) \supseteq b(S \setminus U, A)$ , senza modificare il bordo di  $S$ . Per fare questo, dato  $A$  sarebbe utile trovare una superficie standard da usare come "toppa", cioè una superficie  $D \supseteq A$  con  $b(D, A) = H_{m-1}(A)$ . La scelta più ovvia è prendere, come  $D$ , un cono fatto su  $A$ , essendo il cono una superficie contrattile. Il problema è che per insiemi non rettificabili, l'area del cono non è quello che ci si aspetta, infatti se anche supponiamo  $A \subseteq \partial B(x, r)$ , e prendiamo il cono  $C(x, A)$ , può succedere che sia

$$\mathcal{H}^m(C(x, A)) > \frac{r}{m} \mathcal{H}^{m-1}(A).$$

Questo fenomeno è dovuto al fatto che la misura di Hausdorff non è stabile rispetto al prodotto di insiemi. Infatti dato  $X \in \mathbf{R}^n$  in generale non è vero (a meno che  $X$  non sia rettificabili) che  $\mathcal{H}^{m+1}(X \times [0, 1]) = H^m(X)$  ma si ha solo una disuguaglianza con una certa costante  $K$ :

$$\mathcal{H}^{m+1}(X \times [0, 1]) \leq K \mathcal{H}^m(X). \quad (1.8)$$

In accordo con l'Equazione (1.8) si ha il seguente

**Lemma 1.44** *Siano  $A$  un compatto e  $\Sigma$  un piano  $m$ -dimensionale di  $\mathbf{R}^n$  con  $m < n$ . Consideriamo il "cono"  $C(\Sigma, A)$  definito come l'unione dei segmenti che uniscono ogni punto di  $A$  alla sua proiezione sul piano  $\Sigma$ . Allora se  $A \subseteq \Sigma + B(0, r)$  si ha*

$$\mathcal{H}^m(C(\Sigma, A)) \leq \frac{2^m \gamma_m}{\gamma_{m-1}} r \mathcal{H}^{m-1}(A).$$

*Dimostrazione:*

Consideriamo un ricoprimento di  $A$  fatto da palle  $B(x_i, r_i)$  di raggio  $r_i < \delta$  con la proprietà

$$\sum_i \gamma_{m-1} r_i^{m-1} \leq \mathcal{H}_\delta^{m-1}(A) + \delta.$$

Possiamo costruire un ricoprimento di  $C(\Sigma, A)$  con palle di raggio minore di  $2\delta$  nel modo seguente (Figura 1.12). Per ogni punto  $x_i$ , sia  $y_i$  il punto di  $\Sigma$  a minima distanza da  $x_i$ . Ovviamente si riesce a coprire tutto un intorno di raggio

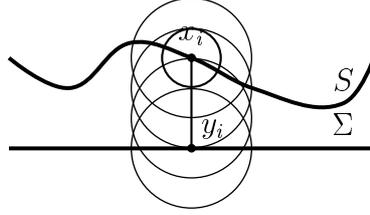


Figura 1.12: La costruzione usata nel Lemma 1.44.

$r_i$  del segmento  $[x_i; y_i]$  usando non più di  $r/r_i$  palle di raggio  $2r_i$  e siccome questi intorno ricoprono tutto  $C(\Sigma, A)$  si ha

$$\mathcal{H}_{2\delta}^m(C(\Sigma, A)) \leq \sum_i \frac{r}{r_i} \gamma_m (2r_i)^m \leq \frac{2^m \gamma_m}{\gamma_{m-1}} \sum_i \gamma_{m-1} r_i^{m-1} \leq \frac{2^m \gamma_m}{\gamma_{m-1}} r (\mathcal{H}_\delta^{m-1} + \delta).$$

Facendo tendere  $\delta$  a zero, si ottiene la tesi.  $\square$

Il seguente lemma ci dice che si possono trovare delle “toppe” che verificano la stima dell’area del cono a meno di  $\varepsilon$ .

**Lemma 1.45** *Sia  $A$  un compatto con  $A \subseteq B(x_0, r_0)$ . Allora per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste una superficie  $D$  con bordo  $b(D, A) \supseteq \mathcal{H}_{m-1}^\sharp(A)$ , contenuta nell’involucro convesso di  $A \cup \{x_0\}$  tale che*

$$\mathcal{H}^m(D) \leq \frac{r_0 \mathcal{H}^{m-1}(A)}{m} (1 + \varepsilon). \quad (1.9)$$

Daremo qui di seguito solo l’idea della dimostrazione, tralasciando i dettagli tecnici.

*Dimostrazione:*

Si osservi innanzitutto che se  $A$  fosse un poliedro, il cono fatto su  $A$  sarebbe a sua volta un poliedro e la disuguaglianza (1.9) varrebbe ovviamente con  $\varepsilon = 0$ .

Basterà dimostrare che, per ogni  $\varepsilon$ , si può trovare un poliedro  $A'$  contenuto nell’involucro convesso di  $A \cup \{x_0\}$  con le seguenti proprietà:

$$A' \subseteq A + B(0, \varepsilon) \quad (1.10)$$

$$\mathcal{H}^{m-1}(A') \leq (1 + \varepsilon) \mathcal{H}^{m-1}(A). \quad (1.11)$$

Infatti, avendo un tale poliedro  $A'$ , sfruttando il Lemma 1.44 posso trovare una superficie  $C'$  (ottenuta facendo il “cono” di  $A$  sulle varie facce di  $A'$ ) con  $\mathcal{H}^m(C') \leq o(\varepsilon) \mathcal{H}^{m-1}(A)$ . D’altra parte possiamo considerare il cono poliedrale  $C = C(x_0, A')$  per il quale vale la stima (sfruttando (1.10) e (1.11))

$$\mathcal{H}^m(C) \leq \frac{(r_0 + \varepsilon)}{m} \mathcal{H}^{m-1}(A') \leq (1 + o(\varepsilon)) \frac{r_0}{m} \mathcal{H}^{m-1}(A)$$

e prendendo  $D = C' \cup C$  otteniamo che ovviamente  $D$  è contenuto nell’involucro convesso di  $A$ , e come desiderato

$$\mathcal{H}^m(D) \leq (1 + o(\varepsilon)) \frac{r_0}{m} \mathcal{H}^{m-1}(A).$$

Usando il Teorema 1.41 si riesce poi a verificare che  $b(D, A) = \mathcal{H}_{m-1}^\sharp(A)$ . Dimostriamo dunque che esiste una superficie poliedrale  $A'$  con le proprietà (1.10) e (1.11).

Se  $m = 1$  si trova che  $\mathcal{H}^0(A) = \infty$ , nel qual caso la disuguaglianza diventa ovvia, oppure  $A$  è formato da un numero finito di punti e quindi  $A$  stesso è un poliedro. Dimostriamo dunque per induzione il caso  $m > 1$ . L'idea è di prendere un ricoprimento di  $A$  fatto con palle  $B(x_i, r_i)$  per cui si abbia

$$\mathcal{H}^{m-1}(A) \geq \sum_i \gamma_{m-1} r_i^{m-1} - \varepsilon$$

e per ogni  $i$  considerare gli insiemi  $A_i = A \cap B(x_i, r_i)$  e  $X_i = A \cap \partial B(x_i, r_i)$ . Per ipotesi induttiva possiamo trovare delle poligonali  $X'_i$  che "approssimino"  $X_i$ . Prendiamo quindi i coni  $A'_i = C(x_i, X'_i)$  e costruiamo  $A'$  unendo assieme tutti questi  $A'_i$ . La proprietà (1.10) è facilmente verificata, quello che invece non è ovvio è dimostrare (1.11). Dobbiamo dimostrare cioè che  $\mathcal{H}^{m-1}(A'_i) \leq (1 + o(\varepsilon))\mathcal{H}^{m-1}(A_i)$  ovvero che

$$\mathcal{H}^{m-1}(A_i) \geq (1 + o(\varepsilon)) \frac{r_i}{m-1} \mathcal{H}^{m-2}(X_i). \quad (1.12)$$

Se (1.12) non fosse vera per nessun  $r_i$  sufficientemente piccolo, esisterebbe un certo  $r_i^*$  per cui, se  $r < r_i^*$ , si avrebbe (sfruttando il Lemma 1.42)

$$\begin{aligned} \int_0^r \mathcal{H}^{m-2}(A \cap \partial B(x_i, t)) dt &\leq \mathcal{H}^{m-1}(A \cap B(x_i, r)) & (1.13) \\ &\leq (1 - o(\varepsilon)) \frac{r}{m-1} \mathcal{H}^{m-2}(A \cap \partial B(x_i, r)). \end{aligned}$$

Ponendo  $\psi(r) = \int_0^r \mathcal{H}^{m-2}(A \cap \partial B(x_i, t)) dt$ , otteniamo dunque, per quasi ogni  $r$

$$\psi(r) \leq (1 - o(\varepsilon)) \frac{r}{m-1} \psi'(r)$$

e quindi

$$\frac{\psi'(r)}{\psi(r)} \geq \frac{m-1}{(1 - o(\varepsilon)) r}$$

che integrato da  $r_1$  a  $r_2$  ci dà

$$\frac{\psi(r_2)}{\psi(r_1)} \geq \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{\frac{m-1}{1-o(\varepsilon)}}.$$

Facendo tendere  $r_1$  a zero otteniamo quindi  $\psi(r) = o(r^{m-1})$  e  $\psi'(r) = o(r^{m-2})$  e dalla (1.13) otteniamo dunque

$$\mathcal{H}^{m-1}(A \cap B(x_i, r)) = o(r^{m-1}).$$

Per il Lemma 1.32 questo può succedere solo in un insieme trascurabile di punti, che possiamo supporre non siano i centri  $x_i$  delle nostre palle.  $\square$

**Lemma 1.46 (disuguaglianza isoperimetrica)** *Esiste una costante  $K = K(n, m)$  tale che se  $A$  è un chiuso limitato di  $\mathbf{R}^n$  e  $m \geq 2$ , esiste una superficie  $S$ , contenuta nell'involucro convesso di  $A$ , con bordo  $b(S, A) = H_{m-1}(A)$ , e tale che*

$$\mathcal{H}^m(S) \leq K \mathcal{H}^{m-1}(A)^{\frac{m}{m-1}}$$

e

$$D(S, A) \leq K \mathcal{H}^{m-1}(A)^{\frac{1}{m-1}}.$$

La dimostrazione di questo lemma viene fatta per induzione su  $m$ . Faremo qui di seguito la dimostrazione del caso base  $m = 2$ , che dovrebbe chiarire qual è l'idea della dimostrazione e accenneremo soltanto la dimostrazione del passo induttivo (si veda [25, Lemma 8]).

*Dimostrazione:*

Sia  $m = 2$  e sia  $l = \mathcal{H}^{m-1}(A)^{\frac{1}{m-1}}$ . Vogliamo innanzitutto dimostrare che  $A$  è contenuto in una unione disgiunta di cubi di lato  $2l$ . Consideriamo un generico piano  $(n-1)$ -dimensionale  $\Sigma$  e prendiamo delle coordinate  $x_1, \dots, x_n$  per le quali  $\Sigma = \{x_1 = 0\}$ . Definiamo quindi

$$\Sigma_t = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{x_1 = (t + 2lk)\}.$$

Dal Lemma 1.42 otteniamo

$$\int_0^{2l} \mathcal{H}^0(A \cap \Sigma_t) dt \leq \mathcal{H}^1(A) = l$$

e quindi dovrà esistere un  $t_0$  tale che  $\mathcal{H}^0(A \cap \Sigma_{t_0}) = 0$  cioè per questo  $t_0$  troviamo che  $A$  non interseca  $\Sigma_{t_0}$ . Usando questo procedimento con  $n$  iperpiani ortogonali tra loro, abbiamo dimostrato che  $A$  si può suddividere in insiemi disgiunti  $A_i$  ognuno dei quali è contenuto in un cubo  $K_i$  di lato  $2l$ .

Dunque se prendiamo un generico punto  $x_i \in A_i$ , otteniamo  $A_i \subseteq K_i \subseteq B(x_i, 2l\sqrt{n})$  e prendendo  $S_i = C(x_i, A_i)$  applicando il Lemma 1.44 abbiamo

$$\mathcal{H}^2(S_i) \leq 2\pi \cdot 2l\sqrt{n}\mathcal{H}^1(A_i).$$

Ponendo quindi  $S = \bigcup_i S_i$ , abbiamo che  $S$  è contenuto nell'involucro convesso di  $A$ , vale  $b(S, A) = H_1(A)$  (essendo ogni cono contrattile) e si ha

$$\mathcal{H}^2(S) = \sum_i \mathcal{H}^2(S_i) \leq 4\pi\sqrt{n}l \cdot \sum_i \mathcal{H}^1(A_i) \leq 4\pi\sqrt{n}l\mathcal{H}^1(A) \leq K\mathcal{H}^1(A)^{\frac{m}{m-1}}$$

se prendiamo  $K > 4\pi\sqrt{n}$  otteniamo dunque la tesi per  $m = 2$ .

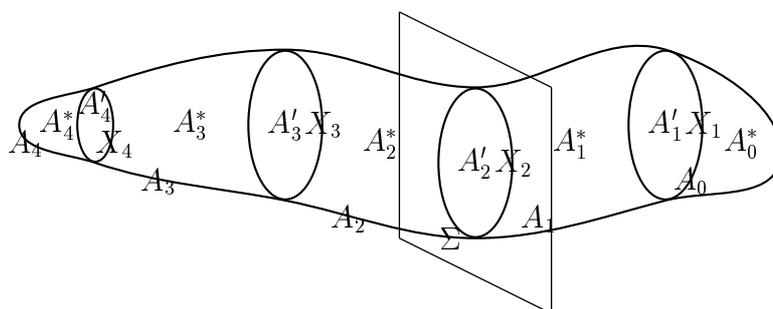


Figura 1.13: La superficie  $A$  viene “affettata” con piani paralleli a  $\Sigma$ .

Per quanto riguarda il caso generale, usando lo stesso argomento usato per il caso  $m = 2$ , riusciamo a trovare un insieme  $\Sigma_{t_0}$  di piani paralleli che intersecano  $A$  in insiemi di misura minore di  $l^{m-2}$ . In questo modo possiamo “affettare”  $A$  (Figura 1.13) lungo i piani di  $\Sigma_{t_0}$  ottenendo degli insiemi  $A_i$  che si intersecano a due a due in sottoinsiemi  $X_i$  con  $\mathcal{H}^{m-2}(X_i) \leq 2^{m-2}$  (in pratica  $A_i$  ha due tagli che supponiamo siano  $X_i$  e  $X_{i+1}$ ). Per induzione possiamo supporre di aver

trovato delle superfici  $A'_i$  (di dimensione  $m - 1$ ) che bordano gli insiemi  $X_i$  e per cui vale la disuguaglianza isoperimetrica. Fissato  $i$ , incollando insieme gli insiemi  $A'_i$ ,  $A_i$  e  $A'_{i+1}$ , ottengo una superficie di dimensione  $m - 1$  che ha altezza minore di  $l$ . Se siamo in codimensione maggiore di uno, dobbiamo ancora iterare questo procedimento, per ottenere una suddivisione di  $A$  in insiemi  $A_i^*$  ognuno dei quali è contenuto in un cubo di lato  $l$ . L'insieme  $A^* = \bigcup A_i^*$  è più grande dell'insieme originario  $A$ , ma per come sono stati costruiti gli  $A'_i$ , la sua misura  $m - 1$  dimensionale si può stimare con quella di  $A$ . A questo punto posso fare i coni  $S_i$  sugli insiemi  $A_i^*$  per ottenere la superficie  $S$  che dovrà verificare la disuguaglianza isoperimetrica rispetto a  $A^*$  e quindi (con una opportuna costante) anche rispetto a  $A$ .  $\square$

I seguenti lemmi tecnici verranno utilizzati rispettivamente nelle dimostrazioni del Teorema 3.4 di regolarità e nel Teorema 4.1 di esistenza di superfici minime.

**Lemma 1.47** *Siano  $\Sigma$  un  $m$ -piano passante per  $x$ ,  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ,  $A \subseteq \partial B(x, r)$ ,  $L \subseteq H_{m-1}(A)$ . Se  $S$  è una superficie con bordo  $L$  e  $A \subseteq \Sigma + B(0, \varepsilon r)$  allora o*

$$\mathcal{H}^m(S) \geq \gamma_m r^m - \frac{2^{2m} \gamma_m}{\gamma_{m-1}} \varepsilon r \mathcal{H}^{m-1}(A)$$

e la proiezione di  $S$  su  $\Sigma$  contiene  $\Sigma \cap B(x, (1 - \varepsilon)r)$ , oppure esiste una superficie  $S'$  con bordo  $L$  tale che

$$\mathcal{H}^m(S') \leq \frac{2^{2m} \gamma_m}{\gamma_{m-1}} \varepsilon r \mathcal{H}^{m-1}(A).$$

Daremo un'idea della dimostrazione, lasciando da parte i dettagli puramente algebrici.

*Dimostrazione:*

Innanzitutto consideriamo la proiezione  $A'$  di  $A$  su  $\Sigma \cap \partial B(x, r)$  e costruiamo una superficie  $S'$  con bordo  $A \cup A'$ , proiettando il "cono"  $C(\Sigma, A)$ , sulla sfera  $\partial B(x, r)$ . L'area di  $S'$  si stima usando il Lemma 1.44 per trovare l'area del "cono"  $C(\Sigma, A)$  e sapendo che tale area viene modificata di poco dalla proiezione su  $\partial B(x, r)$  in quanto  $A$  è vicino a  $\Sigma \cap \partial B(x, r)$ . Si può dunque ottenere la seguente stima

$$\mathcal{H}^m(S_1) \leq \frac{2^{2m} \gamma_m}{\gamma_{m-1}} \varepsilon r \mathcal{H}^{m-1}(A).$$

Ora, algebricamente, si dimostra che ogni ciclo di  $H_{m-1}(A)$  è equivalente in  $S'$  ad un ciclo di  $H_{m-1}(A')$ . Se tutti i cicli di  $L$  vanno a zero in  $S_1$  allora  $S'$  è una superficie con bordo  $A$  e quindi vale la seconda parte dell'enunciato del lemma. In caso contrario troviamo che la superficie  $S \cup S'$  ha bordo  $H_{m-1}(A)$  e quindi per il Teorema 1.39

$$\mathcal{H}^m(S \cup S') \geq \gamma_m r^m$$

cioè esattamente quanto affermato nella prima parte dell'enunciato del lemma.

$\square$

**Lemma 1.48** *Sia data una famiglia  $\mathcal{F}$  di cubi di lato  $a$  paralleli e i cui centri formano una griglia di larghezza  $a/3$  e sia  $C \in \mathcal{F}$  un cubo fissato. Siano  $S \subseteq \overline{C}$ , e  $A \subseteq \partial C$  due compatti. Esiste una costante  $K = K(n, m)$  tale che se vale*

$$\mathcal{H}^m(S \setminus A) < \frac{(2^{m+2} n^m)^{-n+m} a^m}{3^{m+4} K^{m-1}} \quad (1.14)$$

allora esisterà una superficie  $S' \subseteq \partial C$  con bordo  $b(S', A) \supseteq b(S, A)$  tale che

$$\mathcal{H}^m(S' \setminus A) \leq K \mathcal{H}^m(S \setminus A)$$

e se  $C' \neq C$ , è un cubo della famiglia  $\mathcal{F}$ , si ha

$$A \cap C' = \emptyset \Rightarrow S' \cap C' = \emptyset.$$

Vediamo brevemente solo l'idea della dimostrazione di questo lemma.

*Dimostrazione:*

Sia  $x$  il centro del cubo  $C$ . L'ipotesi (1.14) ci dice che l'area di  $S$  è molto piccola rispetto all'area di una  $m$ -faccia del cubo  $C$ . Avendo questa stima sull'area di  $S$ , e usando il Lemma 1.42, possiamo trovare una palla  $B(x, r)$  per cui la “lunghezza” di  $A_1 = S \cap \partial B(x, r)$  è molto piccola in confronto alla “lunghezza” di una  $(m - 1)$ -faccia di  $C$ . A questo punto, applicando la disuguaglianza isoperimetrica (Lemma 1.46), possiamo trovare una superficie  $S_1$  con bordo  $A_1$  contenuta nell'involucro convesso di  $A_1$ . La superficie  $S''$  ottenuta incollando  $S \setminus B(x, r)$  a  $S_1$  avrà ancora bordo  $A$ , e area piccola. Vediamo ora che  $S''$  dista almeno  $r/2$  dal centro  $x$  di  $C$ . Se infatti  $S''$  fosse troppo vicino a  $x$ , siccome  $S_1$  è contenuto nell'involucro convesso di  $A_1$ , avrei che  $A_1$  dovrebbe avere una “lunghezza” paragonabile ad  $r$ , il che, prendendo  $K$  sufficientemente grande, è assurdo. Si sceglierà dunque  $S'$  come la proiezione di  $S''$  su  $\partial C$ . Sfruttando ancora il fatto che l'area di  $S$  è molto piccola, si dimostra quindi che tale  $S'$  non interseca più cubi di quelli che intersecava  $S$ .  $\square$



## Capitolo 2

# Il teorema del disco topologico

In questo capitolo dimostreremo il teorema del disco topologico che verrà applicato, in seguito, alle superfici minime. Questo teorema è tuttavia del tutto indipendente dalla teoria delle superfici minime e, di fatto, sfrutterà soltanto i lemmi della Sezione 1.4 sulla distanza di Hausdorff.

**Definizione 2.1 (condizione- $(\varepsilon, R)$  di Reifenberg)** *Sia  $S$  un chiuso di  $\mathbf{R}^n$ ,  $x_0 \in S$ . Diciamo che  $S$  soddisfa la condizione  $(\varepsilon, R)$  nel punto  $x_0$  se comunque si prenda un  $r < R$  e un punto  $x \in S \cap B(x_0, R)$  esiste un sottospazio vettoriale  $m$ -dimensionale  $V(x, r) \subseteq \mathbf{R}^n$  per cui vale*

$$D_{x,r}(S, x + V(x, r)) \leq \varepsilon r$$

**Teorema 2.2 (del disco topologico)** *Esiste una costante  $\varepsilon_0$  tale che se  $S$  è un chiuso che soddisfa la condizione  $(\varepsilon, R)$  nel punto  $x_0$  per un certo  $\varepsilon < \varepsilon_0$  allora esiste un omeomorfismo  $\tau$  tra un  $m$ -disco topologico  $D$  e un intorno di  $x_0$  in  $S$ . Inoltre tale omeomorfismo  $\tau$  sarà  $\alpha$ -Hölderiano, con  $\alpha = \alpha(\varepsilon, R)$ .*

Vediamo brevemente l'idea della dimostrazione che, essendo piuttosto laboriosa, sarà svolta nell'intero capitolo.

Prendiamo una successione di raggi  $r_j$  tendenti a zero, e per ogni  $j$  prendiamo un  $r_j$ -reticolo  $\{x_{ji}\}$  di punti di  $S$ , cioè un numero finito di punti tali che ogni altro punto di  $S$  disti meno di  $r_j$  da questo reticolo (si veda Definizione 1.27). Per ognuno di questi punti possiamo prendere l' $m$ -piano  $x_{ji} + V_{ji}$  dato dalla condizione  $(\varepsilon, R)$ , in modo che tale piano disti “poco” dall'insieme ristretto ad una palla di raggio dell'ordine di  $r_j$ . A questo punto possiamo estendere, in modo  $\mathcal{C}^\infty$ , questa distribuzione di piani ottenendo per ogni punto  $x$  in un intorno di  $S$  un piano  $x + V_j(x)$  passante per  $x$  che disti ancora “poco” dall'insieme  $S$  in un opportuno intorno di  $x$ . Per fare ciò introdurremo una funzione  $x \mapsto M_j(x)$  a valori nelle matrici ortogonali, in modo tale che il piano generato dai primi  $m$  vettori colonna di  $M_j(x)$  sia proprio  $V_j(x)$ .

Il passo successivo consiste nel definire delle funzioni  $x \mapsto \sigma_j(x)$  per  $x$  che varia in un intorno di  $S$ , che proiettino il punto  $x$  sul piano  $x_{ji} + V_j(x)$  in modo da farlo avvicinare alla superficie  $S$ . Mediante le buone proprietà di  $\sigma_j$  possiamo costruire le iterate  $\tau_j = \sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_j$  in modo che  $S_j = \tau_j(S_0)$  siano dei buoni approssimanti di  $S$  ( $S_0$  sarà un disco piano centrato in  $x_0$ ) e in modo tale che  $\tau_j$  converga uniformemente verso una funzione iniettiva  $\tau$  dal disco  $S_0$  all'insieme  $S$ . La surgettività si ricava poi senza troppa fatica con argomenti di tipo topologico, sfruttando ancora una volta la proprietà  $(\varepsilon, R)$ .

## 2.1 Lemmi preliminari

**Definizione 2.3** Se  $M$  ed  $M'$  sono due matrici di  $\mathbf{R}^n$ , definiamo

$$|M - M'| = \sqrt{\sum_{i,j} |M_{ij} - M'_{ij}|^2}.$$

Si osservi che se  $c_1, \dots, c_n$  sono i vettori colonna di  $M$  e  $c'_1, \dots, c'_n$  sono i vettori colonna di  $M'$ , si ha

$$|M - M'| = \sqrt{\sum_j |c_j - c'_j|^2}.$$

**Proposizione 2.4** Se  $M$  è una matrice ortogonale e  $A, B$  sono due matrici di  $\mathbf{R}^n$ , si ha

$$|MA - MB| = |A - B|.$$

*Dimostrazione:*

Dalle proprietà delle matrici ortogonali sappiamo che  $|Mv| = |v|$  per qualunque vettore  $v$ . Indicando con gli indici in alto, i vettori colonna delle matrici, si conclude rapidamente:

$$\begin{aligned} |MA - MB|^2 &= \sum_j |(MA)^j - (MB)^j|^2 = \sum_j |M(A^j - B^j)|^2 \\ &= \sum_j |A^j - B^j|^2 = |A - B|^2. \end{aligned}$$

□

**Definizione 2.5** Data una matrice ortogonale  $M$  di  $\mathbf{R}^n$ , se  $c_1, \dots, c_n$  sono i vettori colonna di  $M$ , denotiamo con

$$V(M) = \langle c_1, \dots, c_m \rangle$$

lo spazio vettoriale  $m$ -dimensionale generato dai primi  $m$  vettori colonna di  $M$ .

**Lemma 2.6** Se  $M$  e  $M'$  sono matrici ortogonali e  $V = V(M)$  e  $V' = V(M')$  sono gli spazi vettoriali generati dai primi  $m$  vettori colonna di  $M$  e  $M'$  rispettivamente, si ha:

$$D_{0,1}(V, V') \leq |M - M'|.$$

*Dimostrazione:*

Dato un qualunque vettore  $v \in V$  unitario, basta dimostrare che si può trovare un vettore unitario  $v' \in V'$  con  $|v - v'| \leq |M - M'|$ . Siccome abbiamo visto (Proposizione 2.4) che la norma  $|M - M'|$  è invariante per cambi di coordinate, possiamo supporre  $v = c_1$ , dove  $c_1, \dots, c_n$  sono i vettori colonna di  $M$ . Scegliamo dunque  $v' = c'_1$  (dove  $c'_1, \dots, c'_n$  sono i vettori colonna di  $M'$ ) ottenendo come voluto

$$|v - v'|^2 = |c_1 - c'_1|^2 \leq \sum_j |c_j - c'_j|^2 = |M - M'|^2.$$

□

**Definizione 2.7** Siano  $M$  una matrice ortogonale,  $c_1, \dots, c_n$  i suoi vettori colonna e  $V$  un  $m$ -sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}^n$ . Siano  $c'_1, \dots, c'_m$  le proiezioni di  $c_1, \dots, c_m$  su  $V$  e  $c'_{m+1}, \dots, c'_n$  le proiezioni di  $c_{m+1}, \dots, c_n$  sullo spazio ortogonale a  $V$ . Se abbiamo che  $c'_1, \dots, c'_n$  sono una base di  $\mathbf{R}^n$  e  $c'_1, \dots, c'_m$  generano  $V$ , possiamo applicare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori  $c'_1, \dots, c'_m$  e  $c'_{m+1}, \dots, c'_n$  ottenendo i vettori colonna di una matrice ortogonale  $M'$ . Definiamo dunque

$$\Lambda(M, V) = M'.$$

**Osservazione 2.8** Si ha ovviamente

$$V(\Lambda(M, V)) = V$$

per ogni  $V$  sottospazio vettoriale  $m$ -dimensionale di  $\mathbf{R}^n$ .

**Osservazione 2.9** Siano  $M$  una matrice ortogonale e  $V$  un  $m$ -sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}^n$ . Esiste una costante  $\varepsilon_1$  tale che se  $D_{0,1}(V, V(M)) \leq \varepsilon_1$  allora  $\Lambda(M, V)$  è ben definito.

**Lemma 2.10** Esistono delle costanti  $\varepsilon_2$  e  $k_0$  per cui se  $|M - M'| \leq \varepsilon_2$ ,  $D_{0,1}(V, V') \leq \varepsilon_2$ ,  $D_{0,1}(V, V(M)) \leq \varepsilon_2$  e  $D_{0,1}(V', V(M')) \leq \varepsilon_2$  allora

$$|\Lambda(M, V) - \Lambda(M', V')| \leq k_0(|M - M'| + D_{0,1}(V, V')).$$

*Dimostrazione:*

Lo spazio delle matrici ortogonali é compatto, e anche la famiglia degli  $m$ -sottospazi vettoriali di  $\mathbf{R}^n$ . Se dunque abbiamo scelto  $\varepsilon_2$  sufficientemente piccolo in modo da rimanere all'interno del dominio di  $\Lambda$  abbiamo che  $(M, V)$  varia in un compatto. Essendo  $\Lambda \in \mathcal{C}^1$  su tale compatto  $\Lambda$  sarà pure lipschitziana.  $\square$

## 2.2 Dimostrazione del teorema del disco topologico

Nel dimostrare il teorema faremo uso di molte costanti che, a posteriori, dovranno soddisfare le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} 1 \ll k_0 \ll k_4 \ll k_1 \ll \frac{1}{\rho} \ll k_3 \ll k_2 \ll k_6 \ll k_5 \ll k_7 \ll \frac{1}{\varepsilon}, \\ \varepsilon \ll \varepsilon_1, \\ \varepsilon \ll \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Poniamo  $r_0 = R/16$  e scelto un  $0 < \rho < 1$  poniamo  $r_j = r_0 \rho^j$ . Per ogni intero positivo  $j$  scegliamo un  $r_j$ -reticolo  $\{x_{ji}\}$  per  $S^* = S \cap B(x_0, 10r_0)$  (si veda la Definizione 1.27).

Ad ogni punto  $x_{ji}$  associamo poi un  $m$ -sottospazio vettoriale  $V_{ji} \subseteq \mathbf{R}^n$  per il quale valga

$$D_{x_{ji}, 8r_j}(S, x_{ji} + V_{ji}) \leq 8\varepsilon r_j \quad (2.1)$$

come ci assicura la condizione- $(\varepsilon, R)$ . Allo stesso modo consideriamo un  $m$ -sottospazio vettoriale  $V_0$  tale che

$$D_{x_0, R}(S, x_0 + V_0) \leq \varepsilon R. \quad (2.2)$$

### 2.2.1 Costruzione della successione $M_j$

Il primo passo della dimostrazione consiste nel costruire una successione di funzioni

$$M_j: S^* + \overline{B(0, (3/2)r_j)} \rightarrow O(n)$$

dove  $O(n)$  è il gruppo delle matrici ortogonali. Ad ogni matrice  $M_j(x)$  posso associare il sottospazio vettoriale  $V_j(x) = V(M_j(x))$  dato dalla Definizione 2.5. Vogliamo che le successioni  $M_j$  e  $V_j$  verifichino le seguenti condizioni:

- (i)  $V_j(x_{ji}) = V_{ji} \quad \forall j \geq 1$ ;
- (ii)  $|\nabla M_j(x)| \leq k_1 \frac{\varepsilon}{r_j} \quad \forall j \geq 0$ ;
- (iii)  $D_{x, 6r_j}(S, x + V_j(x)) \leq k_3 \varepsilon r_j \quad \forall x \in S^* \quad \forall j \geq 0$ ;
- (iv)  $|M_j(x) - M_{j-1}(x)| \leq k_2 \varepsilon \quad \forall j \geq 1$ .

Sia  $j = 0$ . Cominciamo col definire  $M_0(x)$  come una matrice costante per cui valga  $V_0(x) = V_0$ . La condizione (ii) è ovviamente soddisfatta, verifichiamo dunque la condizione (iii):

$$\begin{aligned} D_{x, 6r_0}(S, x + V_0(x)) &\leq D_{x, 6r_0}(S, x_0 + V_0) + D_{x, 6r_0}(x_0 + V_0, x + V_0) \\ &\leq 4D_{x_0, R}(S, x_0 + V_0) + 4D_{0, \infty}(x_0 + V_0, x + V_0) \\ &\leq 4\varepsilon R + 4d(x, x_0 + V_0) \leq 4\varepsilon r + 4\varepsilon R = 128\varepsilon r_0 \end{aligned}$$

In questa catena di disuguaglianze abbiamo usato prima la disuguaglianza triangolare per la distanza di Hausdorff, poi abbiamo applicato il Lemma 1.24 (si verifica semplicemente che se  $x \in S^*$  si ha  $B(x, 6r_0) \subseteq B(x_0, R)$ ) e infine abbiamo sfruttato la Proprietà (2.2). Dunque basta imporre  $k_3 \geq 128$  per avere la condizione (iii).

Consideriamo ora per induzione il caso  $j > 0$ . Cominciamo col definire (si veda la Definizione 2.7 e l'Osservazione 2.8)

$$M_j(x_{ji}) = \Lambda(M_{j-1}(x_{ji}), V_{ji})$$

in modo da verificare la condizione (i). Perché  $\Lambda$  sia definito (si veda l'Osservazione 2.9) bisogna però verificare che valga

$$D_{0,1}(V_{j-1}(x_{ji}), V_{ji}) \leq \varepsilon_1.$$

E infatti abbiamo, in base all'Osservazione 1.22:

$$\begin{aligned} D_{0,1}(V_{j-1}(x_{ji}), V_{ji}) &= \frac{1}{8r_j} D_{x_{ji}, 8r_j}(V_{j-1}(x_{ji}), V_{ji}) \\ &\leq \frac{1}{8r_j} (D_{x_{ji}, 8r_j}(V_{j-1}(x_{ji}), S) + D_{x_{ji}, 8r_j}(S, V_{ji})). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Imponendo la condizione  $\rho < \frac{3}{4}$  si ha che  $B(x_{ji}, 8r_j) \subseteq B(x_{ji}, 6r_{j-1})$  e possiamo quindi applicare il Lemma 1.24 per poi stimare il primo addendo mediante la condizione (iii) che supponiamo sia valida per  $j - 1$ , mentre la stima del secondo addendo si ha direttamente dalla proprietà (2.1)

$$\begin{aligned} D_{0,1}(V_{j-1}(x_{ji}), V_{ji}) &\leq \frac{1}{8r_j} (4D_{x_{ji}, 6r_{j-1}}(V_{j-1}(x_{ji}), S) + 8\varepsilon r_j) \\ &\leq \frac{1}{8r_j} (4k_3 \varepsilon r_{j-1} + 8\varepsilon r_j) = \left(\frac{k_3}{2\rho} + 1\right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque la stima voluta imponendo che sia

$$\left(\frac{k_3}{2\rho} + 1\right)\varepsilon \leq \varepsilon_1$$

Vogliamo ora definire la funzione  $M_{j_i}$  su tutto  $S^* + B(0, \frac{3}{2}r_j)$  estendendo i valori sul reticolo  $\{x_{j_i}\}$  mediante una opportuna partizione dell'unità. Prendiamo una funzione  $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$  con le proprietà:

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &\leq 0 \quad \forall s \in \mathbf{R}, \\ |\varphi'(s)| &\leq 2 \quad \forall s \in \mathbf{R}, \\ \varphi(s) &= 1 \quad \forall s \leq 0, \\ \varphi(s) &= 0 \quad \forall s \geq 1 \end{aligned}$$

e definiamo poi

$$\begin{aligned} \lambda'_{j_i}(x) &= \varphi\left(\frac{|x - x_{j_i}| - r_j/4}{3r_j}\right), \\ \lambda''_{j_i}(x) &= \lambda'(x) \prod_{i' \neq i} (1 - \lambda'_{j_{i'}}(x)), \\ \lambda_{j_i}(x) &= \lambda''_{j_i}(x) / \sum_{i'} \lambda''_{j_{i'}}(x). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che

$$\begin{aligned} \lambda'_{j_i}(x) &= 1 \quad \text{se} \quad |x_{j_i} - x| \leq \frac{r_j}{4}, \\ \lambda'_{j_i}(x) &= 0 \quad \text{se} \quad |x_{j_i} - x| \geq \frac{13}{4}r_j, \\ \lambda''_{j_i}(x) &= 0 \quad \text{se} \quad \exists i' \neq i \quad \text{t.c.} \quad |x_{j_{i'}} - x| \leq \frac{r_j}{4}, \\ \lambda''_{j_i}(x) &= 0 \quad \text{se} \quad |x_{j_i} - x| \geq \frac{13}{4}r_j, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda_{j_i} &= 1, \\ \lambda_{j_i}(x) &= 1 \quad \text{se} \quad |x - x_{j_i}| \leq \frac{r_j}{4}, \\ \lambda_{j_i}(x) &= 0 \quad \text{se} \quad \exists i' \neq i \quad \text{t.c.} \quad |x - x_{j_{i'}}| \leq \frac{r_j}{4}, \\ \lambda_{j_i}(x) &= 0 \quad \text{se} \quad |x - x_{j_i}| \geq \frac{13}{4}r_j, \\ |\nabla \lambda_{j_i}(x)| &\leq \frac{k_4}{r_j}. \end{aligned}$$

Il coefficiente  $k_4$  non dipende da  $j$  in quanto il numero di termini diversi da zero nelle sommatorie e nei prodotti è maggiorato dal numero  $N_j(x)$  di punti del reticolo contenuti in  $B(x, \frac{13}{4}r_j)$  che si stima facilmente:

$$N_j(x) \leq \frac{\mathcal{H}^n(B(x, \frac{13}{4}r_j))}{\mathcal{H}^n(B(x, r_j))} \leq \left(\frac{13}{4}\right)^n = N_j.$$

Possiamo ora definire

$$M_j(x) = \sum_i \lambda_{ji}(x) M_j(x_{ji}) \quad \forall x \in S^* + B(0, \frac{3}{2}r_j).$$

Verifichiamo la proprietà (ii). Sia  $x \in S^* + B(0, \frac{3}{2}r_j)$  e sia  $x_{j_{i_0}} \in S^*$  il punto del reticolo più vicino a  $x$  (quindi  $|x - x_{j_{i_0}}| \leq (1 + 3/2)r_j$ ). Otteniamo:

$$\begin{aligned} |\nabla(M_j(x))| &= \left| \sum_i \nabla \lambda_{ji}(x) M_j(x_{ji}) \right| = \left| \sum_i \nabla \lambda_{ji}(x) (M_j(x_{ji}) - M_j(x_{j_{i_0}})) \right| = \\ &\leq \sum_i \frac{k_4}{r_j} |M_j(x_{ji}) - M_j(x_{j_{i_0}})| \end{aligned}$$

Possiamo supporre che sia  $|x - x_{ji}| \leq \frac{13}{4}r_j$  (in caso contrario avrei  $\nabla \lambda_{ji}(x) = 0$ ) e quindi  $|x_{ji} - x_{j_{i_0}}| \leq (\frac{13}{4} + 1 + \frac{3}{2})r_j \leq 6r_j$ . Sfruttando poi l'induzione sulla proprietà (ii) abbiamo

$$|M_{j-1}(x_{ji}) - M_{j-1}(x_{j_{i_0}})| \leq k_1 \frac{\varepsilon}{r_{j-1}} |x_{ji} - x_{j_{i_0}}| \leq 6k_1 \rho \varepsilon.$$

Inoltre vale

$$\begin{aligned} D_{0,1}(V_{ji}, V_{j_{i_0}}) &= \frac{1}{2r_j} D_{x_{ji}, 2r_j}(x_{ji} + V_{ji}, x_{ji} + V_{j_{i_0}}) \leq \frac{1}{2r_j} (D_{x_{ji}, 2r_j}(x_{ji} + V_{ji}, S) \\ &\quad + D_{x_{ji}, 2r_j}(S, x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}) + D_{x_{ji}, 2r_j}(x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}, x_{ji} + V_{j_{i_0}})) \\ &\leq \frac{1}{2r_j} (4D_{x_{ji}, 8r_j}(x_{ji} + V_{ji}, S) + 4D_{x_{j_{i_0}}, 8r_j}(S, x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}) \\ &\quad + 4D_{0,\infty}(x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}, x_{ji} + V_{j_{i_0}})) \\ &\leq \frac{1}{2r_j} (4 \cdot 8\varepsilon r_j + 4 \cdot 8\varepsilon r_j + 4 \cdot 8\varepsilon r_j) = 96\varepsilon. \end{aligned}$$

Poichè

$$M_j(x_{ji}) - M_j(x_{j_{i_0}}) = \Lambda(M_{j-1}(x_{ji}), V_{ji}) - \Lambda(M_{j-1}(x_{j_{i_0}}), V_{j_{i_0}})$$

possiamo dedurre

$$|M_j(x_{ji}) - M_j(x_{j_{i_0}})| \leq k_0(6k_1 \rho \varepsilon + 96\varepsilon) \tag{2.4}$$

se sono verificate le ipotesi del Lemma 2.10 e cioè se

$$\begin{aligned} 96\varepsilon &\leq \varepsilon_2, \\ 6k_1 \rho \varepsilon &\leq \varepsilon_2, \\ (\frac{k_3}{2\rho} + 1)\varepsilon &\leq \varepsilon_2. \end{aligned}$$

(l'ultima disuguaglianza si ha dal fatto che  $D_{0,1}(V(M_{j-1}(x_{ji}), V_{ji}) \leq (k_3/(2\rho) + 1)\varepsilon$  come si è già visto in (2.3)). In definitiva otteniamo come desiderato

$$|\nabla M_j(x)| \leq N_j \frac{k_4}{r_j} 6k_0(k_1 \rho + 16)\varepsilon \leq k_1 \frac{\varepsilon}{r_j}$$

se imponiamo

$$2 \cdot 6N_j k_4 k_0 \leq k_1$$

e

$$k_1\rho \leq 16.$$

*Dimostriamo la proprietà (iii).* Sia  $x \in S^*$  e sia  $x_{j_{i_0}} \in S^*$  un punto del reticolo con  $|x - x_{j_{i_0}}| \leq r_j$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} D_{x,6r_j}(S, x + V_j(x)) &\leq D_{x,6r_j}(S, x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}) + D_{x,6r_j}(x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}, x + V_{j_{i_0}}) \\ &\quad + D_{x,6r_j}(x + V_{j_{i_0}}, x + V_j(x)). \end{aligned}$$

I singoli addendi si stimano nel modo seguente

$$\begin{aligned} D_{x,6r_j}(S, x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}) &\leq 4D_{x,8r_j}(S, x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}) \leq 4 \cdot 8\varepsilon r_j, \\ D_{x,6r_j}(x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}, x + V_{j_{i_0}}) &\leq 4D_{0,\infty}(x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}, x + V_{j_{i_0}}) \leq 4d(x, x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}) \leq 4 \cdot 8\varepsilon r_j, \\ D_{x,6r_j}(x + V_{j_{i_0}}, x + V_j(x)) &\leq 6r_j D_{0,1}(V_{j_{i_0}}, V_j(x)) \leq 6r_j |M_j(x_{j_{i_0}}) - M_j(x)| \\ &\leq 6r_j r_j k_1 \frac{\varepsilon}{r_j} = 6r_j k_1 \varepsilon \end{aligned}$$

per cui otteniamo la condizione (iii) se imponiamo

$$6k_1 + 64 \leq k_3.$$

*Dimostriamo la proprietà (iv).* Sia  $x \in S^* + B(0, \frac{3}{2}r_j)$  e  $x_{j_{i_0}} \in S^*$  tale che  $|x - x_{j_{i_0}}| \leq (1 + 3/2)r_j$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} |M_j(x) - M_{j-1}(x)| &\leq |M_j(x) - M_j(x_{j_{i_0}})| + |M_j(x_{j_{i_0}}) - M_{j-1}(x_{j_{i_0}})| \\ &\quad + |M_{j-1}(x_{j_{i_0}}) - M_{j-1}(x)|. \end{aligned}$$

Ora per la proprietà (ii)

$$|M_j(x) - M_j(x_{j_{i_0}})| \leq |x - x_{j_{i_0}}| k_1 \frac{\varepsilon}{r_j} \leq \frac{5}{2} \varepsilon k_1$$

e

$$|M_j(x_{j_{i_0}}) - M_{j-1}(x_{j_{i_0}})| = |\Lambda(M_{j-1}(x_{j_{i_0}}), V_{j_{i_0}}) - \Lambda(M_{j-1}(x_{j_{i_0}}), V_{j-1}(x_{j_{i_0}}))|$$

applicando il lemma 2.10 come in (2.4)

$$\begin{aligned} |M_j(x_{j_{i_0}}) - M_{j-1}(x_{j_{i_0}})| &\leq k_0(0 + D_{0,1}(V_{j_{i_0}}, V_{j-1}(x_{j_{i_0}}))) \\ &\leq \frac{k_0}{6r_j}(D_{x_{j_{i_0}},6r_j}(x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}, S) + D_{x_{j_{i_0}},6r_j}(S, x_{j_{i_0}} + V_{j-1}(x_{j_{i_0}}))) \\ &\leq \frac{k_0}{6r_j}(k_3 r_j \varepsilon + 4D_{x_{j_{i_0}},6r_{j-1}}(S, x_{j_{i_0}} + V_{j-1}(x_{j_{i_0}}))) \\ &\leq \frac{k_0}{6r_j}(k_3 r_j \varepsilon + 4k_3 \frac{r_j}{\rho} \varepsilon) \leq \frac{5}{6} k_0 k_3 \frac{\varepsilon}{\rho} \end{aligned}$$

essendo  $\rho \leq 1$ , ed usando ancora la proprietà (ii)

$$|M_{j-1}(x_{j_{i_0}}) - M_{j-1}(x)| \leq |x - x_{j_{i_0}}| k_1 \frac{\varepsilon}{r_{j-1}} \leq \frac{5}{2} r_j k_1 \rho \frac{\varepsilon}{r_j} = \frac{5}{2} k_1 \rho \varepsilon.$$

In conclusione otteniamo

$$|M_j(x) - M_{j-1}(x)| \leq \left(\frac{5}{2} k_1 + \frac{5}{6} \frac{k_3}{\rho} + \frac{5}{2} k_1 \rho\right) \varepsilon \leq k_2 \varepsilon$$

se imponiamo che valga

$$5k_1 + \frac{5}{6} \frac{k_3}{\rho} \leq k_2.$$

### 2.2.2 Costruzione della successione $\sigma_j$

Dato un  $m$ -piano  $\Sigma$ , in questa sezione indicheremo con

$$\pi_\Sigma: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

la proiezione ortogonale su  $\Sigma$ .

Consideriamo l'applicazione  $\sigma_j: S^* + B(0, \frac{3}{2}r_j) \rightarrow \mathbf{R}^n$  definita da

$$\sigma_j(x) = \sum_i \lambda_{ji}(x) \pi_{x_{ji} + V_j(x)}(x).$$

Definiamo poi

$$\begin{aligned} l_j &= k_5 \varepsilon \sum_{k=j+1}^{\infty} r_k = k_5 \varepsilon \frac{\rho^{j+1}}{1-\rho} r_0, \\ S_0 &= (x_0 + V_0) \cap B(x_0, 10r_0 - l_0) \subseteq S^* + B(0, \frac{3}{2}r_j), \\ S_j &= \sigma_j(S_{j-1}) \quad \forall j \geq 1 \end{aligned}$$

(la buona definizione di  $S_j$  segue dalla proprietà (vi) qui di seguito).

Verificheremo per induzione le seguenti proprietà di  $\sigma_j$ :

- (v)  $|\sigma_j(x) - x| \leq k_5 \varepsilon r_j \quad \forall x \in S_{j-1} \quad \forall j \geq 1$ ;
- (vi)  $d(x, S) \leq k_6 \varepsilon r_{j+1} \quad e \quad |x - x_0| \leq 10r_0 - l_j \quad \forall x \in S_j$ ;
- (vii)  $\frac{1}{2}|x - y| \leq |\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| \leq 2|x - y| \quad \forall x, y \in S_{j-1} \quad \forall j \geq 1$ ;
- (viii)  $|x - y| \leq 4k_5 \varepsilon r_{j+1} \Rightarrow d(y, x + V_{j+1}(x)) \leq k_7 \varepsilon |x - y| \quad \forall x, y \in S_j$ .

Sia  $j = 0$ . Le proprietà (v) e (vii) sono ovvie. Per verificare la proprietà (vi) prendiamo un punto  $x \in S_0$ . Abbiamo per definizione  $|x - x_0| \leq 10r_0 - l_0$ , mentre

$$\begin{aligned} d(x, S) &\leq D(S_0, S \cap \overline{B(x_0, 10r_0 - l_0)}) \leq D_{x_0, 10r_0 - l_0}(x_0 + V_0, S) \leq \\ &\leq 4D_{x_0, R}(x_0 + V_0, S) \leq 4\varepsilon R \leq 64\varepsilon \frac{r_1}{\rho} \leq k_6 \varepsilon r_1 \end{aligned}$$

se si pone  $64/\rho \leq k_6$ . La verifica della proprietà (viii) è banale in quanto  $S_0 \subseteq x_0 + V_0$ .

Sia  $j > 0$  e cominciamo col dimostrare la proprietà (v). Sia  $x \in S_{j-1}$ .

$$\begin{aligned} |\sigma_j(x) - x| &= \left| \sum_i \lambda_{ji}(x) (\pi_{x_{ji} + V_j(x)}(x) - x) \right| \leq \\ &\leq \sum_i \lambda_{ji}(x) d(x, x_{ji} + V_j(x)) \end{aligned}$$

e possiamo supporre che sia  $|x_{ji} - x| \leq \frac{13}{4}r_j$ . Sia  $y \in S$  il punto di minima distanza da  $x$ , per la proprietà (vi) (per induzione) abbiamo  $|x - y| \leq k_6 \varepsilon r_j$  e quindi

$$\begin{aligned} d(x, x_{ji} + V_j(x)) &\leq |x - y| + d(y, x_{ji} + V_j(x)) \leq k_6 \varepsilon r_j + D_{x_{ji}, 8r_j}(S, x_{ji} + V_j(x)) \\ &\leq k_6 \varepsilon r_j + D_{x_{ji}, 8r_j}(S, x_{ji} + V_j(x)) + D_{x_{ji}, 8r_j}(x_{ji} + V_j(x), x_{ji} + V_j(x)) \\ &\leq k_6 \varepsilon r_j + 8\varepsilon r_j + 8r_j D_{0,1}(V_j(x), V_j(x)). \end{aligned}$$

Per il Lemma 2.6

$$D_{0,1}(V_{j_i}, V_j(x)) \leq |M_j(x_{j_i}) - M_j(x)| \leq |x_{j_i} - x| k_1 \frac{\varepsilon}{r_j} \leq \frac{13}{4} k_1 \varepsilon$$

otteniamo quindi

$$\begin{aligned} |\sigma_j(x) - x| &\leq \sum_i \lambda_{j_i}(x) ((k_6 + 8)\varepsilon r_j + 26k_1 \varepsilon r_j) \\ &\leq (k_6 + 26k_1 + 8)\varepsilon r_j \leq k_5 \varepsilon r_j \end{aligned}$$

se imponiamo

$$k_6 + 26k_1 + 8 \leq k_5.$$

Verifichiamo la condizione (vi) per il punto  $\sigma_j(x) \in S_j$  con  $x \in S_{j-1}$ . Siano  $y \in S$  il punto di minima distanza da  $x$  e  $x_{j_{i_0}} \in S$  il punto del reticolo di minima distanza da  $y$ . Abbiamo  $|x - y| \leq k_6 \varepsilon r_j$  e  $|x - x_0| \leq 10r_0 - l_{j-1}$  per l'ipotesi induttiva. Quindi

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| \leq 10r_0 - (l_{j-1} - k_6 \varepsilon r_j) \leq 10r_0 - l_j \quad (2.5)$$

e  $y \in S^*$  se imponiamo anche che sia  $k_6 \leq k_5$ . Per la proprietà (v) si ha  $|\sigma_j(x) - x| \leq k_5 \varepsilon r_j$  ed essendo  $|y - x_{j_{i_0}}| \leq r_j$  troviamo  $|\sigma_j(x) - x_{j_{i_0}}| \leq ((k_5 + k_6)\varepsilon + 1)r_j$ .

Imponendo che valga  $(k_5 + k_6)\varepsilon + 1 \leq 8$  possiamo fare la stima

$$\begin{aligned} d(\sigma_j(x), S) &\leq d(\sigma_j(x), x_{j_{i_0}} + V_j(x)) + D_{x_{j_{i_0}}, 8r_j}(x_{j_{i_0}} + V_j(x), x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}) \\ &\quad + D_{x_{j_{i_0}}, 8r_j}(x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}, S). \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} d(\sigma_j(x), x_{j_{i_0}} + V_j(x)) &\leq |\sigma_j(x) - \pi_{x_{j_{i_0}} + V_j(x)}(x)| \\ &= \left| \sum_i \lambda_{j_i}(x) (\pi_{x_{j_i} + V_j(x)}(x) - \pi_{x_{j_{i_0}} + V_j(x)}(x)) \right| \\ &\leq \sum_i \lambda_{j_i}(x) d(x_{j_i}, x_{j_{i_0}} + V_j(x)) \end{aligned}$$

sapendo che  $|x_{j_i} - x_{j_{i_0}}| \leq (13/4 + k_6 \varepsilon + 1)r_j \leq (5 + k_6 \varepsilon)r_j$  e imponendo  $5 + k_6 \varepsilon \leq 8$  otteniamo usando il Lemma 1.23 e l'Osservazione 1.22

$$\begin{aligned} d(x_{j_i}, x_{j_{i_0}} + V_j(x)) &\leq d(x_{j_i}, x_{j_{i_0}} + V_j(x_{j_{i_0}})) + |x_{j_i} - x_{j_{i_0}}| D_{0,1}(V_j(x_{j_{i_0}}), V_j(x)) \\ &\leq 8\varepsilon r_j + 8r_j |M_j(x_{j_{i_0}}) - M_j(x)| \\ &\leq 8\varepsilon r_j + 8r_j k_1 \frac{\varepsilon}{r_j} (k_6 \varepsilon + 1)r_j \\ &\leq (8 + 8k_1(k_6 \varepsilon + 1))\varepsilon r_j \end{aligned}$$

e quest'ultima stima vale anche per  $d(\sigma_j(x), x_{j_{i_0}} + V_j(x))$  sapendo che  $\sum \lambda_{j_i} = 1$ . Abbiamo poi

$$\begin{aligned} D_{x_{j_{i_0}}, 8r_j}(x_{j_{i_0}} + V_j(x), x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}) &\leq 8r_j |M_j(x) - M_j(x_{j_{i_0}})| \\ &\leq 8r_j k_1 \frac{\varepsilon}{r_j} (k_6 \varepsilon + 1)r_j \end{aligned}$$

e

$$D_{x_{j_{i_0}}, 8r_j}(x_{j_{i_0}} + V_{j_{i_0}}, S) \leq 8\varepsilon r_j.$$

Dunque in conclusione otteniamo

$$\begin{aligned} d(\sigma_j(x), S) &\leq (8 + 8k_1(k_6\varepsilon + 1) + 8k_1(k_6\varepsilon + 1) + 8)\varepsilon \frac{r_{j+1}}{\rho} \\ &\leq k_6\varepsilon r_{j+1} \end{aligned}$$

se imponiamo

$$16(1 + k_1(k_6\varepsilon + 1)) \leq k_6$$

ottendo la prima parte della condizione (vi). La seconda parte si dimostra facilmente per induzione in quanto se  $x \in S_{j-1}$  si ha

$$|\sigma_j(x) - x_0| \leq |\sigma_j(x) - x| + |x - x_0| \leq k_5\varepsilon r_j + 10r_0 - l_{j-1} = 10r_0 - l_j.$$

*Dimostriamo la condizione (vii).* Siano  $x, y \in S_{j-1}$ , se  $|x - y| \geq 4k_5\varepsilon r_j$  abbiamo, sfruttando la proprietà (v)

$$\begin{aligned} |\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| &\geq |x - y| - |\sigma_j(x) - x| - |\sigma_j(y) - y| \\ &\geq |x - y| - 2k_5\varepsilon r_j \geq \frac{1}{2}|x - y| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| &\leq |x - y| + |\sigma_j(x) - x| + |\sigma_j(y) - y| \\ &\leq |x - y| + 2k_5\varepsilon r_j \leq 2|x - y|. \end{aligned}$$

Quindi possiamo supporre  $|x - y| \leq 4k_5\varepsilon r_j$ . Siccome

$$|\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| \geq |x - y| - |\sigma_j(x) - x - \sigma_j(y) + y|$$

e

$$|\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| \leq |x - y| + |\sigma_j(x) - x - \sigma_j(y) + y|$$

è sufficiente dimostrare che vale  $|\sigma_j(x) - x - \sigma_j(y) + y| \leq |x - y|/2$  per avere entrambe le stime della proprietà (vii). Ma

$$\begin{aligned} |\sigma_j(x) - x - \sigma_j(y) + y| &= \left| \sum_i (\lambda_{ji}(x)(\pi_{x_{ji}+V_j(x)}(x) - x) - \lambda_{ji}(y)(\pi_{x_{ji}+V_j(y)}(y) - y)) \right| \\ &\leq \left| \sum_i \lambda_{ji}(x)(\pi_{x_{ji}+V_j(x)}(x) - x - \pi_{x_{ji}+V_j(y)}(y) + y) \right| \\ &\quad + \left| \sum_i (\lambda_{ji}(x) - \lambda_{ji}(y))(\pi_{x_{ji}+V_j(y)}(y) - y) \right| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\pi_{x_{ji}+V_j(x)}(x) - x - \pi_{x_{ji}+V_j(y)}(y) + y| &\leq |(\pi_{x_{ji}+V_j(x)}(x) - x) - (\pi_{x_{ji}+V_j(x)}(y) - y)| \\ &\quad + |(\pi_{x_{ji}+V_j(x)}(y) - y) - (\pi_{x_{ji}+V_j(y)}(y) - y)| \\ &\leq d(y, x + V_j(x)) + |\pi_{x_{ji}+V_j(x)}(y) - \pi_{x_{ji}+V_j(y)}(y)|. \end{aligned}$$

Applicando la proprietà (viii) al passo  $j - 1$  abbiamo  $d(y, x + V_j(x)) \leq k_7\varepsilon|x - y|$  mentre per il secondo addendo, supponendo che sia  $\lambda_{ji} \neq 0$ , abbiamo

$$\begin{aligned} |\pi_{x_{ji}+V_j(x)}(y) - \pi_{x_{ji}+V_j(y)}(y)| &\leq |y - x_{ji}|D_{0,1}(V_j(x), V_j(y)) \\ &\leq (|y - x| + |x - x_{ji}|)k_1 \frac{\varepsilon}{r_j} |x - y| \\ &\leq (4k_5\varepsilon + \frac{13}{4})k_1\varepsilon|x - y|. \end{aligned}$$

L'ultima stima da fare è

$$\left| \sum_i (\lambda_{ji}(x) - \lambda_{ji}(y)) (\pi_{x_{ji}+V_j(y)}(y) - y) \right| \leq 2N_j k_4 \frac{|x-y|}{r_j} d(x_{ji}, y + V_j(y))$$

dove abbiamo usato la stima su  $\nabla \lambda_{ji}$  e il fatto che il numero di indici  $i$  per cui  $\lambda_{ji}(x) \neq 0$  o  $\lambda_{ji}(y) \neq 0$  è maggiorato da  $2N_j$ .

Prendiamo ora un punto  $z$  di  $S$  a minima distanza da  $y$ , come si è visto in (2.5)  $z \in S^*$ . Si trova

$$\begin{aligned} d(x_{ji}, y + V_j(y)) &\leq d(x_{ji}, z + V_j(y)) + |z - y| \\ &\leq d(x_{ji}, z + V_j(z)) + |x_{ji} - z| D_{0,1}(V_j(z), V_j(y)) + |z - y|. \end{aligned}$$

Supponendo che almeno uno dei due termini  $\lambda_{ji}(x)$ ,  $\lambda_{ji}(y)$  sia diverso da 0, abbiamo  $|x_{ji} - z| \leq 13/4 r_j + |x - y| + |y - z| \leq (13/4 + 4k_5\varepsilon + k_6\varepsilon)r_j \leq 6r_j$  se  $(4k_5 + k_6)\varepsilon \leq 2$ . E continuando la catena di disuguaglianze

$$d(x_{ji}, y + V_j(y)) \leq k_3\varepsilon r_j + 6r_j \frac{k_1}{r_j} \varepsilon k_6 \varepsilon r_j + k_6 \varepsilon r_j \leq (k_3 + 6k_1\varepsilon k_6 + k_6)\varepsilon r_j.$$

Per cui otteniamo

$$\left| \sum_i (\lambda_{ji}(x) - \lambda_{ji}(y)) (\pi_{x_{ji}+V_j(y)}(y) - y) \right| \leq 2N_j k_4 |x - y| (k_3 + 6k_1\varepsilon k_6 + k_6)\varepsilon \quad (2.6)$$

e finalmente come voluto

$$\begin{aligned} &|\sigma_j(x) - x + \sigma_j(y) + y| \\ &\leq (k_7 + (4k_5\varepsilon + \frac{13}{4})k_1 + 2N_j k_4 (k_3 + 6k_1\varepsilon k_6 + k_6))\varepsilon |x - y| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - y| \end{aligned}$$

se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo.

*Dimostriamo la condizione (viii)* per  $\sigma_j(x), \sigma_j(y) \in S_j$  con  $x, y \in S_{j-1}$ . Dall'ipotesi  $|\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| \leq 4k_5\varepsilon r_{j+1}$  e dalla proprietà (vii) otteniamo  $|x - y| \leq 8k_5\varepsilon \rho r_j$ . Abbiamo innanzitutto

$$\begin{aligned} d(\sigma_j(y), \sigma_j(x) + V_{j+1}(\sigma_j(x))) &\leq d(\sigma_j(y), \sigma_j(x) + V_j(x)) \\ &\quad + D_{\sigma_j(x), |\sigma_j(y) - \sigma_j(x)|}(\sigma_j(x) + V_j(x), \sigma_j(x) + V_j(\sigma_j(x))) \\ &\quad + D_{\sigma_j(x), |\sigma_j(y) - \sigma_j(x)|}(\sigma_j(x) + V_j(\sigma_j(x)), \sigma_j(x) + V_{j+1}(\sigma_j(x))) \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove indicando con  $V_j(x)^\perp$  lo spazio ortogonale a  $V_j(x)$

$$d(\sigma_j(y), \sigma(x) + V_j(x)) = |\pi_{V_j(x)^\perp}(\sigma_j(y) - \sigma_j(x))|.$$

Consideriamo ora la seguente uguaglianza

$$\begin{aligned} \sigma_j(y) - \sigma_j(x) &= \sum_i \lambda_{ji}(y) (\pi_{x_{ji}+V_j(y)}(y) - \pi_{x_{ji}+V_j(x)}(y)) \\ &\quad + \sum_i \lambda_{ji}(y) (\pi_{x_{ji}+V_j(x)}(y) - \pi_{x_{ji}+V_j(x)}(x)) \\ &\quad + \sum_i (\lambda_{ji}(y) - \lambda_{ji}(x)) (\pi_{x_{ji}+V_j(x)}(x) - x). \end{aligned}$$

Stimiamo il modulo del primo e del terzo addendo, mentre dimostriamo che il secondo addendo è un vettore dello spazio  $V_j(x)$  e quindi ha proiezione nulla sull'ortogonale. Nei primi due addendi possiamo supporre che sia  $|y - x_{ji}| \leq (13/4)r_j$  e otteniamo

$$\begin{aligned} \left| \sum_i \lambda_{ji}(y)(\pi_{x_{ji}+V_j(y)}(y) - \pi_{x_{ji}+V_j(x)}(y)) \right| &\leq |y - x_{ji}| D_{0,1}(V_j(y), V_j(x)) \\ &\leq \frac{13}{4} r_j |M_j(x) - M_j(y)| \\ &\leq \frac{13}{4} r_j k_1 \frac{\varepsilon}{r_j} |x - y| = \frac{13}{4} k_1 \varepsilon |x - y| \end{aligned}$$

per il secondo addendo abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda_{ji}(y)(\pi_{x_{ji}+V_j(x)}(y) - \pi_{x_{ji}+V_j(x)}(x)) &= \sum_i \lambda_{ji}(y)(\pi_{V_j(x)}(y) - \pi_{V_j(x)}(x)) \\ &= \pi_{V_j(x)}(y - x) \in V_j(x) \end{aligned}$$

e per il terzo addendo, abbiamo la stessa stima dell'equazione (2.6).

Dunque si ottiene, sfruttando anche la proprietà (vii),

$$d(\sigma_j(y), \sigma_j(x) + V_j(x)) \leq \left(\frac{13}{4}k_1 + 0 + 2N_j k_4(k_3 + 6k_6 k_1 \varepsilon + k_6)\right) \varepsilon \cdot 2|\sigma_j(x) - \sigma_j(y)|.$$

Della disuguaglianza (2.7) dobbiamo ancora fare le stime

$$\begin{aligned} D_{\sigma_j(x), |\sigma_j(y) - \sigma_j(x)|}(\sigma_j(x) + V_j(x), \sigma_j(x) + V_j(\sigma_j(x))) &\leq |\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| |x - \sigma_j(x)| k_1 \frac{\varepsilon}{r_j} \\ &\leq |\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| k_5 k_1 \varepsilon^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_{\sigma_j(x), |\sigma_j(y) - \sigma_j(x)|}(\sigma_j(x) + V_j(\sigma_j(x)), \sigma_j(x) + V_{j+1}(\sigma_j(x))) \\ \leq |\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| |M_j(\sigma_j(x)) - M_{j+1}(\sigma_j(x))| \leq |\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| k_2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Per ottenere in conclusione

$$\begin{aligned} d(\sigma_j(y), \sigma_j(x) + V_{j+1}(\sigma_j(x))) \\ \leq \left(2\left(\frac{13}{4}k_1 + 0 + 2N_j k_1(k_3 + 6k_6 k_1 + k_6)\right) + k_5 k_1 \varepsilon + k_2\right) \varepsilon |\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| \\ \leq k_7 \varepsilon |\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| \end{aligned}$$

se imponiamo che valga l'ultima disuguaglianza tra le costanti.

### 2.2.3 Definizione della mappa $\tau$ e verifica dell'iniettività

Definiamo la successione  $\tau_j: S_0 \rightarrow \mathbf{R}^n$  per ricorrenza come  $\tau_j(x) = \sigma_j(\tau_{j-1}(x))$  e  $\tau_0(x) = x$ . Abbiamo per la proprietà (vi)

$$|\tau_j(x) - \tau_{j-1}(x)| = |\sigma_j(\tau_{j-1}(x)) - \tau_{j-1}(x)| \leq k_5 \varepsilon r_j = k_5 \varepsilon r_0 \rho^j$$

cioè  $\tau_j(x)$  è una successione di Cauchy per ogni  $x$  e quindi possiamo definire la funzione  $\tau: S_0 \rightarrow \mathbf{R}^n$  come limite puntuale di  $\tau_j$ . Ma si trova anche

$$|\tau_j(x) - \tau(x)| \leq \sum_{k=j+1}^{\infty} |\tau_k(x) - \tau_{k+1}(x)| \leq \sum_{k=j+1}^{\infty} |k_5 \varepsilon r_{k+1}| = l_{j+1} \quad (2.8)$$

e quindi la convergenza  $\tau_j \rightarrow \tau$  è uniforme e  $\tau$  è continua.

Verifichiamo che  $\tau$  è iniettiva. Supponiamo che sia  $\tau(x) = \tau(y)$  e quindi

$$|\tau_j(x) - \tau_j(y)| \leq |\tau_j(x) - \tau(x)| + |\tau(y) - \tau_j(y)| \leq 2l_{j+1}.$$

Per la proprietà (viii)

$$\begin{aligned} |\tau_j(x) - \tau_j(y)| &= |\sigma_j(\tau_{j-1}(x)) - \sigma_j(\tau_{j-1}(y))| \\ &\geq \frac{1}{2} |\tau_{j-1}(x) - \tau_{j-1}(y)| \geq \dots \geq \frac{1}{2^j} |\tau_0(x) - \tau_0(y)| \end{aligned}$$

Quindi per ogni  $j$  abbiamo

$$\frac{1}{2^j} |\tau_0(x) - \tau_0(y)| \leq 2l_{j+1}$$

cioè  $|\tau_0(x) - \tau_0(y)| \leq 2l_{j+1}2^j = 2k_5\varepsilon\frac{\rho}{1-\rho}\rho^2(2\rho)^j r_0$  che è una successione infinitesima se  $\rho < 1/2$ . Quindi  $\tau_0(x) = \tau_0(y)$  cioè, essendo  $\tau_0$  iniettiva,  $x = y$ .

## 2.2.4 Surgettività di $\tau$

Per la proprietà (vi) abbiamo ovviamente  $\tau(S_0) \subseteq S$ . Vogliamo dimostrare che  $\tau(S_0) \supseteq S \cap \overline{B(x_0, 4r_0)}$ . Prendiamo dunque un punto  $y \in S \cap \overline{B(x_0, 4r_0)}$  e consideriamo la seguente funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} \tau(x) & \text{se } |\tau(x) - y| \leq 2r_0 \\ x & \text{se } |\tau(x) - y| \geq 3r_0 \\ \frac{1}{r_0}((|\tau(x) - y| - 2r_0)x + (3r_0 - |\tau(x) - y|))\tau(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si vede dalla definizione che  $\varphi(x)$  appartiene al segmento  $[x, \tau(x)]$  quindi se  $\varphi(x) = y$  allora  $|\tau(x) - y| \leq |x - \tau(x)|$ , dall'equazione (2.8) troviamo  $|x - \tau(x)| \leq l_1$  e supponendo  $l_1 = k_5\varepsilon r_0 \frac{\rho^2}{1-\rho} \leq r_0$  abbiamo  $\tau(x) = \varphi(x) = y$ . Quindi basta dimostrare che esiste un  $x$  tale che  $\varphi(x) = y$ . Vogliamo anche vedere che  $\varphi$  ristretto a  $(x_0 + V_0) \cap \partial B(x_0, 10r_0 - l_0)$  è l'identità. Infatti se  $x \in S_0$  e  $|x - x_0| \leq 10r_0 - l_0$  abbiamo

$$|\tau(x) - y| \geq |x - y| - |\tau(x) - x| \geq (10r_0 - l_0 - 4r_0) - l_1 \geq 3r_0$$

e quindi  $\varphi(x) = x$ .

Se  $|\varphi(x) - y| \leq r_0$  allora  $|\tau(x) - y| \leq |\tau(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - y| \leq r_0 + r_0$  e quindi  $\tau(x) = \varphi(x)$ . Possiamo dunque affermare che

$$\varphi(S_0) \cap \overline{B(y, r_0)} \subseteq \tau(S_0) \cap \overline{B(y, r_0)} \subseteq S$$

Supponiamo per assurdo che  $y \notin \varphi(S_0)$ , allora per la continuità di  $\varphi$  (ed essendo  $S_0$  compatto), tutto un intorno di  $y$  non interseca  $\varphi(S_0)$ . Cioè esiste  $k$  per cui

$$\varphi(S_0) \cap B(y, 2^{-k}r_0) = \emptyset$$

Supponiamo sia  $k = 0$ . Preso un punto  $x \in S_0$  essendo  $S_0 \subseteq x_0 + V_0$  ed essendo  $\varphi(x) \in [x, \tau(x)]$  abbiamo che

$$d(\varphi(x), x_0 + V_0) \leq d(\tau(x), x_0 + V_0) \leq \varepsilon R = 32\varepsilon r_0$$

Consideriamo ora la mappa

$$\pi_{x_0+V_0} \circ \varphi: S_0 \rightarrow x_0 + V_0$$

siccome questa mappa ristretta a  $V_0 \cap \partial B(x_0, 10r_0 - l_0)$  è l'identità, per il teorema di non retrazione (dal quale si dimostra che una mappa continua dal disco al disco che lascia fissi i punti del bordo, deve essere surgettiva) ogni punto di  $S_0$  deve essere raggiunto, e quindi anche  $\pi_{x_0+V_0}(y)$ . Ma i punti dell'immagine di  $\varphi$  che si proiettano su  $\pi_{x_0+V_0}(y)$  devono essere distanti da  $y$  meno di  $32\varepsilon r_0$  per quanto visto sopra e quindi devono appartenere a  $B(y, r_0) \cap \varphi(S_0)$ . Dunque  $k > 0$ .

Poniamo ora  $r = 2^{-k}r_0$  e supponiamo che valga  $\varphi(S_0) \cap B(y, r) = \emptyset$  ma  $\varphi(S_0) \cap B(y, 2r) \neq \emptyset$  e quindi  $\varphi(S_0) \cap B(y, 2r) = \varphi(S_0) \cap (B(y, 2r) \setminus B(y, r))$ . Scegliamo  $\Sigma(y, 2r)$  come l' $m$ -piano dato dalla condizione- $(\varepsilon, R)$  con

$$D_{y,2r}(\Sigma(y, 2r), S) \leq 2\varepsilon r$$

Siccome in  $B(y, r_0)$  abbiamo che  $\tau = \varphi$  otteniamo

$$\varphi(S_0) \cap B(y, 2r) \subseteq \Sigma(y, 2r) + B(0, 2\varepsilon r)$$

Sia ora  $\omega_k$  definita come la proiezione radiale su  $\partial B(y, 2r)$  per i punti interni a  $B(y, 2r) \setminus \{y\}$  e l'identità fuori da tale palla. Si verifica che  $(\omega_k \circ \varphi)(S_0) \cap B(y, 2r) = \emptyset$  e  $(\omega_k \circ \varphi)(S_0) \cap \partial B(y, 2r)$  rimane all'interno di  $\Sigma(y, 2r) + B(0, 2\varepsilon r)$ . Come prima prendiamo un  $m$ -piano  $\Sigma(y, 4r)$  che disti meno di  $4\varepsilon r$  da  $S \cap B(y, 4r)$  e costruiamo in modo analogo l'applicazione  $\omega_{k-1}$ . Iterando il procedimento ottengo la mappa

$$\pi_{x_0+V_0} \circ \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k \circ \varphi: S_0 \rightarrow x_0 + V_0$$

che è l'identità su  $S_0 \cap \partial B(x_0, 10r_0 - l_0)$  ma che non raggiunge il punto  $\pi_{x_0+V_0}(y)$  contraddicendo il teorema di non retrazione.

Dobbiamo ancora dimostrare che anche l'inversa di  $\tau$  è continua. Se prendiamo l'insieme  $S' = \tau^{-1}(S \cap \overline{B(x_0, 4r_0)})$  abbiamo appena dimostrato che  $\tau: S' \rightarrow S \cap \overline{B(x_0, 4r_0)}$  è una funzione continua e bigettiva. In generale una funzione continua manda i compatti in compatti, dunque essendo  $S'$  compatto,  $\tau$  è anche una funzione chiusa (cioè una funzione che manda chiusi in chiusi) e quindi, essendo bigettiva, è una funzione aperta. Questo dimostra che  $\tau$  ristretta a  $S'$  è un omeomorfismo, dunque se prendiamo un disco  $D \subseteq S'$  intorno al punto  $\tau^{-1}(x_0)$  abbiamo che  $\tau: D \rightarrow \tau(D) \subseteq S$  è un omeomorfismo del disco  $D$  con un intorno di  $x_0$  in  $S$ .

### 2.2.5 Hölderianità di $\tau$ .

Verificheremo contemporaneamente l'Hölderianità di  $\tau$  e di  $\tau^{-1}$ . Sappiamo da (vii) e (v) (si veda la sezione 2.2.2) che vale

$$\frac{1}{2}|x - y| \leq |\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| \leq 2|x - y| \quad (2.9)$$

$$|x - y| - 2k_5\varepsilon r_j \leq |\sigma_j(x) - \sigma_j(y)| \leq 2k_5\varepsilon r_j + |x - y| \quad (2.10)$$

Per verificare l'Hölderianità, possiamo supporre  $|x - y| < 2\frac{\rho}{1-\rho}k_5\varepsilon r_0$  in quanto non ci sono problemi per  $|x - y|$  grande, essendo la funzione  $\tau$  definita tra due compatti. Dunque, fissati  $x$  e  $y$ , possiamo sempre trovare un intero  $k = k(x, y)$  per cui valga (ricordiamo che  $\rho < 1$ )

$$\frac{2\rho}{1-\rho}k_5\varepsilon r_0 \leq \left(\frac{2}{\rho}\right)^k |x - y| \leq \frac{2}{\rho} \frac{2\rho}{1-\rho} k_5\varepsilon r_0 \quad (2.11)$$

Abbiamo usando (2.9)

$$\begin{aligned} |\tau_k(x) - \tau_k(y)| &= |\sigma_k(\tau_{k-1}(x)) - \sigma_k(\tau_{k-1}(y))| \\ &\leq 2^1 |\tau_{k-1}(x) - \tau_{k-1}(y)| \leq \dots \leq 2^k |x - y| \end{aligned}$$

e analogamente

$$|\tau_k(x) - \tau_k(y)| \geq \frac{1}{2^k} |x - y|;$$

d'altro canto per  $j > k$ , usando 2.9

$$\begin{aligned} |\tau_j(x) - \tau_j(y)| &= |\sigma_j \circ \dots \circ \sigma_{k+1} \circ \tau_k(x) - \sigma_j \circ \dots \circ \sigma_{k+1} \circ \tau_k(y)| \\ &\leq |\tau_k(x) - \tau_k(y)| + \sum_{i=k+1}^j 2k_5 \varepsilon r_i \end{aligned}$$

e allo stesso modo

$$|\tau_j(x) - \tau_j(y)| \geq |\tau_k(x) - \tau_k(y)| - \sum_{i=k+1}^j 2k_5 \varepsilon r_i.$$

Quindi

$$|\tau(x) - \tau(y)| \leq 2^k |x - y| + 2k_5 \varepsilon r_0 \sum_{i=k+1}^{\infty} \rho^i = 2^k |x - y| + 2k_5 \varepsilon r_0 \rho^{k+1} \frac{1}{1 - \rho}$$

e analogamente

$$|\tau(x) - \tau(y)| \geq \frac{1}{2^k} |x - y| - 2k_5 \varepsilon r_0 \rho^{k+1} \frac{1}{1 - \rho}.$$

Usando poi (2.11) otteniamo quindi

$$\begin{aligned} |\tau(x) - \tau(y)| &\leq 2 \cdot 2^k |x - y| & (2.12) \\ |\tau(x) - \tau(y)| &\geq \left(\frac{1}{2^k} + 2^k\right) |x - y| \geq \frac{1}{2^k} |x - y|. \end{aligned}$$

Usando l'altra stima in (2.11) si ha (con  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  e  $c'''$  costanti dipendenti da  $\varepsilon$ ,  $r_0$ ,  $\rho$  e  $k_5$ )

$$\left(\frac{2}{\rho}\right)^k \leq \frac{\frac{4}{1-\rho} k_5 \varepsilon r_0}{|x - y|} = \frac{c}{|x - y|}$$

e quindi

$$k \log \frac{2}{\rho} \leq \log \frac{c}{|x - y|}$$

cioè

$$k \leq \frac{\log \frac{c}{|x - y|}}{\log \frac{2}{\rho}}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} 2^k &\leq \left( \exp \frac{\log \frac{c}{|x - y|}}{\log \frac{2}{\rho}} \right)^{\log 2} \\ &= \left( \frac{c}{|x - y|} \right)^{\frac{\log 2}{\log \frac{2}{\rho}}} = c' |x - y|^{-\frac{\log 2}{\log \frac{2}{\rho}}}. \end{aligned}$$

In conclusione da (2.12) otteniamo

$$|\tau(x) - \tau(y)| \leq c'' |x - y|^{1 - \frac{\log 2}{\log \frac{2}{\rho}}} = c'' |x - y|^\alpha$$

$$|\tau(x) - \tau(y)| \geq \frac{1}{c'} |x - y|^{2-\alpha}$$

se poniamo  $\alpha = 1 - \frac{\log 2}{\log 2 - \log \rho}$ . La prima equazione è la condizione di Hölder per  $\tau$ , la seconda diventa

$$|x - y| \leq c''' |\tau(x) - \tau(y)|^{\frac{1}{2-\alpha}}$$

che è la condizione di Hölder per  $\tau^{-1}$ .

Si vede facilmente che dalla condizione  $0 < \rho < 1$  seguono le condizioni  $0 < \alpha < 1$  e  $\frac{1}{2} < \frac{1}{2-\alpha} < 1$ , con  $\alpha \rightarrow 1$  se  $\rho \rightarrow 0$ .

# Capitolo 3

## Regolarità delle superfici minime

In questo capitolo dimostreremo che le superfici di area minima verificano la proprietà  $(\varepsilon, R)$  di Reifenberg nei punti di densità uno e di conseguenza che tali superfici sono localmente dischi topologici in quasi tutti i punti (Teorema 3.4).

Cominciamo con alcune definizioni.

**Definizione 3.1** *Poniamo (si veda la Definizione 1.2)*

$$\mu(L) = \inf_{S \in \mathcal{S}(L)} \mathcal{H}^m(S).$$

*Diremo che  $S_0 \in \mathcal{S}(L)$  è una superficie minima se*

$$\mathcal{H}^m(S_0) = \mu(L).$$

*Diremo poi che  $S_0$  è una superficie minima propria se non esiste un compatto  $S \in \mathcal{S}(L)$  con  $S \subsetneq S_0$ ,  $S \neq S_0$  che sia a sua volta una superficie minima.*

Dal seguente esempio si può capire come l'essere superficie minima propria sia rilevante in questo contesto.

**Esempio 3.2** Sia  $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.c. } x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$  il disco unitario e  $A = \partial S$  il suo bordo. Ovviamente  $S$  è una superficie minima (si veda il Teorema 1.39), ed è anche una superficie minima propria per quanto visto nell'Esempio 1.4.

Prendiamo ora  $S' = S \cup X$  dove  $X$  è un qualunque compatto di misura  $m$ -dimensionale nulla. Dal Corollario 1.37  $S' \in \mathcal{S}(L)$ , ed essendo  $\mathcal{H}^m(S) = \mathcal{H}^m(S')$  si trova che  $S'$  è una superficie minima. Ma se  $X \neq \emptyset$  allora  $S'$  non sarà una superficie minima propria.

**Proposizione 3.3** *Se  $S_1 \in \mathcal{S}(L)$  è una superficie minima, allora esiste una superficie minima propria  $S_0 \in \mathcal{S}(L)$  con  $S_0 \subsetneq S_1$ .*

*Dimostrazione:*

Consideriamo la famiglia  $\mathcal{F} = \{S \in \mathcal{S}(L) \text{ t.c. } S \subsetneq S_1\}$ , con l'ordinamento parziale dato dall'inclusione insiemistica. In base al Teorema 1.40 sappiamo che lo spazio  $\mathcal{S}(L)$  è chiuso e possiamo quindi applicare il Lemma di Zorn alla famiglia  $\mathcal{F}$ , in quanto data una "catena" (cioè una successione decrescente)  $\{S_\alpha\}$  possiamo trovare un elemento "minorante"  $\bigcap_\alpha S_\alpha \in \mathcal{F}$ . Dunque sappiamo che esiste un elemento "minimale"  $S_0$  tale che  $S_0 \in \mathcal{S}(L)$  e  $S_0 \subsetneq S$  e non esiste nessun altro elemento di  $\mathcal{F}$  contenuto in  $S_0$ . Questo ci dice esattamente che  $S_0$  è una superficie minima propria.  $\square$

Il teorema che dimostreremo in questo capitolo, sarà il seguente.

**Teorema 3.4 (regolarità)** *Sia  $S_0$  una superficie minima propria. Allora per tutti i punti di  $x \in S_0 \setminus A$  si ha*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^m(S_0 \cap B(x, r))}{\gamma_m r^m} \geq 1$$

e, se  $X$  è l'insieme dei punti  $x$  per cui si ha

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^m(S_0 \cap B(x, r))}{\gamma_m r^m} > 1,$$

allora  $\mathcal{H}^m(X) = 0$ . Inoltre ogni punto di  $S_0 \setminus (A \cup X)$  ha un intorno in  $S$  omeomorfo al disco  $m$ -dimensionale.

Assumiamo nell'intero capitolo  $m \geq 2$ , in quanto il caso  $m = 1$  ha delle particolarità che ci impediscono di fare alcune stime che valgono invece per  $m > 1$ . Questa peculiarità del caso  $m = 1$  è da ricercarsi nel fatto che la connessione di una superficie “costa” area, mentre in dimensione maggiore si può connettere qualunque superficie aggiungendo segmenti che non danno contributo in area, e questo a sua volta corrisponde al fatto che  $H_0^\# \neq H_0$  (si veda la proposizione 1.16).

Molti dei lemmi dimostrati in questo capitolo, verranno utilizzati anche nel capitolo seguente per dimostrare l'esistenza di superfici minime. Per questo motivo, questi lemmi riguarderanno una particolare successione di superfici  $\{S_k\} \subseteq \mathcal{S}(L)$  ma, per la dimostrazione del Teorema 3.4, ci basterà applicare tali lemmi alla successione costante  $\{S_0\}$ .

**Definizione 3.5** *D'ora in avanti, dati  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $r \geq 0$ , una successione di compatti  $\{S_k\}$  e un compatto  $S_0$ , poniamo*

$$\begin{aligned} \varphi_k(x, r) &= \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r)), \\ \psi_k(x, r) &= \int_0^r \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x, t)) dt, \end{aligned}$$

e

$$\beta = \inf \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_k(x, r)}{\gamma_m r^m}$$

dove l'inf è fatto su tutti gli  $x \in S_0$  e  $r > 0$  per cui  $B(x, r)$  non interseca  $A$

Fissiamo un compatto  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  e un sottogruppo  $L \subseteq H_{m-1}(A)$ , sia  $K$  una qualunque costante positiva e siano  $\varepsilon_k$  e  $r_k$  due successioni infinitesime di reali positivi. Prenderemo in considerazione una successione di compatti  $\{S_k\}$  e un compatto  $S_0$  che verifichino le seguenti ipotesi:

$$S_k \in \mathcal{S}(L) \tag{3.1}$$

$$\mathcal{H}^m(S_k) \leq \mu(L) + \varepsilon_k \tag{3.2}$$

$$\varphi_k(x, r) \geq Kr^m \quad \forall r > r_k \quad \forall B(x, r) \quad \text{t.c.} \quad B(x, r) \cap A = \emptyset. \tag{3.3}$$

$$D(S_k, S_0) \rightarrow 0. \tag{3.4}$$

Queste ipotesi dicono che  $\{S_k\}$  è una successione minimizzante che in più verifica (3.3). Nel Capitolo 4 dimostreremo che una tale successione di superfici esiste effettivamente e e

dimostreremo, usando molti dei lemmi dimostrati in questo capitolo, che la superficie  $S_0$  a cui converge tale successione, è una superficie di area minima. Si faccia ancora riferimento all'Esempio 1.29 per avere una successione minimizzante che non verifica l'ipotesi (3.3) (e che infatti non converge ad una superficie minima), in quanto in alcuni punti (in cima ai cilindri)  $\varphi_0(x, r)$  cresce linearmente con  $r$  invece che come  $r^2$ .

Se  $S_0$  è una superficie minima e si sceglie la successione costante  $S_k = S_0$ , le proprietà (3.1), (3.2) e (3.4) sono ovviamente verificate. Verifichiamo che, se  $S_0$  è una superficie minima propria, vale anche (3.3).

**Proposizione 3.6** *Sia  $S_0 \in \mathcal{S}(L)$ , una superficie minima propria ( $L \subseteq H_{m-1}(A)$  e  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ). Allora esiste una costante positiva  $K = K(m, n)$  tale che scelta comunque una palla  $B(x, r)$  disgiunta da  $A$  si abbia:*

$$\varphi_0(x, r) \geq Kr^m$$

*Dimostrazione:*

Si ha che  $\mathcal{H}^{m-1}(S_0 \cap B(x, r)) \neq 0$  in quanto se fosse 0 anche il gruppo di omologia  $H_{m-1}$  sarebbe nullo (per il Lemma 1.31), e quindi per il Teorema 1.41 potrei tagliare da  $S_0$  la palla  $B(x, r)$  senza cambiare il bordo. Questo è assurdo per il fatto che  $S_0$  è una superficie minima propria.

Dalla disuguaglianza isoperimetrica (Lemma 1.46) essendo  $S_0$  una superficie minima sappiamo che

$$\mathcal{H}^m(S_0 \cap B(x, r)) \leq K \left( \mathcal{H}^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x, r)) \right)^{\frac{m}{m-1}}$$

e quindi per il Lemma 1.42

$$\psi_0(x, r) = \int_0^r \mathcal{H}^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x, t)) dt \leq K \left( \mathcal{H}^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x, r)) \right)^{\frac{m}{m-1}}$$

cioè

$$\frac{\frac{d}{dr} \psi_0(x, r)}{(\psi_0(x, r))^{\frac{m}{m-1}}} \geq K^{-\frac{m-1}{m}}$$

che integrata dà

$$(\psi_0(x, r))^{\frac{1}{m}} \geq K^{-\frac{m-1}{m}} r$$

e quindi

$$\varphi_0(x, r) \geq \psi_0(x, r) \geq K^{-(m-1)} r^m.$$

□

## 3.1 Stime di densità

Dal Lemma 1.42 sappiamo che

$$\varphi_k(x, r) \geq \psi_k(x, r). \quad (3.5)$$

In questa sezione dimostreremo altre proprietà riguardanti le “densità”  $\varphi$ ,  $\psi$  e  $\beta$ .

**Lemma 3.7** *Se  $B(x, r)$  è una palla che non interseca  $A$ , allora*

$$\psi_k(x, r) \leq \varphi_k(x, r) \leq \frac{r \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x, r))}{m} + \varepsilon_k$$

*Dimostrazione:*

La prima disuguaglianza segue direttamente dal Lemma 1.42. Per quanto riguarda la seconda disuguaglianza, sappiamo per il Lemma 1.45 che per ogni  $\varepsilon$  si può trovare una superficie  $C$  di area

$$\mathcal{H}^m(C) \leq \frac{r}{m} \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x, r)) + \varepsilon$$

Siccome si ha anche  $b(C, A) = H_{m-1}(S_k \cap \partial B(x, r))$ , per il Teorema 1.41 possiamo “tagliare” da  $S_k$  la palla  $B(x, r)$  e sostituirla con il cono  $C$ , in modo da ottenere un'altra superficie  $S \in \mathcal{S}(L)$ . Sapendo che  $\mathcal{H}^m(S) \leq \mu(L)$  e che  $S$  e  $S_k$  coincidono fuori dalla palla  $B(x, r)$ , in base alla proprietà (3.2) otteniamo subito la disuguaglianza voluta.  $\square$

**Lemma 3.8** *Vale (si veda la Definizione 3.5)*

$$\beta \geq \frac{K}{\gamma_m} > 0.$$

*Dimostrazione:*

Data una qualunque palla  $B(x, r)$  disgiunta da  $A$  con  $x \in S_0$ , e preso un qualunque  $r' < r$ , per  $k$  sufficientemente grande troviamo un punto  $x' \in S_k$  per cui  $B(x', r') \subseteq B(x, r)$  e quindi dall'ipotesi (3.3)

$$\varphi_k(x, r) \geq \varphi_k(x', r') \geq Kr'^m$$

cioè per ogni  $r' < r$  esiste un  $k$  per cui

$$\frac{\varphi_k(x, r)}{\gamma_m r^m} \geq \frac{Kr'^m}{\gamma_m r^m}$$

da cui si ottiene  $\beta \geq \frac{K}{\gamma_m}$ .  $\square$

**Lemma 3.9** *Vale (si confronti con la Definizione 3.5)*

$$\beta = \inf \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi_k(x, r)}{\gamma_m r^m} \right)$$

dove l'inf viene fatto su tutti gli  $x, r$  per cui  $x \in S_0$  e  $B(x, r)$  non interseca  $A$ .

*Dimostrazione:*

Si ha, usando il Lemma di Fatou, il Lemma 3.7 e la definizione di  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \psi_k(x, r) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^r \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x, t)) dt \\ &\geq \int_0^r \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x, t)) dt \\ &\geq \int_0^r \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{m}{t} (\mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, t)) - \varepsilon_k) dt \\ &= \int_0^r \frac{m}{t} \liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x, t) dt \\ &\geq \int_0^r \frac{m}{t} \beta \gamma_m t^m dt \geq \beta \gamma_m r^m. \end{aligned}$$

D'altra parte si ha  $\psi_k(x, r) \leq \varphi_k(x, r)$  e quindi la tesi.  $\square$

**Lemma 3.10** *Dati  $r_2 > r_1 > 0$  e  $x \in S_0$ , se  $B(x, r_2)$  non interseca  $A$  abbiamo*

$$\begin{aligned} \liminf_{k_i \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k_i}(x, r_2)}{\gamma_m r_2^m} &\geq \liminf_{k_i \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k_i}(x, r_1)}{\gamma_m r_1^m} \\ \limsup_{k_i \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k_i}(x, r_2)}{\gamma_m r_2^m} &\geq \limsup_{k_i \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k_i}(x, r_1)}{\gamma_m r_1^m} \end{aligned}$$

per ogni sottosuccessione  $\{k_i\}$  degli interi.

*Dimostrazione:*

Per il Lemma 3.9, se  $k$  è sufficientemente grande si ha

$$\psi_k(x, r_1) \geq \frac{1}{2} \beta \gamma_m r_1^m$$

ed essendo  $\psi_k$  crescente in  $r$ , per ogni  $r > r_1$  si ha

$$\psi_k(x, r) \geq \frac{1}{2} \beta \gamma_m r_1^m$$

e dal Lemma 3.7, osservando che vale  $\frac{d}{dr} \psi_k(x, r) = \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x, r))$  otteniamo

$$\begin{aligned} \psi_k(x, r) &\leq \frac{r \frac{d}{dr} \psi_k(x, r)}{m} + \varepsilon_k \\ &\leq \frac{r}{m} \frac{d}{dr} \psi_k(x, r) \left( 1 + \frac{\varepsilon_k}{\frac{r}{m} \frac{d}{dr} \psi_k(x, r)} \right) \\ &\leq \frac{r}{m} \frac{d}{dr} \psi_k(x, r) \left( 1 + \frac{\varepsilon_k}{\psi_k(x, r) - \varepsilon_k} \right) \\ &\leq \frac{r}{m} \frac{d}{dr} \psi(x, r) \left( 1 + \frac{\varepsilon_k}{\frac{1}{2} \beta \gamma_m r_1^m - \varepsilon_k} \right) \end{aligned}$$

Da cui si ottiene

$$\frac{\frac{d}{dr} \psi_k(x, r)}{\psi_k(x, r)} \geq \frac{m}{r} \left( 1 - \frac{\varepsilon_k}{\frac{1}{2} \beta \gamma_m r_2^m} \right)$$

che integrando da  $r_1$  a  $r_2$  ci dà

$$\log \frac{\psi_k(x, r_2)}{\psi_k(x, r_1)} \geq \log \frac{r_2^m}{r_1^m} \left( 1 - \frac{\varepsilon_k}{\frac{1}{2} \beta \gamma_m r_2^m} \right)$$

cioè

$$\frac{\psi_k(x, r_2)/(\gamma_m r_2^m)}{\psi_k(x, r_1)/(\gamma_m r_1^m)} \geq \exp \left( \frac{-\varepsilon_k}{\frac{1}{2} \beta \gamma_m r_1^m} \log \frac{r_2^m}{r_1^m} \right)$$

che essendo vero per qualunque  $k$  sufficientemente grande, ci dà la tesi.  $\square$

Il seguente lemma è probabilmente il passo più importante nella dimostrazione del Teorema 3.4 di regolarità. Come facile corollario infatti si ha il Lemma 3.12, il quale data una palla  $B(x_0, r_0)$  garantisce l'esistenza di un piano "approssimante" l'insieme  $S_0$ , non ancora sull'intera palla ma, per ora, solo su una palla più piccola di quella data.

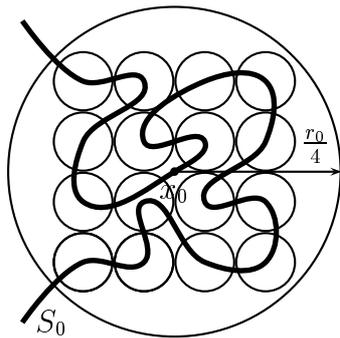


Figura 3.1: Se  $S_0$  incontrasse tutte le palle di raggio  $2r_1$  contenute in  $B(x_0, \frac{r_0}{4})$ , dovrebbe avere una misura molto maggiore di  $\gamma_m \frac{r_0}{4}^m$

**Lemma 3.11** *Siano dati  $h > m$  e  $\varepsilon > 0$  e sia  $B(x_0, r_0)$  una palla centrata in  $S_0$  e che non intersechi  $A$ . Supponiamo che, per un certo  $\alpha > 0$  e per ogni palla  $B(x, r) \subseteq B(x_0, r_0)$  con  $x \in S_0$ , si abbia*

$$\beta \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi_k(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi_k(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \beta + \alpha \quad (3.6)$$

e

$$\beta \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_k(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_k(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \beta + \alpha. \quad (3.7)$$

Allora esistono  $\varepsilon' > 0$ ,  $\alpha' > 0$  e  $0 < \lambda < 1$  (che non dipendono da  $x_0$  e  $r_0$ ) tali che se  $\alpha < \alpha'$  ed esiste un  $h$ -piano  $\Sigma_h$  passante per  $x_0$  tale che  $S_0 \cap B(x_0, r_0) \subseteq \Sigma_h + B(0, \varepsilon' r_0)$  allora esiste un punto  $x \in S_0$  con  $B(x, \lambda r_0) \subseteq B(x_0, r_0)$  e un piano  $(h-1)$ -dimensionale  $\Sigma_{h-1}$  tali che  $S_0 \cap B(x, \lambda r_0) \subseteq \Sigma_{h-1} + B(0, \varepsilon \lambda r_0)$ .

Vediamo qual è l'idea della dimostrazione, che risulterà piuttosto complessa. Le ipotesi su  $\psi$  e  $\varphi$  ci garantiscono che ogni volta che intersechiamo  $S_k$  con una palla  $B(x, r)$ , otteniamo un insieme che ha una misura nè troppo grande nè troppo piccola (più precisamente tale misura è confrontabile con quella del disco  $m$ -dimensionale di raggio  $r$ ). Consideriamo per fissare le idee  $n = h = 3$ ,  $m = 2$  e si noti che in questo caso  $S_0$  dista 0 dallo spazio  $\Sigma_h = \mathbf{R}^3$ .

Il *primo passo* sarà quello di trovare una palla  $B(y, r_2)$  contenuta in  $B(x_0, r_0)$  (e con  $r_2 > r_1$  non troppo piccolo) che sia “tangente” all'insieme  $S_0$ . Vogliamo cioè che ci sia un punto  $x \in S_0 \cap \partial B(y, r_2)$  ma che non ci sia nessun punto di  $S_0$  all'interno di tale palla. L'esistenza di questa palla si dimostra molto facilmente per assurdo. Se infatti prendiamo delle palle disgiunte di raggio  $2r_1$ , tutte contenute in  $B(x_0, r_0/4)$  per assurdo, ognuna di queste dovrebbe contenere un punto di  $S_0$  ad una distanza minore di  $r_1$  dal proprio centro. Dunque per le ipotesi su  $\varphi$ , la palla di raggio  $r_1$  dovrà contenere una quantità di insieme dell'ordine dell'area dell' $m$ -disco di raggio  $r_1$  (Figura 3.1). Si vede dunque che questa area moltiplicata per il numero di palle che uno riesce a far stare in  $B(x_0, r_0)$  è più del dovuto, nel senso che è molto più grande dell'area dell' $m$ -disco di raggio  $r_0$ . Una volta trovata una palla sufficientemente grande che non contiene punti di  $S_0$ , basterà ingrandirla per fare in modo che “tocchi” un punto  $x \in S_0$ . Prenderemo come piano approssimante  $\Sigma_{h-1}$  il piano tangente alla sfera  $\partial B(y, r_1)$  nel punto  $x$ .

Il *secondo passo* sarà quello di dimostrare che il cono  $C_\theta$  formato dai punti che hanno un angolo minore di  $\theta$  con la semiretta uscente da  $x$  in direzione opposta a  $y$ , contiene, in area, poco di  $S_0$ . La dimostrazione di questo fatto risulterà complessa e tecnica.

Dovremo cercare di stimare l'area contenuta in tale cono sfruttando solo il fatto che le superfici  $S_k$  sono “ $\varepsilon_k$ -quasi minime” e quindi ogni volta che taglio una palla e sostituisco l'insieme con un cono, ottengo qualcosa che non fa diminuire l'area di più di  $\varepsilon_k$ . Ora noi vorremmo tagliare da  $S_k$  una palla  $B(x, r)$  ma invece di sostituirla col cono  $C(x, S_k \cap \partial B(x, r))$  centrato in  $x$ , la sostituiamo con i due coni  $C(z, C_\theta \setminus (S_0 \cap \partial B(x, r)))$  e  $C(z, C_\theta \cap S_0 \cap \partial B(x, r))$  centrati in un punto  $z$  che abbia una certa distanza  $d$  da  $B(y, r_1)$  (Figura 3.2). In questo modo possiamo sfruttare il fatto che l'insieme  $S_0$  deve stare fuori da  $B(y, r_2)$  e possiamo avere una stima della parte di  $S_0$  interna al cono  $C_\theta$ .

Il *terzo passo* sarà la verifica della tesi del lemma. Notiamo che l'( $h-1$ )-piano  $\Sigma_{h-1}$  divide  $\Sigma_h$  in due  $h$ -semipiani  $X$  e  $Y$  dove supponiamo che sia  $X$  quello che contiene  $B(y, r_2)$ .

Scelto un opportuno  $\lambda$ , se avessi un punto  $w$  di  $S_0$  contenuto in  $B(x, \lambda r_0)$  che dista più di  $\varepsilon \lambda r_0$  da  $\Sigma_{h-1}$ , questo punto non potrebbe stare in  $X$  in quanto essendo lontano da  $\Sigma_{h-1}$  dovrebbe stare all'interno di  $B(y, r_2)$  (se  $\lambda$  è abbastanza piccolo). Dunque possiamo supporre che  $w \in Y$ . Se abbiamo scelto opportunamente  $\theta$  e  $\lambda$ , avremo che una intera palla centrata in  $w$  dovrà stare all'interno del cono  $C_\theta$ , e quindi per le ipotesi su  $\psi$ , avremo che la parte di  $S_0$  contenuta in  $C_\theta$  dovrà avere un'area dell'ordine di  $\beta \gamma_m r_2^m$  che è troppo rispetto a quanto trovato nel secondo passo.

*Dimostrazione:*

*Primo passo.* Scegliamo un certo raggio  $r_1 < r_0$  e cerchiamo di stimare quante palle disgiunte, di raggio  $2r_1$  riusciamo a far stare in  $B(x_0, r_0/4) \cap \Sigma_h$ . Notiamo innanzitutto che  $B(x_0, r_0/4) \cap \Sigma_h$  contiene un  $h$ -cubo  $K$  di lato  $\frac{r_0}{2\sqrt{h}}$  mentre una  $h$ -palla di raggio  $2r_1$  è contenuta in un  $h$ -cubo di lato  $4r_1$ . Dunque dividendo il cubo  $K$  in tanti cubetti di lato  $4r_1$ , e mettendo una palla in ogni cubetto riusciamo ad avere

$$\left\lfloor \frac{\frac{r_0}{\sqrt{h}}}{8r_1} \right\rfloor^h \geq \left( \frac{\frac{r_0}{\sqrt{h}}}{16r_1} \right)^h \geq \left( 16\sqrt{h} \frac{r_1}{r_0} \right)^{-h}$$

palle disgiunte di raggio  $2r_1$  centrate su  $\Sigma_h$ . Se  $\{x_i\} \subseteq \Sigma_h$  è l'insieme dei centri di queste palle, vogliamo dimostrare che almeno una delle palle  $B(x_i, r_1)$  non interseca  $S_0$ . Supponiamo per assurdo che per ogni  $i$  esista  $y_i \in B(x_i, r_1) \cap S_0$ , avremo ancora che le palle  $B(y_i, r_1)$  sono disgiunte e contenute in  $B(x_0, r_0)$ , dunque abbiamo usando anche l'ipotesi (3.7)

$$\begin{aligned} (\beta + \alpha) \gamma_m \left( \frac{r_0}{4} \right)^m &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x_0, \frac{1}{4} r_0)) \\ &\geq \sum_i \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k \cap B(y_i, r_1)) \\ &\geq \sum_i \beta \gamma_m r_1^m \geq \left( 16\sqrt{h} \frac{r_1}{r_0} \right)^{-h} \beta \gamma_m r_1^m. \end{aligned}$$

che è assurdo se prendiamo

$$r_1 = \left( \frac{(8\sqrt{h})^h}{2^{\frac{2}{m-1}}} \right)^{\frac{1}{m-h}} r_0. \quad (3.8)$$

Abbiamo dunque dimostrato che esiste una palla  $B(y, r_1) \subseteq B(x_0, r_0/2)$  con  $y \in \Sigma_h$  che non contiene punti di  $S_0$ . Poniamo

$$r_2 = \max\{r \in \mathbf{R} \quad \text{t.c.} \quad B(y, r) \cap S_0 = \emptyset\}$$

in modo tale da avere  $B(y, r_2) \cap S_0 = \emptyset$  pur sapendo che esiste un punto  $x \in S_0 \cap \partial B(y, r_2)$ . Siccome  $x_0 \in S_0$  si ha  $r_2 \leq |x_0 - y| \leq x_0/4$  e quindi  $B(y, r_2) \subseteq B(x_0, r_0/2)$ .

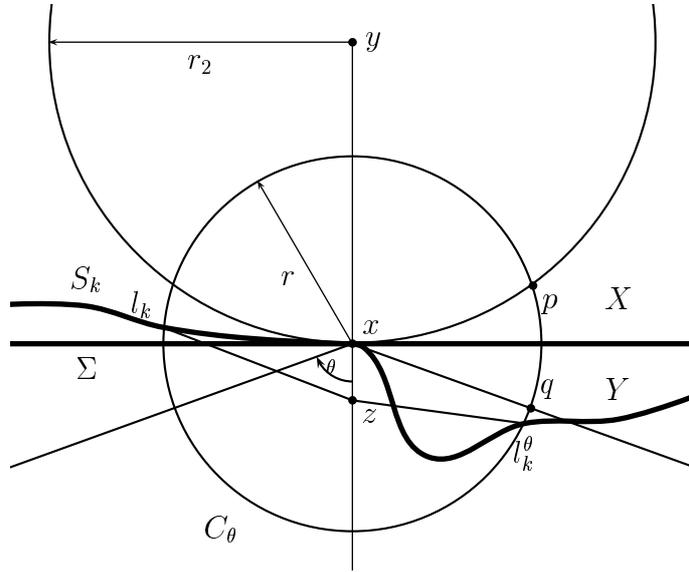


Figura 3.2: La superficie  $S_k$ , l'iperpiano  $\Sigma$  e il cono  $C_\theta$ .

*Secondo passo.* Chiamiamo  $\Sigma$  l'( $n - 1$ )-piano tangente a  $B(y, r_2)$  nel punto  $x$  (si veda la Figura 3.2). Consideriamo poi il cono  $C_\theta$  con vertice in  $x$  e ampiezza  $\theta$  definito come segue:

$$C_\theta = \{v \in \mathbf{R}^n \quad \text{t.c.} \quad (v - x) \cdot (x - y) \geq |v - x||x - y| \cos \theta\}$$

e prendiamo il punto  $z \in C_\theta$  giacente sulla retta  $xy$  e ad una certa distanza  $d$  da  $x$ . Scegliamo poi  $r_3$  e  $r_4$  come segue

$$r_4 = \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{3}{4}} r_3 < r_3 \ll r_2 \tag{3.9}$$

e poniamo

$$d = \frac{r_3^2}{r_2} \tag{3.10}$$

$$\cos \theta = 2 \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{1}{8}}. \tag{3.11}$$

Prendiamo ora una palla  $B(x, r)$  con  $r_4 \leq r \leq r_3$  e poniamo

$$\begin{aligned} l_k(r) &= S_k \cap \partial B(x, r) \\ l_k^\theta(r) &= S_k \cap \partial B(x, r) \cap C_\theta. \end{aligned}$$

Il Lemma 1.45 ci permette di trovare due superfici  $C_1$  e  $C_2$  (che approssimano i coni  $C(z, l_k^\theta(r))$  e  $C(z, l_k(r) \setminus l_k^\theta(r))$ ) per cui vale

$$\begin{aligned} m\mathcal{H}^m(C_1) &\leq D(\{z\}, l_k^\theta(r))\mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) + \frac{1}{2}m\varepsilon_k \\ m\mathcal{H}^m(C_2) &\leq D(\{z\}, l_k(r) \setminus l_k^\theta(r))\mathcal{H}^{m-1}(l_k(r) \setminus l_k^\theta(r)) + \frac{1}{2}m\varepsilon_k \end{aligned}$$

e dunque, facendo un'operazione di "taglia e cucì" (Teorema 1.41), otteniamo

$$\begin{aligned} m(\mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r)) - \varepsilon_k) &\leq m\mathcal{H}^m(C_1 \cup C_2) & (3.12) \\ &\leq D(\{z\}, l_k(r) \setminus l_k^\theta(r)) \cdot \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r) \setminus l_k^\theta(r)) \\ &\quad + D(\{z\}, l_k^\theta(r)) \cdot \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) + m\varepsilon_k. \end{aligned}$$

Se prendiamo un punto  $p \in \partial B(y, r_2) \cap \partial B(x, r)$  e un punto  $q \in \partial C_\theta \cap \partial B(x, r)$ , con alcune semplici argomentazioni di tipo geometrico troviamo che:

$$\begin{aligned} D(\{z\}, l_k(r) \setminus l_k^\theta(r)) &\leq |p - z| + D(S_k, S_0) & (3.13) \\ &= \sqrt{r^2 + d^2 + d\frac{r^2}{r_1}} + D(S_k, S_0) \\ D(\{z\}, l_k^\theta(r)) &\leq |q - z| = \sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos \theta}. \end{aligned}$$

Dunque da (3.12) e (3.13), usando le equazioni (3.10), otteniamo

$$\begin{aligned} &m\mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r)) - 2m\varepsilon_k \\ &\leq \left( \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) - \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) \right) \left( \sqrt{r^2 + d^2 + d\frac{r^2}{r_2}} + D(S_k, S_0) \right) \\ &\quad + \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) \sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos \theta} \\ &\leq \left( \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) - \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) \right) \left( \sqrt{r_3^2 + \frac{r_3^2}{r_2^2} + \frac{r_3^2 r_3^2}{r_2 r_2} + D(S_k, S_0)} \right) \\ &\quad + \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) \sqrt{\frac{r_3^4}{r_2^2} + r_3 \left( r_3 - 2\frac{r_3^2}{r_2} \cdot 2 \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^{\frac{1}{8}} \right)} \\ &\leq \left( \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) - \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) \right) \left( r_3 \sqrt{1 + 2\frac{r_3^2}{r_2^2}} + D(S_k, S_0) \right) \\ &\quad + \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) r_3 \sqrt{1 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^{1+\frac{1}{8}} \left( 4 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^{\frac{7}{8}} \right)} \\ &\leq D(S_k, S_0) \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) + r_3 \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) + r_3 \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) \\ &\quad - r_3 \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) + r_3 \left( 1 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^{\frac{9}{8}} \right) \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) \\ &\leq D(S_k, S_0) \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) + r_3 \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) \\ &\quad + \frac{3}{2} r_3 \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^{\frac{5}{4}} \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) - r_3 \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^{\frac{9}{8}} \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)). \end{aligned}$$

E quindi

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) \\ &\leq \frac{1}{r_3} \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^{-\frac{9}{8}} \left( D(S_k, S_0) \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) + r_3 \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) \right) \\ &\quad + \frac{1}{r_3} \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^{-\frac{9}{8}} \left( -m\mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r)) + 2m\varepsilon_k + \frac{3}{2} r_3 \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^{\frac{5}{4}} \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{r_3} \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{-\frac{9}{8}} D(S_k, S_0) \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) + \frac{3}{2} \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{1}{8}} \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) \\ &\quad + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{-\frac{9}{8}} \left( \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) - \frac{m\mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r))}{r} + \frac{2m\varepsilon_k}{r} \right). \end{aligned}$$

che integrando e usando il Lemma di Fatou ci dà (sapendo anche che  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  e  $D(S_k, S_0) \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{r_4}^{r_3} \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) \, dr &\leq \frac{3}{2} \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{1}{8}} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{r_4}^{r_3} \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) \, dr \\ &\quad + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{-\frac{9}{8}} \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{r_4}^{r_3} \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) \, dr \right. \\ &\quad \left. - \int_{r_4}^{r_3} \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{m\mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r))}{r} \, dr \right). \end{aligned}$$

E quindi, sapendo che  $m \geq 2$  e usando le ipotesi (3.6) e (3.7) otteniamo

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{r_4}^{r_3} \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) \, dr &\leq \frac{3}{2} \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{1}{8}} (\beta + \alpha) \gamma_m r_3^m \\ &\quad + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{-\frac{9}{8}} ((\beta + \alpha) \gamma_m r_3^m - \beta \gamma_m (r_3^m - r_4^m)) \\ &\leq \frac{3}{2} \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{1}{8}} (\beta + \alpha) \gamma_m r_3^m + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{-\frac{9}{8}} \alpha \gamma_m r_3^m + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{3}{4}} \beta \gamma_m r_3^m. \end{aligned}$$

Useremo nel seguito le seguenti proprietà dei limiti

$$\begin{aligned} \liminf(a_k - b_k) &\leq \limsup a_k - \limsup b_k, \\ -\limsup(a_k - b_k) &\leq -\liminf a_k + \liminf b_k. \end{aligned}$$

In base al Lemma 1.42 e all'ipotesi (3.7)

$$\begin{aligned} &\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r_3) \cap C_\theta) \tag{3.14} \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r_3)) - \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m((S_k \cap B(x, r_3)) \setminus C_\theta) \\ &\leq (\beta + \alpha) \gamma_m r_3^m - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_0^{r_3} \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r) \setminus l_k^\theta(r)) \, dr \\ &\leq (\beta + \alpha) \gamma_m r_3^m - \limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \int_0^{r_3} \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) \, dr \right. \\ &\quad \left. - \int_{r_4}^{r_3} \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) \, dr - \int_0^{r_4} \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) \, dr \right) \\ &\leq (\beta + \alpha) \gamma_m r_3^m - \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{r_3} \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) \, dr + \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{r_4}^{r_3} \mathcal{H}^{m-1}(l_k^\theta(r)) \, dr \\ &\quad + \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{r_4} \mathcal{H}^{m-1}(l_k(r)) \, dr \\ &\leq (\beta + \alpha) \gamma_m r_3^m - \beta \gamma_m r_3^m + \left(\frac{3}{2} \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{1}{8}} (\beta + \alpha) \gamma_m r_3^m \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{-\frac{9}{8}} \alpha \gamma_m r_3^m + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{3}{8}} \beta \gamma_m r_3^m \right) + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{3}{4}} (\beta + \alpha) \gamma_m r_3^m. \end{aligned}$$

*Terzo passo.* Poniamo  $\lambda = \frac{1}{2} \frac{r_3}{r_0}$ . Vogliamo dimostrare che ogni punto  $w \in S_0 \cap B(x, r_3/2)$  ha distanza da  $\Sigma$  minore di  $\frac{1}{4}\varepsilon r_3$  se si scelgono  $\frac{r_3}{r_0}$  e  $\alpha$  sufficientemente piccoli. Notiamo innanzitutto che essendo un iperpiano,  $\Sigma$  divide  $\mathbf{R}^n$  in due semispazi  $X$  e  $Y$ , uno dei quali (supponiamo  $X$ ) contiene la palla  $B(y, r_2)$  e l'altro ( $Y$ ) contiene il cono  $C_\theta$ .

Supponiamo che  $w \in X$ . Sapendo che la palla  $B(y, r_1)$  non contiene punti di  $S_0$ , se si prende un punto  $p \in \partial B(x, r_3/2) \cap \partial B(y, r_2)$ , con semplici considerazioni di tipo geometrico si ottiene

$$d(w, \Sigma) \leq d(p, \Sigma) = \frac{1}{2} \frac{r_3^2}{r_2} = \frac{1}{8} \frac{r_3^2}{r_2} \leq \frac{1}{4} \varepsilon r_3$$

se  $\frac{r_3}{r_2}$  è sufficientemente piccolo.

Supponiamo ora  $w \in Y$  e per assurdo supponiamo che  $d(w, \Sigma) > \frac{1}{4}\varepsilon r_3$ . Se prendiamo un punto  $q \in \partial B(x, r_3/2) \cap \partial C_\theta$  e chiamiamo  $\Sigma'$  l'iperpiano parallelo a  $\Sigma$  passante per  $q$ , sempre con un semplice argomento di tipo geometrico otteniamo

$$\begin{aligned} d(w, \partial C_\theta) &\geq d(w, \Sigma') = \frac{1}{4}\varepsilon r_3 - \frac{1}{2}r_3 \cos \theta \\ &= \left( \frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{2} \cos \theta \right) r_2. \end{aligned}$$

e quindi scopriamo che

$$B\left(w, \left(\frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{2} \cos \theta\right) r_3\right) \subseteq B(x, r_2) \cap C_\theta.$$

Dunque possiamo utilizzare l'equazione (3.14) per ottenere (usando ancora l'ipotesi (3.7))

$$\begin{aligned} &\gamma_m \beta r_3^m \left(\frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{2} \cos \theta\right)^m \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m \left( S_k \cap B\left(w, \left(\frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{2} \cos \theta\right) r_3\right) \right) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r_3) \cap C_\theta) \\ &\leq \alpha \gamma_m r_3^m + \frac{3}{2} \left[ \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{1}{8}} (\beta + \alpha) \gamma_m r_3^m + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{-\frac{9}{8}} \alpha \gamma_m r_3^m \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{3}{8}} \beta \gamma_m r_3^m \right] + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{3}{4}} (\beta + \alpha) \gamma_m r_3^m \end{aligned}$$

Cioè, avendo posto  $\cos \theta = 2 \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{1}{8}}$ , otteniamo

$$\begin{aligned} &\beta \left(\frac{1}{4}\varepsilon - \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{1}{8}}\right)^m \\ &\leq \alpha + \frac{3}{2} \left[ \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{1}{8}} (\beta + \alpha) + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{-\frac{9}{8}} \alpha + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{3}{8}} \beta \right] + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{\frac{3}{4}} (\beta + \alpha) \end{aligned}$$

che prendendo  $\alpha$  e  $\frac{r_3}{r_2}$  molto piccoli rispetto a  $\varepsilon$  ci dà un assurdo.

Abbiamo dunque dimostrato che  $S_0 \cap B(x, r_3/2)$  dista da  $\Sigma$  meno di  $\frac{1}{4}\varepsilon r_3$ . Consideriamo poi l' $h$ -piano  $\Sigma'_p$  parallelo a  $\Sigma_p$  e passante per il punto  $x$ . Dalla ipotesi su

$\Sigma_h$  e ricordando che  $x \in S_0$  e  $y \in \Sigma_h$ , deduciamo che ogni punto di  $S_0 \cap B(x_0, r_0)$  dista meno di  $2\varepsilon' r_0$  da  $\Sigma'_h$  e quindi  $d(x, \Sigma_h) \leq \varepsilon' r_0$ ,  $d(y, \Sigma'_h) \leq \varepsilon' r_0$ . Da questo possiamo dedurre che la retta  $yx$  e il piano  $\Sigma'_h$  sono ortogonali a meno di un angolo dell'ordine di  $\varepsilon r_2/r_0$ . Poniamo dunque  $\Sigma_{h-1} = \Sigma'_h \cap \Sigma$ . Dalle considerazioni appena fatte si ha che  $\Sigma_{h-1}$  è un  $(h-1)$ -piano ed essendo l'angolo tra  $\Sigma$  e  $\Sigma'_h$  quasi retto, possiamo affermare che la distanza di un punto da  $\Sigma \cap \Sigma'_h$  può essere stimata in funzione della distanza del punto dai due singoli piani. Quindi sapendo che per ogni punto  $w \in S_0 \cap B(x, r_3/2) \subseteq S_0 \cap B(x_0, r_0)$  si ha

$$d(w, \Sigma) \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{r_3}{2}$$

e

$$d(w, \Sigma'_h) \leq 2\varepsilon' \frac{r_3}{2}$$

si ottiene, scegliendo un  $\varepsilon'$  sufficientemente piccolo,

$$d(w, \Sigma_{h-1}) \leq \varepsilon \frac{r_3}{2}.$$

□

**Lemma 3.12** *Dato  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\alpha > 0$  e un  $0 < \lambda < 1$  tali che se, per ogni palla  $B(x, r)$  disgiunta da  $A$  con  $x \in S_0$  e contenuta in una palla  $B(x_0, r_0)$  fissata, si ha*

$$\beta \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi_k(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi_k(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \beta + \alpha$$

e

$$\beta \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_k(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_k(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \beta + \alpha$$

allora, in ogni tale palla  $B(x, r)$  si può trovare un punto  $x^* \in S_0$  e un  $m$ -piano  $\Sigma$  passante per  $x^*$  tali che

$$S_0 \cap B(x^*, \lambda r) \subseteq \Sigma + B(0, \varepsilon \lambda r)$$

e

$$B(x^*, \lambda r) \subseteq B(x, r).$$

*Dimostrazione:*

Basta notare che  $S_0 \subseteq \mathbf{R}^n$ , ed applicare ripetutamente il Lemma 3.11 con  $h = n, n-1, \dots, m+1$  per avere il risultato voluto. □

**Lemma 3.13** *Sia  $0 < \alpha < \beta$  e sia data una palla  $B(x_0, r_1)$  disgiunta da  $A$ , con  $x_0 \in S_0$ . Se vale*

$$\beta \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_k(x_0, r_1)}{\gamma_m r_1^m} \leq \beta + \frac{\alpha^2}{32\beta}$$

allora esiste una sottosuccessione  $S_{k_i}$  ed un  $r_0 < r_1$ , tali che per ogni punto  $x \in S_0 \cap B(x_0, r_0)$  e per ogni  $r \leq r_0$  si ha

$$\beta \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{k_i}(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{k_i}(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \beta + \alpha$$

e

$$\beta \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k_i}(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k_i}(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \beta + \alpha.$$

Dall'ipotesi, che ci dà un controllo per  $\varphi_k(x, r)$  nel solo punto  $(x, r) = (x_0, r_0)$ , dobbiamo dare un controllo di  $\varphi_k(x, r)$  e  $\psi_k(x, r)$  in tutto un intorno di  $(x_0, 0)$ . Innanzitutto il controllo dal basso è dato esattamente dalla definizione di  $\beta$ , quindi il problema si ha solo per le stime dall'alto. Siccome  $\psi_k(x, r) < \varphi_k(x, r)$  (Lemma 1.42), la stima dall'alto per  $\varphi_k$  vale anche per  $\psi_k$  e sapendo che  $\psi_k$  è monotona in  $r$  (Lemma 3.10) riusciamo ad estendere la stima su  $\psi_k(x_0, r_0)$  a tutto un intorno di  $(x_0, r_0)$ . Per ottenere la stessa stima anche per  $\varphi_k$ , dobbiamo sfruttare il Lemma 3.7 che ci dà una stima di  $\varphi_k$  con la derivata di  $\psi_k$ .

*Dimostrazione:*

Innanzitutto scegliamo la sottosuccessione  $S_{k_i}$ , in modo che si abbia

$$\beta \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{k_i}(x_0, r_1)}{\gamma_m r_1^m} \leq \beta + \frac{\alpha^2}{32\beta}.$$

Se scegliamo poi un  $r_0 \ll r_1$  sufficientemente piccolo, preso un qualunque punto  $x \in S_0 \cap B(x_0, r_0)$  essendo  $B(x, r_1 - r_0) \subseteq B(x_0, r_1)$  si ha

$$\beta \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{k_i}(x, r_1 - r_0)}{\gamma_m (r_1 - r_0)^m} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{k_i}(x, r_1 - r_0)}{\gamma_m (r_1 - r_0)^m} \leq \beta + \frac{\alpha^2}{16\beta},$$

usando il Lemma 3.9 e (3.5) otteniamo anche

$$\beta \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k_i}(x, r_1 - r_0)}{\gamma_m (r_1 - r_0)^m} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k_i}(x, r_1 - r_0)}{\gamma_m (r_1 - r_0)^m} \leq \beta + \frac{\alpha^2}{16\beta}$$

e quindi per il Lemma 3.10 per  $r \leq r_1 - r_0$  si ha

$$\beta \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k_i}(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k_i}(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \beta + \frac{\alpha^2}{16\beta}. \quad (3.15)$$

Vogliamo ora dimostrare che per  $r < \frac{1}{2}(r_1 - r_0)$  si ha

$$\beta \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{k_i}(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{k_i}(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \beta + \alpha. \quad (3.16)$$

Supponiamo dunque, per assurdo, che esistano degli  $i$  grandi a piacere tali che

$$\frac{\varphi_{k_i}(x, r)}{\gamma_m r^m} > \beta + \frac{1}{2}\alpha.$$

Dunque preso un  $t > r$  abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{k_i}(x, t)}{\gamma_m t^m} &\geq \frac{\varphi_{k_i}(x, r)}{\gamma_m r^m} \left(\frac{r}{t}\right)^m \geq \left(\beta + \frac{1}{2}\alpha\right) \left(\frac{r}{t}\right)^m \\ &\geq \beta + \frac{1}{4}\alpha \end{aligned}$$

se imponiamo anche

$$t < \left(\frac{\beta + \frac{1}{2}\alpha}{\beta + \frac{1}{4}\alpha}\right)^{\frac{1}{m}} r = r' < r_1 - r_0. \quad (3.17)$$

Dunque per il Lemma 3.7 abbiamo

$$\mathcal{H}^{m-1}(S_{k_i} \cap \partial B(x, t)) \geq \gamma_m \left( \beta + \frac{1}{4}\alpha \right) m t^{m-1} - \frac{m\varepsilon_{k_i}}{t}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \psi_{k_i}(x, r') &= \int_0^r \mathcal{H}^{m-1}(S_{k_i} \cap \partial B(x, t)) dt + \int_r^{r'} \mathcal{H}^{m-1}(S_{k_i} \cap \partial B(x, t)) dt \\ &\geq \psi_{k_i}(x, r) + \gamma_m \left( \beta + \frac{1}{4}\alpha \right) (r'^m - r^m) - m\varepsilon_{k_i} \log \frac{r'}{r}. \end{aligned}$$

Facendo tendere  $i$  a infinito e usando (3.15)

$$\left( \beta + \frac{\alpha^2}{16\beta} \right) r'^m \geq \beta r^m + \left( \beta + \frac{1}{4}\alpha \right) (r'^m - r^m)$$

cioè

$$\frac{\alpha^2}{16\beta} r'^m \geq \frac{1}{4}\alpha (r'^m - r^m) = \frac{1}{4}\alpha r'^m \left( 1 - \frac{1}{4}\alpha \frac{r^m}{r'^m} \right)$$

ed essendo per (3.17)  $r'^m < 2r^m$  e potendo supporre  $\alpha < \beta$  otteniamo l'assurdo. Abbiamo dunque che vale la disuguaglianza (3.16) ed essendo in generale  $\psi_k(x, r) \leq \varphi_k(x, r)$ , in base al Lemma 3.9 otteniamo che la stessa disuguaglianza vale in modo analogo per  $\psi$ . Se si osserva poi che  $r_0 < \frac{1}{2}(r_1 - r_0)$  si ha la tesi.  $\square$

**Lemma 3.14** *Si ha*

$$\beta \geq 1$$

*Dimostrazione:*

Si prenda un  $\varepsilon > 0$  e siano  $\lambda$  e  $\alpha$  le costanti definite dal Lemma 3.12. Dalla definizione di  $\beta$  sappiamo che deve esistere una palla  $B(x_0, r_1)$  centrata in  $S_0$  e disgiunta da  $A$  che soddisfi le ipotesi del Lemma 3.13, quindi applicando tale lemma sappiamo che sono, a loro volta, verificate le ipotesi del Lemma 3.12 in una palla  $B(x_0, r_0)$ . Cioè sappiamo che per ogni  $B(x, r) \subseteq B(x_0, r_0)$  con  $x \in S_0$  e  $B(x, r) \cap A = \emptyset$  esiste un punto  $x^* \in S_0$  ed un  $m$ -piano  $\Sigma$  tali che

$$\begin{aligned} S_0 \cap B(x^*, \lambda r) &\subseteq \Sigma + B(0, \varepsilon \lambda r) \\ B(x^*, \lambda r) &\subseteq B(x, r). \end{aligned}$$

Dunque, a meno di sottosuccessioni, possiamo supporre che

$$S_k \cap B(x^*, \lambda r) \subseteq \Sigma + B(0, 2\varepsilon \lambda r).$$

e sempre a meno di sottosuccessioni, dal Lemma 3.13, otteniamo

$$\psi_k(x^*, \lambda r) < (\beta + 2\alpha)\gamma_m \lambda^m r^m \quad (3.18)$$

$$\varphi_k(x^*, \frac{1}{2}\lambda r) > \frac{1}{2}\beta\gamma_m 2^{-m} \lambda^m r^m. \quad (3.19)$$

Dunque abbiamo

$$\int_{\frac{1}{2}\lambda r}^{\lambda r} \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x^*, t)) dt \leq \psi_k(x^*, \lambda r) \leq (\beta + 2\alpha)\gamma_m \lambda^m r^m$$

e applicando il Teorema del valor medio sappiamo che esistono dei  $\rho_k$  tali che

$$\mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x^*, \rho_k)) \leq 2(\beta + 2\alpha)\gamma_m \lambda^{m-1} r^{m-1}. \quad (3.20)$$

Avendo a disposizione un piano approssimante  $\Sigma$ , possiamo ora applicare il Lemma 1.47 nella palla  $B(x^*, \rho_k)$ , affermando che o vale

$$\mathcal{H}^m(S_k \cap B(x^*, \rho_k)) \geq \gamma_m \rho_k^m - \frac{2^{2m}\gamma_m}{\gamma_{m-1}} 2\varepsilon \lambda r \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap B(x^*, \rho_k)) \quad (3.21)$$

oppure (applicando anche il Teorema 1.41) potremmo tagliare da  $S_k$  la palla  $B(x^*, \rho_k)$  e sostituirla con una “toppa”  $S'_k$  con la proprietà

$$\mathcal{H}^m(S'_k) \leq \frac{2^{2m}\gamma_m}{\gamma_{m-1}} 2\varepsilon \lambda r \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x^*, \rho_k))$$

ma siccome  $S_k \rightarrow S_0$  otteneniamo (usando (3.18), (3.20) e la proprietà (3.2))

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\beta\gamma_m \frac{\lambda^m r^m}{2^m} &< \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x^*, \frac{1}{2}\lambda r)) \leq \mathcal{H}^m(S'_k) + \varepsilon_k \\ &\leq \frac{2^{2m}\gamma_m}{\gamma_{m-1}} 2\varepsilon \lambda r 2(\beta + 2\alpha)\gamma_m \lambda^{m-1} r^{m-1} + \varepsilon_k \end{aligned}$$

il che è impossibile se si prende  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo. Dunque deve valere (3.21) cioè in base a (3.18)

$$\varphi_k(x^*, \rho_k) \geq \gamma_m \rho_k^m - \frac{2^{2m+2}\gamma_m^2}{\gamma_{m-1}} \varepsilon (\beta + 2\alpha) \lambda^m r^m.$$

A meno di sottosuccessioni, possiamo supporre che  $\rho_k \rightarrow \rho$  con  $\frac{1}{2}\lambda r \leq \rho \leq \lambda r$  e quindi, per ogni  $\delta > 0$  avremo

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x^*, \rho + \delta) \geq \gamma_m \rho^m - \frac{2^{2m+2}\gamma_m^2}{\gamma_{m-1}} \varepsilon (\beta + 2\alpha) \lambda^m r^m;$$

sapendo che

$$\varphi_k(x^*, \rho + \delta) \leq (\beta + \alpha)\gamma_m(\rho + \delta)^m$$

e facendo tendere  $\delta$  a zero si ottiene

$$\beta + \alpha \geq 1 - \frac{2^{2m+2}\gamma_m^2}{\gamma_{m-1}} (\beta + 2\alpha)\varepsilon.$$

Siccome  $\varepsilon$  e  $\alpha$  possono essere presi piccoli a piacere si ottiene come voluto

$$\beta \geq 1.$$

□

**Lemma 3.15** *Siano dati: un chiuso  $S_0$ ,  $\theta > 0$ ,  $e_\theta > 0$  e  $\varepsilon < 1 - \cos \theta$ . Sia  $B(x, r)$  una palla tale che per ogni  $\delta$  piccolo a piacere si può trovare un insieme di palle disgiunte  $\{B(x_i, r_i)\}$*

e per ogni  $i$  si abbia un  $m$ -piano  $\Sigma_i$  passante per  $x_i$  e che formi un angolo maggiore di  $\theta$  con il segmento  $[x_i; x]$ . Se poi abbiamo

$$B(x_i, r_i) \subseteq B(x, r) \quad (3.22)$$

$$r_i < \delta \quad (3.23)$$

$$\varphi_0(x_i, r_i) > \gamma_m r_i^m \quad (3.24)$$

$$\sum_i \gamma_m r_i^m > e_\theta \quad (3.25)$$

$$S_0 \cap B(x_i, r_i) \subseteq \Sigma_i + B(0, \varepsilon r_i) \quad (3.26)$$

allora

$$\psi_0(x, r) \leq \varphi_0(x, r) - e_\theta \left( \frac{1 - \cos \theta - \varepsilon}{2} \right)^m.$$

Questo lemma verrà utilizzato nella dimostrazione del Teorema 3.4 in una argomentazione per assurdo. Le ipotesi del lemma ci dicono grosso modo che l'insieme  $S_0$  è disposto perpendicolarmente ai raggi uscenti dal punto  $x$  fissato. Quindi quando calcoliamo  $\psi$  otteniamo un valore “molto” minore a  $\varphi$ , in quanto si avrebbe  $\psi = \varphi$  se l'insieme  $S_0$  fosse disposto parallelamente ai raggi uscenti da  $x$ . Questo ci condurrà ad un assurdo se prendiamo come  $S_0$  una superficie minima, e ci permetterà di affermare che tali piani “tangenti” sono molto vicini tra loro.

*Dimostrazione:*

Sia  $\Sigma$  un  $m$ -piano e  $y_1, y_2 \in \Sigma$  siano due punti distanti  $\alpha$  tra loro. Definiamo allora  $d(\alpha, \rho, t)$  come il diametro di  $\Sigma \cap B(y_1, \rho) \cap \partial B(y_2, t)$  e  $\sigma(\alpha, \rho, t)$  come la misura  $\mathcal{H}^{m-1}$  dello stesso insieme. Da questa definizione si ottiene subito che

$$\int_0^r \sigma(\alpha, \rho, t) dt = \mathcal{H}^m(\Sigma \cap B(y_1, \rho) \cap B(y_2, r)) \quad (3.27)$$

e per  $\delta > \rho$  si ha (si veda la definizione 1.26)

$$\mathcal{H}_\delta^{m-1}(B(y_1, \rho) \cap \partial B(y_2, t)) \leq \gamma_{m-1} \left( \frac{1}{2} d(\alpha, \rho, t) \right)^{m-1} \leq \sigma(\alpha, \rho, t). \quad (3.28)$$

Ci sarà utile estendere la famiglia di palle  $\{B(x_i, r_i)\}$  ad un ricoprimento della palla  $B(x, r)$ . Per fare questo consideriamo un insieme di palle  $B(x'_j, r'_j)$  di raggio  $r'_j < \delta$  che abbiano le seguenti proprietà (come assicurato dalla definizione di misura sferica di Hausdorff)

$$\begin{aligned} S_0 \cap B(x, r) \setminus \bigcup_i (S_0 \cap B(x_i, r_i)) &\subseteq \bigcup_j B(x'_j, r'_j) \\ \mathcal{H}^m \left( S_0 \cap B(x, r) \setminus \bigcup_i (S_0 \cap B(x_i, r_i)) \right) + \delta &\geq \sum_j \gamma_m r_j'^m \end{aligned} \quad (3.29)$$

Consideriamo ora un qualunque  $i$  per cui si abbia  $|x - x_i| \geq r_i$ , dalle equazioni (3.27) e (3.28) otteniamo (prendendo un qualunque  $m$ -piano  $\Sigma$  passante per  $x$  e  $x'_j$ )

$$\int_0^r \mathcal{H}_\delta^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x, t) \cap B(x'_j, r'_j)) dt \quad (3.30)$$

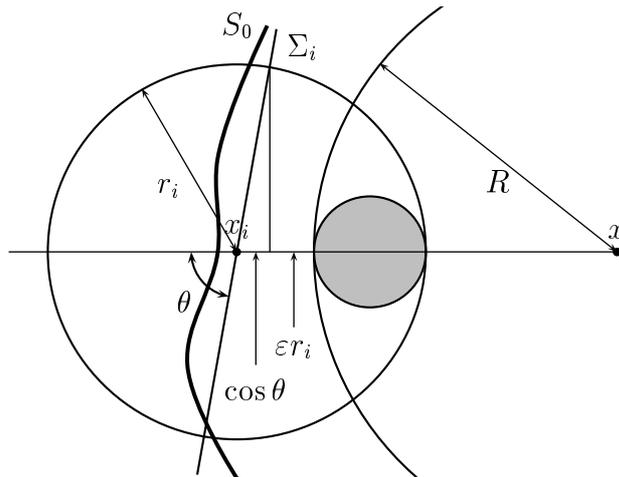


Figura 3.3: Il disco colorato ha raggio  $\frac{1}{2}(1 - \cos \theta - \varepsilon)r_i$ .

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^r \mathcal{H}_\delta^{m-1}(\partial B(x, t) \cap B(x'_j, r'_j)) dt \\
&\leq \int_0^r \sigma(|x - x'_j|, r'_j, t) \\
&= \mathcal{H}^m(\Sigma \cap B(x'_j, r'_j) \cap B(x, r)) \\
&\leq \mathcal{H}^m(\Sigma \cap B(x'_j, r'_j)) = \gamma_m r_j^m.
\end{aligned}$$

Ora sfruttando la proprietà (3.26) possiamo affermare che preso  $R = |x - x_i| - r_i \cos \theta - r_i \varepsilon$  si ottiene  $S_0 \cap B(x_i, r_i) \cap B(x, R) = \emptyset$  e quindi, scegliendo un qualunque  $m$ -piano  $\Sigma$  passante per  $x$  e  $x_i$ , e applicando di nuovo (3.28) e (3.27) otteniamo

$$\begin{aligned}
&\int_0^r \mathcal{H}_\delta^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x, t) \cap B(x_i, r_i)) dt \\
&\leq \int_R^r \mathcal{H}_\delta^{m-1}(\partial B(x, t) \cap B(x_i, r_i)) \\
&\leq \int_0^r \sigma(|x - x_i|, r_i, t) dt - \int_0^R \sigma(|x - x_i|, r_i, t) dt
\end{aligned}$$

sappiamo poi (sempre dall'equazione (3.27)) che

$$\int_0^R \sigma(|x - x_i|, r_i, t) dt = \mathcal{H}^m(\Sigma \cap B(x, R) \cap B(x_i, r_i)),$$

si trova poi facilmente che l'insieme  $B(x, R) \cap B(x_i, r_i)$  contiene una palla di raggio almeno  $\frac{1}{2}(1 - \cos \theta - \varepsilon)r_i$  (Figura 3.3) e quindi, continuando le disuguaglianze precedenti

$$\int_0^r \mathcal{H}_\delta^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x, t) \cap B(x_i, r_i)) dt \leq \gamma_m r_i^m - \gamma_m \left( \frac{1 - \cos \theta - \varepsilon}{2} \right)^m r_i^m. \quad (3.31)$$

Consideriamo ora il caso  $|x - x_i| \leq r_i \leq \delta$  che si può verificare al massimo per un solo  $i = i_0$  in quanto le palle  $B(x_i, r_i)$  sono disgiunte e dunque una sola di queste può contenere il punto  $x$ . Sfruttando ancora le proprietà (3.28) e (3.27) si trova

$$\int_0^r \mathcal{H}_\delta^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x, t) \cap B(x_{i_0}, r_{i_0})) dt \leq \gamma_m r_{i_0}^m \leq \gamma_m \delta^m. \quad (3.32)$$

Possiamo ora finalmente fare la stima

$$\begin{aligned}
& \int_0^r \mathcal{H}_\delta^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x, t)) dt \\
&= \int_0^r \mathcal{H}_\delta^{m-1} \left( \left( \bigcup_j B(x'_j, r'_j) \cup \bigcup_i B(x_i, r_i) \right) \cap S_0 \cap \partial B(x, t) \right) dt \\
&\leq \sum_j \int_0^r \mathcal{H}_\delta^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x, t) \cap B(x'_j, r'_j)) dt \\
&\quad + \sum_i \int_0^r \mathcal{H}_\delta^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x, t) \cap B(x_i, r_i)) dt
\end{aligned}$$

e applicando (3.30) al primo addendo e (3.31) e (3.32) al secondo addendo otteniamo

$$\begin{aligned}
& \int_0^r \mathcal{H}_\delta^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x, t)) dt \\
&\leq \sum_j \gamma_m r_j'^m + \sum_i \gamma_m r_i^m \left( 1 - \left( \frac{1 - \cos \theta - \varepsilon}{2} \right)^m \right) + \gamma_m \delta^m.
\end{aligned}$$

Continuiamo la catena di disuguaglianze usando (3.29) e le ipotesi (3.24) e (3.25) per ottenere

$$\begin{aligned}
& \int_0^r \mathcal{H}_\delta^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x, t)) dt \\
&\leq \mathcal{H}^m \left( S_0 \cap B(x, r) \setminus \bigcup_i (S_0 \cap B(x_i, r_i)) \right) + \delta + \gamma_m \delta^m \\
&\quad + \mathcal{H}^m \left( \bigcup_i (S_0 \cap B(x_i, r_i)) \right) - e_\theta \left( \frac{1 - \cos \theta - \varepsilon}{2} \right)^m \\
&\leq \mathcal{H}^m(S_0 \cap B(x, r)) - e_\theta \left( \frac{1 - \cos \theta - \varepsilon}{2} \right)^m + \delta + \gamma_m \delta^m
\end{aligned}$$

che al tendere di  $\delta$  a zero è proprio quello che volevamo dimostrare.  $\square$

## 3.2 La dimostrazione del teorema di regolarità

Sia  $S_0$  una superficie minima propria. Abbiamo già visto nella Proposizione 3.6 che la successione costante  $S_k = S_0$  verifica le ipotesi (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) e potremo quindi applicare tutti i lemmi della Sezione 3.1 a tale particolare successione. Il Lemma 3.14 ci dice che  $\beta \geq 1$ , cioè che per ogni palla  $B(x, r)$  centrata su  $S_0$  e disgiunta da  $A$  si ha

$$\frac{\mathcal{H}^m(S_0 \cap B(x, r))}{\gamma_m r^m} \geq 1$$

e quindi abbiamo automaticamente

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^m(S_0 \cap B(x, r))}{\gamma_m r^m} \geq 1.$$

D'altra parte, per il Lemma 1.32, sappiamo che deve valere l'uguaglianza per quasi tutti i punti di  $S_0 \setminus A$ . Per completare la dimostrazione, ricordando il Teorema 2.2, basterà dunque verificare il seguente

**Teorema 3.16** *Nelle ipotesi del Teorema 3.4, per ogni punto  $x_0$  in  $S_0 \setminus A$  per cui vale*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi_0(x_0, r)}{\gamma_m r^m} \leq 1,$$

*dato comunque  $\varepsilon_0 > 0$ , esiste un  $R > 0$  per cui vale la condizione- $(\varepsilon_0, R)$  nel punto  $x_0$ .*

La dimostrazione di questo teorema sarà ancora un po' laboriosa. Dovremo dimostrare che in ogni palla abbastanza piccola  $B(x', \frac{r'}{8})$ , si può trovare un piano distante da  $S_0$  meno di  $\varepsilon_0 r'$ .

Dimostreremo innanzitutto che dati  $m+2$  punti  $y_j \in S_0 \cap B(x', r'/4)$  si può trovare un piano  $\Sigma$  da cui tali punti distano "poco". Per fare questo applichiamo dapprima il Lemma 3.12 in modo da trovare per ogni famiglia di palle disgiunte contenute in  $B(x', \frac{r'}{4})$ , una famiglia di piani approssimanti. Il Lemma 3.15 ci dice dunque che a costo di prendere delle famiglie di palle con raggi sempre più piccoli, riusciamo a trovare che l'area di  $S_0$  contenuta nelle palle i cui piani corrispondenti sono "molto" distanti dai punti  $y_i$  non può essere molto grande. Scegliendo le costanti in maniera opportuna riusciamo a fare in modo che tale area sia minore del dovuto, assicurando in tal modo l'esistenza di un piano che disti poco da tutti i punti  $y_i$ .

A questo punto (parleremo ora di triangoli e tetraedri, come se fossimo nel caso  $m = 2$  e  $n = 3$ ) consideriamo il triangolo di area massima con vertici su  $S_0 \cap B(x', \frac{r'}{4})$  e chiamiamo  $a$  l'area di tale triangolo. Siano  $y_1, \dots, y_{m+1}$  i vertici di tale triangolo, e sia  $y_{m+2}$  un qualunque punto di  $S_0 \cap B(x', \frac{r'}{4})$ . Per quanto visto sopra, possiamo associare a questi  $m+2$  punti, un piano  $\Sigma$  che ci disti poco. Da questi  $m+2$  punti otteniamo un tetraedro che deve avere volume piuttosto piccolo, essendo i punti poco distanti da un piano, dunque avendo scelto la "base" del tetraedro in modo che avesse area massima, la distanza del vertice  $y_{m+2}$  dal piano passante per gli altri vertici dev'essere piccola.

In questo modo abbiamo dimostrato che l'insieme  $S_0$  ristretto ad una generica palla  $B(x', \frac{r'}{4})$ , dista poco da un piano  $\Sigma'$ . Per dimostrare che in tale palla anche il piano dista poco dall'insieme, avendo a disposizione il piano approssimante  $\Sigma'$ , basterà usare il Lemma 1.47 che ci assicura che se non si possono trovare superfici di area molto piccola con lo stesso bordo all'interno della palla (che è vero per le superfici di area minima) allora la superficie  $S_0$  proiettata sul piano  $\Sigma'$  riempie buona parte del disco  $\Sigma' \cap B(x', \frac{r'}{4})$ . Quindi per ogni punto di tale disco si può trovare un punto di  $S_0$  che ci si proietta e che quindi ci dista poco.

*Dimostrazione:*

Consideriamo un  $0 < \varepsilon \ll \varepsilon_0$ , e siano  $\alpha$  e  $\lambda$  le costanti date dal Lemma 3.12 dove possiamo supporre che sia  $\alpha \ll \varepsilon$ . Per ipotesi abbiamo un punto  $x_0 \in S_0$  per cui

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi_0(x_0, r)}{\gamma_m r^m} \leq 1$$

quindi avremo  $\beta = 1$  e potremo trovare un  $r_1$  per cui vale

$$1 \leq \frac{\varphi_0(x_0, r_1)}{\gamma_m r_1^m} \leq 1 + \frac{\alpha}{32}.$$

Possiamo dunque applicare il Lemma 3.13, che in questo caso ci dice che esiste un  $r_0$  tale che per ogni palla  $B(x, r)$  centrata in  $S_0$  e contenuta in  $B(x_0, r_0)$  si ha

$$1 \leq \frac{\psi_0(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq \frac{\varphi_0(x, r)}{\gamma_m r^m} \leq 1 + \alpha \quad (3.33)$$

e quindi, applicando anche il Lemma 3.12 sappiamo che per ogni tale palla  $B(x, r)$  esiste un punto  $x^* \in S_0$  ed un piano  $\Sigma$  passante per  $x^*$  tali che

$$\begin{aligned} S_0 \cap B(x^*, \lambda r) &\subseteq \Sigma + B(0, \varepsilon \lambda r) \\ B(x^*, \lambda r) &\subseteq B(x, r). \end{aligned}$$

Prendiamo ora una generica palla  $B(x', r') \subseteq B(x_0, r_0)$  e prendiamo  $m + 2$  punti  $y_1, \dots, y_{m+2}$  contenuti in  $S_0 \cap B(x', r'/4)$ . Per il Teorema 1.30 per ogni  $\delta > 0$  possiamo trovare una famiglia finita di palle disgiunte  $B(x_{i\delta}, \rho_{i\delta})$  centrate in  $S_0$ , contenute in  $B(x', r'/4)$  e con  $\rho_{i\delta} \leq \delta$  tali che

$$\sum_i \mathcal{H}^m(S_0 \cap B(x_{i\delta}, \rho_{i\delta})) \geq \frac{1}{2} \mathcal{H}^m(S_0 \cap B(x', r'/8))$$

da cui usando 3.33 si ottiene

$$\sum_i \gamma_m \rho_{i\delta}^m \geq \frac{1}{2(1+\alpha)} \mathcal{H}^m(S_0 \cap B(x', r'/8)) \geq \frac{\gamma_m}{2(1+\alpha)} \left(\frac{r'}{8}\right)^m. \quad (3.34)$$

Ovviamente per ogni  $j \leq m + 2$  e per ogni  $i$

$$B(x_{i\delta}, \rho_{i\delta}) \subseteq B(x', r'/4) \subseteq B(x_0, r_0)$$

e applicando il Lemma 3.12 possiamo trovare dei punti  $x_{i\delta}^* \in S_0$  e dei piani  $m$ -dimensionali  $\Sigma_{i\delta}$  tali che

$$\begin{aligned} S_0 \cap B(x_{i\delta}^*, \lambda \rho_{i\delta}) &\subseteq \Sigma_{i\delta} + B(0, \varepsilon \lambda \rho_{i\delta}) \\ B(x_{i\delta}^*, \lambda \rho_{i\delta}) &\subseteq B(x_{i\delta}, \rho_{i\delta}). \end{aligned}$$

Scegliamo  $\theta$  in modo che valga  $1 - \cos \theta = 3\varepsilon$ , e sia  $I_{j\delta}$  l'insieme di indici  $i$  per cui  $[x_{i\delta}^*, y_j]$  forma un angolo maggiore di  $\theta$  con  $\Sigma_{i\delta}$ . Avendo posto

$$e_\theta = \frac{\gamma_m \lambda^m}{s(m+3)(1+\alpha)} \left(\frac{r'}{8}\right)^m$$

se fissato  $j$  esistessero dei  $\delta$  piccoli a piacere per cui

$$\sum_{i \in I_{j\delta}} \gamma_m \rho_{i\delta}^m \lambda^m \geq e_\theta$$

avremmo, applicando il Lemma 3.15

$$\psi_0(y_j, r'/2) \leq \varphi_0(y_j, r'/2) - e_\theta \left(\frac{1 - \cos \theta - \varepsilon}{2}\right)^m$$

da cui si ottiene, usando anche (3.33)

$$\begin{aligned} \gamma_m \left(\frac{r'}{2}\right)^m &\leq \psi_0(y_j, r'/2) \leq \varphi_0(y_j, r'/2) - e_\theta \varepsilon^m \\ &\leq (1+\alpha) \left(\frac{r'}{2}\right)^m \gamma_m - e_\theta \varepsilon^m \end{aligned}$$

cioè, con semplici calcoli, supponendo  $\alpha < 1$ , si ha

$$4\alpha(m+3) \geq \left(\frac{\lambda\varepsilon}{4}\right)^m$$

che possiamo supporre sia falso, avendo preso  $\alpha \ll \varepsilon$ . Dunque possiamo affermare che per tutti  $\delta$  abbastanza piccoli si ha

$$\sum_{i \in I_{j\delta}} \gamma_m \rho_{i\delta}^m \lambda^m < \frac{\gamma_m \lambda^m}{2(m+3)(1+\alpha)} \left(\frac{r'}{8}\right)^m$$

per cui, ricordando (3.34), essendoci solo  $m+2$  punti  $y_j$ , dovrà esistere un  $i_0$  che non appartiene a nessun  $I_{j\delta}$ . Dunque abbiamo dimostrato che presi comunque  $m+2$  punti  $\{y_i\}$  di  $S_0 \cap B(x', r'/4)$  possiamo trovare un piano  $\Sigma$  tale che ogni  $y_i$  dista meno di  $\frac{1}{2}r' \sin \theta$  da  $\Sigma$ . Avendo scelto  $1 - \cos \theta = 3\varepsilon$  abbiamo poi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r' \sin \theta &= \frac{1}{2}r' \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{2}r' \sqrt{3\varepsilon(1 + \cos \theta)} \\ &< \frac{1}{3}\sqrt{6}r' \sqrt{\varepsilon} < \frac{5}{4}r' \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Consideriamo ora tutti gli  $m$ -simplessi<sup>1</sup> con vertici in  $S_0 \cap B(x', r'/4)$ . Siano dunque  $y_1, \dots, y_{m+1}$  i vertici dell' $m$ -simplesso di  $m$ -area massima tra tutti quelli considerati, e chiamiamo  $a$  tale area. Sia ora  $y_{m+2}$  un qualunque altro punto di  $S_0 \cap B(x', r'/4)$  e sia  $\Sigma$  l' $m$ -piano, corrispondente ai punti  $y_1, \dots, y_{m+1}$  come abbiamo visto in precedenza. Chiamando  $\Delta$  l' $(m+1)$ -simplesso con vertici  $y_1, \dots, y_{m+2}$ , abbiamo che l' $m$ -area delle faccie di  $\Delta$  sarà al massimo  $a$ , quindi l'area della proiezione di  $\Delta$  su  $\Sigma$  non può superare  $(m+2)a$ , e l' $(m+1)$ -area di  $\Delta$  sarà minore di  $\frac{5}{2}(m+2)ar' \sqrt{\varepsilon}$ . Dunque  $y_{m+2}$  dovrà stare ad una distanza minore di  $\frac{5}{2}(m+1)(m+2)r' \sqrt{\varepsilon}$  dall' $m$ -piano passante per  $y_1, \dots, y_{m+1}$ . Avendo posto  $\varepsilon \ll \varepsilon_0$  possiamo supporre che valga  $\frac{5}{2}(m+1)(m+2)r' \sqrt{\varepsilon} < \varepsilon_0 r'/64$ . Se poi chiamiamo  $\Sigma'$  l' $m$ -piano parallelo a quello per  $y_1, \dots, y_{m+1}$  e passante per  $x'$ , sappiamo dunque che ogni punto di  $S_0 \cap B(x', r'/4)$  dista meno di  $\varepsilon_0 r'/32$  da  $\Sigma'$ .

Abbiamo dunque dimostrato che per ogni  $B(x', r') \subseteq B(x_0, r_0)$  si può trovare un  $m$ -piano  $\Sigma'$  tale che

$$S_0 \cap B\left(x', \frac{r'}{4}\right) \subseteq \Sigma' + B\left(0, \varepsilon_0 \frac{r'}{32}\right). \quad (3.35)$$

Essendo

$$\int_{\frac{1}{8}r'}^{\frac{1}{4}r'} \mathcal{H}^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x', t)) dt \leq \psi_0(x', r'/4) \leq (1+\alpha) \left(\frac{r'}{4}\right)^m \gamma_m$$

il Teorema del valor medio ci garantisce l'esistenza di un  $r$  con  $\frac{1}{8}r' < r < \frac{1}{4}r'$  per cui si ha

$$\mathcal{H}^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x', r)) \leq (1+\alpha) \gamma_m \frac{\left(\frac{r'}{4}\right)^m}{\frac{1}{8}r'}$$

<sup>1</sup>Per  $m$ -simplesso intenderemo l'involuppo convesso di  $m+1$  punti, che saranno i vertici di tale simplesso. L' $m$ -area del simplesso sarà la sua misura  $\mathcal{H}^m$ .

e dalla (3.33)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^m(S_0 \cap B(x', r)) \geq \gamma_m r^m &= \gamma_m \left(\frac{r'}{4}\right)^m \frac{m}{2} \left(\frac{r}{r'}\right)^m \\ &\geq \frac{\mathcal{H}^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x', r))}{1 + \alpha} \frac{r}{8 \cdot 2^m} \left(\frac{r}{r'}\right)^m \\ &\geq \mathcal{H}^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x', r)) \frac{r}{16^m}. \end{aligned}$$

Dunque dal Lemma 1.47 siccome per  $\varepsilon_0$  abbastanza piccolo possiamo supporre che si abbia

$$\mathcal{H}^m(S_0 \cap B(x', r)) \geq \mathcal{H}^{m-1}(S_0 \cap \partial B(x', r)) \cdot 2^{2m} \frac{\gamma_m}{\gamma_{m-1}} \cdot \frac{\varepsilon_0 r}{4}$$

otteniamo che la proiezione di  $S_0 \cap B(x', r)$  su  $\Sigma'$  deve contenere  $\Sigma' \cap B(x', (1 - \frac{1}{4}\varepsilon_0)r)$ .

Vogliamo ora dimostrare che

$$\Sigma' \cap B\left(x', \frac{1}{8}r'\right) \subseteq \left(S_0 \cap B\left(x', \frac{1}{8}r'\right)\right) + B\left(0, \frac{\varepsilon_0 r'}{16}\right). \quad (3.36)$$

Preso dunque un punto  $p \in \Sigma' \cap B(x', \frac{1}{8}r')$  sia  $p' \in \Sigma' \cap B(x', \frac{1}{8}r' - \frac{\varepsilon_0 r'}{32})$  il punto di minima distanza da  $p$ . Si ha ovviamente  $|p - p'| \leq \frac{\varepsilon_0 r'}{32}$ . Da quanto visto in precedenza, essendo per  $\varepsilon_0$  piccolo,  $(1 - \frac{1}{4}\varepsilon_0)r > \frac{r'}{8}$  sappiamo che esiste un punto  $p'' \in S_0 \cap B(x', r)$  che si proietta su  $p'$ . Dalla condizione 3.35 abbiamo  $|p' - p''| \leq \frac{\varepsilon_0 r'}{32}$  e quindi  $p'' \in B(x', r' \text{ over } 8)$ . Dunque abbiamo trovato un punto  $x'' \in S_0 \cap B(x', \frac{r'}{8})$  che dista da  $x$  meno di  $\frac{\varepsilon_0 r'}{16}$  come volevamo dimostrare.

Abbiamo in conclusione essendo valide (3.35) e (3.36) per ogni  $B(x', r') \subseteq B(x_0, r_0)$ , che vale la condizione- $(\varepsilon_0, R)$  in  $x_0$  se scegliamo  $R = \frac{r_0}{8}$ .  $\square$

# Capitolo 4

## Esistenza delle superfici minime

In questo capitolo dimostreremo il seguente teorema.

**Teorema 4.1 (esistenza)** *Sia dato un compatto  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  e  $L$  un sottogruppo di  $H_{m-1}(A)$ . Allora esiste una superficie minima propria  $S_0 \in \mathcal{S}(L)$ .*

La dimostrazione consiste nel trovare una particolare successione  $\{S_k\}$  minimizzante l'area, e quindi, usando i lemmi della Sezione 3.1, dimostrare che su tale successione c'è la semi-continuità della misura  $\mathcal{H}^m$ .

### 4.1 Costruzione della successione minimizzante

Per i Teoremi 1.20 e 1.40, sappiamo che l'insieme  $\mathcal{S}(L)$  è compatto. In generale però non possiamo scegliere una qualunque successione minimizzante, in quanto la misura di Hausdorff non è inferiormente semicontinua su questo spazio (si veda l'esempio 1.29). Costruiremo una successione  $\{S_k\}$  che verifichi le ipotesi (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) del Capitolo 3. Per evitare fenomeni come quello dell'Esempio 1.29, sceglieremo le superfici  $S_k$  in modo che oltre a minimizzare l'area, minimizzino anche le intersezioni con un opportuno reticolo  $T_k$  di cubi e vedremo che questo basta per verificare l'ipotesi (3.3).

Sia  $r_k = 2^{-k}$  e sia  $\varepsilon_k \ll 2^{-2km}$  una successione infinitesima. Supponiamo ancora  $m \geq 2$ . Consideriamo una famiglia  $T_k$  di cubi di lato  $\frac{r_k}{2^k}$ , i cui centri formino un reticolo cubico parallelo alle facce dei cubi e di larghezza  $\frac{r_k}{3 \cdot 2^k}$ . Sia dato un chiuso  $A$  e  $L$  un sottogruppo di  $H_{m-1}(A)$  e sia  $\mu(L)$  come dalla Definizione 3.1. Denotiamo con  $\alpha_k(S)$  il numero di cubi della famiglia  $T_k$  che intersecano  $S$  e poniamo

$$\alpha_k = \inf \alpha_k(S)$$

dove l'inf viene fatto su tutti i chiusi  $S \in \mathcal{S}(L)$  per cui vale  $\mathcal{H}^m(S) < \mu(L) + \varepsilon_k$ . Essendo  $\alpha_k(S)$  un numero intero, l'estremo inferiore sarà un minimo, cioè potremo trovare un chiuso  $S_k \in \mathcal{S}(L)$  con  $\mathcal{H}^m(S_k) < \mu(L) + \varepsilon_k$  tale che  $\alpha_k(S_k) = \alpha_k$ .

Supponiamo ora (estraendo una sottosuccessione) che  $S_k \rightarrow S_0$  e che  $D(S_k, S_0) \leq \frac{1}{2}r_k$ , in modo che la successione verifichi le ipotesi (3.1), (3.2) e (3.4). Per quanto riguarda l'ipotesi (3.3) basta verificare che per ogni palla  $B(x_0, r)$  centrata in  $S_0$ , disgiunta da  $A$  e con  $r > r_k$  si ha

$$\mathcal{H}^m(S_k \cap B(x_0, r)) \geq \frac{1}{2^m} K' r^m.$$

Se prendiamo un punto  $x \in S_k$  tale che  $|x - x_0| \leq \frac{1}{2}r_k$  mediante il Teorema 4.2 seguente, otteniamo facilmente, come voluto,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x_0, r)) &\geq \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r - \frac{1}{2}r_k)) \\ &\geq K'(r - \frac{1}{2}r_k)^m \geq K' \left(\frac{r}{2}\right)^m = \frac{1}{2^m} K' r^m. \end{aligned}$$

**Teorema 4.2** *Sia  $S_k$  la successione di superfici appena costruita. Allora esiste una costante  $K'$  tale che per ogni  $k$ , se  $B(x, r)$  è una palla centrata su  $S_k$ , che non interseca  $A$  e  $r > r_k$  si ha*

$$\mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r)) \geq K' r^m.$$

Vediamo qual è l'idea della dimostrazione. Sia data una palla  $B(x, r)$  centrata su  $S_k$ . Prima di tutto si vuole dimostrare che se  $r > \frac{1}{2}r_k$  allora

$$\mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r)) \geq 2\varepsilon_k.$$

Se questo è vero, sfruttando la disuguaglianza isoperimetrica (Lemma 1.46) avremmo che anche  $\mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x, r)) = \frac{d}{dr} \psi_k(x, r)$  deve essere non troppo piccolo. Dunque, mediante integrazione, otteniamo  $\psi_k(x, r) \geq K' r^m$ , da cui, usando il Lemma 1.42, segue direttamente la tesi.

Supporremo quindi, per assurdo, che esista una palla  $B(x, r)$  tale che

$$\varphi_k(x, r) = \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r)) \leq 2\varepsilon_k,$$

se si pensa al fenomeno dell'Esempio 1.29, stiamo prendendo un punto  $x$  proprio in cima ad un "tentacolo". Si otterrà l'assurdo, quindi, riuscendo a "tagliare" il tentacolo in modo da ottenere una superficie di area minore e che interseca meno cubi. Vogliamo innanzitutto far vedere che localmente la superficie può essere rimpiazzata da una superficie di area "molto" minore. La stima su  $\varphi_k$  varrà infatti anche per  $\psi_k(x, r)$  e quindi, per il teorema del valor medio, riusciamo a trovare un  $r' < \frac{1}{2}r_k < r$  tale che

$$\frac{d}{dr} \psi_k(x, r') = \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x, r'))$$

sia piccolo. Usando dunque la disuguaglianza isoperimetrica sulla palla  $B(x, r')$ , se le costanti sono state scelte opportunamente, riusciamo a trovare una superficie  $S_k^*$ , che coincide con  $S_k$  fuori da  $B(x, r')$  ma di area "molto" minore a quella di  $S_k$ . Ovviamente la superficie  $S_k^*$  pur avendo area minore, potrebbe essere fatta molto peggio di  $S_k$  nel senso che si potrebbe avere  $\alpha_k(S_k^*) > \alpha_k(S_k)$ . Lo strumento fondamentale che ora useremo, è il Lemma 1.48. Siccome stiamo trattando una superficie che, all'interno di  $B(x, r')$ , ha area molto piccola, tale lemma ci assicura che preso qualunque cubo  $C \subseteq B(x, r')$  possiamo costruire una superficie di area maggiore, ma che non interseca il cubo  $C$ , e che non interseca più cubi di quelli che intersecava prima. Sia  $S'_k = S_k \setminus (S_k \cap B(x, r'))$ . Se applichiamo il lemma alla superficie  $S'_k$  per tutti i cubi  $C$  che intersecano  $S'_k$  riusciamo ad ottenere, una superficie che ha ancora area minore di quella di  $S_k$  che non interseca più cubi di quanto non facesse  $S_k$  e che non interseca i cubi contenenti  $x$  come invece faceva  $S_k$ . Quindi  $\alpha_k(S_k) > \alpha_k$ , che è assurdo.

*Dimostrazione:*

Sia  $K$  una costante maggiore, di ognuna delle costanti date dai Lemmi 1.46

e 1.48 e poniamo

$$\begin{aligned}\sigma_k &= (3 \cdot c^k)^n \\ u_k &= (2K)^{-\sigma_k}\end{aligned}$$

Supponiamo, che esista una palla  $B(x, r)$  centrata su  $S_k$ , disgiunta da  $A$  e con  $r > \frac{1}{2}r_k$  per cui vale

$$\mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r)) < 2\varepsilon_k. \quad (4.1)$$

Prima di tutto dimostreremo che esiste  $r'$  con  $\frac{1}{4}r_k \leq r' \leq \frac{3}{8}r_k$  tale che

$$K \left( \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x, r')) \right)^{\frac{m}{m-1}} \leq u_k \int_0^{r'} \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap B(x, t)) dt \quad (4.2)$$

cioè, usando la Definizione 3.5

$$K^{\frac{m-1}{m}} \left( \frac{d}{dr} \psi_k(x, r') \right) \leq u_k^{\frac{m-1}{m}} \psi_k(x, r') \frac{m-1}{m}.$$

Se ciò non fosse vero avrei, per ogni  $r' \in [\frac{1}{4}r_k, \frac{3}{8}r_k]$

$$1 < \left( \frac{K}{u_k} \right)^{\frac{m-1}{m}} \frac{\frac{d}{dr} \psi_k(x, r')}{\psi_k(x, r')^{\frac{m-1}{m}}}$$

che integrato da  $\frac{1}{4}r_k$  a  $\frac{3}{8}r_k$  dà

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}r_k &\geq m \left( \frac{K}{u_k} \right)^{\frac{m-1}{m}} \left( \psi_k(x, \frac{3}{8}r_k)^{\frac{1}{m}} - \psi_k(x, \frac{1}{4}r_k)^{\frac{1}{m}} \right) \\ &\leq m \left( \frac{K}{u_k} \right)^{\frac{m-1}{m}} \left( \varphi_k(x, \frac{3}{8}r_k)^{\frac{1}{m}} \right)\end{aligned}$$

cioè

$$\varphi_k \geq \left( \frac{r_k}{8m} \right)^m \left( \frac{K}{u_k} \right)^{m-1}.$$

Sapendo che  $\varphi_k(x, \frac{3}{8}r_k) \leq \varphi_k(x, r) \leq 2\varepsilon_k$ , otteniamo un assurdo se imponiamo

$$\varepsilon_k \leq \frac{1}{2} \left( \frac{r_k}{8m} \right)^m \left( \frac{K}{u_k} \right)^{m-1}.$$

Dunque sappiamo che vale (4.2), che usando il Lemma 1.42 diventa

$$K \left( \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x, r')) \right)^{\frac{m}{m-1}} \leq u_k \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r')).$$

Il Lemma 1.46 mi dice dunque che posso trovare una superficie  $D$  da “incollare” a  $S_k \setminus B(x, r')$  (tramite il Teorema 1.41) con

$$\mathcal{H}^m(D) \leq K \left( \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x, r')) \right)^{\frac{m}{m-1}} \leq K$$

ottenendo una superficie  $S_k^* = S_k \setminus B(x, r') \cup D$  con la proprietà

$$\mathcal{H}^m(S_k^* \cap B(x, r')) \leq u_k \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r')). \quad (4.3)$$

Consideriamo ora la famiglia  $T_k(x)$  formata dai cubi di  $T_k$  contenuti in  $B(x, \frac{1}{2}r_k)$  e sia  $\sigma_k(x)$  il numero di cubi di  $T_k(x) = \{C_1, \dots, C_{\sigma_k(x)}\}$ .

Si ottiene facilmente la seguente stima

$$\sigma_k(x) \leq \frac{\gamma_n \left(\frac{1}{2}r_k\right)^n}{\left(\frac{r_k}{3 \cdot 2^k}\right)^n} = \gamma_n \left(\frac{3 \cdot 2^k}{2}\right)^n \leq (3 \cdot 2^k)^n = \sigma_k.$$

Sia  $S'_k = S_k \setminus (S_k \cap B(x, r'))$ . Vogliamo definire, per induzione, delle superfici  $S_k^i$  ( $i = 0, \dots, \sigma_k(x)$ ) con le seguenti proprietà

- (i)  $S_k^i \in \mathcal{S}(L)$ ;
- (ii)  $S_k^i \supseteq S'_k$
- (iii)  $\mathcal{H}^m(S_k^i \setminus (S'_k)) \leq (2K)^i \mathcal{H}^m(S_k^* \cap B(x, r'))$
- (iv) se  $i \geq 1$ , per ogni  $j = 1, \dots, \sigma_k(x)$

$$S_k^{i-1} \cap C_j = \emptyset \Rightarrow S_k^i \cap C_j = \emptyset;$$

- (v) per ogni  $i \geq 1$

$$S'_k \cap C_i = \emptyset \Rightarrow S_k^i \cap C_i = \emptyset.$$

Per  $i = 0$  definiamo  $S_k^0 = S_k^*$ . Per come era stata scelta  $S_k^*$ , le proprietà sono tutte verificate.

Sia ora  $i > 0$ . Se  $S'_k \cap C_i \neq \emptyset$  basta definire  $S_k^i = S_k^{i-1}$  per avere tutte le proprietà verificate. Supponiamo allora che sia  $S'_k \cap C_i = \emptyset$ . Abbiamo quindi, usando la proprietà induttiva (iii),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^m(S_k^{i-1} \cap C_i) &\leq \mathcal{H}^m((S_k^{i-1} \setminus S'_k) \cap C_i) + \mathcal{H}^m((S_k^{i-1} \cap S'_k) \cap C_i) \\ &\leq \mathcal{H}^m(S_k^{i-1} \setminus S'_k) + \mathcal{H}^m(S'_k \cap C_i) \leq (2K)^{i-1} \mathcal{H}^m(S_k^* \cap B(x, r')) \end{aligned}$$

e sfruttando anche (4.3) e (4.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^m(S_k^{i-1} \cap C_i) &\leq (2K)^{i-1} u_k \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r')) \leq (2K)^{\sigma_k-1} u_k 2\varepsilon_k \\ &\leq (2K)^{\sigma_k} u_k \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Possiamo dunque applicare il Lemma 1.48 se imponiamo che valga

$$(2K)^{\sigma_k} u_k \varepsilon_k < \frac{(2^{m+2} n^m)^{-n+m} \left(\frac{r_k}{2^k}\right)^m}{3^m 4^m K^{m-1}}.$$

in modo da ottenere (usando come al solito il Teorema 1.41) una superficie  $S_k^i \in \mathcal{S}(L)$  che non interseca il cubo  $C_i$  (e quindi verifica (v)), che non interseca più cubi di quanti ne intersecava  $S_k^{i-1}$  (cioè vale (iv)), che coincide con  $S_k^{i-1}$  fuori da  $\overline{C_i}$  e tale che

$$\mathcal{H}^m(S_k^i \cap \overline{C_i}) \leq K \mathcal{H}^m(S_k^{i-1} \cap \overline{C_i}). \quad (4.4)$$

La proprietà (i) vale per il Lemma 1.48, la (ii) vale in quanto sappiamo che  $C_i \cap S'_k = \emptyset$ . Verifichiamo la proprietà (iii) sfruttando l'induzione e l'equazione (4.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^m(S_k^i \setminus S'_k) &\leq \mathcal{H}^m(S_k^i \cap \overline{C_i}) + \mathcal{H}^m((S_k^i \setminus \overline{C_i}) \setminus S'_k) \\ &\leq K \mathcal{H}^m(S_k^{i-1} \cap \overline{C_i}) + \mathcal{H}^m((S_k^{i-1} \setminus C_i) \setminus S'_k) \\ &\leq K \mathcal{H}^m(S_k^{i-1} \setminus S'_k) \leq K (2K)^{i-1} \mathcal{H}^m(S_k^* \cap B(x, r')) \\ &\leq (2K)^i \mathcal{H}^m(S_k^* \cap B(x, r')). \end{aligned}$$

Dunque abbiamo ottenuto una superficie  $S_k^{\sigma_k(x)} \in \mathcal{S}(L)$ . Dalla proprietà (iii) e dalla (4.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^m(S_k^{\sigma_k(x)} \cap B(x, r')) &\leq \mathcal{H}^m(S_k^{\sigma_k(x)} \cap B(x, r')) \\ &\leq (2K)^{\sigma_k^*} \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r')) \\ &\leq (2K)^{\sigma_k} u_k \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r')) \end{aligned}$$

ma  $u_k \leq (2K) - \sigma_k$  quindi

$$\mathcal{H}^m(S_k^{\sigma_k(x)} \cap B(x, r')) \leq \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r')). \quad (4.5)$$

Se ora prendiamo un cubo  $C_x \in T_k$  con  $x \in C_x$ , abbiamo  $C \subseteq B(x, r')$  quindi  $C_x \cap S'_k = \emptyset$ . Dunque dalla proprietà (v) e (iv) sappiamo che  $S_k^{\sigma_k(x)} \cap C_x = \emptyset$  mentre ovviamente  $S_k \cap C_x \ni x$ . D'altra parte sempre per la proprietà (v), preso un qualunque cubo  $C \in T_k$  abbiamo che se  $C \cap S_k^{\sigma_k(x)} \neq \emptyset$ , allora si ha  $C \cap S'_k \neq \emptyset$  e quindi, in conclusione, otteniamo

$$\alpha_k(S_k^{\sigma_k(x)}) < \alpha_k(S_k)$$

e ricordando che vale (4.5)

$$\alpha_k < \alpha_k(S_k)$$

che contraddice la scelta di  $S_k$ .

Dunque l'equazione (4.1) dev'essere falsa, il che vuol dire che per ogni palla  $B(x, r)$ ,  $r > \frac{1}{2}r_k$ , centrata su  $S_k$  e disgiunta da  $A$  si ha

$$\mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r)) \geq 2\varepsilon_k. \quad (4.6)$$

Per il Lemma 1.46, posso sostituire  $S_k \cap B(x, r)$ , senza modificarne il bordo, con una "toppa"  $D$  per cui vale

$$\mathcal{H}^m(B) \leq K \left( \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x, r)) \right)^{\frac{m}{m-1}}.$$

Ma essendo  $\mathcal{H}^m(S_k) \leq \mu(L) + \varepsilon_k$  otteniamo

$$\mathcal{H}^m(S_k \cap B(x, r)) - \varepsilon_k \leq K \mathcal{H}^{m-1}(S_k \cap \partial B(x, r))^{\frac{m}{m-1}}$$

usando il Lemma 1.42 e (4.6) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\psi_k(x, r) &\leq \frac{1}{2}\varphi_k(x, r) \leq \varphi_k(x, r) - \varepsilon_k \\ &\leq K \left( \frac{d}{dr}\psi_k(x, r) \right)^{\frac{m}{m-1}} \end{aligned}$$

cioè

$$\frac{\frac{d}{dr}\psi_k(x, r)}{\psi_k(x, r)^{\frac{m-1}{m}}} \geq (2K)^{-\frac{m-1}{m}}$$

che integrata da  $\frac{1}{2}r_k$  a  $r$ , ci dà

$$m\psi_k(x, r)^{\frac{1}{m}} - m\psi_k(x, \frac{1}{2}r_k)^{\frac{1}{m}} \geq (r - \frac{1}{2}r_k)(2K)^{-\frac{m-1}{m}}.$$

Quindi, per  $r > \frac{1}{2}r_k$ , otteniamo

$$m^m\psi_k(x, r) \geq \left(\frac{1}{2}r\right)^m (2K)^{1-m}$$

e quindi la tesi del teorema.  $\square$

## 4.2 La dimostrazione del teorema di esistenza

Per completare la dimostrazione del Teorema 4.1, ci servirà ancora il seguente lemma.

**Lemma 4.3** *Sia  $A$  un compatto di  $\mathbf{R}^n$  e  $L$  un sottogruppo di  $H_{m-1}(A)$  e sia data una successione  $\{S_k\}$  con le proprietà (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4). Sia  $\Omega_0$  un aperto che non interseca  $A$ . Allora*

$$\mathcal{H}^m(S_0 \cap \Omega_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k \cap \Omega_0)$$

*Dimostrazione:*

Notiamo innanzitutto che se abbiamo un insieme finito di palle  $B(x_i, r_i)$  centrate in  $S_0$ , disgiunte da  $A$  e tutte contenute in un aperto  $\Omega$  fissato, si ha

$$\sum_i \gamma_m r_i^m \leq \sum_i \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k \cap B(x_i, r_i)) \quad (4.7)$$

$$\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m \left( \bigcup_i (S_k \cap B(x_i, r_i)) \right) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k \cap \Omega). \quad (4.8)$$

Sia ora  $\{x_i\}_{i \in I}$  un  $\delta$ -reticolo di  $S_0 \setminus (A + B(0, \delta'))$  (si veda la Definizione 1.27), vogliamo stimare il numero di palle del reticolo che intersecano una certa palla  $B(x_{i_0}, \delta)$  cioè il valore di  $N = |\{i \in I \text{ t.c. } |x_i - x_{i_0}| < 2\delta\}|$ . Abbiamo ovviamente

$$\bigcup_{|x_i - x_{i_0}| < 2\delta} B\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq B\left(x_{i_0}, \frac{5}{2}\delta\right)$$

essendo  $|x_i - x_{i'}| \geq \delta$  per  $i \neq i'$ . Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} N \gamma_n \left(\frac{\delta}{2}\right)^n &= \sum_{|x_i - x_{i_0}| < 2\delta} \left(\frac{\delta}{2}\right)^n \\ &= \mathcal{H}^n \left( \bigcup_{|x_i - x_{i_0}| < 2\delta} B\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right) \right) \\ &\leq \mathcal{H}^n \left( B\left(x_{i_0}, \frac{5}{2}\delta\right) \right) = \gamma_n (3\delta)^n \end{aligned}$$

da cui si ricava  $N < 5^n$ . Quindi possiamo dividere l'insieme  $I$  degli indici del reticolo in sottoinsiemi  $I_j$ , in modo che ogni  $\{B(x_i, \delta) \text{ t.c. } i \in I_j\}$  sia formato da palle disgiunte e che se  $i \in I$  non appartiene a  $I_j$  per  $j = 1, \dots, j_0$ , allora  $B(x_i, \delta)$  deve intersecare almeno una palla  $B(x_{i'}, \delta)$  con  $i' \in I_j$  per ogni  $j = 1, \dots, j_0$ . Dunque per quanto visto prima ci possono essere al più  $5^n$  insiemi  $I_j$ . Per la disuguaglianza (4.7), prendendo  $\Omega = \mathbf{R}^n \setminus (A + \overline{B(0, \delta')})$  otteniamo

$$\sum_{i \in I_j} \gamma_m \delta^m \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k \cap \Omega) \leq \mu(L)$$

e quindi

$$\sum_i \gamma_m \delta^m = \sum_j \sum_{i \in I_j} \gamma_m \delta^m \leq 5^n \mu(L).$$

Di conseguenza otteniamo (si veda la Definizione 1.26)

$$\mathcal{H}_\delta^m(S_0 \setminus (A + B(0, \delta'))) \leq 5^n \mu(L)$$

e quindi facendo tendere a zero prima  $\delta$  e poi  $\delta'$  abbiamo

$$\mathcal{H}^m(S_0 \setminus A) < \infty.$$

Consideriamo ora l'aperto  $\Omega_0$  dato nelle ipotesi. Per il Teorema 1.30, dato un  $\delta > 0$ , possiamo ricoprire quasi tutto  $S_0 \cap \Omega_0$  con una famiglia  $\{B(x_i, r_i)\}$  di palle centrate in  $S_0$ , contenute in  $B(x, r)$  e con  $r_i \leq \delta$ . Ancora usando 4.7, abbiamo, prendendo  $\Omega = \Omega_0$

$$\sum_i \gamma_m r_i^m \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k \cap \Omega_0)$$

cioè per ogni  $\delta$

$$\mathcal{H}_\delta^m(S_0 \cap \Omega_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k \cap \Omega_0)$$

e quindi, come si voleva dimostrare

$$\mathcal{H}^m(S_0 \cap \Omega_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k \cap \Omega_0).$$

□

Possiamo ora dimostrare molto semplicemente il Teorema 4.1 di esistenza.

*Dimostrazione:*

Prendiamo la successione  $\{S_k\}$  definita nella Sezione 4.1. Prendiamo  $\Omega_0 = \mathbf{R}^n \setminus A$  e applichiamo il Lemma 4.3 per ottenere

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^m(S_0) &= \mathcal{H}^m(S_0 \cap \Omega_0) + \mathcal{H}^m(A) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k \cap \Omega_0) + \mathcal{H}^m(A) \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^m(S_k) = \mu(L) \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathcal{H}^m(S_0) = \mu(L).$$

□



# Bibliografia

- [1] W. Allard. On the first variation of a varifold. *Ann. of Math.*, 95:417–491, 1972.
- [2] F. J. Almgren, Jr. The theory of varifolds - a variational calculus in the large for the  $k$ -dimensional area integrand. Mimeographed notes, 1965.
- [3] F. J. Almgren, Jr. *Plateau's Problem. An invitation to varifold geometry*. W. A. Benjamin, Inc., 1966.
- [4] A. S. Besicovitch. On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points. *Mathematische Annalen*, 98:422–464, 1928.
- [5] C. Castaing and M. Valadier. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*. Springer-Verlag, 1977.
- [6] R. Courant. On the problem of Plateau. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 22:367–372, 1936.
- [7] R. Courant. Plateau's problem and Dirichlet's principle. *Ann. Math.*, 38:679–724, 1937.
- [8] E. De Giorgi. Frontiere orientate di misura minima. *Seminario Mat. Scuola Normale Superiore Pisa*, 1960–61.
- [9] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, and O. Wohlrab. *Minimal Surfaces*. Springer-Verlag, 1991.
- [10] J. Douglas. Solution of the problem of Plateau. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 33:263–321, 1931.
- [11] S. Eilenberg and N. Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology*, volume 15. Princeton Mathematical Series, 1952.
- [12] H. Federer. Currents and area. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 98:204–233, 1961.
- [13] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, 1969.
- [14] H. Federer and W. H. Fleming. Normal and integral currents. *Ann. of Math.*, 72:458–520, 1960.
- [15] W. H. Fleming. On the oriented Plateau problem. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 11:69–90, 1962.
- [16] M. J. Greenberg. *Lectures on Algebraic Topology*. Mathematics lecture notes series, 1967.
- [17] R. Hardt and F. H. Lin. The singular set of an energy minimizing map from  $B^4$  to  $S^2$ . *Math. Manuscripta.*, 62:275–287, 1990.

- [18] F. Morgan. *Geometric Measure Theory*. Academic Press, Inc., 1988.
- [19] K. Morita and J. Nagata. *Topics in General Topology*, volume 41. North-Holland Mathematical Library, 1989.
- [20] C. Morrey, Jr. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Springer-Verlag, 1966.
- [21] R. Osserman. *A Survey of Minimal Surfaces*. Van Nostrand Reinhold Co., 1969.
- [22] J. A. F. Plateau. Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seuls forces moléculaires. *Paris: Gauthier-Villars*, 1873.
- [23] T. Radò. On Plateau's problem. *Ann. Math.*, 32:785–803, 1930.
- [24] T. Radò. The problem of least area and the problem of Plateau. *Math. Z.*, 32:763–796, 1930.
- [25] E. R. Reifenberg. Solution of the Plateau problem for  $m$ -dimensional surfaces of varying topological type. *Acta Mathematica*, 104:1–92, 1960.
- [26] E. R. Reifenberg. On the analyticity of minimal surfaces. *Ann. Math.*, 80:15–21, 1964.
- [27] L. Simon. *Lectures on Geometric Measure Theory*, volume 3. Proc. C.M.A., 1983.
- [28] L. Tonelli. Sul problema di Plateau. *Accad. dei Lincei*, 24:333–339, 393–398, 1936.

# Ringraziamenti

Ringrazio in primo luogo il prof. Giaquinta, che mi ha proposto un argomento di tesi molto istruttivo e interessante, ed è sempre stato disponibile nel seguirmi in questo lavoro. Ringrazio poi Giovanni Alberti, Vincenzo Tortorelli e Pietro Mayer che mi hanno dato moltissimi suggerimenti e spiegazioni, e il prof. Lazzeri che ogni tanto, “passando di lì”, mi ha aiutato per quanto riguarda le questioni geometriche.

Ringrazio poi Marco, che tra l'altro mi ha aiutato a realizzare la figura che si trova a pag. iii, Anna e tutti gli altri amici che mi hanno dato molti consigli e mi hanno spesso aiutato anche in questioni pratiche. Ringrazio infine, in modo particolare, la mia famiglia che mi ha sempre aiutato in tutti i quattro anni di studio.

*Emanuele.*