

La Congettura di Poincaré

Riccardo Benedetti * Carlo Mantegazza †

5 marzo 2024

1 Introduzione

La congettura fu formulata da Henri Poincaré nel 1904 nel quinto e ultimo “complemento” alla sua opera *Analysis Situs* del 1895. È stata forse lo specifico problema aperto più importante e celebre in topologia, risolto solo agli inizi del nuovo millennio da Grisha Perelman, portando a compimento il programma basato sul cosiddetto *flusso di Ricci*, delineato da Richard Hamilton fin dagli anni '80 del novecento. Ha avuto anche un momento di celebrità tra il grande pubblico soprattutto perché era uno dei sette “Millennium Problems” (con un premio di un milione di dollari ognuno) selezionati dall'Istituto Clay nel 2000 e anche per alcuni peculiari aspetti della personalità di Perelman che, tra l'altro, lo hanno indotto a rifiutare tale premio, così come la Medaglia Fields conferitagli all'International Congress of Mathematics del 2006 a Madrid.

I vari tentativi di soluzione sviluppati durante tutto un secolo formano un imponente intreccio di idee e tecniche. Lo scopo di questa nota è quello di illustrare qualche tratto di questo intreccio, in un modo che, nei limiti del possibile, abbia una certa consistenza matematica, disponendo soltanto di nozioni di base di geometria e di calcolo differenziale, che supponiamo familiari al lettore.

Già dare una formulazione precisa della congettura non è una cosa immediata. In modo discorsivo, l'enunciato di Poincaré caratterizza la sfera unitaria dello spazio euclideo a quattro dimensioni tra tutte le 3-*varietà* compatte, considerate a meno di *isomorfismo*, come l'unica *semplicemente connessa* (una proprietà topologica che riguarda il comportamento dei *lacci* nella varietà). È chiaro che occorre dare un significato almeno alle parole in corsivo nella frase precedente.

2 Le sfere

Per ogni dimensione n maggiore o uguale a 1, la *palla aperta* $B_r^n(p)$ di centro p e un certo raggio r maggiore di zero, è il luogo dei punti dello spazio euclideo n -dimensionale \mathbb{R}^n che distano meno di r da p . Il bordo della palla aperta è la *sfera* $S_r^{n-1}(p)$ formata dai punti che distano r da p . La *palla chiusa* $D_r^n(p)$ è l'unione della palla aperta e del suo bordo (la sfera $S_r^{n-1}(p)$). Quando il centro è l'origine di \mathbb{R}^n e il raggio è uguale a 1, scriviamo semplicemente B^n , D^n e S^{n-1} , che chiameremo *palle* o *sfere unitarie*. I primi casi sono facili da visualizzare: D^1 è l'intervallo chiuso $[-1, 1]$ e la sfera S^0 consiste dei suoi due estremi; S^1 è una circonferenza nel piano; S^2 è proprio la superficie di una palla nel senso comune del termine. Per n maggiore di tre, la “visualizzazione” non è più così evidente, ma questo non impedisce di maneggiare questi oggetti, anche perché spesso abbiamo a che fare con costruzioni che si descrivono in modo uniforme rispetto alla dimensione. Noi siamo particolarmente interessati alla 3-sfera S^3 .

* Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Largo Bruno Pontecorvo 5, 56127 Pisa, Italy

† Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli Federico II, Via Cintia, Monte S. Angelo 80126 Napoli, Italy

2.1 Le sfere come varietà

Una 0-varietà compatta è per definizione un insieme finito di punti di qualche spazio euclideo \mathbb{R}^n . Quindi \mathbb{S}^0 è una 0-varietà compatta. Quando n è maggiore di 1, consideriamo l'iperpiano P di \mathbb{R}^n , copia di \mathbb{R}^{n-1} , dei punti che hanno l'ultima coordinata x_n nulla e il semispazio A_+ formato dai punti con l'ultima coordinata minore di 1. Quest'ultimo è un sottoinsieme *aperto* di \mathbb{R}^n cioè è unione di palle aperte. L'intersezione W_+ di \mathbb{S}^{n-1} con l'aperto A_+ è, per definizione, un aperto della sfera; si ottiene rimuovendo dalla sfera il suo "polo nord" p_+ che ha tutte le coordinate nulle salvo l'ultima $x_n = 1$. L'applicazione π_+ , da A_+ a valori nell'iperpiano $P \sim \mathbb{R}^{n-1}$, è definita in modo geometrico come segue: per ogni punto p di A_+ consideriamo la retta passante per p e p_+ ; definiamo allora l'immagine di $\pi_+(p)$ di p , come il punto di intersezione di questa retta con l'iperpiano P . Poniamo φ_+ la restrizione di π_+ su W_+ . Non è allora difficile ricavare un'espressione analitica esplicita per π_+ nelle coordinate di \mathbb{R}^n . Pur omettendo di scrivere tale formula, è importante qui mettere in evidenza che π_+ risulta essere una funzione di classe C^∞ (diremo brevemente che è *liscia*) tra aperti di spazi euclidei; questo significa che è continua e sono definite e continue tutte le derivate parziali di qualsiasi ordine delle componenti della funzione. La restrizione φ_+ è bigettiva; non è difficile ricavare un'espressione analitica esplicita anche per l'applicazione inversa ψ_+ , definita su $P \sim \mathbb{R}^{n-1}$ a valori in W_+ ; componendola con l'inclusione di W_+ in \mathbb{R}^n la pensiamo a valori in questo spazio e si può verificare che è anch'essa un'applicazione C^∞ tra aperti di spazi euclidei. Possiamo riassumere tutto questo dicendo che ψ_+ è un isomorfismo liscio, detto *diffeomorfismo*, tra \mathbb{R}^{n-1} e l'aperto W_+ di \mathbb{S}^{n-1} , mentre φ_+ è il diffeomorfismo inverso. Diciamo anche che in questo modo abbiamo definito un *sistema di coordinate lisce* su tale aperto della sfera. Le sfere concentriche di centro l'origine in \mathbb{R}^{n-1} vengono mandate tramite ψ_+ nell'intersezione di \mathbb{S}^{n-1} con gli iperpiani orizzontali di altezza minore di 1; quando il raggio delle sfere tende a infinito, tale altezza tende a 1 e le immagini delle sfere si contraggono verso il polo nord. A volte si esprime questo comportamento dicendo che \mathbb{S}^{n-1} si ottiene aggiungendo a \mathbb{R}^{n-1} il "punto all'infinito" p_+ .

Via modifiche evidenti, possiamo ripetere la costruzione usando invece il polo sud $p_- := -p_+$ al posto del polo nord. Otteniamo dunque un sistema di coordinate lisce sull'aperto W_- della sfera ottenuto rimuovendo il polo sud. Sull'intersezione $W_+ \cap W_-$ dei due aperti della sfera, cioè sull'aperto ottenuto rimuovendo entrambi i poli, si restringono entrambi i sistemi; componendo ψ_+ con φ_- (opportunamente ristrette) otteniamo il diffeomorfismo tra due copie di \mathbb{R}^{n-1} privato dell'origine che esprime il *cambiamento di coordinate* lisce passando da un sistema all'altro (il diffeomorfismo inverso si ottiene restringendo e componendo ψ_- con φ_+). Diciamo che φ_\pm sono *carte lisce* di \mathbb{S}^{n-1} con le rispettive *parametrizzazioni* parziali ψ_\pm . L'unione delle due carte ricopre tutta la sfera così che esse formano un cosiddetto *atlante liscio* per la sfera. Esistono ovviamente altre carte per la sfera con proprietà simili. Per esempio, la restrizione di ψ_+ su B^{n-1} definisce un diffeomorfismo con la calotta inferiore di \mathbb{S}^{n-1} , cioè l'aperto della sfera ottenuto intersecandola con il semispazio aperto di \mathbb{R}^n dei punti con l'ultima coordinata minore di zero. La restrizione di φ_+ alla calotta è una carta con immagine B^{n-1} . La restrizione alla calotta inferiore della proiezione ortogonale su P definisce un'altra carta con immagine B^{n-1} . È sensato dunque considerare l'atlante "completo" di \mathbb{S}^{n-1} , formato da tutte le possibili carte lisce. Ciascuna carta determina un sistema locale di coordinate lisce e ogni intersezione degli aperti di due carte supporta un cambiamento di coordinate che si esprime mediante un diffeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^{n-1} .

Astraendo da queste considerazioni, possiamo dare ora una definizione generale di cosa sia una *m-varietà liscia*, da cui risulterà automaticamente che la sfera \mathbb{S}^{n-1} è un esempio di $(n-1)$ -varietà. Dati due sottoinsiemi X, Y di spazi euclidei \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^k rispettivamente, un'applicazione da X a Y è *liscia* se è localmente estendibile in modo liscio, cioè, per ogni punto p di X esiste un aperto A di \mathbb{R}^n che lo contiene e tale che la restrizione dell'applicazione su $A \cap X$ si estenda a un'applicazione liscia definita su A a valori in \mathbb{R}^k . Un'applicazione liscia da X a Y è un *diffeomorfismo* se è bigettiva e anche la sua inversa è liscia. Una *m-carta locale* su X (con parametrizzazione locale inversa ψ) è un diffeomorfismo φ tra un aperto W di X e un aperto U di \mathbb{R}^m . Infine, una *m-varietà liscia* è un sottoinsieme M di qualche spazio euclideo \mathbb{R}^n tale che l'insieme delle *m-*

carte locali su M non è vuoto e lo ricopre, formando l'*atlante liscio completo* della varietà; l'intero m è la sua *dimensione*. Nel caso delle sfere \mathbb{S}^{n-1} , chiaramente tale dimensione è $n - 1$.

Se f è un'applicazione liscia dalla m -varietà M alla s -varietà M' e $(W, \varphi), (W', \varphi')$ sono carte rispettivamente delle due varietà, tali che l'immagine di W tramite f è contenuta in W' , allora componendo ψ con f e poi con φ' , si ottiene un'applicazione liscia tra gli aperti U e U' degli spazi euclidei \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^s rispettivamente, detta *rappresentazione in coordinate locali* di f . In particolare, i cambiamenti di coordinate associati all'intersezione di due carte di M sono rappresentazioni in coordinate locali dell'applicazione identità di M .

La disciplina nota come *Topologia Differenziale* si occupa delle varietà (sottinteso, lisce) di dimensione arbitraria, considerate a meno di diffeomorfismo e delle applicazioni lisce tra di esse. Questa categoria di spazi e applicazioni, da una parte risulta essere localmente "domestica", nel senso che lavorando con sistemi di coordinate locali ci riconduciamo al calcolo differenziale sugli spazi euclidei, con la nota possibilità di "linearizzare" localmente molte situazioni. D'altra parte, le varietà e le applicazioni lisce tra varietà risultano essere oggetti molto "flessibili", dando luogo a una miriade di modelli; ne segue che lo studio delle varietà a meno di diffeomorfismo può comunque essere molto complesso. Per esempio, un *nodo* in \mathbb{S}^3 è un sottoinsieme della 3-sfera diffeomorfo a \mathbb{S}^1 . L'insieme aperto ottenuto rimuovendo un nodo da \mathbb{S}^3 eredita da \mathbb{S}^3 una struttura di 3-varietà. Già la classificazione a meno di diffeomorfismo di queste speciali 3-varietà "generate" da nodi è una questione largamente aperta.

2.2 Proprietà invarianti

Nell'ottica di affrontare il problema della classificazione delle varietà, il primo passo è individuare delle proprietà *invarianti per diffeomorfismo*.

Dimensione. La prima proprietà invariante è la dimensione. La verifica di questo fatto si riconduce all'invarianza della dimensione per isomorfismi lineari. Ciò chiaramente permette di "separare" l'analisi delle varietà dimensione per dimensione.

Compattezza. È una proprietà topologica che può essere definita per arbitrari sottoinsiemi di spazi euclidei. Un sottoinsieme non vuoto X di \mathbb{R}^n si dice *compatto* se da ogni successione di punti di X è possibile estrarre una sottosuccessione che converga a un punto di X . Una generalizzazione diretta del *teorema di Bolzano-Weierstrass* per gli intervalli della retta, probabilmente noto al lettore, mostra che X è compatto se e solo se è un chiuso limitato (cioè è il complementare di un insieme aperto ed è tutto contenuto in una palla di \mathbb{R}^n).

Non è difficile verificare che ogni sfera \mathbb{S}^m è compatta. È sensato specializzare, almeno in prima battuta, il nostro studio alle m -varietà compatte, al variare della dimensione m .

Connessione. Anche questa è una proprietà che può essere definita per arbitrari sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , ma preferiamo darne una definizione nel caso speciale delle varietà. Data una m -varietà M , un arco in M è un'applicazione liscia definita sull'intervallo D^1 a valori in M ; diciamo che un tale arco *connette* i due punti p_{\pm} di M immagini degli estremi dell'intervallo. La varietà M è allora *connessa* se ogni applicazione definita su \mathbb{S}^0 a valori in M può essere estesa a un arco in M . In altre parole, ogni coppia p_{\pm} di punti di M può essere connessa da un arco in M .

Per m maggiore di zero, la sfera \mathbb{S}^m è connessa. Questo è di facile verifica per la circonferenza \mathbb{S}^1 ; in generale ci riconduciamo a questo caso osservando che ogni due punti di \mathbb{S}^m sono contenuti in una circonferenza ottenuta intersecando la sfera con un opportuno 2-piano passante per l'origine di \mathbb{R}^{m+1} , che contiene i due punti.

Connessione semplice. Sia M una m -varietà connessa. Un *laccio* in M è un'applicazione liscia definita su \mathbb{S}^1 a valori in M . Diciamo che M è *semplicemente connessa* se ogni laccio in M può essere esteso a un'applicazione liscia definita sul disco D^2 a valori in M . Se γ è un laccio e $\hat{\gamma}$ è una sua estensione su D^2 , la famiglia a un parametro di applicazioni ottenute componendo, per ogni $t \in [0, 1]$, l'applicazione $x \rightarrow (1 - t)x$ definita su $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ e a valori in D^2 con $\hat{\gamma}$, è un "arco di lacci" che "connette" γ con il laccio costantemente uguale a $\hat{\gamma}(0)$ (dunque "deforma" in modo continuo il laccio γ in un punto).

Per m maggiore di 1, la sfera \mathbb{S}^m è semplicemente connessa. Per le proprietà delle applicazioni lisce (teorema di Sard), sappiamo che ogni laccio non è surgettivo; in definitiva non è restrittivo assumere che il laccio in \mathbb{S}^m non incontri il polo nord, cioè sia a valori nell'aperto W_+ . Componendo il laccio con la proiezione φ_+ descritta prima, ci riconduciamo al caso di lacci a valori in \mathbb{R}^m ; si conclude allora usando il fatto che \mathbb{R}^m è "contraibile" per mezzo della "retrazione" sull'origine data dalla mappa $(x, t) \rightarrow (1 - t)x$, con $t \in [0, 1]$. Si può invece dimostrare – non è del tutto immediato – che \mathbb{S}^1 non è semplicemente connesso; infatti il laccio dato dall'applicazione identità di \mathbb{S}^1 non ammette alcuna estensione definita su D^2 .

Orientabilità. Generalizzando quanto detto prima per la 3-sfera, un nodo K in una m -varietà connessa M è un sottoinsieme diffeomorfo a \mathbb{S}^1 ; M è *orientabile* se ogni nodo K in M ha un intorno a "tubo" (o tubolare) in M diffeomorfo a $K \times D^{m-1}$, dove K si identifica con "l'anima" del tubo $K \times \{0\}$. Per esempio, una 2-varietà *non* è orientabile se e solo se contiene K con un intorno a "nastro" diffeomorfo a un nastro di Möbius. Si dimostra (non è completamente ovvio) che ogni varietà compatta e semplicemente connessa è orientabile.

3 L'enunciato della congettura

Lo studio delle varietà compatte e connesse a meno di diffeomorfismo diventa progressivamente più difficile al crescere della dimensione $m \in \mathbb{N}$. Per $m = 0$ la conclusione è immediata, tali varietà sono tutte costituite da un solo punto. Se $m = 1$, si può dimostrare quello che suggerisce l'intuizione, anche se non è del tutto immediato: ogni 1-varietà compatta e connessa è diffeomorfa alla circonferenza \mathbb{S}^1 . Per $m = 2$, esiste una classificazione completa, non banale, già nota a Poincaré. Le 2-varietà, dette anche *superfici*, compatte e connesse sono completamente classificate per mezzo di un insieme finito di invarianti effettivamente calcolabili, legati al comportamento dei lacci tracciati sulla superficie. Ne risulta una infinità numerabile di modelli distinti tra i quali la sfera \mathbb{S}^2 è quello più semplice. Un esempio di superficie orientabile e non diffeomorfa alla sfera è il "prodotto" di due copie di \mathbb{S}^1 , detto *toro*, che non è semplicemente connesso e, a meno di diffeomorfismi, può essere realizzato come la superficie di una "ciambella" in \mathbb{R}^3 . Per ogni $g \geq 1$, è possibile assemblare via un opportuno "taglia e incolla" g copie del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ottenendo una successione di modelli orientabili, due a due non diffeomorfi, indicizzati dal "genere" g . Questi possono essere realizzati come la superficie di una "ciambella con g -buchi" in \mathbb{R}^3 . Esiste poi un'altra distinta successione formata da superfici non orientabili. L'insieme di questi modelli è esaustivo. Risulta, in particolare, che ogni superficie compatta e semplicemente connessa è diffeomorfa alla 2-sfera.

L'esistenza di una classificazione completa con tali caratteristiche qualitative risulta essere "senza speranza" già per $m = 3$. Ci possiamo porre allora il problema meno ambizioso di caratterizzare per mezzo di qualche proprietà invariante fondamentale la sfera \mathbb{S}^3 , che presumibilmente è la 3-varietà compatta più semplice. La *congettura di Poincaré*, propone appunto tale caratterizzazione, in analogia col caso bidimensionale:

Ogni 3-varietà compatta e semplicemente connessa è diffeomorfa alla sfera \mathbb{S}^3 .

Adesso tutti i termini dell'enunciato sono definiti. Esistono generalizzazioni e varianti importanti della congettura di Poincaré per dimensioni superiori che sono state intensamente studiate nel corso dei decenni. In questa nota ci limitiamo al caso tridimensionale. Per quanto detto sopra, non è restrittivo affrontare la congettura specializzandoci alle 3-varietà compatte, connesse e orientabili.

4 La topologia geometrica tridimensionale

La topologia differenziale, in particolare tridimensionale, ha i suoi propri strumenti: argomenti di "posizione generica" a volte noti come teoria della "trasversalità", ben definite procedure

di “taglia e incolla”, dette di “chirurgia”, per costruire nuove varietà a partire da varietà date, ecc. L’uso di “triangolazioni” delle varietà compatibili con la struttura liscia permette di sviluppare anche metodi “poliedrali”. L’insieme di queste tecniche è chiamato *topologia geometrica*. La congettura di Poincaré è un “puro” enunciato di topologia geometrica, quindi, se vera, era logico aspettarsi una dimostrazione “interna” alla disciplina. In effetti, questa è stata in un certo senso la grande sfida perduta dalla topologia geometrica. Nel corso dei decenni sono stati proposti attacchi, anche molto sottili, alla congettura che però si sono rivelati alla fine affetti da qualche falla più o meno riposta (spesso un’affermazione non dimostrata perché “evidente” e che invece era in ultima analisi falsa oppure non più evidente della congettura stessa). Nei casi migliori si è trattato di “errori fecondi” perché mettevano in luce fenomeni inattesi e di grande interesse indipendente. Una per tutte, il caso della della “falsa dimostrazione” di J. H. C. Whitehead (1934) [13]; essa funziona assumendo come “evidentemente vero” che ogni 3-varietà non compatta, connessa e “contraibile” sia diffeomorfa a \mathbb{R}^3 . In seguito Whitehead stesso costruì un controesempio, esibendo quella che è ora nota come la *varietà di Whitehead* [12]; essa si distingue da \mathbb{R}^3 per il suo comportamento “selvaggio” all’infinito. Tale varietà \mathcal{W} ha inoltre alcune altre proprietà peculiari; per esempio, nonostante non sia diffeomorfa a \mathbb{R}^3 , il prodotto $\mathcal{W} \times \mathbb{R}$ è diffeomorfo allo spazio euclideo standard \mathbb{R}^4 . Questo fenomeno, tra l’altro, è alla base di un approccio quadridimensionale alla congettura di Poincaré (la congettura di Zeeman) che qui ci limitiamo a menzionare.

Sono state dimostrate versioni più deboli (cioè sotto ipotesi più forti) della congettura di Poincaré che aiutano a coglierne la delicatezza. Ricordiamo per esempio, il seguente teorema di R. H. Bing [1]. Con argomenti simili a quelli usati per la connessione semplice di \mathbb{S}^3 , è facile vedere che la 3-sfera verifica la seguente più forte “proprietà di Bing”: ogni nodo in \mathbb{S}^3 è tutto contenuto in una carta locale di \mathbb{S}^3 diffeomorfa a \mathbb{R}^3 . Il teorema afferma allora che ogni 3-varietà compatta connessa che verifichi la proprietà di Bing è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 . Anche se può sembrare intuitivamente plausibile, non è invece affatto evidente che una 3-varietà compatta e semplicemente connessa verifichi la proprietà di Bing.

Il fallimento rispetto alla congettura di Poincaré non significa comunque che questa disciplina non abbia prodotto contributi notevoli alla comprensione delle 3-varietà *nel loro complesso*. Il punto è che i suoi risultati più profondi sono in qualche senso ininfluenti rispetto alla congettura di Poincaré. Alcuni di tali risultati riguardano il comportamento delle superfici compatte contenute in una data 3-varietà, in particolare dei lacci tracciati su queste una volta che li consideriamo come lacci della 3-varietà ambiente. L’effetto di “tagliare” le 3-varietà compatte lungo superfici “essenziali”, prima diffeomorfe alla 2-sfera, poi al toro, è stato studiato a fondo per mezzo di analisi sottili che culminano con la teoria della *decomposizione canonica*, detta *JSJ*, delle 3-varietà compatte connesse e orientabili (da W. Jaco – P. Shalen [5], K. Johannson [6], 1976 – si veda anche [8]), preceduta dalla *decomposizione in componenti prime* (H. Kneser, . . . , J. W. Milnor, 1962 [7]). Per entrambe le decomposizioni, l’insieme delle varietà costituenti è invariante se tutte le varietà coinvolte sono considerate a meno di diffeomorfismo. La teoria determina proprietà stringenti per il comportamento dei lacci su ogni componente della decomposizione. Gli enunciati di questi risultati hanno un contenuto troppo tecnico per essere qui descritti. Ai fini del nostro discorso ci basta sottolineare come la ricaduta sulla congettura di Poincaré di tutto questo notevole macchinario sia stata sfortunatamente modesta, anche se sarà importante per le Sezioni 7 e 8. Quello che possiamo comunque trarne è che nell’enunciato della congettura non è restrittivo assumere che la varietà compatta semplicemente connessa M sia anche *irriducibile*, cioè che ogni superficie in M diffeomorfa alla sfera \mathbb{S}^2 , è il bordo di una 3-palla chiusa in M , diffeomorfa a D^3 . Segue dunque, in tal caso, che M stessa è l’unica componente della sua decomposizione canonica.

5 La geometrizzazione della congettura

Nel senso comune e come del resto suggerisce il nome stesso, “fare geometria” significa avere a che fare con la misura di grandezze quali distanze, lunghezze, angoli, aree, volumi, ecc. La topologia geometrica tridimensionale è in realtà molto “topologica” e poco “geometrica”. I dif-

feomorfismi sono “troppo” flessibili. Per esempio, due superficie in \mathbb{R}^3 che hanno una forma geometrica apparentemente molto diversa possono benissimo essere diffeomorfe. Le strutture addizionali che permettono di “fare geometria”, in senso stretto, sulle varietà sono le *metriche riemanniane* (dal nome del grande matematico G. F. B. Riemann che ne iniziò lo studio nel 1854).

Consideriamo per prima cosa un aperto U di \mathbb{R}^m che è un esempio basilico di m -varietà. $TU := U \times \mathbb{R}^m$ può essere interpretato come l’insieme delle coppie (p, v) , con p punto di U e v vettore di \mathbb{R}^m ; per ogni punto p , lo spazio vettoriale $T_pU := \{p\} \times \mathbb{R}^m$ è detto lo *spazio tangente* a U nel punto p e può essere interpretato come una copia di \mathbb{R}^m “applicata” nel punto. Ogni applicazione liscia f definita su un aperto U di \mathbb{R}^m a valori nell’aperto U' di \mathbb{R}^k , ha una *applicazione tangente* associata T_f definita su TU a valori in TU' , data da $T_f(p, v) = (f(p), df_p(v))$, dove il *differenziale* df_p di f nel punto p , è l’applicazione *lineare* definita su $T_pU \sim \mathbb{R}^m$ a valori in $T_{f(p)}U' \sim \mathbb{R}^k$, che meglio approssima localmente $f - f(p)$ in un intorno di p . Il differenziale può essere espresso per mezzo delle derivate parziali del primo ordine delle componenti dell’applicazione f , la cosiddetta *matrice jacobiana*. La proprietà fondamentale delle applicazioni tangente riguarda il loro comportamento rispetto alla composizione di applicazioni lisce: $T_{f \circ h} = T_f \circ T_h$; inoltre l’applicazione tangente dell’applicazione identità è l’identità.

Lo spazio delle matrici simmetriche $m \times m$, che denotiamo $\mathcal{S}(m)$, può essere identificato con $\mathbb{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$. Consideriamo un’applicazione liscia g definita su U a valori in $\mathcal{S}(m)$, tale che per ogni $p \in U$, la matrice simmetrica $g(p)$ sia definita positiva. Per ogni punto $p \in U$, la matrice $g(p)$ definisce allora una *forma bilineare simmetrica* (detta anche “prodotto scalare”) *definita positiva* g_p su T_pU : a ogni coppia $v = (v_1, \dots, v_m)$, $w = (w_1, \dots, w_m)$ di vettori di T_pU è associato lo scalare $g_p(v, w) := vg(p)w^t$ (w^t è la colonna ottenuta trasponendo la riga w e usiamo il prodotto “righe per colonne” dell’algebra delle matrici); l’aggettivo “simmetrica” significa che $g_p(v, w) = g_p(w, v)$, per ogni coppia di vettori v e w , mentre “definita positiva” vuol dire che $g_p(v, v) > 0$, per ogni vettore v non nullo. L’applicazione $v \rightarrow g_p(v, v)$ è detta *forma quadratica* associata al prodotto scalare g_p . La *metrica riemanniana* determinata da g è allora proprio questo *campo di forme bilineari*, definite punto per punto su ogni spazio tangente e che variano in modo liscio al variare del punto.

La metrica riemanniana *standard* su U è determinata dall’applicazione costante g^0 che associa a ogni punto $p \in U$ la matrice identità $m \times m$. La coppia (\mathbb{R}^m, g^0) fornisce allora un modello per la geometria euclidea a m dimensioni.

Se (U, g) e (U', g') sono aperti di \mathbb{R}^m muniti di una metrica riemanniana e f è un diffeomorfismo da U in U' , diciamo che f è una *isometria*, se per ogni $p \in U$ e per ogni coppia v, w di vettori in T_pU , si ha che $g_p(v, w) = g'_{f(p)}(df_p(v), df_p(w))$. Dato (U, g) e un diffeomorfismo f da U in U' come sopra, è possibile trasportare g su U' considerando la metrica g' ottenuta imponendo che f sia “tautologicamente” un’isometria. Per la sopradetta flessibilità dei diffeomorfismi, se per esempio $g = g^0$ è la metrica standard e f è un diffeomorfismo di U in sé, la metrica g' , benché isometrica a g^0 , può avere una forma analitica molto più complicata; in generale è infatti difficile riconoscere se una metrica data su U sia o no isometrica a quella standard.

Sia ora $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una m -varietà munita del suo atlante formato da tutte le carte lisce φ definite su aperti W di M a valori in aperti U di \mathbb{R}^m (con parametrizzazione inversa ψ). In modo un po’ implicito, una metrica riemanniana g su M è un sistema di metriche riemanniane g^U definite su ogni aperto U , in modo tale che ogni diffeomorfismo di cambiamento di coordinate associato all’intersezione non vuota di due carte W, W' sia un’isometria per le restrizioni delle metriche agli aperti di U e U' immagine tramite φ, φ' rispettivamente dell’intersezione $W \cap W'$.

Una varietà riemanniana (M, g) è una varietà M con una metrica riemanniana g su di essa.

Mostriamo che ogni varietà ammette metriche riemanniane, ottenendo anche un’immagine possibilmente più concreta e globale delle metriche stesse. Sia ψ come sopra una parametrizzazione locale di M , definita su U a valori in W ; componendola con l’inclusione di W in \mathbb{R}^n , possiamo pensare ψ a valori in \mathbb{R}^n . Sia p un punto di W e $q = \varphi(p)$ in U . Poiché ψ è un diffeomorfismo con W , l’applicazione lineare $d\psi_q$ è iniettiva, quindi la sua immagine è un sottospazio vettoriale di dimensione m in \mathbb{R}^n . Si verifica che questo spazio dipende solo da M e da p , non

dalla scelta particolare della carta che contiene il punto p . Chiamiamo allora tale spazio vettoriale lo *spazio tangente* a M nel punto p , denotandolo con $T_p M$. Il sottoinsieme TM di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ formato dalle coppie (p, v) tali che p sia un punto di M e v un vettore di $T_p M$ è allora una $2m$ -varietà. Le applicazioni tangenti T_ψ al variare delle parametrizzazioni locali di M forniscono parametrizzazioni locali di TM e in definitiva ne costituiscono un atlante liscio. I cambiamenti di coordinate in questo atlante sono le applicazioni tangenti degli associati cambiamenti di coordinate dell'atlante di M . Se f è un'applicazione liscia da M a M' , è definita in modo naturale l'applicazione tangente T_f da TM a TM' che risulta compatibile con le applicazioni tangenti delle rappresentazioni in coordinate locali di f .

Sia \hat{g} una metrica riemanniana su \mathbb{R}^n , per esempio quella standard. Per ogni p in $M \subseteq \mathbb{R}^n$, la restrizione della forma \hat{g}_p su $T_p M$ è ancora bilineare simmetrica e definita positiva. Abbiamo quindi un campo di tali forme lungo M . Restringendosi a una carta con le solite notazioni W, U, \dots , possiamo trasportare questo campo su U per mezzo di ψ . In definitiva, al variare delle carte, otteniamo una metrica riemanniana su M secondo la definizione data sopra. Inoltre, anche la nozione di isometria tra metriche riemanniane definite su varietà si estende in modo naturale.

Queste considerazioni mostrano tra l'altro che anche la famiglia delle metriche su M è molto flessibile. Ci poniamo allora il problema se una data M ammetta qualche metrica "speciale". Diciamo che (M, g) è *isotropa*, se per ogni coppia p, p' di punti di M e per ogni coppia di vettori unitari v, v' nei rispettivi spazi tangenti $T_p M$ e $T_{p'} M$, muniti del prodotto scalare dato da g , esiste un'isometria f di (M, g) in sé tale che $f(p) = p'$ e $df_p(v) = v'$. Se (M, g) è isotropa il suo gruppo di trasformazioni isometriche è dunque "grande" (per una metrica generica, si riduce all'identità di M). Qualitativamente, (M, g) isotropa è "copernicana": in ogni punto e in ogni direzione "vediamo la stessa geometria". Lo spazio euclideo (\mathbb{R}^m, g^0) è chiaramente isotropo: le trasformazioni lineari ortogonali e le traslazioni sono isometrie e già bastano per verificare l'isotropia. Mostriamo che anche ogni sfera $\mathbb{S}^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ ammette una metrica isotropa canonica g_{can} . Per ogni punto p in \mathbb{S}^m , lo spazio tangente $T_p \mathbb{S}^m$ è l'iperpiano per l'origine di \mathbb{R}^{m+1} ortogonale a p (considerato ora come un vettore di \mathbb{R}^{m+1}). La metrica canonica g_{can} su \mathbb{S}^m si ottiene restringendo la metrica standard di \mathbb{R}^{m+1} su ogni spazio tangente alla sfera. Le trasformazioni lineari ortogonali di \mathbb{R}^{m+1} si restringono a isometrie di $(\mathbb{S}^m, g_{\text{can}})$ in sé e sono già sufficienti per verificare l'isotropia.

Un'altra famiglia di metriche speciali sono le *localmente euclidee* o *localmente sferiche*, cioè per ogni punto p di (M, g) esiste un intorno aperto $A \subseteq M$ tale che la restrizione di g su A sia isometrica a un aperto di (\mathbb{R}^m, g^0) o di $(\mathbb{S}^m, g_{\text{can}})$, rispettivamente.

Veniamo dunque alla riformulazione geometrica della congettura di Poincaré. Valgono i seguenti fatti (la dimostrazione è impegnativa, ma non troppo).

Sia M una 3-varietà compatta semplicemente connessa.

- (1) *Se M è munita di una metrica riemanniana g isotropa, allora (M, g) è isometrica a $(\mathbb{S}^3, \lambda g_{\text{can}})$ per una qualche costante $\lambda > 0$.*
- (2) *Se M è munita di una metrica riemanniana g localmente sferica, allora (M, g) è isometrica a $(\mathbb{S}^3, g_{\text{can}})$ (quindi in particolare, è isotropa).*

È allora immediato che i seguenti enunciati sono equivalenti tra loro e a quello della congettura di Poincaré.

- (1) *Ogni 3-varietà M compatta semplicemente connessa ammette una metrica riemanniana g isotropa.*
- (2) *Ogni 3-varietà M compatta semplicemente connessa ammette una metrica riemanniana g localmente sferica.*

Queste riformulazioni, in linea di principio, consentono di affrontare la congettura con strumenti di natura *analitico-geometrica*, oltre a quelli della topologia geometrica.

6 Fare geometria con le metriche riemanniane

Ricordiamo alcuni fatti di base relativi al “fare geometria” su una varietà per mezzo di una metrica riemanniana. Sia M una m -varietà munita di una metrica g . Da ora in poi supponiamo anche che M sia connessa.

Se $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ è un arco liscio, possiamo definire la (misura della) sua *lunghezza* rispetto a g nel modo seguente: per ogni $t \in [0, a]$, il vettore $v_t := d\alpha_t(1)$ appartenente allo spazio tangente $T_{\alpha(t)}M$ è detto *vettore velocità* dell’arco all’istante $t \in [0, a]$; definiamo la sua “ampiezza” rispetto a g come $\|v_t\|_g = \sqrt{g_{\alpha(t)}(v_t, v_t)}$; la lunghezza dell’arco α è allora data dall’integrale “secondo Riemann” (lo stesso Riemann già citato): $\ell(\alpha) = \int_0^a \|v_t\|_g dt$. Segue dalla regola di cambiamento di variabile negli integrali che la lunghezza così definita è *invariante per riparametrizzazioni* (dell’intervallo di definizione). Questi concetti si possono estendere facilmente anche agli archi lisci “a tratti”.

Poiché M è connessa, l’insieme degli archi lisci a tratti che connettono due punti arbitrari non è vuoto. Prendendo, per ogni coppia di punti, l’estremo inferiore delle lunghezze di questi archi si definisce una *distanza* d_g su M (che lo rende uno spazio metrico) che è “compatibile con la topologia”, nel senso che gli aperti di M (già definiti) possono essere ugualmente descritti come le unioni di “palle” aperte rispetto a d_g , cioè gli insiemi di punti di M a distanza d_g minore di un certo “raggio” da un punto fissato, detto “centro” della palla.

Ogni arco liscio *semplice* $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ (cioè tale che α sia un diffeomorfismo sulla sua immagine) può essere sempre (ri)parametrizzato in modo unico “per lunghezza d’arco”, cioè mediante un altro arco liscio $\beta : [0, \bar{r}] \rightarrow M$ tale che: (1) β e α hanno la stessa immagine in M ; (2) $\beta(0) = \alpha(0)$; (3) per ogni $s \in [0, \ell(\alpha)]$ si ha $\ell(\beta|_{[0, s]}) = s$, da cui in particolare $\bar{r} = \ell(\alpha) = \ell(\beta)$. In tal caso l’ampiezza delle velocità è costantemente uguale a 1, cioè i vettori velocità sono unitari.

Un arco liscio semplice parametrizzato per lunghezza d’arco β è detto *geodetico* in (M, g) se per ogni $s_0, s_1 \in [0, \bar{r}]$ con $s_0 < s_1$, si ha $\ell(\beta|_{[s_0, s_1]}) = d_g(\beta(s_0), \beta(s_1))$ (“la lunghezza realizza la distanza”). Due archi geodetici della stessa lunghezza che condividono il punto e il vettore velocità iniziali, in effetti coincidono. Le isometrie mandano archi geodetici in archi geodetici preservandone la lunghezza.

Se M è compatta (più in generale, se (M, d_g) è uno spazio metrico completo), si dimostra che per ogni coppia di suoi punti esiste almeno un arco geodetico che li connette (dunque la sua lunghezza coincide con la distanza tra i due punti). Per esempio, gli archi geodetici di (\mathbb{R}^m, g^0) sono i segmenti sulle rette e c’è un unico arco geodetico che unisce due punti. Gli archi geodetici di \mathbb{S}^3 con la metrica canonica sono sottoarchi di “cerchi massimi”, ottenuti intersecando la 3-sfera con iperpiani di \mathbb{R}^4 passanti per l’origine. Due punti antipodali sulla sfera sono connessi da una infinità di archi geodetici che ne realizzano la distanza, uguale a 2π .

Per ogni punto p di M e per ogni $r > 0$, indichiamo con $B_r^g(p)$ la “palla aperta” di centro p e raggio r definita, come detto sopra, formalmente come le palle euclidee, usando però la distanza d_g . In generale, una tale palla non è diffeomorfa alla palla euclidea; per esempio, se M è compatta e r è abbastanza grande, allora $B_r^g(p) = M$. Questo non succede se r è abbastanza piccolo. La forma definita positiva g_p induce una distanza sullo spazio tangente T_pM , formalmente con la stessa formula “pitagorica” con cui la metrica standard g^0 induce la distanza euclidea su \mathbb{R}^m . Per ogni r positivo indichiamo con $B_r^{\text{eucl}}(O_p)$ la palla aperta in T_pM di raggio r e centro l’origine O_p di T_pM rispetto a questa distanza. Tale palla è diffeomorfa a B^m e si dimostra che esiste r positivo e un *unico* diffeomorfismo $e_{p,r}$ (detto *applicazione esponenziale di centro p*), da $B_r^{\text{eucl}}(O_p)$ a $B_r^g(p)$ tale che $e_{p,r}(O_p) = p$ e la restrizione di $e_{p,r}$ a ogni raggio di $B_r^{\text{eucl}}(O_p)$ è la parametrizzazione per lunghezza d’arco di un arco geodetico di (M, g) . L’estremo superiore r_p di tali r è detto *raggio di iniettività* di (M, g) nel punto p . L’estremo inferiore r_{inj} dei valori r_p al variare di p in M è detto *raggio di iniettività* della varietà (M, g) . Le isometrie trasportano applicazioni esponenziali in applicazioni esponenziali; in particolare, il raggio di iniettività è un invariante per isometria.

Nel caso di (\mathbb{R}^m, g^0) il raggio di iniettività è infinito. Nel caso di \mathbb{S}^3 con la metrica canonica è uguale alla lunghezza di un arco geodetico che unisca due punti antipodali, cioè 2π .

Per ogni punto p , il prodotto scalare definito positivo g_p su $T_p M$ permette anche di definire la nozione di ortogonalità e più in generale di *angolo* tra due vettori non nulli, per mezzo dell'usuale *formula del coseno*. A ogni metrica riemanniana g è inoltre associata una *misura canonica di volume* $d\mu_g$; se per esempio M è compatta, l'integrale $\int_M d\mu_g$ è un numero reale maggiore di zero che per definizione è il *volume* della varietà riemanniana (M, g) ed è un altro invariante per isometria (per le superfici spesso si preferisce parlare di *area*).

6.1 Curvatura

Ai nostri fini sarà sufficiente trattare il caso delle superfici e delle 3-varietà, nel discutere il concetto di *curvatura*.

Sia S una 2-varietà, cioè una superficie, munita di una metrica riemanniana g . Sia γ un arco geodetico che unisce i punti p e q di S , v_0 il vettore velocità iniziale di α e w_0 un arbitrario vettore unitario in $T_p S$. Allora w_0 può essere *trasportato in modo parallelo* lungo l'arco: per ogni istante t , w_t è l'unico vettore unitario di $T_{\gamma(t)} S$ tale che: la coppia di vettori (v_0, w_0) forma lo stesso angolo misurato relativamente al prodotto scalare g_p della coppia (v_t, w_t) , misurato rispetto al prodotto scalare $g_{\gamma(t)}$.

È possibile definire su S una funzione liscia κ a valori reali, detta *curvatura di Gauss*, di cui ci limitiamo a richiamare alcune proprietà, cercando di mettere in luce il suo contenuto geometrico:

- (1) κ si esprime in modo analitico in funzione della metrica g ed è invariante per isometria.
- (2) Sia \mathcal{T} un "triangolo" in S con parte interna diffeomorfa a B^2 e bordo fatto da tre archi geodetici (lati). Preso un punto p sul bordo e un vettore unitario w in $T_p S$ che punta verso l'esterno del triangolo, lo possiamo trasportare parallelamente lungo tutto il bordo per trovare alla fine un altro vettore w' nello stesso spazio tangente $T_p S$. Si mostra che l'angolo formato dalla coppia di vettori (w, w') non dipende dalla scelta di p e di w , per cui abbiamo un angolo $\alpha(\mathcal{T})$ che dipende solo dal triangolo con lati geodetici. Risulta allora che $\alpha(\mathcal{T}) = \int_{\mathcal{T}} \kappa d\mu_g$. In particolare, si può provare che se $\kappa < 0$ (risp. $\kappa > 0$) in \mathcal{T} , la somma degli angoli interni del triangolo è strettamente minore (maggiore) di π .
- (3) Abbiamo il seguente sviluppo asintotico dell'area delle palle di (S, g) di raggio piccolo $r > 0$. Per ogni p in S ,

$$\text{Area}_g(B_r^g(p)) = \pi r^2 \left(1 - \frac{\kappa(p)}{12} r^2 + o(r^2) \right)$$

(si noti che il termine principale è l'area della palla euclidea bidimensionale di raggio r).

Qualitativamente, la "presenza di curvatura" esprime, in vari modi, come la metrica g non sia localmente euclidea, se infatti invece $\kappa = 0$, le precedenti formule coincidono con le analoghe in \mathbb{R}^2 .

Sia ora (M, g) una 3-varietà riemanniana. Per ogni punto p in M e per ogni sottospazio lineare 2-dimensionale L dello spazio tangente $T_p M$, la restrizione su L dell'applicazione esponenziale $e_{p,r}$ di centro p ha per immagine un "pezzo" di superficie passante per p . Questa dunque "eredita" da g una metrica riemanniana (per restrizione agli spazi tangenti della superficie). Poniamo allora $\kappa_L(p)$ la curvatura di Gauss di questa superficie nel punto p . Questo numero è detto la *curvatura sezionale* di (M, g) nel punto p , relativamente al piano L . Il complesso di questi numeri al variare di p e di L è detto *curvatura sezionale* di (M, g) . Si può munire questo insieme di coppie (p, L) di una struttura di 5-varietà liscia, per cui la funzione $\kappa_L(p)$ è anch'essa liscia.

Nel caso speciale di una superficie S , per ogni punto $p \in S$, vi è chiaramente un unico 2-spazio $L \subseteq T_p S$, coincidente con tutto il piano tangente e la curvatura sezionale relativa a tale piano è allora uguale semplicemente alla curvatura di Gauss della superficie in p .

Diremo che (M, g) è a *curvatura costante* se la sua curvatura sezionale è costante, indipendente dal punto e dal piano L . In tal caso, a meno di "riscaldare la metrica", possiamo supporre che tale curvatura sia costantemente uguale a 1, 0 o -1 . Osserviamo che se la metrica è isotropa, allora la varietà è a curvatura costante.

Gli spazi euclidei (\mathbb{R}^2, g^0) e (\mathbb{R}^3, g^0) sono a curvatura costante nulla, mentre le sfere \mathbb{S}^2 e \mathbb{S}^3 , con le rispettive metriche canoniche, sono a curvatura costante 1. Si mostra poi che se la metrica è a curvatura costante nulla (risp. uguale a 1), allora la varietà è localmente euclidea (risp. sferica). Abbiamo quindi un altro enunciato geometrico equivalente alla congettura di Poincaré:

Una 3-varietà compatta e semplicemente connessa ammette una metrica riemanniana a curvatura costante 1.

Le 2 o 3-varietà riemanniane a curvatura costante -1 sono dette varietà *localmente iperboliche*, perché il ruolo di (\mathbb{R}^m, g^0) o di $(\mathbb{S}^m, g_{\text{can}})$, $m = 2, 3$, è ora svolto dalla falda superiore \mathcal{I}^m dell'iperboloide $\{x_1^2 + \dots + x_m^2 - x_{m+1}^2 = -1\}$ in \mathbb{R}^{m+1} , munito della metrica riemanniana $g_{\mathcal{I}}$ ottenuta restringendo agli spazi tangenti a \mathcal{I}^m , il prodotto scalare su \mathbb{R}^{m+1} determinato dalla forma quadratica $x_1^2 + \dots + x_m^2 - x_{m+1}^2$. Queste varietà formano una famiglia molto importante. In un certo senso, sono quelle "pervasive" tra le varietà a curvatura costante; per esempio, il segno di una eventuale metrica a curvatura costante su una superficie compatta è univocamente determinato dalla sua topologia (è una conseguenza del "teorema di Gauss-Bonnet"); il toro ammette una metrica localmente euclidea; tutte le altre superficie di "genere" maggiore di 1, menzionate nella Sezione 3, ammettono metriche localmente iperboliche. Qualitativamente, lo stesso fenomeno si verifica in dimensione 3.

A partire dalla fine degli anni '70 del novecento, la *congettura di geometrizzazione* di Thurston (che, più precisamente, è un enunciato sulla geometrizzazione delle componenti della decomposizione canonica, menzionata nella Sezione 4) ha rivoluzionato e dominato lo studio delle 3-varietà, investendo un'ampia comunità di studiosi ed è stata corroborata soprattutto da fondamentali e profondi teoremi, detti di *iperbolizzazione*. La congettura di Poincaré, a cui ci limitiamo in questa nota, riguarda la parte di questa più ampia congettura relativa alla geometria sferica.

In generale la curvatura sezionale di una 3-varietà (M, g) è un invariante molto complicato. Un modo di "semplificarlo", perdendo forse un po' d'informazione, ma rendendolo potenzialmente più trattabile è, euristicamente, quello di misurare in ogni punto la media "direzionale" delle curvature sezionali; cioè per ogni vettore unitario $v \in T_p M$, misurare la "media" delle curvature sezionali relative a tutti i 2-piani di $T_p M$ che contengono v . Questa idea può essere implementata (non è affatto banale) esprimendo queste "medie" come delle forme quadratiche associate a delle forme bilineari simmetriche $\text{Ric}_g = \{\text{Ric}_g(p)\}_{p \in M}$ su ogni spazio tangente $T_p M$, che variano in modo liscio con il punto. Tale campo di forme bilineari, può essere espresso analiticamente in funzione della metrica g , sebbene in modo piuttosto complicato e, come quest'ultima, è un campo di prodotti scalari che però non sono necessariamente definiti positivi, possono infatti essere indefiniti, degeneri e anche nulli. Il campo di forme bilineari Ric_g è noto come *tensore (di curvatura) di Ricci* di (M, g) (così come la metrica g è anche detta *tensore metrico*) e fu introdotto da Gregorio Ricci Curbastro [2] all'inizio del '900. Si può mostrare che le 3-varietà a curvatura costante coincidono con le cosiddette *3-varietà di Einstein*, cioè quelle che soddisfano $\text{Ric}_g = \lambda g$ per una qualche costante reale λ ; la curvatura costante si esprime allora in funzione di λ e ha lo stesso segno.

Prendendo la *traccia* di $\text{Ric}_g(p)$ al variare di $p \in M$, otteniamo una funzione liscia R_g definita su M e a valori reali, detta *curvatura scalare* di (M, g) , che dunque è una sorta di "media di medie" di curvature sezionali dei piani contenuti nello spazio tangente a ogni punto della varietà.

7 Il flusso di Ricci

In un famoso articolo del 1982 [3] Richard Hamilton definisce e studia per la prima volta il *flusso di Ricci* di metriche Riemanniane su una 3-varietà compatta e connessa M , cioè il sistema di equazioni (alle derivate parziali)

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\text{Ric}_{g(t)}.$$

Assegnata un'arbitraria metrica iniziale $g_0 = g(0)$ su M , si tratta di studiare l'evoluzione nel tempo di una metrica $g(t)$, soluzione di questo sistema. Tale evoluzione delle metriche porta con

sé la variazione nel tempo anche delle varie curvatures secondo determinati sistemi di equazioni differenziali. Applicando allora varie versioni del “principio del massimo”, si hanno conclusioni sul comportamento delle quantità geometriche durante l’evoluzione. Rispetto alle tecniche di trasformazione “flessibili” puramente topologico–geometriche, dunque “qualitative”, è in linea di principio possibile, via *stime a priori* sulle soluzioni, un’analisi “quantitativa” della deformazione associata al flusso e la classificazione dei limiti asintotici delle varietà che evolvono, con la speranza di ottenere informazioni topologiche o geometriche.

Richiamiamo alcune delle proprietà principali di questo flusso, messe in evidenza da Hamilton. Vi è una certa analogia tra il flusso di Ricci e la classica *equazione del calore* $\partial u/\partial t = \Delta u$ (entrambe appartengono alla famiglia delle equazioni dette *paraboliche*), con la differenza che il primo, oltre ad essere un *sistema di equazioni*, ha al membro destro una “perturbazione” dell’operatore di Laplace–Beltrami di M , che si esprime per mezzo delle derivate parziali del secondo ordine, con un termine P che dipende solo dalle derivate del prim’ordine, infatti in opportune coordinate locali si ha $-2\text{Ric}_g = c\Delta g + P$, per una opportuna costante positiva c . Malgrado la presenza di tale perturbazione, come l’evoluzione determinata dall’equazione del calore ha un effetto “regolarizzante” che si manifesta nella sua tendenza a rendere la distribuzione della temperatura sempre più costante, il flusso di Ricci tende (in un senso che naturalmente va precisato con cura) a “diffondere” la curvatura “omogeneizzando” la sua distribuzione.

Analogamente all’equazione del calore, si ha che il flusso “parte” per ogni metrica iniziale liscia g_0 , in modo unico; precisamente, per ogni g_0 , c’è un intervallo massimale $[0, T_f)$ di esistenza liscia e unicità del flusso, dove il tempo finale T_f è strettamente positivo e possibilmente uguale a infinito. Durante l’evoluzione la geometria locale si deforma in modo “direzionalmente selettivo”: in ogni punto la varietà si “contrae” nelle direzioni dove la forma quadratica del tensore di Ricci è positiva e si “espande” in quelle per cui è negativa. Questo fenomeno si manifesta in modo radicale se la metrica iniziale è a curvatura costante: se per esempio partiamo con $M = \mathbb{S}^3$ e $g_0 = g_{\text{can}}$ è la sua metrica canonica, si verifica direttamente che la soluzione è data da $g(t) = (1 - 4t)g_{\text{can}}$ e si ha dunque un tempo finale $T_f = 1/4$ dove si verifica una *singularità di estinzione globale istantanea*. Si noti che considerando la versione “normalizzata” del flusso, cioè riscaldando a ogni istante la metrica $g(t)$ in modo che il volume resti costante, la metrica “normalizzata” $\tilde{g}(t)$ è chiaramente costantemente uguale a quella canonica. Se invece M è compatta con una metrica iniziale g_0 di curvatura costante -1 , si verifica che il flusso ha un tempo di esistenza infinito e, come per la sfera, la metrica semplicemente riscalda secondo la legge di evoluzione $g(t) = (1 + 4t)g_0$, dunque, per t che tende all’infinito, il volume tende all’infinito mentre la curvatura tende uniformemente a zero in ogni punto. Anche in questo caso, le metriche “normalizzate” sono costantemente uguali a quella iniziale.

Il primo importante risultato di Hamilton (chiaramente promettente nell’ottica di dimostrare la congettura di Poincaré) è il seguente teorema in [3].

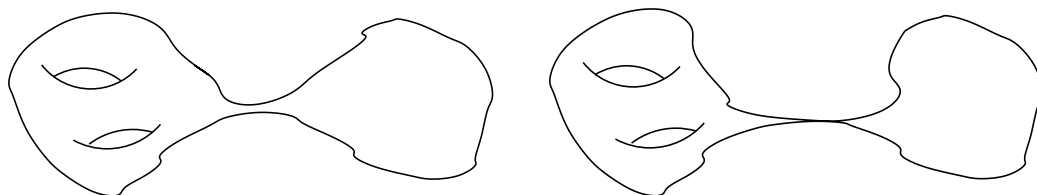
Sia M una 3–varietà compatta e semplicemente connessa, munita di una metrica iniziale g_0 con tensore di Ricci definito positivo in ogni punto. Allora il flusso di Ricci ha tempo di esistenza finito T_f e per $t \rightarrow T_f$ si ha una singularità di estinzione globale istantanea (EGI) in cui le metriche “normalizzate” (a volume costante) tendono a una metrica a curvatura costante positiva, da cui segue in particolare che M è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 .

7.1 Un programma per la congettura di Poincaré

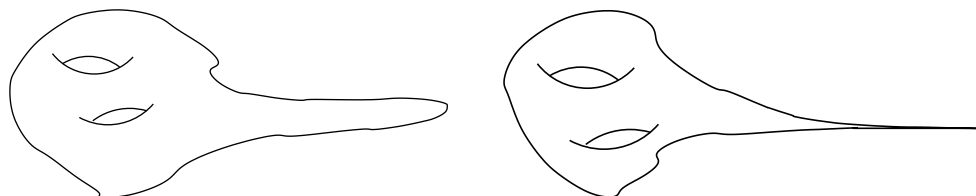
Nel periodo 1986–93 Hamilton delinea, ma solo parzialmente realizza, un programma per dimostrare la congettura di Poincaré basato sul flusso di Ricci. Ne illustriamo qui alcuni punti, in una forma un po’ semplificata rispetto a quella effettiva, ma ci auguriamo sufficiente per farsene un’idea.

Se la metrica iniziale g_0 su una 3–varietà M è generica (in particolare, non ha necessariamente tensore di Ricci definito positivo) e il flusso ha un tempo di esistenza massimale T_f finito, non si può escludere, per t che tende a T_f , il formarsi di *singularità* diverse da quelle di tipo EGI. Alcuni esempi di singularità non sono difficili da descrivere, almeno in modo qualitativo.

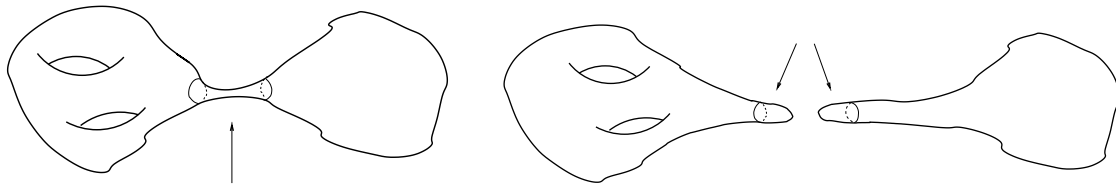
Collo che si stringe. Supponiamo che la varietà M contenga un “tubo” T diffeomorfo a $\mathbb{S}^2 \times D^1$ che divide M in due regioni, ciascuna con un bordo sferico diffeomorfo a \mathbb{S}^2 . Sia g_0 una metrica su M tale che si abbia una curvatura sezionale in modulo “molto piccola” sulle due regioni “esterne” e una zona centrale “molto stretta” del tubo T , che immaginiamo come un “collo stretto e molto lungo” (ciò si ottiene considerando un “fattore sferico” \mathbb{S}^2 di $T \approx \mathbb{S}^2 \times D^1$ con un raggio “molto piccolo” e al contrario, il “fattore” D^1 “molto lungo”). Si noti che tale zona del “collo” deve allora avere un’alta curvatura sezionale positiva, a differenza delle due regioni “esterne”. Il flusso con tale metrica iniziale svilupperà una singolarità in tempo finito, infatti le regioni laterali con curvatura “bassa” si modificano lentamente restando regolari, mentre la zona centrale del “collo” si restringe sempre più fino a “collassare” in poco tempo, creando una singolarità.



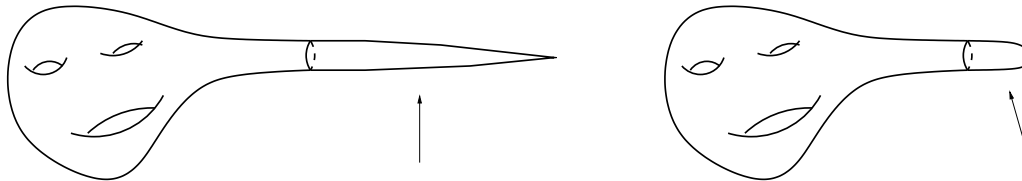
Cuspide. Supponiamo che M contenga una palla liscia D diffeomorfa alla palla chiusa D^3 e sia la metrica iniziale g_0 tale che la curvatura sezionale sia “piccola” in modulo sulla regione di M complementare a D , mentre supponiamo che si abbia una zona B di D somigliante a un sigaro molto lungo e sottile, che “curva e si chiude” molto bruscamente nella sua parte finale (quindi con un’alta curvatura sezionale positiva). Se tale metrica è costruita in modo accurato (cosa possibile, ma assolutamente non banale), si può mostrare che il flusso ha tempo massimale T_f finito: la parte complementare a D si deforma lentamente e resta regolare, mentre la parte finale di B “collassa” in tempo finito formando una singolarità “cuspidale”.



Un’idea nuova introdotta da Hamilton per “gestire” la formazione di singolarità durante l’evoluzione è quella del *flusso di Ricci con chirurgia* (riallacciandosi alle tecniche della topologia geometrica, ma con l’intento di applicarle in modo quantitativo). Supponiamo, per esempio, di avere una singolarità di tipo “collo che si stringe” e siano W_1 e W_2 le regioni complementari del “collo”, come descritto sopra. Se la varietà M è irriducibile, almeno una delle due (sia W_2) è diffeomorfa alla palla B^3 , dunque con chiusura diffeomorfa a D^3 . La topologia differenziale ci dice che, a meno di diffeomorfismi, esiste un unico modo (topologico) di “riempire” con 3-palle i loro bordi sferici, ottenendo due 3-varietà compatte disgiunte. Inoltre, risulta che quella associata a W_2 è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 mentre l’altra, sia $\widehat{M} \supseteq W_1$, è diffeomorfa a M . Ricordiamo, per inciso, che questo “tagliare lungo 2-sfere e riempire/tappare con 3-palle” è alla base della decomposizione in componenti (varietà) prime menzionata nella Sezione 4. La procedura di Hamilton è allora la seguente: si “arresta” il flusso a un tempo t_0 abbastanza prossimo al tempo finale T_f , si “dimentica” la componente W_2 operando come sopra, si estende poi la metrica $g(t_0)$ su $W_1 \subseteq \widehat{M}$ a una metrica liscia \widehat{g}_0 su \widehat{M} (con curvatura sezionale paragonabile a quella “bassa” di W_1) e infine, si fa ripartire il flusso col nuovo dato iniziale $(\widehat{M}, \widehat{g}_0)$.



Anche nel caso delle singolarità “cuspidali” abbiamo una procedura analoga, dove la palla D gioca il ruolo di W_2 .



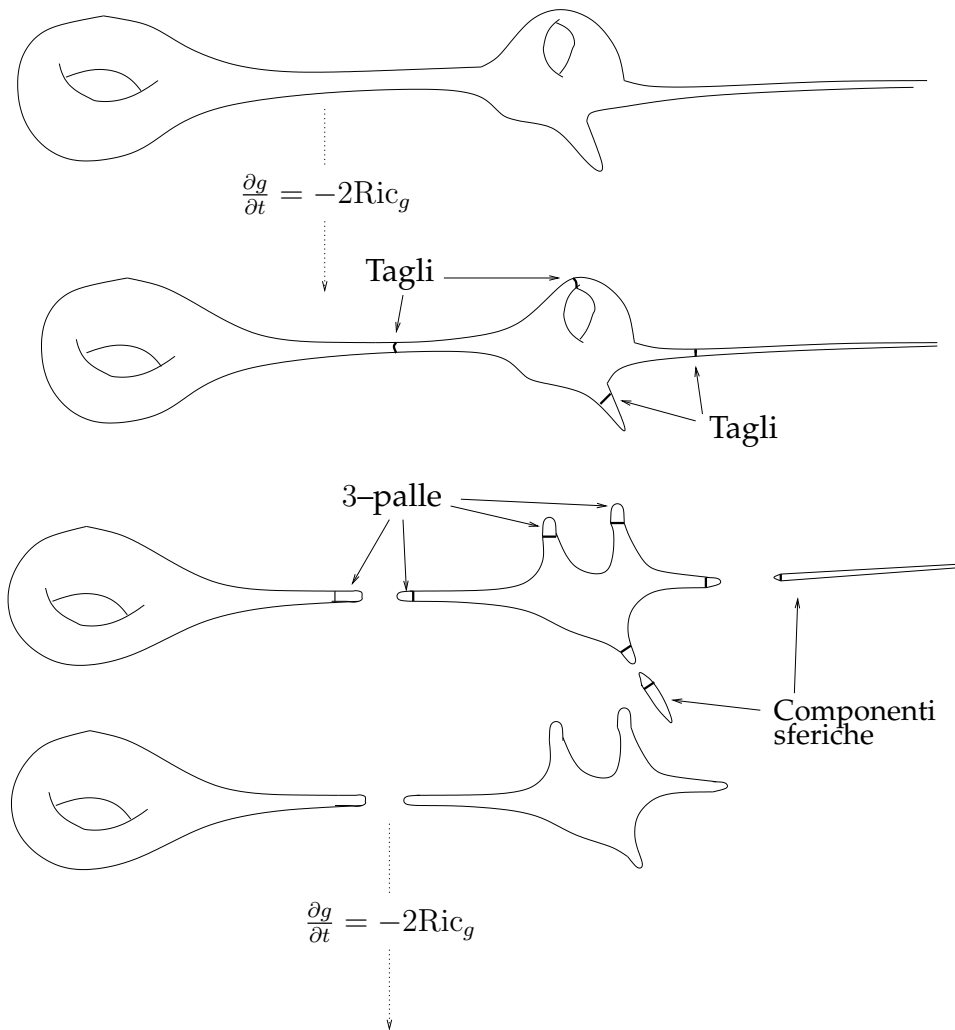
Il retropensiero è che grazie a una conoscenza sufficientemente dettagliata della metrica $g(t_0)$ vicino al bordo di W_1 , si possa operare una scelta *geometricamente controllata* del completamento \widehat{g}_0 , affinché il nuovo dato iniziale $(\widehat{M}, \widehat{g}_0)$ per la ripartenza del flusso sia “migliore” (in modo quantificabile per mezzo di stime analitiche) di (M, g_0) , in quanto abbiamo “eliminato” delle zone ad alta curvatura. Dunque, anche in questa operazione di chirurgia si procede nella direzione di “rendere la curvatura più costante possibile”, ricordando che già il flusso negli intervalli di tempo senza singolarità tende a “diffonderla” e “omogeneizzarla”.

Vanno però sottolineati due eventuali problemi nel portare avanti questa linea: il primo è la possibile presenza di altri tipi di singolarità diversi da questi, dunque da gestire con tecniche di chirurgia diverse, il secondo è che se anche queste fossero le uniche possibili, potrebbero svilupparsene contemporaneamente molte di esse (“localmente” simili) in zone diverse della varietà, richiedendo dunque una più complessa procedura di chirurgia, necessariamente locale e controllata quantitativamente. Più precisamente, è necessario escludere che vi sia una formazione di singolarità contemporanee in punti “troppo” vicini, cosa che inficierebbe il risultato della procedura di chirurgia su di una di esse, in quanto vi sarebbe una curvatura troppo alta, troppo vicina.

Sia ora M compatta e semplicemente connessa. Sappiamo dalla Sezione 4 che, ai nostri fini, non è restrittivo assumere che M sia anche irriducibile. Fissata una metrica iniziale *arbitraria* g_0 su M , il programma completo di Hamilton si articola allora nei seguenti punti (che vanno dimostrati o implementati):

- (1) Il tempo di esistenza massimale T_f del flusso è finito, dunque si sviluppa almeno una singolarità, per $t \rightarrow T_f$.
- (2) Se la singolarità è di tipo EGI, le metriche normalizzate convergono verso una metrica a curvatura costante positiva, da cui concludiamo che M è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 .
- (3) Le sole singolarità che si sviluppano, per $t \rightarrow T_f$, sono “versioni locali” di quelle viste sopra, cioè di tipo EGI, “collo che si stringe” o “cuspidale”. Inoltre, il flusso ha un comportamento locale “canonico” (nello spazio e nel tempo) vicino ai punti/tempi di singolarità.
- (4) Dopo un numero *finito* di “ripartenze” del flusso dopo un’opportuna procedura di chirurgia (estensione di quella descritto sopra), si ha un’alternativa: o troviamo/riconosciamo solo varietà diffeomorfe a \mathbb{S}^3 , dunque lo era anche M , oppure si ottiene una varietà $(\widehat{M}, \widehat{g})$, dove \widehat{M} è diffeomorfa a M e l’ultima ripartenza con metrica iniziale \widehat{g} dà luogo a un flusso che termina in tempo finito con una singolarità di tipo EGI, quindi si conclude per il punto (2).

Naturalmente, i punti (3) e (4) incorporano implicitamente quel controllo geometrico effettivo che abbiamo sopra menzionato.



Hamilton dimostra numerosi corroboranti contributi parziali, in gran parte raccolti in [4], partendo da un primo importante risultato per cui *i punti/zone di singolarità sono individuati dal fatto che il massimo del modulo della curvatura sezionale va a $+\infty$* (in realtà si può mostrare che in tali punti la curvatura scalare va a $+\infty$, il che rende l'analisi più facile in quanto si tratta di una funzione di curvatura più semplice e suggerisce che la formazione delle singolarità sia essenzialmente un fenomeno di "concentrazione di curvatura positiva"). Non riesce però a concluderlo, incontrando serie difficoltà soprattutto riguardo al terzo punto del programma. Più precisamente, uno dei problemi principali era l'incapacità di ottenere lungo il flusso una stima dal basso sul *raggio di iniettività* della varietà, che avrebbe reso possibile escludere una particolare (teoricamente possibile) singolarità "cattiva", non gestibile mediante alcuna chirurgia per poter far poi ripartire l'evoluzione. Inoltre, tale "mancanza" non permetteva di giustificare l'utilizzo di una potente tecnica di analisi, nota come "blow-up"; questa consiste nel riscaldare (nello spazio e nel tempo) le soluzioni vicino ai punti/tempi di singolarità, in modo che i flussi riscaldati abbiano curvatura equicontrollata e "passare al limite" tale sequenza, ottenendo informazioni sul comportamento del flusso originale nelle zone di formazione delle singolarità dalla classificazione e studio della geometria dei flussi limite. È infatti ben noto che per avere la necessaria compattezza per "passare al limite" in una successione di varietà riemanniane o di flussi di esse, i due "ingredienti" solitamente necessari sono delle stime uniformi sulla curvatura e sul raggio di iniettività dal basso. Molti risultati positivi ed estremamente utili poi a Perelman, sono stati comunque ottenuti da Hamilton *assumendo di disporre di tale stima*.

Nonostante il programma fosse molto promettente, di fronte a queste difficoltà il lavoro di Hamilton si arresta verso il 1993.

8 La dimostrazione di Perelman

Tra il novembre del 2002 e il luglio del 2003, Perelman pubblica i tre articoli [9–11] sul preprint server ArXiv che apparentemente risolvevano le principali difficoltà ricordate prima e contenevano (tra l'altro) una dimostrazione della congettura di Poincaré secondo il programma del flusso di Ricci con chirurgia. Dopo una intensa attività di verifica e "digestione" da parte della comunità matematica, la validità ne fu definitivamente riconosciuta nel 2007.

Il primo risultato, la prima svolta, fu quello di esibire un funzionale detto *entropia* sulle varietà riemanniane di cui il flusso di Ricci è una sorta di *flusso gradiente* (qui c'è una sottigliezza: tale funzionale non è definito sulle metriche riemanniane su una data 3-varietà M , piuttosto lo è su tutte le varietà diffeomorfe a M ; ai fini della nostra esposizione glisseremo un po' su questo punto). Il vantaggio è che oltre a poter usare le tecniche delle equazioni alle derivate parziali, si possono allora utilizzare anche metodi *variazionali*, in quanto c'è allora un'energia che decresce durante il flusso e che generalmente permette di avere più stime a priori a causa della sua uniforme limitatezza dall'alto, controllata dal suo valore per la varietà iniziale.

L'importanza di tale entropia è data dal fatto che "controlla" (se limitata dall'alto) il rapporto tra i volumi delle palle nelle varietà e delle palle euclidee dello stesso raggio; questo rapporto risulta dunque uniformemente positivamente limitato dal basso durante il flusso, implicando che una palla non può asintoticamente "collassare" completamente su qualcosa di dimensione strettamente più bassa, durante lo sviluppo di una singolarità. Questo risultato di "non collasso" produce il desiderato controllo dal basso del raggio di iniettività ed esclude la singolarità "cattiva" di Hamilton, che si vede invece essere "collassante". Le due principali difficoltà evidenziate da Hamilton erano così risolte e le molte conseguenze che aveva osservato divenivano immediatamente valide.

Il passo successivo è dunque avere una procedura di chirurgia *geometricamente e quantitativamente controllata*, come nei punti (3) e (4) del programma di Hamilton. Lo strumento principale è un'altra quantità geometrica monotona durante il flusso, scoperta da Perelman: il cosiddetto *volume ridotto*. Con degli argomenti estremamente tecnici, basati sul metodo di "blow-up" che abbiamo precedentemente menzionato e sulla monotonia di tale quantità, Perelman mostra che, fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, esiste una certa soglia R_0 che dipende solo dalla varietà riemanniana iniziale (M, g_0) e da ε , tale che ogni punto p di una varietà del flusso $(M, g(t))$ dove la curvatura scalare $R_{g(t)}(p)$ supera R_0 , ha un intorno "canonico" che può essere solo di uno dei seguenti tipi:

1. una 3-varietà compatta con curvatura di Ricci positiva, quindi diffeomorfa a \mathbb{S}^3 , per il teorema di Hamilton;
2. un ε -cilindro, cioè un aperto diffeomorfo e con una metrica uniformemente "vicina" all'ordine ε al cilindro $\mathbb{S}^2 \times (-1/\varepsilon, 1/\varepsilon)$ con la metrica standard, riscalato per il fattore positivo $\sqrt{2/R_{g(t)}(p)}$;
3. una cosiddetta ε -penisola, formata da un ε -cilindro come sopra, "chiuso" da un lato da un "cappuccio" dato da una 3-palla con curvatura sezionale positiva.

Inoltre questi intorni sono "stabili" all'avvicinarsi al tempo di singolarità.

Questo *teorema dell'intorno canonico* che "risolve" il terzo punto (e che permette la conseguente definizione di una procedura di chirurgia quantitativa, al quarto punto), è probabilmente il risultato tecnicamente più complesso, ma è forse la scoperta delle quantità monotone durante il flusso (entropia e volume ridotto) il reale punto di svolta e di sblocco nell'attuazione del programma di Hamilton.

Si mostra poi che esiste una costante positiva λ che dipende solo dalla varietà Riemanniana iniziale (M, g_0) , tale che ogni volta che si effettua una chirurgia, il volume della varietà decresce

almeno di λ . Inoltre, negli intervalli di tempo in cui il flusso di Ricci è regolare, il volume può crescere nelle zone dove la curvatura scalare è negativa, ma in un modo globalmente controllato in funzione del minimo della curvatura scalare, che è una quantità non decrescente lungo il flusso con chirurgie. Segue da questi due fatti che non ci può essere “accumulazione” dei tempi di singolarità/chirurgia. In particolare, se il tempo di esistenza del flusso con chirurgie è finito, si possono effettuare solo un numero finito di chirurgie, dunque i punti (2)–(4) sono infine completi.

Resta da verificare che il flusso con chirurgie si estingue in tempo finito. Questo si ottiene con una variante di un argomento piuttosto classico, già usato, per esempio, per l’esistenza di curve chiuse localmente geodetiche su varietà diffeomorfe a una sfera. Descriviamolo brevemente in modo qualitativo.

È ben noto che esistono applicazioni lisce definite su \mathbb{S}^3 a valori in \mathbb{S}^3 , che non si estendono ad alcuna applicazione liscia definita su D^4 a valori in \mathbb{S}^3 (per esempio, questo vale per l’applicazione identità di \mathbb{S}^3 in sé). Con argomenti di topologia differenziale si mostra inoltre che la stessa proprietà vale sostituendo la sfera \mathbb{S}^3 in arrivo con una qualsiasi 3-varietà M compatta e semplicemente connessa. Sia dunque γ una tale applicazione “omotopicamente non banale”, definita su \mathbb{S}^3 a valori in M . Per ogni metrica riemanniana g su M , si definisce una sorta di “ampiezza” $\alpha_g(\gamma)$ di γ e si mostra che poiché γ non è “contraibile” allora la sua “ampiezza” è strettamente positiva, in effetti maggiore di una costante positiva a_g che dipende solo da (M, g) . Per analogia, si consideri il fatto intuitivamente plausibile che se un laccio in (M, g) ha lunghezza abbastanza piccola, allora è contenuto in una palla in M , diffeomorfa a B^3 , per cui è “contraibile” a un punto. Con un argomento delicato si stima allora lungo il flusso con chirurgie l’evoluzione della quantità $\alpha_{g(t)}(\gamma)$, concludendo che se per assurdo il flusso avesse tempo di esistenza infinito, a un certo momento essa diventerebbe negativa, contro il fatto che γ non è “omotopicamente banale”.

Abbiamo così completato la nostra illustrazione di questa dimostrazione *geometrico/analitica* della congettura di Poincaré. Concludiamo menzionando che, con un’estensione di questa linea dimostrativa (che richiede un notevole ulteriore lavoro), si può arrivare a provare l’intera “congettura di geometrizzazione” evocata nella Sezione 6.1, riottenendo tra l’altro i teoremi di iperbolizzazione già mostrati in precedenza con altri metodi. In un certo senso, un po’ paradossalmente, la congettura di Poincaré, che tanto aveva resistito alla topologia geometrica, è a posteriori il caso più “facile” della dimostrazione *à la Hamilton–Perelman* della completa “congettura di geometrizzazione”.

Riferimenti bibliografici

- [1] R. H. Bing, *Necessary and sufficient conditions that a 3-manifold be S^3* , Ann. of Math. (2) **68** (1958), 17–37.
- [2] G. Ricci Curbastro, *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque*, Atti R. Ist. Veneto **63** (1903–1904), no. 2, 1233–1239.
- [3] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. **17** (1982), no. 2, 255–306.
- [4] ———, *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993), Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 7–136.
- [5] W. Jaco, *Lectures on three-manifold topology*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 43, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980.
- [6] K. Johannson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 761, Springer, Berlin, 1979.
- [7] J. W. Milnor, *A unique decomposition theorem for 3-manifolds*, Amer. J. Math. **84** (1962), 1–7.

- [8] W. D. Neumann and G. A. Swarup, *Canonical decompositions of 3-manifolds*, *Geom. Topol.* **1** (1997), 21–40 (electronic).
- [9] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2002.
- [10] ———, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2003.
- [11] ———, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2003.
- [12] J. H. C. Whitehead, *A certain open manifold whose group is unity*, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **6** (1939), 268–279.
- [13] ———, *Certain theorems about three-dimensional manifolds (I)*, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **5** (1939), 308–320.