

Università degli studi di Firenze
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
SETTEMBRE 2002

Federica Dragoni

**TRASPORTO DI FOTONI IN
UNA NUBE
INTERSTELLARE:
PROBLEMI DIRETTI E
INVERSI**

Advisor: Dott. Luigi Barletti

Indice

1	Richiami	4
1.1	Il mezzo interstellare	4
1.1.1	Cenni storici	4
1.1.2	Struttura del mezzo interstellare	5
1.1.3	La nascita di una stella	7
1.2	Teoria del trasporto	8
1.2.1	Derivazione della forma genererale dell'equazione del trasporto	8
1.2.2	Equazione del del trasporto in termini di flusso angolare	11
1.2.3	Trasporto di fotoni e trasferimento radiattivo	13
1.3	Spazi di Banach	16
1.4	Operatori in spazi di Banach	19
1.4.1	Operatori lineari e limitati	19
1.4.2	Operatori chiusi	24
1.4.3	Spettro di un operatore	25
1.5	Analisi in spazi di Banach	27
1.5.1	Continuità forte	27
1.5.2	Derivata forte	27
1.5.3	Integrale forte di Riemann	28
1.6	Teoria dei semigrupperi	30
1.6.1	Considerazioni generali	30
1.6.2	Operatori limitati	31

1.6.3	Operatori chiusi	32
1.6.4	Operatori Perturbati	34
1.7	Equazioni d'evoluzione affini	36
1.7.1	Caso particolare: indipendenza dal tempo	39
2	Trasporto radiattivo per due diversi gruppi di frequenza	41
2.1	Modello	41
2.2	Problema evolutivo con condizioni di inflow nullo	48
2.3	Variazione del numero totale di particelle	63
2.4	Variazione dell'energia totale del sistema	72
2.5	Un ulteriore stima per il semigruppoo associato all'operatore A+J	74
2.6	Condizioni di inflow non nullo	77
2.6.1	Esistenza della soluzione	77
2.6.2	Calcolo esplicito di una particolare rappresentazione	82
2.7	Problema stazionario	89
3	Problema Inverso	101
3.1	Formulazione del problema inverso	101
3.2	Risoluzione nel caso in cui vi sia solo assorbimento	104
3.3	Costruzione della funzione da invertire	108
3.4	Alcune proprietà della funzione nel caso generale	113
3.4.1	Continuità	113
3.4.2	Differenziabilità	120
3.5	Risoluzione nel caso con scattering in frequenza nullo	123
3.5.1	Introduzione di un nuovo punto di vista per studiare la funzione da invertire	123
3.5.2	Applicazione del teorema di Hille-Yosida	125
3.5.3	Invertibilità locale	128

3.5.4	Invertibilità globale	132
3.6	Cenni alle altre strade possibili e giustificazione della scelta fatta	143

Capitolo 1

Richiami

1.1 Il mezzo interstellare

1.1.1 Cenni storici

Gli antichi Greci pensavano che il vuoto non esistesse e che il cielo fosse costituito da un elemento molto più leggero di quelli presenti sulla terra: l'etere. Tale convinzione passò inalterata attraverso secoli e secoli e durante il medioevo venne assimilata dalla Chiesa che, nel farla sua, le assicurò una ferrea protezione.

Nel XVII secolo, con la nascita della scienza sperimentale, gli scienziati cominciarono a rimettere in discussione le vecchie teorie e la visione aristotelica del cielo cominciò a subire i primi attacchi. La questione sul vuoto divenne centrale e l'esito apparve a lungo incerto.

Nel 1644 Torricelli eseguì il primo esperimento mai realizzato di pneumatica che mostrava l'esistenza del vuoto e contemporaneamente forniva la prima misurazione della pressione atmosferica. Tuttavia i risultati ottenuti da Torricelli non furono universalmente accettati anche perchè si trovarono contro la maggiore autorità scientifica dell'epoca, René Descartes. Nel 1648 arrivò una conferma decisiva dell'esistenza del vuoto grazie a Blaise Pascal, [1].

L'etere ormai aveva i giorni contati e i dogmi della fisica aristotelica comin-

ciavano lentamente a crollare.

Il vuoto, forte della sua vittoria, invase lo spazio celeste ma le prime teorie sulla natura ondulatoria della luce sembrarono mettere nuovamente in discussione tutto. Infatti le uniche onde di cui si era a conoscenza erano di tipo meccanico e per propagarsi avevano bisogno di un mezzo.

Aveva quindi ragione Aristotele? Era dunque l'etere l'elemento in cui si muovevano le stelle e gli altri corpi celesti?

Se le cose realmente stavano così nascevano altri problemi e la loro soluzione appariva estremamente difficile. Era infatti necessario capire cosa fosse l'etere e soprattutto quali fossero le sue proprietà fisiche.

Grazie a Maxwell la natura ondulatoria della luce trovò la sua giusta collocazione tra le onde elettromagnetiche che, propagandosi nel vuoto, ristabilivano il dominio di quest'ultimo nello spazio celeste, [2] e [3].

In realtà nel XX secolo si scoprì che la struttura dello spazio interstellare era molto più complessa di quanto si era creduto fino ad allora. Infatti lo spazio tra stella e stella non è nè completamente vuoto nè completamente pieno ma bensì formato in gran parte da molecole di gas e di materia distribuite con densità talmente basse da apparire in generale del tutto trascurabili, ma a volte tali molecole si addensano formando estese regioni in cui la densità media risulta tutt'altro che trascurabile.

Tali nubi di gas e polveri interstellari costituiscono i più grandi ammassi di materia gravitazionalmente aggregata fino ad oggi conosciuti.

1.1.2 Struttura del mezzo interstellare

Il mezzo interstellare è quindi una sottile nebbia (formata in prevalenza da atomi di idrogeno) che pervade tutto l'universo.

Abbiamo visto che esso è formato in prevalenza da due diverse componenti: il gas e la polvere interstellare.

Vediamo di cosa si tratta:

- a) Il *gas* è costituito di atomi e molecole sparse tra stella e stella con una densità media di circa 1 atomo/cm^3 (pari a circa un milionesimo di miliardesimo di miliardesimo della densità dell'acqua).

La scoperta del gas interstellare avvenne nel 1904 ad opera del tedesco Johannes Hartmann, [5] e [6]. Hartmann stava osservando lo spettro di una stella doppia, la Delta Orionis, e studiava i suoi spostamenti doppler periodici, dovuti al moto orbitale attorno al baricentro del sistema, per ricavare la massa delle due singole stelle dalla misurazione dell'orbita del sistema. Sebbene la quasi totalità delle righe spettrali oscillasse periodicamente attorno ad una posizione intermedia, le due forti righe del calcio ionizzato, che cadono proprio al limite del violetto, non partecipavano di ciò.

Hartmann attribuì tale fenomeno alla presenza di una nube di gas di calcio tra la Delta di Orionis e l'osservatore.

Una caratteristica dei gas è infatti quella di assorbire solo le lunghezze d'onda tipiche degli elementi che lo compongono e del loro stato di ionizzazione.

- b) Le *polveri interstellari* hanno il difetto di oscurare molte regioni di grande interesse, rendendo più difficoltoso il loro studio. Fortunatamente le polveri diventano trasparenti alle bande degli infrarossi a causa del loro accentuato assorbimento di raggi ultravioletti. Esse sono infatti formate da minuscole particelle solide di dimensioni inferiori al micron e quindi paragonabili alla lunghezza d'onda del violetto.

L'esistenza della polvere interstellare fu scoperta proprio a causa del fenomeno di arrossamento dello spettro dovuto all'accentuato assorbimento dei raggi ultravioletti. Nel 1930 lo svizzero Robert J. Trumpler si accorse che le stelle situate nel piano galattico e molto lontane da noi avevano spettri le cui righe indicavano un'alta temperatura ma un co-

lore rossastro tipico di stelle molto più fredde e attribuì ciò a un mezzo interstellare, frapposto tra noi e tali stelle, che assorbiva il violetto in maniera più accentuata del rosso, [5] e [6].

L'esistenza della polvere interstellare ha molte conseguenze fisiche importanti. Ricordiamo come esempio che fu proprio la mancata conoscenza di essa a portare l'astrofisico Harlow Shapley a sovrastimare la distanza del centro galattico.

Nella nostra galassia la componente interstellare costituisce circa il 10% della massa totale ma in alcune galassie il suo contributo può raggiungere anche il 40% .

Le nubi interstellari possono a volte raggiungere i venticinquemila anni luce di estensione e, frapponendosi tra noi e molte delle stelle che osserviamo, rivestano un' importanza notevole nello studio dei corpi celesti.

1.1.3 La nascita di una stella

La nascita di una stella è un processo che avviene proprio all'interno delle nebulose. Tale fenomeno ha origine quando il normale equilibrio presente in esse tra la pressione dovuta al moto termico degli atomi e quella contraria dovuta all'autogravità per qualche ragione viene rotto a favore dell'attrazione (come può succedere se si crea un addensamento di materia oppure se qualche zona si raffredda).

Quando ciò avviene la nube comincia a collassare su se stessa, passando da una densità di circa 1 atomo/cm³ (la densità media del mezzo interstellare) a quella di circa 10²⁴ atomo/cm³(la densità media di una stella).

Durante tale processo, a causa delle disomogeneità presenti all'interno di ogni nebulosa, la nube si frammenta e ciascun frammento continua a collassare indipendentemente dagli altri.

In tale modo a partire da una medesima nebulosa si formano non solo molte stelle ma addirittura diverse galassie, [4].

1.2 Teoria del trasporto

1.2.1 Derivazione della forma genererale dell'equazione del trasporto

Consideriamo un generico volume V nello spazio delle fasi (\mathbf{r}, \mathbf{v}) , con \mathbf{r} vettore posizione e \mathbf{v} vettore velocità.

Definiamo la densità di particelle nello spazio delle fasi $n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ come la densità numerica di particelle che all'istante t si trovano in \mathbf{r} con velocità \mathbf{v} , e cerchiamo di dedurre un'equazione matematica che ne descriva l'evoluzione nel tempo.

In un primo momento trascuriamo gli eventuali effetti dovuti alla presenza di forze macroscopiche. La variazione della densità di particelle in V sarà quindi dovuta esclusivamente alla fuga di parte di esse attraverso la frontiera della regione di spazio considerato, all'interazione delle particelle stesse con le molecole del mezzo ospite e infine all'eventuale presenza di sorgenti o pozzi all'interno di V .

Sia $S = \partial V$, definiamo la funzione di densità di corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ come il numero di particelle che attraversa una superficie infinitesimale $d\boldsymbol{\sigma}$, per unità di area, di velocità e di tempo e quindi

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot d\boldsymbol{\sigma} d\mathbf{v} = n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} d\mathbf{v}$$

Indichiamo poi con $\left(\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\right)_{\text{coll}}$ la variazione della densità di particelle dovuta agli urti con le molecole del mezzo ospite e infine con $s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ la densità delle sorgenti e dei pozzi che emettono in \mathbf{r} particelle con velocità \mathbf{v} al tempo t .

La precedente equazione di bilancio si traduce matematicamente nel seguente modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} &= - \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\right)_{\text{coll}} d\mathbf{v} \\ &+ \int_V s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Applicando il teorema della divergenza al primo termine a secondo membro della (1.1) e osservando che

$$\operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \operatorname{div}_{\mathbf{r}} (\mathbf{v} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)) = \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1.2)$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} &= - \int_V \nabla_{\mathbf{r}} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} + \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \right)_{\text{coll}} d\mathbf{v} \\ &+ \int_V s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Per l'arbitrarietà della regione di spazio V , dalla (1.3) segue l'equazione differenziale per la densità di particelle

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \right)_{\text{coll}} + s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1.4)$$

Se inseriamo anche il contributo di eventuali forze macroscopiche, la cui risultante indichiamo con \mathbf{F} , otteniamo l'equazione (1.4) nella sua forma più generale

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \right)_{\text{coll}} + s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1.5)$$

dove m rappresenta la massa di una particella.

Possiamo osservare che la (1.5) non ci fornisce un'equazione esplicita per la densità di particelle, perchè, mentre in generale possiamo supporre note \mathbf{F} , s e m , non conosciamo invece la variazione del numero di particelle dovuto all'interazione delle medesime con le molecole del mezzo.

È quindi necessario studiare più in dettaglio il termine $\left(\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \right)_{\text{coll}}$

Definiamo le seguenti quantità fisiche:

- (i) *sezione d'urto macroscopica*: è la probabilità che una particella con velocità \mathbf{v} e posizione \mathbf{r} urti una molecola del mezzo, e si indica con $\Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$.

Inoltre, se $\alpha(\mathbf{r})$ è la densità delle particelle del mezzo, si può scrivere la sezione d'urto macroscopica come:

$$\Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{v})$$

dove con $\sigma(\mathbf{v})$ si denota la *sezione d'urto microscopica*.

Le sezioni d'urto che entrano in gioco nell'equazione di bilancio considerata sono:

Σ_a = sezione d'urto di assorbimento

Σ_s = sezione d'urto di scattering

$\Sigma = \Sigma_a + \Sigma_s$ = sezione d'urto totale

Osserviamo che Σ_a rappresenta le particelle che colpendo una molecola restano intrappolate in essa, mentre Σ_s rappresenta quelle particelle che in seguito all'urto deviano la propria velocità.

Osserviamo infine che ogni sezione d'urto è una funzione non negativa.

- (ii) *funzione di probabilità di scattering*: è la probabilità che una particella con velocità \mathbf{v} venga emessa in un punto dello spazio \mathbf{r} a causa dell'urto di una particella con velocità \mathbf{v}' con una molecola del mezzo ospite, e si denota con $p(\mathbf{r}, \mathbf{v}', \mathbf{v}, t)$.
- (iii) *numero significativo di emissione*: rappresenta il numero di particelle secondarie emesse durante un urto, e si indica con $c(\mathbf{r}, \mathbf{v})$.
- (iv) *nucleo di collisione o di scattering*: rappresenta il numero totale di particelle con velocità \mathbf{v} emesse a partire da particelle con velocità \mathbf{v}'

ed è quindi dato dalla seguente espressione

$$k(\mathbf{r}, \mathbf{v}', \mathbf{v}, t) = \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}') c(\mathbf{r}, \mathbf{v}') p(\mathbf{r}, \mathbf{v}', \mathbf{v}, t) \quad (1.6)$$

Fatte tali premesse si può infine determinare un'espressione per la variazione della densità di particelle dovuta alle collisioni, che sarà data dalla differenza tra le particelle con velocità \mathbf{v} originate durante gli urti e quelle che si perdono a causa dei medesimi, cioè

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \right)_{\text{coll}} = \int_{\mathbb{R}^3} v' k(\mathbf{r}, \mathbf{v}', \mathbf{v}, t) n(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' - v \Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}) n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1.7)$$

Sostituendo la (1.7) alla (1.5) si ottiene la seguente espressione esplicita dell'equazione del bilancio per le particelle in forma differenziale

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -v \Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}) n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \\ + \int_{\mathbb{R}^3} v' k(\mathbf{r}, \mathbf{v}', \mathbf{v}, t) n(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' + s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Tale equazione è molto generale e permette di descrivere una grande quantità di fenomeni fisici, noti come processi di trasporto lineari.

Esempi di processi di trasporto lineari sono in generale tutti quei fenomeni in cui le particelle interagiscono con le molecole di un mezzo ospite nel quale diffondono come la diffusione dei neutroni attraverso la materia e la diffusione della luce attraverso l'atmosfera.

1.2.2 Equazione del del trasporto in termini di flusso angolare

Vediamo ora una forma alternativa per l'equazione del trasporto derivata nel paragrafo precedente.

A tale scopo è necessario introdurre una nuova quantità fisica.

Definizione 1.1. *Denominiamo flusso angolare o flusso nello spazio delle fasi, e scriviamo $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, il prodotto del modulo della velocità per la densità di probabilità del numero di particelle, quindi*

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) := vn(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

A questo punto osserviamo che è possibile considerare la variabile vettoriale \mathbf{v} mediante due nuove variabili che tengano conto separatamente del modulo e della direzione del vettore \mathbf{v} .

Consideriamo quindi l'energia cinetica, che indichiamo con E

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

e il versore velocità, che indichiamo con $\hat{\omega}$

$$\hat{\omega} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

La densità di particelle nello spazio delle fasi può essere definita a partire da queste due nuove variabili, ponendo $n(\mathbf{r}, E, \hat{\omega}, t) d\mathbf{r} dE d\hat{\omega}$, per indicare il numero atteso di particelle in \mathbf{r} con un energia E e che si muovono in una direzione $\hat{\omega}$, all'istante t .

Il legame tra la densità di particelle vista come funzione di $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ e come funzione di $(\mathbf{r}, E, \hat{\omega}, t)$ è data da

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \int_0^{+\infty} dE \int_{S^1} n(\mathbf{r}, E, \hat{\omega}, t) d\hat{\omega}$$

dove con S^1 indichiamo la sfera unitaria in \mathbb{R}^3

Facendo le opportune sostituzioni dall'equazione (1.8) si ottiene la seguente equazione differenziale per $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, [7].

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\omega}, t) + \hat{\omega} \cdot \nabla_r \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\omega}, t) + \Sigma(\mathbf{r}, E, \hat{\omega}, t) \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\omega}, t) = \\ = \int_0^{+\infty} dE' \int_{S^1} k(\mathbf{r}, E', E, \hat{\omega}', \hat{\omega}, t) \varphi(\mathbf{r}, E', \hat{\omega}', t) d\hat{\omega}' + s(\mathbf{r}, E, \hat{\omega}, t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

con $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$.

L'uso dell'equazione (1.9) al posto della (1.8) è molto utile se il sistema presenta una qualche simmetria piana, perchè in tale caso il flusso angolare dipende da una sola coordinata spaziale, e quindi, scegliendo opportunamente il sistema di riferimento per la coordinate spaziali (x, y, z) , si può supporre che $\varphi = \varphi(x)$, da cui

$$\hat{\omega} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \varphi(x) = \left(\hat{\omega}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\omega}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\omega}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi(x) = \hat{\omega}_x \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \quad (1.10)$$

dove con $\hat{\omega}_x$, $\hat{\omega}_y$ e $\hat{\omega}_z$ indico rispettivamente le componenti angolari del vettore $\hat{\omega}$ rispetto alle coordinate spaziali (x, y, z)

Posto θ l'angolo tra l'asse delle x e il vettore $\hat{\omega}$, si può definire la seguente variabile scalare

$$\mu = \cos \theta = \hat{\omega}_x$$

Poichè θ varia tra 0 e π , la variabile μ varierà tra -1 e 1; l'equazione (1.9) diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, E, \mu, t) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, E, \mu, t) + \Sigma(x, E, \mu, t) \varphi(x, E, \mu, t) = \\ = \int_0^{+\infty} dE' \int_{-1}^1 k(x, E', E, \mu', \mu, t) \varphi(x, E', \mu', t) d\mu' + s(x, E, \mu, t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.2.3 Trasporto di fotoni e trasferimento radiattivo

Nel caso in cui le particelle siano fotoni la velocità è costante in modulo e pari alla velocità della luce c ($c = 3 \times 10^8 m/s$). Anche l'energia è costante ed è data da $E = h \nu$, con h costante di Plank ($h = 6.63 \times 10^{-34} J \cdot s$) e ν frequenza del raggio di fotoni considerato.

Inoltre durante gli urti tra i fotoni e le particelle di un mezzo ospite non si generano particelle secondarie e quindi $c(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 1$.

L'equazione (1.11) si semplifica notevolmente, perchè scompare la dipendenza

del modello dall'energia.

Inoltre d'ora in avanti inglobiamo la velocità c nelle sezioni d'urto

$$\sigma_a(x, \mu) := c\Sigma_a(x, \mu)$$

$$\sigma_s(x, \mu) := c\Sigma_s(x, \mu)$$

e quindi

$$\sigma(x, \mu) := c\Sigma(x, \mu)$$

Otteniamo quindi il seguente modello base per il trasporto di fotoni

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, \mu, t) = -c\mu\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, \mu, t) - \sigma(x, \mu, t)\varphi(x, \mu, t) \quad (1.12)$$

$$+ \int_{-1}^1 k(x, \mu', \mu, t)\varphi(x, \mu', t)d\mu' + cs(x, \mu, t) \quad (1.13)$$

dove, per l'osservazione precedente la velocità è stata inglobata nel nucleo si scattering mediante la ridefinizione della sezione d'urto di scattering.

Molto spesso si studia il trasporto dei fotoni mediante quantità fisiche diverse da quelle viste finora. Vediamo come.

Definizione 1.2. *Si definisce l'intensità di energia dei fotoni come il prodotto dell'energia cinetica di un fotone per il flusso angolare dei fotoni e si indica con I_ν , quindi*

$$I_\nu(\mathbf{r}, \hat{\omega}, t) := h\nu cn(\mathbf{r}, \hat{\omega}, t)$$

Poniamo:

(a) $\rho(\mathbf{r}, t)$ la densità locale di materia.

(b) $k'_\nu(\mathbf{r}, \hat{\omega}, t)$ il coefficiente di assorbimento.

(c) $\varepsilon_\nu(\mathbf{r}, \hat{\omega}, t)$ il coefficiente di emissione.

L'equazione del trasporto dei fotoni in termini dell'intensità d'energia è, [7]:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}I_\nu + \hat{\omega} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}I_\nu = \rho(\mathbf{r}, t)[-k'_\nu(\mathbf{r}, \hat{\omega}, t)I_\nu(\mathbf{r}, \hat{\omega}, t) + \varepsilon_\nu(\mathbf{r}, \hat{\omega}, t)] \quad (1.14)$$

Questa equazione risulta utile nello studio di molti fenomeni che coinvolgono il trasporto di fotoni, ma in questa tesi abbiamo scelto di utilizzare l'equazione del trasporto in termini di densità di particelle.

Se le particelle considerate sono, come nel nostro caso dei fotoni, la densità di particelle e il flusso angolare differiscono solo per una costante moltiplicativa.

Quindi dividendo la (1.12) per c si ottiene un'equazione analoga ad essa per la densità di particelle

$$\frac{\partial}{\partial t}n(x, \mu, t) = -c\mu\frac{\partial}{\partial x}n(x, \mu, t) - \sigma(x, \mu, t)n(x, \mu, t) \quad (1.15)$$

$$+ \int_{-1}^1 k(x, \mu', \mu, t)n(x, \mu', t)d\mu' + s(x, \mu, t) \quad (1.16)$$

Vedremo in dettaglio nel secondo capitolo come da questa equazione si ricaverà il nostro modello.

1.3 Spazi di Banach

Richiamiamo alcune nozioni di analisi funzionale.

Ricordiamo inanzitutto che, dato X spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} , si definisce norma su X una qualsiasi funzione da X in \mathbb{R} tale che

$$(i) \quad \|f\| \geq 0 \quad \forall f \in X \text{ e } \|f\| = 0 \iff f = 0$$

$$(ii) \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \forall f, g \in X$$

$$(iii) \quad \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| \quad \forall f \in X \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Definizione 1.3. *Uno spazio vettoriale su cui è definita una norma si dice spazio normato.*

Uno spazio normato si dice completo se ogni successione di Cauchy a valori in X converge a un elemento di X stesso.

Possiamo adesso dare la seguente definizione

Definizione 1.4. *Uno spazio vettoriale normato e completo si dice spazio di Banach.*

Quindi il teorema di Cauchy, che è una delle principali proprietà dei numeri reali, [8], è assunta negli spazi di Banach per definizione.

Salvo specificare diversamente, quando sciveremo X e Y intenderemo sempre che X e Y sono due spazi di Banach su \mathbb{C} .

Esempi molto importanti di spazi di Banach sono gli spazi $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ e gli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $1 \leq p \leq +\infty$ e $k \in \mathbb{N}$, [12], [13].

D'ora in avanti quando scriveremo $L^p(\Omega)$ sottintenderemo sempre che

$m = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq +\infty$.

Consideriamo adesso un particolare tipo di spazi di Banach: gli spazi di Hilbert.

Per fare ciò è necessario ricordare che dato uno spazio vettoriale X su \mathbb{C} , si definisce prodotto hermitiano ogni funzione $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$(i) \quad (f, g) = \overline{(g, f)} \quad \forall f, g \in X$$

$$(ii) \quad (\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g, h \in X$$

$$(iii) \quad (f, f) \geq 0 \quad \forall f \in X \quad \text{e} \quad (f, f) = 0 \iff f = 0$$

Osserviamo che se X è uno spazio vettoriale su cui è definito un prodotto hermitiano, allora è uno spazio normato, infatti si può sempre definire una norma a partire da un prodotto hermitiano ponendo $\|f\| := (f, f)^{1/2}$.

Definizione 1.5. *Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale su cui è definito un prodotto hermitiano, completo rispetto alla norma definita dal prodotto hermitiano stesso.*

Per quanto precedentemente osservato un spazio di Hilbert è in particolare uno spazio di Banach.

Esempi di spazi di Hilbert sono $L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ e $W^{k,2}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $k \in \mathbb{N}$, [12], [13].

Dato X spazio di Banach passiamo ora a definire, quando è possibile, un particolare sottoinsieme di X che risulterà molto utile in seguito: il cono positivo.

Definizione 1.6. *Uno spazio di Banach su cui è definita una relazione d'ordine parziale \prec si dice reticolo di Banach.*

Definizione 1.7. *Dato un reticolo di Banach X si definisce cono positivo il seguente sottoinsieme*

$$X^+ := \{f \in X \mid f \succ 0\}$$

Vediamo brevemente alcuni esempi di reticoli di Banach e dei relativi coni positivi per capire meglio di cosa si tratta.

- 1** Se $X = \mathbb{R}$ allora \prec è l'ordinamento naturale dei numeri reali e il cono positivo è dato dalla semiretta positiva.
- 2** Se $X = \mathbb{R}^n$ allora \prec è l'ordinamento indotto da \mathbb{R} sulle componenti e il cono positivo è quindi formato dalle n-uple di elementi le cui componenti sono positive secondo l'usuale ordinamento in \mathbb{R} .
- 3** Se $X = L^p(\Omega)$ allora \prec è l'ordinamento indotto da \mathbb{R} su quasi ogni elemento immagine e quindi il cono positivo è formato dalle funzioni $f \in L^p(\Omega)$ tali che $f \geq 0$ quasi ovunque.
- 4** Se $X = L^p(\Omega) \oplus L^p(\Omega')$ allora \prec è l'ordinamento indotto dal precedente sulle singole componenti e

$$X^+ = \{(f, g) \mid f \geq 0 \text{ q.o.}, g \geq 0 \text{ q.o.}\}.$$

1.4 Operatori in spazi di Banach

1.4.1 Operatori lineari e limitati

Siano X e Y due spazi di Banach su un campo \mathbb{K} e sia $D \subset X$.

Definizione 1.8. Una funzione $A : D \rightarrow Y$ è detta operatore con dominio $\mathcal{D}(A) = D \subset X$ e immagine

$$\mathcal{R}(A) = \{g \in Y \mid \exists f \in X : g = A(f)\}$$

In particolare se la funzione è iniettiva esiste l'operatore inverso che si indica con A^{-1} ed è definito come un operatore con dominio $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$ e con immagine $\mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$ tale che

$$A^{-1}(A(f)) = f \quad \forall f \in \mathcal{D}(A)$$

Osservazione 1.1. Se l'operatore inverso esiste, è unico.

Definizione 1.9. Un operatore A si dice lineare se:

- (i) $\mathcal{D}(A)$ è un sottospazio vettoriale di X
- (ii) $A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad e \quad \forall f, g \in X$

Per gli operatori lineari vale la seguente condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità, [17].

Proposizione 1.1. Se A è lineare, allora esiste l'operatore inverso A^{-1} se e solo se l'equazione $Af = 0$ ha solo la soluzione $f = 0$ considerando rispettivamente gli elementi nulli di X e di Y .

Osservazione 1.2. Se A è un operatore lineare, in generale si pone Af per indicare $A(f)$.

Definizione 1.10. Un operatore lineare A si dice limitato se \exists una costante M tale che

$$\|Af\|_Y \leq M\|f\|_X \quad \forall f \in \mathcal{D}(A)$$

Dato un operatore lineare e limitato si definisce norma di A , e si scrive $\|A\|$, il seguente numero reale

$$\|A\| := \sup \left\{ \frac{\|Af\|_Y}{\|f\|_X} \mid f \in \mathcal{D}(A) \text{ e } \|f\|_X \neq 0 \right\}$$

Si può facilmente provare che:

$$\|A\| = \sup \{ \|Af\|_Y \mid f \in \mathcal{D}(A) \text{ e } \|f\|_X = 1 \}$$

Poniamo

$$\mathcal{B}(D, Y) = \{A \text{ operatore lineare e limitato con } \mathcal{D}(A) = D \text{ e } \mathcal{R}(A) \subset Y\}$$

e scriviamo $\mathcal{B}(X)$ per indicare $\mathcal{B}(X, X)$

Osserviamo che se X e Y sono due spazi di Banach e D è un sottospazio vettoriale di X , allora $\mathcal{B}(D, Y)$ è uno spazio di Banach con la norma per gli operatori sopra definita.

Inoltre la continuità e la limitatezza sono due proprietà equivalenti nel caso di operatori lineari, infatti vale il seguente risultato, [17].

Proposizione 1.2. *Sia A operatore lineare in X , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

- (i) A è limitato in X .
- (ii) A è continuo in X .
- (iii) A è continuo in un punto $f_0 \in X$.

Definizione 1.11. *Un operatore lineare $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow Y$, si dice densamente definito, e si scrive d.d., se $\mathcal{D}(A)$ è denso in X*

Se un operatore A , lineare e limitato, è densamente definito allora si può sempre estendere il suo dominio all'intero spazio X senza che la sua norma

vari.

Enunciamo adesso un importante risultato per i reticoli di Banach che ci permette di stimare la norma di un operatore restringendoci al cono positivo, [21].

Teorema 1.1. *Siano E e F reticoli vettoriali normati e $T : X \rightarrow Y$ operatore lineare e continuo, allora*

$$\|T\| = \sup \{ \|T(f)\| \mid f \in X^+ \text{ e } \|f\|_X \leq 1 \}$$

Tale teorema è risultato molto utile all'interno di questa tesi.

Enunciamo ora il seguente risultato per gli operatori lineari e limitati.

Teorema 1.2. *Sia X spazio di Banach e $K : \mathcal{D}(K) \subset X \rightarrow X$ operatore lineare e limitato, allora l'equazione*

$$f = \lambda Kf + g \quad \text{con } g \in \mathcal{D}(K) \text{ e } \lambda \in \mathbb{C} \quad (1.17)$$

ammette una e una sola soluzione $\forall \lambda$ tale che $|\lambda| \|K\| < 1$, e inoltre la soluzione è data da

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n K^n g$$

Dimostrazione (Teorema 1.2)

Definiamo la seguente successione approssimante

$$\begin{cases} f_0 = g \\ f_{n+1} = \lambda K f_n + g \end{cases}$$

Osserviamo che se riusciamo a provare che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in X , allora possiamo definire

$$f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

e otteniamo che $f \in X$.

Inoltre, poichè K è continuo in quanto lineare e limitato, f è soluzione dell'equazione (1.17), infatti:

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1} = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} K f_n + g = \lambda K \lim_{n \rightarrow \infty} f_n + g = \lambda K f + g$$

Dobbiamo quindi provare che $\{f_n\}$ è di Cauchy.

Per ottenere ciò osserviamo che se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n - f_{n-1}\|_X \tag{1.18}$$

è una serie convergente, poichè è anche una serie a termini positivi, il suo n -esimo termine è infinitesimo, [8], e quindi $\|f_n - f_{n-1}\|_X \rightarrow 0$.

Da cui si ottiene che la successione $\{f_n\}$ è di Cauchy nello spazio di Banach X .

Ci siamo quindi ricondotti a provare che la serie (1.18) converge.

Dobbiamo quindi determinare un'opportuna stima per il termine n -esimo di tale serie. Vediamo come

$$\|f_1 - f_0\|_X = \|\lambda K g + g - g\|_X = \|\lambda K g\|_X \leq |\lambda| \|K\| \|g\|_X$$

$$\begin{aligned} \|f_2 - f_1\|_X &= \|\lambda K f_1 + g - \lambda K f_0 - g\|_X = \|\lambda K f_1 - \lambda K f_0\|_X = \\ &= \|\lambda K (f_1 - f_0)\|_X \leq |\lambda| \|K\| \|f_1 - f_0\|_X \leq (|\lambda| \|K\|)^2 \|g\|_X \end{aligned}$$

Iterando tale stima ottengo

$$\|f_n - f_{n-1}\|_X \leq (|\lambda| \|K\|)^n \|g\|_X$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{=\infty} \|f_n - f_{n-1}\|_X \leq \|g\|_X \sum_{n=1}^{=\infty} (|\lambda| \|K\|)^n$$

Se $|\lambda| \|K\| < 1$, la serie a secondo membro è una serie geometrica convergente e quindi per il criterio del confronto anche la serie (1.18) è convergente.

Quindi la prima parte del teorema risulta dimostrata.

Per dimostrare la seconda parte del teorema si osserva inanzitutto che la soluzione è necessariamente della forma

$$f = (I - \lambda K)^{-1}g$$

È quindi sufficiente provare che

$$(I - \lambda K)^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n K^n$$

Tale uguaglianza è d'immediata verifica, infatti

$$\begin{aligned} & (I - \lambda K) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n K^n \right) h \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n K^n h - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n+1} K^{n+1} h = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} K^{n+1} h - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n+1} K^{n+1} h \\ &= \lambda^0 K^0 h + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n+1} K^{n+1} h - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n+1} K^{n+1} h = \lambda^0 K^0 h = h \end{aligned}$$

Quindi

$$(I - \lambda K) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n K^n \right) h = h \quad \forall h \in \mathcal{D}(K) \subset X$$

Da cui

$$(I - \lambda K) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n K^n \right) = I$$

Analogamente si ottiene

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n K^n \right) (I - \lambda K) = I$$

Abbiamo quindi provato che

$$(I - \lambda K)^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n K^n$$

Da cui segue che

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n K^n g$$

□

1.4.2 Operatori chiusi

Siano X e Y spazi di Banach e sia $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow Y$ un operatore con dominio $\mathcal{D}(A) \subset X$ e immagine $\mathcal{R}(A) \subset Y$.

Definizione 1.12. Si dice grafico dell'operatore A , e si indica con $G(A)$, il seguente sottoinsieme dello spazio di Banach $X \times Y$

$$G(A) = \{\phi \in X \times Y \mid \phi = (f, g) \text{ con } f \in X \text{ e } g = Af\}$$

Definizione 1.13. Un operatore lineare A si dice chiuso se il suo grafico $G(A)$ è un sottoinsieme chiuso di $X \times Y$, cioè se data una successione $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G(A)$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n - \phi\|_{X \times Y} = 0$$

si ha che $\phi \in G(A)$.

Poniamo

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y \mid A \text{ chiuso}\}$$

e indichiamo $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, X)$.

Il seguente risultato fornisce una caratterizzazione degli operatori chiusi, [17].

Teorema 1.3. A è un operatore chiuso se e solo se per ogni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_X = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|Af_n - g\|_Y = 0$$

si ha che $f \in \mathcal{D}(A)$ e $Af = g$

Inoltre, [17],

Teorema 1.4. Per gli operatori chiusi valgono le seguenti proprietà:

(a) un operatore B lineare e limitato è chiuso se e solo se $\mathcal{D}(B)$ è un sottoinsieme chiuso di X

- (b) se $A \in \mathcal{C}(X, Y)$ e B è un operatore lineare e limitato con $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$, allora $A + B \in \mathcal{C}(X, Y)$
- (c) se esiste A^{-1} operatore inverso di A , allora $A \in \mathcal{C}(X, Y)$ se e solo se $A^{-1} \in \mathcal{C}(Y, X)$

Poniamo $\mathcal{B}(X, Y) = \{B : X \rightarrow Y \mid B \text{ è lineare e limitato}\}$,
dal teorema precedente segue

Corollario 1.1. $\mathcal{B}(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$

1.4.3 Spettro di un operatore

Sia X spazio di Banach su \mathbb{C} e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ operatore lineare, consideriamo la seguente classificazione dei numeri complessi.

- (a) Se $z \in \mathbb{C}$ è tale che $zI - A$ non è iniettivo e quindi $\nexists (zI - A)^{-1}$, allora si dice che z è un autovalore di A .

Si definisce spettro puntuale il seguente sottoinsieme di \mathbb{C}

$$P_\sigma(A) := \{z \in \mathbb{C} \mid \nexists (zI - A)^{-1}\}$$

Se $z \in P_\sigma$, allora l'equazione

$$(zI - A)f = 0 \tag{1.19}$$

ha almeno una soluzione non nulla.

Ogni soluzione non nulla della (1.19) è detta autofunzione di A corrispondente all'autovalore z .

- (b) Si definisce spettro residuo

$$R_\sigma(A) := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists (zI - A)^{-1} \text{ ma non è d.d.}\}$$

- (c) Si definisce spettro continuo

$$C_\sigma(A) := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists (zI - A)^{-1} \text{ ed è d.d. ma non è limitato}\}$$

Definizione 1.14. *Si dice spettro di A il seguente sottoinsieme di \mathbb{C}*

$$\sigma(A) := P_\sigma(A) \cup R_\sigma(A) \cup C_\sigma(A)$$

Infine possiamo definire la parte di tale classificazione che a noi più interessa.

- (d) Se $z \in \mathbb{C}$ è tale che $\exists (zI - A)^{-1}$ e inoltre è d.d. (per cui si può estendere ad un operatore definito su tutto X come precedentemente osservato) e limitato, allora z appartiene all'insieme risolvente di A , che si indica con $\rho(A)$.

Quindi

$$\rho(A) := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists (zI - A)^{-1} \text{ ed è d.d. e limitato}\}$$

Osservazione 1.3. *Se $A \in \mathcal{C}(X)$ e $z \in \rho(A)$, allora $zI - A$ e $(zI - A)^{-1}$ sono entrambi operatori chiusi.*

Se $z \in \rho(A)$ e $A \in \mathcal{C}(X)$ in generale si pone

$$R(z, A) := (zI - A)^{-1}$$

e tale operatore si chiama risolvente di A .

1.5 Analisi in spazi di Banach

1.5.1 Continuità forte

Sia X spazio di Banach e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ si dice che $\{f_n\}$ converge a $f \in X$, e si scrive $f_n \xrightarrow{X} f$, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_X = 0$$

A volte, per indicare la precedente convergenza, si scriverà

$$X - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

oppure semplicemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

Definiamo ora il concetto di continuità forte in uno spazio di Banach, generalizzando in maniera naturale quello usuale dato in \mathbb{R} .

Definizione 1.15. *Dato $\Delta \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto e data $u : \Delta \rightarrow X$ si dice che $u(t)$ è fortemente continua (o semplicemente continua) in $t_0 \in \Delta$ se*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|u(t) - u(t_0)\|_X = 0$$

Inoltre $u(t)$ è continua in Δ se è continua $\forall t_0 \in \Delta$.

Sia $[t_1, t_2] \subset \Delta$, indichiamo con $C([t_1, t_2]; X)$ l'insieme delle funzioni $u(t)$ definite in $[t_1, t_2]$ a valori in X e continue in tale intervallo.

Per tale spazio vale che, [17]

Proposizione 1.3. *$C([t_1, t_2]; X)$ è uno spazio di Banach con la norma definita da*

$$\|u\|_{C([t_1, t_2]; X)} := \max\{\|u(t)\|_X \mid t \in [t_1, t_2]\}$$

1.5.2 Derivata forte

Data $u(t)$ come sopra, continua in $t_0 \in \Delta$

Definizione 1.16. Si dice che $u(t)$ è differenziabile in senso forte (o semplicemente differenziabile) in t_0 se $\exists f_0 \in X$ tale che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} [u(t_0 + h) - u(t_0)] - f_0 \right\|_X = 0$$

In tale caso f_0 è detta derivata forte (o semplicemente derivata) di $u(t)$ in t_0 e si denota con $\frac{d}{dt}u$ o $u'(t)$.

Osservazione 1.4. Se la derivata esiste, è unica.

Definizione 1.17. $u(t)$ si dice differenziabile in Δ se è differenziabile in t_0 , per ogni $t_0 \in \Delta$.

1.5.3 Integrale forte di Riemann

L'integrale di Riemann in uno spazio di Banach si definisce analogamente all'integrale di Riemann in \mathbb{R} con l'unica differenza che, una volta definita la somma di Riemann, l'integrale si costruisce come limite di tale somma secondo la convergenza in X . Vediamo più in dettaglio come.

Definizione 1.18. Sia $u : \Delta \rightarrow X$ e $[t_1, t_2] \subset \Delta$ si consideri π_n una partizione finita di tale intervallo

$$\{t_1 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t_2\}$$

Si definisce somma di Riemann

$$s(\pi_n, u) := \sum_{k=0}^{n-1} (s_{k+1} - s_k) u(\overline{s}_k)$$

con \overline{s}_k tale che $s_k \leq \overline{s}_k \leq s_{k+1} \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$

Definisco infine integrale forte di Riemann (o semplicemente integrale di Riemann) su $[t_1, t_2]$ il seguente limite in X

$$\int_{t_1}^{t_2} u(s) ds := \lim_{n \rightarrow \infty} s(\pi_n, u)$$

Per tale integrale valgono molte delle proprietà dell'integrale di Riemann definito su \mathbb{R} , [17]. Vediamone in dettaglio alcune.

Teorema 1.5. Se $u \in C^1([t_1, t_2]; X)$, allora

$$\int_{t_1}^{t_2} u'(s) ds = u(t_2) - u(t_1)$$

Teorema 1.6. Se $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^1([t_1, t_2]; X)$ converge nella relativa norma, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{t_1}^{t_2} u_n(s) ds - \int_{t_1}^{t_2} u(s) ds \right\|_X = 0$$

Teorema 1.7. Se $A \in \mathcal{C}(X, Y)$ e $u : \Delta \rightarrow X$ con $[t_1, t_2] \subset \Delta$ è tale che

(i) $u(t) \in \mathcal{D}(A), \quad \forall t \in [t_1, t_2]$

(ii) $u \in \mathcal{C}([t_1, t_2]; X)$

(iii) $Au(t) \in \mathcal{C}([t_1, t_2]; X)$

allora

$$A \int_{t_1}^{t_2} u(s) ds = \int_{t_1}^{t_2} Au(s) ds$$

Corollario 1.2. Poichè $\mathcal{B}(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$, il teorema vale in particolare per gli operatori lineari e limitati.

Corollario 1.3. Se $u \in C^1([t_1, t_2]; X)$, allora

$$\frac{d}{dt} \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} u(t) dt$$

1.6 Teoria dei semigrupp

1.6.1 Considerazioni generali

Sia $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ operatore lineare.

La teoria dei semigrupp ci permette di studiare un problema di Cauchy per un'equazione d'evoluzione non necessariamente omogenea.

Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + g(t) & t > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = u_0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Definizione 1.19. *Si dice che $u(t)$ è una soluzione stretta (o semplicemente soluzione) del problema di Cauchy (1.20) nell'intervallo $(0, +\infty)$ se:*

- (i) $u(t)$ è fortemente continua in $(0, +\infty)$ e $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ per ogni $t > 0$.
- (ii) $u(t)$ è fortemente differenziabile in $(0, +\infty)$.
- (iii) $u(t)$ soddisfa l'equazione di evoluzione data in (1.20) e la relativa condizione iniziale.

Enunciamo un risultato , [17], che ci permette di studiare il nostro problema di Cauchy (1.20) studiando un'opportuna equazione integrale ad esso associata.

Proposizione 1.4. *Se $u(t)$ è una soluzione di (1.20), allora è anche soluzione della seguente equazione integrale*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A(u(s))ds, \quad t \geq 0 \quad (1.21)$$

e viceversa, se u è una soluzione continua dell'equazione integrale (1.21), allora $u(t)$ è anche una soluzione stretta del problema di Cauchy (1.20).

Osservazione 1.5. *La precedente equazione integrale si può studiare mediante il metodo della successioni approssimanti.*

Per risolvere il problema (1.20) si deve per prima cosa studiare il problema omogeneo associato

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = A(u(t)) & t > 0 \\ X - \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = u_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

1.6.2 Operatori limitati

Se $A \in \mathcal{B}(X)$ possiamo risolvere il problema omogeneo (1.22) $\forall u_0 \in X$.

Definiamo la successione di operatori $\{T_n(t)\}$, ponendo

$$T_n(t) := I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n$$

Osserviamo che

- (i) $T_n(t) \in \mathcal{B}(X)$
- (ii) $T_n(t)$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{B}(X)$

e quindi

$$\exists! T(t) = \mathcal{B}(X) - \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)$$

Inoltre, poichè $T(t)$ si esprime mediante la seguente serie

$$T(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!}A^j$$

per analogia con la serie di Taylor dell'esponenziale, si pone

$$T(t) := e^{tA}$$

$T(t)$ non è un operatore ma una famiglia di operatori limitati e lineari, al variare di $t \geq 0$.

In realtà $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ è un gruppo abeliano rispetto al prodotto dato dalla composizione $T(s)T(t) = T(s+t)$ e si chiama gruppo generato da $A \in \mathcal{B}(X)$.

Si può inoltre provare il seguente risultato di esistenza e unicità per la soluzione del problema omogeneo (1.22), [17].

Teorema 1.8. *Se $A \in \mathcal{B}(X)$ e $T(t) = e^{tA}$ è il gruppo generato dall'operatore A e $u_0 \in X$ è un dato iniziale assegnato allora*

$$u(t) := T(t)u_0$$

è l'unica soluzione del problema omogeneo (1.22) continua e differenziabile, $\forall t \geq 0$

1.6.3 Operatori chiusi

Se invece $A \in \mathcal{C}(X)$, possiamo definire un particolare sottoinsieme degli operatori chiusi in cui riusciamo a risolvere il problema d'evoluzione (1.20).

Definizione 1.20. *$A \in \mathcal{G}(M, \beta; X)$ con $M \geq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ se*

- (i) $A \in \mathcal{C}(X)$
- (ii) A è d.d.
- (iii) $\forall z > \beta$ si ha che $z \in \rho(A)$ e inoltre

$$\left\| (R(z, A))^j \right\| \leq \frac{M}{(z - \beta)^j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Osservazione 1.6. *Si può inoltre provare che se $M = 1$ vale che $A \in \mathcal{G}(1, \beta; X)$ se e solo se*

- (i) $A \in \mathcal{C}(X)$
- (ii) A è d.d.
- (iii) $\forall z > \beta$ si ha che $z \in \rho(A)$ e inoltre

$$\|R(z, A)\| \leq \frac{1}{z - \beta}$$

In un primo momento studiamo il caso in cui $A \in \mathcal{G}(M, 0; X)$.

Analogamente a quanto fatto nel caso precedente, cerchiamo una famiglia di operatori approssimati.

Poniamo

$$Z_n(t) = \left\{ \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-1} \right\}^n \quad \forall t \geq 0 \text{ e } n = 1, 2, \dots$$

Osserviamo che se esiste $(zI - A)^{-1}$, allora esiste $(I - sA)^{-1} \forall s > 0$ e quindi Z_n risulta ben definito.

Anche in tale caso si può dimostrare, [17], che $\forall g \in X$ e $\forall t \geq 0$ la famiglia $\{Z_n(t)g \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una successione di Cauchy nello spazio di Banach X e

inoltre $\exists \Phi(t) \in X$ univocamente determinata da $g \in X$ tale che $\Phi(t) = Z(t)g$

Quindi otteniamo che

$$Z(t)g = X - \lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n(t)g$$

con

$$Z(t) = X - \lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n(t) = X - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I - \frac{tA}{n} \right)^{-n}$$

Anche in questo caso si pone $Z(t) = e^{tA}$.

Si può inoltre provare, [17], che la famiglia di operatori $\{Z(t) \mid t \geq 0\}$ è tale che

(i) $Z(0) = I$

(ii) $Z(t)Z(s) = z(s)Z(t) = Z(s+t) \forall s, t \geq 0$

Poichè $Z(t)$ non è definito per valori negativi, non si ottiene un gruppo ma solo un monoide commutativo che viene denominato semigrupp commutativo generato da $A \in \mathcal{G}(M, 0; X)$.

Vale infine il seguente risultato, [17].

Teorema 1.9. *Data $A \in \mathcal{G}(M, 0; X)$, allora il problema omogeneo (1.22) ammette una e una sola soluzione stretta in $[0, +\infty)$ per ogni dato iniziale $u_0 \in X$ e tale soluzione è data da:*

$$u(t) := Z(t)u_0 \quad t \geq 0$$

Il teorema si generalizza al caso in cui $A \in \mathcal{G}(M, \beta; X)$, osservando che se

$$A \in \mathcal{G}(M, 0; X) \implies \tilde{A} := A - \beta I \in \mathcal{G}(M, 0; X)$$

Si applica il precedente risultato ad \tilde{A} e se ne ottiene uno analogo per A . In tale caso il semigruppato generato da $A \in \mathcal{G}(M, \beta; X)$ è

$$\{Z(t) = \exp(\beta t)S(t) \mid t \geq 0\}$$

dove

$$\{S(t) = \exp(t\tilde{A}) \mid t \geq 0\}$$

è il semigruppato generato da \tilde{A} .

Quindi ricapitolando otteniamo il seguente teorema di esistenza e unicità per la soluzione del problema omogeneo (1.22), [18].

Teorema 1.10 (di Hille-Yosida). *Il problema omogeneo (1.22) ammette una e una sola soluzione stretta in $[0, +\infty)$, per ogni dato iniziale $u_0 \in X$ e tale soluzione è data da:*

$$u(t) := Z(t)u_0 \quad t \geq 0$$

se e solo se $A \in \mathcal{G}(M, \beta; X)$ con $M > 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

1.6.4 Operatori Perturbati

Definizione 1.21. *Sia $A \in \mathcal{G}(M, \beta; X)$ e $B \in \mathcal{B}(X)$, l'operatore $A + B$ si dice perturbazione limitata ottenuta dall'operatore non perturbato A con l'aggiunta di un operatore limitato perturbante B .*

Le perturbazioni limitate non portano grossi problemi nello studio dell'equazioni d'evoluzione associate, infatti vale il seguente fondamentale risultato, [17].

Teorema 1.11. *Se $A \in \mathcal{G}(M, \beta; X)$ e $B \in \mathcal{B}(X)$, allora*

(i) $A + B \in \mathcal{G}(M, \beta + M\|B\|; X)$.

(ii) *Il semigruppato perturbato*

$$\{\widehat{Z}(t) = e^{t(A+B)} \mid t \geq 0\}$$

è esprimibile mediante il seguente limite

$$\widehat{Z}(t)\mathbf{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} Z^{(n)}(t)\mathbf{f}, \quad \forall \mathbf{f} \in X \text{ e } t \geq 0$$

dove la successione di semigruppato $Z^{(n)}$ è definita per ricorrenza come segue

$$\begin{cases} Z^{(0)}(t)\mathbf{f} = Z(t)\mathbf{f} \\ Z^{(n+1)}(t)\mathbf{f} = Z(t)\mathbf{f} + \int_0^t Z(t-s) B Z^{(n)}(s)\mathbf{f} ds \end{cases}$$

Quindi per gli operatori perturbati mediante operatori lineari valgono tutti i risultati di esistenza e unicità per le soluzioni relative ai problemi (1.20) e (1.22) viste nel paragrafo precedente.

1.7 Equazioni d'evoluzione affini

Tale teoria risulterà molto importante nello studio del nostro modello nel caso di condizione di inflow non nullo.

Definizione 1.22. Sia \mathcal{L} un sottospazio vettoriale dello spazio di Banach, un sottospazio \mathcal{L} -affine è un sottoinsieme $\mathcal{A} \subset X$ tale che

$$(i) \quad x_1 - x_2 \in \mathcal{L}, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad x + y \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in \mathcal{A}, \forall y \in \mathcal{L}$$

Definizione 1.23. Sia T intervallo reale, definiamo famiglia \mathcal{L} -affine, ogni famiglia di sottoinsiemi di X , $\{\mathcal{A}_t \mid t \in T\}$ tale che per ogni $t \in T$ il sottoinsieme $\mathcal{A}_t \subset X$ risulta un sottospazio \mathcal{L} -affine.

Si può osservare che per le famiglie affini vale la seguente caratterizzazione

$$\{\mathcal{A}_t \mid t \in T\} \text{ è una famiglia } \mathcal{L}\text{-affine}$$

$$\iff$$

$$\exists p : T \rightarrow X \text{ tale che } \mathcal{A}_t = p(t) + \mathcal{L}, \quad \forall t \in T$$

Una funzione $p : T \rightarrow X$ si fatta si dice rappresentazione della famiglia \mathcal{L} -affine $\{\mathcal{A}_t \mid t \in T\}$

Definizione 1.24. Sia $L : \mathcal{D}(L) \subset X \rightarrow X$ operatore lineare e sia \mathcal{A} un sottospazio $\mathcal{D}(L)$ -affine (L è un operatore lineare e quindi $\mathcal{D}(L)$ è un sottospazio vettoriale di X).

Definiamo operatore L -affine ogni operatore $A : \mathcal{D}(A) = \mathcal{A} \rightarrow X$ tale che

$$A(x + y) = A(x) + Ly, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \text{ e } \forall y \in \mathcal{D}(L)$$

il che equivale a richiedere che $L(x - y) = Ax - Ay, \forall x, y \in \mathcal{D}(A)$

Definizione 1.25. Sia L operatore lineare, definiamo famiglia L -affine una famiglia di operatori $\{A_t \mid t \in T\}$ tale che per ogni $t \in T$, A_t è un operatore L -affine.

Da tale definizione segue che se $\{A_t \mid t \in T\}$ è una L-famiglia affine allora $\{\mathcal{D}(A_t) \mid t \in T\}$ è una famiglia $\mathcal{D}(L)$ -affine.

Consideriamo il problema affine associato alla L-famiglia affine $\{A_t \mid t \in T\}$

$$\begin{cases} u'(t) = A_t(u(t)) , t \in T \\ u(0) = \xi \end{cases} \quad (1.23)$$

Si può provare il seguente risultato che ci permette di studiare il problema affine trasformando la non linearità del dominio in un termine di sorgente, [20].

Teorema 1.12. *Sia $L \in \mathcal{G}(M, \beta; X)$ con $M \geq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ qualsiasi, e sia $\{A_t \mid t \in T\}$ una famiglia L-affine tale che sia possibile determinare una rappresentazione $p : T \rightarrow X$ continua e differenziabile per la famiglia $\mathcal{D}(L)$ -affine data da $\{\mathcal{D}(A_t) \mid t \in T\}$ (e quindi $\mathcal{D}(A_t) = p(t) + \mathcal{D}(L)$, $\forall t \in T$), allora il problema d'evoluzione affine (1.23) è equivalente al seguente problema d'evoluzione non omogeneo*

$$\begin{cases} w'(t) = Lw(t) + A_t(p(t)) - p'(t) , t \in T \\ w(0) = \xi - p(0) \end{cases} \quad (1.24)$$

nel senso che u è una soluzione del problema d'evoluzione affine (1.23) se e solo se $w = u - p$ è una soluzione del problema d'evoluzione non omogeneo (1.24).

Osserviamo che il termine sorgente del problema (1.24) è

$$Q_p(t) := A_t(p(t)) - p'(t)$$

Osservazione 1.7. *Si può osservare che l'aver considerato un problema d'evoluzione affine omogeneo non è affatto limitante perchè, se $\{A_t \mid t \in T\}$ è una famiglia L-affine allora, posto $A_t^q(x) := A_t(x) + q(t)$, risulta che $\{A_t^q \mid t \in T\}$ è ancora una famiglia L-affine e quindi nel caso di equazioni di evoluzione affini i termini sorgente possono sempre essere inglobati all'interno dell'operatore associato al problema.*

Definizione 1.26. Un termine di sorgente $q(t)$ si dice regolare se

(i) q è continua.

(ii) Posto

$$V_q(t) := \int_0^t e^{(t-s)L} q(s) ds, \quad \forall t \in T$$

vale una delle seguenti proprietà:

(a) $V_q : T \rightarrow X$ è continua e differenziabile in T .

(b) $V_q(t) \in \mathcal{D}(L)$, $\forall t \in T$ e la funzione $t \mapsto LV_q(t)$ è continua in t .

Osservazione 1.8. Se q_1 e q_2 sono due termini di sorgente regolari, allora $q := q_1 + q_2$ è anch'esso un termine di sorgente regolare e inoltre valgono le due seguenti implicazioni:

(1) Se q è continua e differenziabile in T , allora q è un termine di sorgente regolare.

(2) Se q è continua in T e $q(t) \in \mathcal{D}(L) \forall t \in T$ e se inoltre la funzione $t \mapsto Lq(t)$ è sommabile in $T \implies q$ è un termine di sorgente regolare.

Teorema 1.13. Sia $f \in \mathcal{G}(M, \beta; X)$ con $M \geq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ e sia $q(t)$ un termine di sorgente regolare, allora $\forall \xi \in \mathcal{D}(L)$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Lu(t) + q(t), & t \in T \\ u(0) = \xi \end{cases} \quad (1.25)$$

ha un'unica soluzione, data da

$$u(t) = e^{tL}\xi + \int_0^t e^{(t-s)L} q(s) ds \quad (1.26)$$

Osservazione 1.9. In realtà perchè la formula (1.26) risulti ben definita è sufficiente che il termine di sorgente $q(t)$ sia integrabile, anche se in tale caso non si ottiene un soluzione stretta del problema (2.41), si prende comunque tale espressione come definizione di una nuova soluzione che prende il nome di soluzione mild.

Otteniamo infine il seguente risultato di esistenza di una soluzione per il problema affine (1.23),[20].

Teorema 1.14. *Sia $L \in \mathcal{G}(M, \beta; X)$ con $M \geq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ e $\{A_t \mid t \in T\}$ una famiglia L -affine tale che la famiglia $\mathcal{D}(L)$ -affine $\{\mathcal{D}(A_t) \mid t \in T\}$ ammetta una rappresentazione p continua e differenziabile in T e inoltre supponiamo che la funzione $Q_p(t) = A_t(p(t)) - p'(t)$ sia un termine sorgente regolare e che il dato iniziale $\xi \in \mathcal{D}(A)$, allora il problema d'evoluzione affine (1.23) ha un'unica soluzione della forma*

$$u(t) := p(t) + e^{tL}(\xi - p(0)) + \int_0^t e^{(t-s)L} [A_s(p(s)) - p'(s)] ds, \quad \forall t \in T \quad (1.27)$$

Si prova inoltre che se si richiede che la rappresentazione $p(t)$ soddisfi le due seguenti proprietà:

- (i) *Esiste la derivata forte $p'(t)$ per quasi ovunque $t \in T$.*
- (ii) *Il termine sorgente $Q_p : T \rightarrow X$ sia sommabile in T .*

Allora la formula trovata non dipende dalla rappresentazione scelta e quindi si ottiene l'unicità della soluzione.

1.7.1 Caso particolare: indipendenza dal tempo

Se l'operatore affine A_t non dipende dal tempo, allora

$$A_t = A_0 =: A, \quad \forall t \in T$$

Ne segue che il problema d'evoluzione affine associato ad A è un sistema autonomo, dato da

$$\begin{cases} u'(t) = A(u(t)), & t \geq 0 \\ u(0) = \xi \end{cases}$$

Alla famiglia $\mathcal{D}(L)$ -affine $\{\mathcal{D}(A)\}$ è quindi associata una rappresentazione costante p_0 tale che $\mathcal{D}(A) = p_0 + \mathcal{D}(L)$.

In questo particolare caso la formula risolutiva (1.27) assume la seguente forma:

$$u(t) := \xi + \int_0^t e^{sL} A(\xi) ds, \quad t \geq 0. \quad (1.28)$$

Capitolo 2

Trasporto radiattivo per due diversi gruppi di frequenza

2.1 Modello

Il fenomeno fisico che ci accingiamo a studiare è un tipico processo di trasporto radiativo.

Si tratta di considerare cosa accade a due fasci di fotoni, rispettivamente a frequenze degli ultravioletti (UV) e degli infrarossi (IR), quando colpiscono una nube interstellare formata da due diversi tipi di polveri.

La differenza principale tra il modello di questo fenomeno e quello classico del trasporto radiativo, ricavato nel capitolo precedente nel relativo paragrafo, è che nel nostro caso, poichè si studia contemporaneamente due diversi raggi di fotoni, si ottiene un problema vettoriale.

I raggi di fotoni partecipano di un normale fenomeno di scattering che esprime la deviazione di velocità subita a seguito degli urti con le molecole che costituiscono la nube. Inoltre, a seguito dei medesimi urti, subiscono anche una variazione di frequenza che da origine a un nuovo termine di scattering. Infatti, quando i fotoni colpiscono una molecola del mezzo ospite (nel nostro caso la nube interstellare) possono, in seguito a tale urto, trasferire parte della loro energia alla molecola stessa. Se ciò accade il raggio di fotoni originato

dopo l'urto avrà un frequenza minore rispetto a quella del raggio che ha dato luogo a tale urto.

Quindi parte dei raggi di fotoni a frequenza UV si trsformeranno, in seguito agli urti, in raggi di fotoni a fequenza IR. Osserviamo che il fenomeno opposto non si può mai verificare perchè corrisponderebbe ad un urto in cui la particella bersaglio (la molecola del mezzo) cede energia alla particella proiettile (il raggio di fotoni), e ciò non è ammissibile per ovvie ragioni fisiche. Il nuovo termine di scattering da considerare dovrà quindi tenere conto proprio dei fotoni IR che si originano a partire da fotoni UV. Si dovrà inoltre considerare il corrispondente fenomeno di assorbimento dovuto a quei fotoni UV che si perdono in quanto si trasformano in fotoni IR.

A partire da queste considerazioni fisiche costruiamo il nostro modello.

Supponiamo inanzitutto che il sistema presenti una simmetria piana, in modo da poter studiare il problema mediante un modello unidimensionale per quanto riguarda la variabile spaziale x , e quindi bidimensionale nello spazio della fasi.

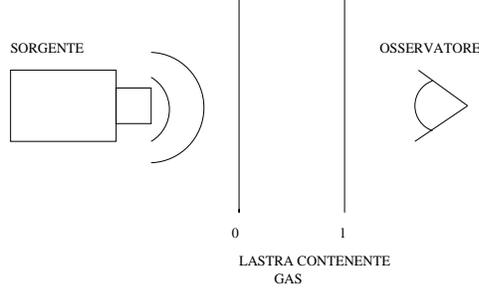
Ricordiamo inoltre che lo spazio delle fasi è definito mediante le variabili (x, μ) , con $\mu = \cos\theta$, dove indichiamo con θ l'angolo tra l'asse spaziale x e il versore velocità, in accordo con quanto visto nel capitolo precedente, e quindi $\mu \in [-1, 1]$.

Supponiamo inoltre che $x \in [0, l]$, con $l > 0$ noto.

Osservazione 2.1. *La supposizione di avere a che fare con un sistema a simmetria piana è una forte approssimazione se si vuole studiare effettivamente il sistema stella-nube interstellare-osservatore, ma diventa molto aderente alla realtà nel caso in cui si applichi a un esperimento fatto in laboratorio.*

Il particolare esperimento che si descrive con tale modello viene attuato considerando un gas contenuto in un recipiente chiuso di forma rettangolare che viene attraversato da un fascio di fotoni emanato mediante un laser o altra sorgente.

Ponendo uno strumento di rilevazione apposito dall'altra parte del recipiente abbiamo un sistema che soddisfa l'ipotesi di simmetria piana.



Indichiamo con (1) e con (2) le polveri che formano la nube interstellare che stiamo considerando e quindi, conseguentemente a tale notazione, denotiamo tutte le corrispondenti quantità. Per esempio indichiamo con $\sigma_{uv, 1}$ e con $\sigma_{ir, 1}$ rispettivamente le sezioni d'urto microscopiche relative ai fotoni UV e ai fotoni IR durante gli urti con le molecole della polvere (1), e con $\sigma_{uv, 2}$ e con $\sigma_{ir, 2}$ quelle corrispondenti invece agli urti tra i fotoni UV e i fotoni IR rispettivamente e le molecole della polvere (2).

Per le precedenti considerazioni sul fenomeno trattato abbiamo che le sezioni d'urto microscopiche si esprimono nel seguente modo.

$$\begin{aligned}\sigma_{uv, i} &= \sigma_{uv, c, i} + \sigma_{uv \rightarrow uv, i} + \sigma_{uv \rightarrow ir, i} \\ \sigma_{ir, i} &= \sigma_{ir, c, i} + \sigma_{ir \rightarrow ir, i}\end{aligned}$$

con $i = 1, 2$.

Dove con $\sigma_{uv, c, i}$ e con $\sigma_{ir, c, i}$ indichiamo le sezioni d'urto microscopiche di cattura relative alle due molecole del mezzo e analogamente con $\sigma_{uv \rightarrow uv, i}$ e con $\sigma_{ir \rightarrow ir, i}$ quelle di scattering che esprimono il fenomeno di deviazione della velocità dei fotoni UV e IR in seguito agli urti.

Infine esprimiamo con $\sigma_{uv \rightarrow ir, i}$ la sezione d'urto di scattering relativa al fenomeno di perdita di energia dei fotoni UV a causa degli urti con le molecole di tipo (1) e (2) e la relativa trasformazione in raggi IR.

Inoltre $k_{uv, i}(x, \mu, \mu'; t)$ rappresenta il nucleo di scattering relativo agli UV che deviano la loro velocità in seguito agli urti e analogamente $k_{ir, i}(x, \mu, \mu'; t)$

il corrispettivo per gli IR, mentre indichiamo con $k_{uv \rightarrow ir, i}(x, \mu, \mu'; t)$ il nucleo di scattering relativo agli UV che, perdendo energia, abbassano la loro frequenza fino a raggiungere quella degli IR, sempre per $i = 1, 2$.

Fatte tali premesse possiamo scrivere le due equazione di trasporto radiattivo che ci permettono di descrivere il nostro modello.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} f_{uv}(x, \mu; t) &= -c\mu \frac{\partial}{\partial x} f_{uv}(x, \mu; t) - (\alpha_1(x) \sigma_{uv, 1} + \alpha_2(x) \sigma_{uv, 2}) f_{uv}(x, \mu; t) \\
&+ \alpha_1(x) \int_{-1}^{+1} k_{uv, 1}(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' \\
&+ \alpha_2(x) \int_{-1}^{+1} k_{uv, 2}(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu'
\end{aligned} \tag{2.1a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} f_{ir}(x, \mu; t) &= -c\mu \frac{\partial}{\partial x} f_{ir}(x, \mu; t) - (\alpha_1(x) \sigma_{ir, 1} + \alpha_2(x) \sigma_{ir, 2}) f_{ir}(x, \mu; t) \\
&+ \alpha_1(x) \int_{-1}^{+1} k_{ir, 1}(x, \mu, \mu'; t) f_{ir}(x, \mu'; t) d\mu' \\
&+ \alpha_2(x) \int_{-1}^{+1} k_{ir, 2}(x, \mu, \mu'; t) f_{ir}(x, \mu'; t) d\mu' \\
&+ \alpha_1(x) \int_{-1}^{+1} k_{uv \rightarrow ir, 1}(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' \\
&+ \alpha_2(x) \int_{-1}^{+1} k_{uv \rightarrow ir, 2}(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu'
\end{aligned} \tag{2.1b}$$

Osserviamo che non è possibile studiare le due equazioni separatamente perchè il termine di scattering relativo al cambiamento di frequenza le rende accoppiate.

Osserviamo anche che per quanto riguarda il problema diretto il fatto di avere a che fare con due polveri diverse non porta nessun significativo contributo e quindi le relative quantità si possono inglobare in un'unica che non tenga conto di tale differenza.

Quindi poniamo

$$\begin{aligned}\Sigma_{uv, c}(x) &= \alpha_1(x) \sigma_{uv, c, 1} + \alpha_2(x) \sigma_{uv, c, 2} \\ \Sigma_{uv \rightarrow uv}(x) &= \alpha_1(x) \sigma_{uv \rightarrow uv, 1} + \alpha_2(x) \sigma_{uv \rightarrow uv, 2} \\ \Sigma_{ir \rightarrow ir}(x) &= \alpha_1(x) \sigma_{ir \rightarrow ir, 1} + \alpha_2(x) \sigma_{ir \rightarrow ir, 2} \\ \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) &= \alpha_1(x) \sigma_{uv \rightarrow ir, 1} + \alpha_2(x) \sigma_{uv \rightarrow ir, 2}\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\Sigma_{uv}(x) &= \alpha_1(x) \sigma_{uv, 1} + \alpha_2(x) \sigma_{uv, 2} \\ \Sigma_{ir}(x) &= \alpha_1(x) \sigma_{ir, 1} + \alpha_2(x) \sigma_{ir, 2}\end{aligned}$$

Analogamente ridefiniamo i nuclei di convoluzione

$$\begin{aligned}K_{uv}(x, \mu, \mu'; t) &= \alpha_1(x) k_{uv, 1}(x, \mu, \mu'; t) + \alpha_2(x) k_{uv, 2}(x, \mu, \mu'; t) \\ K_{ir}(x, \mu, \mu'; t) &= \alpha_1(x) k_{ir, 1}(x, \mu, \mu'; t) + \alpha_2(x) k_{ir, 2}(x, \mu, \mu'; t) \\ K_{uv \rightarrow ir}(x, \mu, \mu'; t) &= \alpha_1(x) k_{uv \rightarrow ir, 1}(x, \mu, \mu'; t) + \alpha_2(x) k_{uv \rightarrow ir, 2}(x, \mu, \mu'; t)\end{aligned}$$

Con tali sostituzioni le equazioni (2.1a) e (2.1b) si scrivono

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f_{uv}(x, \mu; t) &= -c\mu \frac{\partial}{\partial x} f_{uv}(x, \mu; t) - \Sigma_{uv}(x) f_{uv}(x, \mu; t) \\ &+ \int_{-1}^{+1} K_{uv}(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu'\end{aligned}\tag{2.2a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f_{ir}(x, \mu; t) &= -c\mu \frac{\partial}{\partial x} f_{ir}(x, \mu; t) - \Sigma_{ir}(x) f_{ir}(x, \mu; t) \\ &+ \int_{-1}^{+1} K_{ir}(x, \mu, \mu'; t) f_{ir}(x, \mu'; t) d\mu' \\ &+ \int_{-1}^{+1} K_{uv \rightarrow ir}(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu'\end{aligned}\tag{2.2b}$$

Definiamo ora un'unica equazione vettoriale che esprima contemporaneamente le equazioni (2.2a) e (2.2b).

Prima di fare ciò è però necessario soffermarci su qualche altra notazione.

Inanzitutto esprimiamo la sezione d'urto nel caso vettoriale mediante la seguente matrice diagonale

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{uv} & 0 \\ 0 & \Sigma_{ir} \end{pmatrix}$$

Mentre il nucleo di scattering è espresso tramite la seguente matrice triangolare inferiore

$$K = \begin{pmatrix} K_{uv} & 0 \\ K_{uv \rightarrow ir} & K_{ir} \end{pmatrix}$$

A questo punto è sufficiente porre

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_{uv} \\ f_{ir} \end{pmatrix}$$

e otteniamo la seguente equazione vettoriale

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(x, \mu; t) &= -c\mu \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(x, \mu; t) - \Sigma(x) \mathbf{f}(x, \mu; t) \\ &+ \int_{-1}^1 K(x, \mu, \mu'; t) \mathbf{f}(x, \mu'; t) d\mu' \end{aligned} \quad (2.3)$$

Resta ora da associare all'equazione (2.3) delle opportune condizioni iniziali e al bordo, entrambe ovviamente vettoriali.

Le condizioni iniziali saranno quanto più possibile generiche, ovvero

$$\mathbf{f}(x, \mu; 0) = \mathbf{f}_0(x, \mu), \quad \forall x \in (0, l) \text{ e } \forall \mu \in [-1, 1] \quad (2.4)$$

con $\mathbf{f}_0(x, \mu)$ funzione assegnata.

Come condizioni al bordo in questo primo paragrafo considereremo le condizioni d'inflow nullo che, in generale, si esprimono come segue

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{v}; t)|_{\Upsilon^{in}} = 0 \quad (2.5)$$

con $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{v} \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$ domini limitati e con

$$\Upsilon^{in} := \{(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \in \Omega \times \Theta \mid \mathbf{n}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{v} > 0\}$$

con $\mathbf{n}(\mathbf{s})$ normale interna a Ω nel punto \mathbf{s} .

Osservazione 2.2. Analogamente, se si volesse dare delle condizioni al bordo di outflow nullo, dovremmo porre

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{v}; t) \Big|_{\Upsilon^{out}} = 0 \quad (2.6)$$

dove, usando le precedenti notazioni, abbiamo che

$$\Upsilon^{out} := \{(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \in \Omega \times \Theta \mid \mathbf{n}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{v} < 0\}$$

Nel nostro modello, per le caratteristiche del dominio nello spazio delle fasi in cui sono definite le variabili del problema, le condizioni d'inflow nullo si possono scrivere come segue

$$\begin{cases} \mathbf{f}(0, \mu; t) = 0, & \forall \mu \in (0, 1) \text{ e } t > 0 \\ \mathbf{f}(l, \mu; t) = 0, & \forall \mu \in (-1, 0) \text{ e } t > 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

In definitiva il modello che descrive il fenomeno fisico trattato all'interno di questa tesi è dato dal seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(x, \mu; t) = -c\mu \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(x, \mu; t) - \Sigma(x) \mathbf{f}(x, \mu; t) \\ \quad + \int_{-1}^1 K(x, \mu, \mu'; t) \mathbf{f}(x, \mu'; t) d\mu', \quad \forall x \in (0, l), \quad \forall \mu \in (-1, 1) \text{ e } t > 0 \\ \mathbf{f}(x, \mu; 0) = \mathbf{f}_0(x, \mu), \quad \forall x \in (0, l) \text{ e } \forall \mu \in (-1, 1) \\ \mathbf{f}(0, \mu; t) = 0, \quad \forall \mu \in (0, 1) \text{ e } t > 0 \\ \mathbf{f}(l, \mu; t) = 0, \quad \forall \mu \in (-1, 0) \text{ e } t > 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

2.2 Problema evolutivo con condizioni di inflow nullo

Prima di cercare di dimostrare l'esistenza di una e una sola soluzione stretta per il problema evolutivo (2.8) dobbiamo fissare lo spazio di Banach in cui ci poniamo per studiare il nostro problema.

Scegliamo come spazio di Banach lo spazio

$$X = L^1((0, l) \times (-1, 1)) \oplus L^1((0, l) \times (-1, 1))$$

con la seguente norma

$$\|\mathbf{f}\|_X = \|f_{uv}\|_1 + \|f_{ir}\|_1$$

Osservazione 2.3. *Osserviamo che la precedente funzione definita come somma della usuale norma L^1 applicata rispettivamente sulle due componenti della nostra funzione è effettivamente una norma.*

Definizione 2.1. *Definiamo un'opportuna funzione $\mathbf{u} : [0, +\infty) \rightarrow X$ mediante la quale studiare il nostro problema iniziale, ponendo*

$$\mathbf{u}(t) := \mathbf{f}(x, \mu; t) \in X, \quad \forall t \geq 0$$

Notiamo che anche la funzione $\mathbf{u}(t)$ è una quantità vettoriale, quindi la sua definizione esplicitando le componenti sarà la seguente:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_{uv}(t) \\ u_{ir}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{uv}(x, \mu; t) \\ f_{ir}(x, \mu; t) \end{pmatrix}$$

Definiamo i due seguenti operatori

(1)

$$B\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -c\mu \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -c\mu \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \mathbf{f}$$

con dominio

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(B) = \{ \mathbf{f} \in X \mid B\mathbf{f} \in X, \mathbf{f}(0, \mu; t) = 0, \forall \mu \in (0, 1), \forall t \geq 0 \\ \mathbf{f}(l, \mu; t) = 0, \forall \mu \in (-1, 0), \forall t \geq 0 \} \end{aligned}$$

(2)

$$J\mathbf{f} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ J_2 & J_3 \end{pmatrix} \mathbf{f}$$

con dominio $\mathcal{D}(J) = X$ e con

$$J_1 f = \int_{-1}^{+1} K_{uv}(x, \mu, \mu'; t) f(x, \mu'; t) d\mu'$$

$$J_2 f = \int_{-1}^{+1} K_{uv \rightarrow ir}(x, \mu, \mu'; t) f(x, \mu'; t) d\mu'$$

$$J_3 f = \int_{-1}^{+1} K_{ir}(x, \mu, \mu'; t) f(x, \mu'; t) d\mu'$$

Con tali notazioni l'equazione da studiare diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(t) = (B - \Sigma + J) \mathbf{u}(t), & t > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

con $\mathbf{u}_0 \in X$ noto.

Teorema 2.1. *Se le sezioni d'urto sono essenzialmente limitate il $(0, l)$, il problema (2.9) ammette una e una sola soluzione stretta, purchè il dato iniziale \mathbf{u}_0 appartenga al dominio del problema $\mathcal{D}(A)$, dove con A indichiamo l'operatore $B - \Sigma + J$.*

Inoltre tale soluzione è della forma

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA} \mathbf{u}_0$$

dove e^{tA} rappresenta il semigruppato associato all'operatore A .

Osservazione 2.4. *Poichè $\mathcal{D}(\Sigma) = \mathcal{D}(J) = X$, ne segue che $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.*

A questo punto risulta necessario scrivere in dettaglio la struttura dei nuclei di scattering.

Poniamo $k_1 = K_{uv}$, $k_2 = K_{uv \rightarrow ir}$, $k_3 = K_{ir}$ in analogia con le notazioni scelte per gli operatori integrali J_1, J_2, J_3 .

Sappiamo che ciascun nucleo di scattering è il prodotto della sezione d'urto

di scattering relativa con una densità di probabilità.

Quindi possiamo porre

$$\begin{aligned} k_1(x, \mu, \mu'; t) &= \Sigma_{uv}(x) p_1(x, \mu, \mu'; t) \\ k_2(x, \mu, \mu'; t) &= \Sigma_{ir}(x) p_2(x, \mu, \mu'; t) \\ k_3(x, \mu, \mu'; t) &= \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) p_3(x, \mu, \mu'; t) \end{aligned}$$

con $p_i(x, \mu, \mu'; t)$ soddisfacente le seguenti proprietà :

- (i) $p_i(x, \mu, \mu'; t) \geq 0$ per quasi ovunque $x \in (0, l)$, $\mu, \mu' \in (-1, 1)$ e $\forall t \geq 0$.
- (ii) $p_i(x, \mu, \mu'; t)$ simmetrica in μ e μ' .
- (iii) $p_i(x, \mu, \mu'; t)$ densità di probabilità rispetto a μ' e quindi per (ii) anche rispetto a μ .

Quindi $p_i(x, \mu, \mu'; t)$ è tale che

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p_i(x, \mu, \mu'; t) d\mu' &= 1 \\ \int_{-1}^1 p_i(x, \mu, \mu'; t) d\mu &= 1 \end{aligned}$$

per $i = 1, 2, 3$.

Osservazione 2.5. *I nuclei di scattering sono sempre funzioni positive quasi ovunque poichè prodotto di una costante positiva per una funzione positiva quasi ovunque.*

Osservazione 2.6. *I nuclei di scattering sono tali che*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 k_1(x, \mu, \mu'; t) d\mu' &= \int_{-1}^1 k_1(x, \mu, \mu'; t) d\mu = \Sigma_{uv}(x) \\ \int_{-1}^1 k_2(x, \mu, \mu'; t) d\mu' &= \int_{-1}^1 k_2(x, \mu, \mu'; t) d\mu = \Sigma_{ir}(x) \\ \int_{-1}^1 k_3(x, \mu, \mu'; t) d\mu' &= \int_{-1}^1 k_3(x, \mu, \mu'; t) d\mu = \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) \end{aligned}$$

Lemma 2.1. *Per l'operatore J valgono le due seguenti proprietà.*

- (i) Se le sezioni d'urto di scattering appartengono a $L^\infty(0, l)$, allora $J \in \mathcal{B}(X)$.
- (ii) J è un operatore positivo, ovvero $J(X^+) \subset X^+$, dove con X^+ indichiamo il cono positivo in accordo con le notazioni introdotte nel capitolo precedente.

Dimostrazione (Lemma 2.1)

- (i) Cerchiamo un'opportuna stima per la norma dell'operatore J per provare che è limitato.

$$\|J\mathbf{f}\|_X = \|J_1 f_{uv}\|_1 + \|J_2 f_{uv} + J_3 f_{ir}\|_1 \leq \|J_1 f_{uv}\|_1 + \|J_2 f_{uv}\|_1 + \|J_3 f_{ir}\|_1$$

Stimiamo contemporaneamente le tre norme ottenute, indicando con $\Sigma_{s,i}$ per $i = 1, 2, 3$ le sezioni d'urto di scattering relative ai nuclei di scattering k_i, k_2, k_3 rispettivamente.

$$\begin{aligned} \|J_i f\|_1 &= \int_{-1}^1 d\mu \int_0^l dx \left| \int_{-1}^1 k_i(x, \mu, \mu'; t) f(x, \mu'; t) d\mu' \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 d\mu \int_0^l dx \int_{-1}^1 k_i(x, \mu, \mu'; t) |f(x, \mu'; t)| d\mu' \\ &= \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^l |f(x, \mu'; t)| dx \int_{-1}^1 k_i(x, \mu, \mu'; t) d\mu \\ &= \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^l \Sigma_{s,i}(x) |f(x, \mu'; t)| dx \leq \|\Sigma_{s,i}\|_\infty \|f\|_1 \end{aligned}$$

per $i = 1, 2, 3$ e $f \in L^1((0, l) \times (-1, 1))$.

Quindi, utilizzando le stime appena ottenute per valutare la nostra norma di partenza, si ottiene

$$\|J\mathbf{f}\|_X \leq \|\Sigma_{uv}\|_\infty \|f_1\|_1 + \|\Sigma_{uv \rightarrow ir}\|_\infty \|f_1\|_1 + \|\Sigma_{ir}\|_\infty \|f_2\|_1$$

Poniamo $M = \max \{2\|\Sigma_{uv}\|_\infty, 2\|\Sigma_{uv \rightarrow ir}\|_\infty, \|\Sigma_{ir}\|_\infty\}$.

Abbiamo quindi la seguente stima della norma di J .

$$\|J\mathbf{f}\|_X \leq M(\|f_1\|_1 + \|f_2\|_1) = M\|\mathbf{f}\|_X$$

Da cui si conclude che

$$\|J\| \leq M$$

Per le ipotesi fatte sulle sezioni d'urto di scattering, dalla precedente stima si ottiene che $J \in \mathcal{B}(X)$.

(ii) Calcoliamo l'immagine del cono positivo tramite l'operatore J .

Sia $\mathbf{f} \in X^+$, cioè

$$\begin{cases} f_1(x, \mu; t) \geq 0, & \text{q.o. } x \in (0, l) \text{ e } \mu \in (-1, 1) \\ f_2(x, \mu; t) \geq 0, & \text{q.o. } x \in (0, l) \text{ e } \mu \in (-1, 1) \end{cases}$$

Sfruttando il fatto che i nuclei di scattering k_1, k_2, k_3 sono anch'esse funzioni positive quasi ovunque, dalla seguente scrittura otteniamo che $J\mathbf{f}$ è una funzione a componenti positive quasi ovunque.

Infatti

$$(J\mathbf{f})_1 = J_1 f_1 = \int_{-1}^1 k_1(x, \mu, \mu'; t) f_1(x, \mu'; t) d\mu'$$

$$(J\mathbf{f})_2 = J_2 f_1 + J_3 f_2 = \int_{-1}^1 k_2(x, \mu, \mu'; t) f_1(x, \mu'; t) d\mu' + \int_{-1}^1 k_3(x, \mu, \mu'; t) f_2(x, \mu'; t) d\mu'$$

Infatti dalla precedente scrittura si osserva che le componenti di $J\mathbf{f}$ sono entrambe somma di funzioni positive quasi ovunque (in quanto integrali di funzioni positive quasi ovunque) e quindi esse stesse positive quasi ovunque.

Quindi $J\mathbf{f} \in X^+$.

□

Osservazione 2.7. *Osserviamo che l'ipotesi del teorema implica in particolare l'ipotesi del lemma. Infatti se le sezioni d'urto totali sono essenzialmente limitate allora lo sono anche tutte le altre.*

Passiamo ora a studiare l'operatore B .

Lemma 2.2. *Per l'operatore B valgono le seguenti proprietà:*

(i) $B \in \mathcal{G}(1, 0; X)$

(ii) $e^{tB}(X^+) \subset X^+$

Dimostrazione (Lemma 2.2)

(i) Osserviamo inanzitutto che B è densamente distribuito poichè

$$C_0^\infty((0, l) \times (-1, 1)) \oplus C_0^\infty((0, l) \times (-1, 1)) \subset \mathcal{D}(B) \text{ e quindi } \overline{\mathcal{D}(B)} = X.$$

Consideriamo $\mathbf{g}(t) \in X$ per $t \geq 0$ e $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, l'equazione del risolvente associata è

$$(zI - B)\mathbf{f} = \mathbf{g} \tag{2.10}$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{f} + \frac{z}{c\mu}\mathbf{f} = \frac{1}{c\mu}\mathbf{g} \tag{2.11}$$

Poichè non compare nessuna derivata rispetto a μ , possiamo considerare μ come parametro e quindi l'equazione vettoriale (2.11) diventa una famiglia di equazioni vettoriali dipendente dal parametro $\mu \in (-1, 1)$.

La soluzione esplicita di tale famiglia di equazioni in dipendenza dal parametro μ è data dalla seguente formula

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x, \mu; t) &= e^{-\frac{z}{c\mu}x} \left(\mathbf{c}(\mu; t) + \int_0^x \frac{1}{c\mu} \mathbf{g}(x', \mu; t) e^{\frac{z}{c\mu}x'} dx' \right) \\ &= \mathbf{c}(\mu; t) e^{-\frac{z}{c\mu}x} + \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{-\frac{z}{c\mu}(x-x')} \mathbf{g}(x', \mu; t) dx' \end{aligned}$$

Per determinare il vettore costante (ovviamente anch'esso in funzione del parametro μ) dobbiamo imporre le condizioni al bordo

$$\mathbf{f}(0, \mu; t) = 0, \quad \text{per } \mu \in (0, 1] \text{ e } t \geq 0 \tag{2.12a}$$

$$\mathbf{f}(l, \mu; t) = 0, \quad \text{per } \mu \in [-1, 0) \text{ e } t \geq 0 \tag{2.12b}$$

Dalle precedenti condizioni si ottiene

$$\mathbf{c}(\mu; t)e^{-\frac{z}{c\mu}x} = 0 \implies \mathbf{c}(\mu; t) = 0, \text{ per } \mu \in (0, 1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(\mu; t)e^{-\frac{z}{c\mu}l} + \frac{1}{c\mu} \int_0^l e^{-\frac{z}{c\mu}(l-x')} \mathbf{g}(x', \mu; t) dx' &= 0 \\ \implies \mathbf{c}(\mu; t) &= -\frac{1}{c\mu} \int_0^l e^{\frac{z}{c\mu}x'} \mathbf{g}(x', \mu; t) dx', \text{ per } \mu \in (-1, 0) \end{aligned}$$

In definitiva la costante è data da

$$\mathbf{c}(\mu; t) = \begin{cases} 0, & \mu \in (0, 1) \\ -\frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{\frac{z}{c\mu}x'} \mathbf{g}(x', \mu; t) dx', & \mu \in (-1, 0) \end{cases}$$

Sostituiamo alla formula trovata per \mathbf{f} la precedente espressione per costante \mathbf{c}

$$\mathbf{f}(x, \mu; t) = \begin{cases} \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{-\frac{z}{c\mu}(x-x')} \mathbf{g}(x', \mu; t) dx', & \mu \in (0, 1) \text{ e } x \in (0, l) \\ -\frac{1}{c\mu} \int_0^l e^{-\frac{z}{c\mu}(x-x')} \mathbf{g}(x', \mu; t) dx' + \\ \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{-\frac{z}{c\mu}(x-x')} \mathbf{g}(x', \mu; t) dx', & \mu \in (-1, 0) \text{ e } x \in (0, l) \end{cases}$$

e quindi

$$\mathbf{f}(x, \mu; t) = \begin{cases} \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{-\frac{z}{c\mu}(x-x')} \mathbf{g}(x', \mu; t) dx', & \mu \in (0, 1) \text{ e } x \in (0, l) \\ -\frac{1}{c\mu} \int_x^l e^{-\frac{z}{c\mu}(x-x')} \mathbf{g}(x', \mu; t) dx' + \\ \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{-\frac{z}{c\mu}(x-x')} \mathbf{g}(x', \mu; t) dx', & \mu \in (-1, 0) \text{ e } x \in (0, l) \end{cases} \quad (2.13)$$

Valutiamo ora la norma dell'espressione trovata per la soluzione.

1. Sia $\alpha > 0$ e $\mu \in (0, 1)$.

$$|f_i(x, \mu; t)| \leq \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(x-x')} |g_i(x', \mu; t)| dx', \text{ con } i = 1, 2, 3$$

Integrando in $d\mu$ tra 0 e 1, si ottiene

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\mu \int_0^l |f_i(x, \mu; t)| dx \\
& \leq \frac{1}{c} \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \int_0^l dx \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(x-x')} |g_i(x', \mu; t)| dx' \\
& = \frac{1}{c} \int_0^1 \frac{1}{\mu} d\mu \int_0^l |g_i(x', \mu; t)| dx' \int_{x'}^l e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(x-x')} dx \\
& = \frac{1}{c} \int_0^1 \frac{1}{\mu} d\mu \int_0^l |g_i(x', \mu; t)| \frac{c\mu}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(l-x)}\right) dx' \\
& \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^1 d\mu \int_0^l |g_i(x', \mu; t)| dx'
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^1 d\mu \int_0^l |f_i(x, \mu; t)| dx \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^1 d\mu \int_0^l |g_i(x', \mu; t)| dx' \quad (2.14)$$

con $\alpha > 0$ e $\mu \in (0, 1)$ e per $i = 1, 2, 3$.

2. Sia $\alpha > 0$ e $\mu \in (-1, 0)$.

$$|f_i(x, \mu; t)| \leq -\frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(x-x')} |g_i(x', \mu; t)| dx', \text{ con } i = 1, 2, 3$$

Integrando in $d\mu$ tra -1 e 0, analogamente a quanto appena fatto, si ottiene

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^0 d\mu \int_0^l |f_i(x, \mu; t)| dx \\
& \leq -\frac{1}{c} \int_{-1}^0 \frac{d\mu}{\mu} \int_0^l dx \int_x^l e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(x-x')} |g_i(x', \mu; t)| dx' \\
& = -\frac{1}{c} \int_{-1}^0 \frac{1}{\mu} d\mu \int_0^l |g_i(x', \mu; t)| dx' \int_{x'}^l e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(x-x')} dx \\
& = \frac{1}{c} \int_{-1}^0 \frac{1}{\mu} d\mu \int_0^l |g_i(x', \mu; t)| \frac{c\mu}{\alpha} \left(1 - e^{\frac{\alpha}{c\mu}(l-x)}\right) dx' \\
& \leq \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^0 d\mu \int_0^l |g_i(x', \mu; t)| dx'
\end{aligned}$$

Da cui

$$\int_{-1}^0 d\mu \int_0^l |f_i(x, \mu; t)| dx \leq \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^0 d\mu \int_0^l |g_i(x', \mu; t)| dx' \quad (2.15)$$

con $\alpha > 0$ e $\mu \in (-1, 0)$ e per $i = 1, 2, 3$.

Si ottiene quindi la seguente stima per la norma di f_i , per $i = 1, 2, 3$

$$\|f_i\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|g_i\|_1 \quad (2.16)$$

e quindi abbiamo la seguente stima per la norma di \mathbf{f} .

$$\|\mathbf{f}\|_X \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{g}\|_X \quad (2.17)$$

Quindi l'equazione (2.10) ha una e una sola soluzione $\forall \mathbf{g} \in X$ e $\forall z \in \mathbb{C}$ tale che $\alpha = \operatorname{Re} z > 0$.

La forma della soluzione è la seguente

$$\mathbf{f} = R(z, B)\mathbf{g} = (zI - B)^{-1}\mathbf{g}$$

ed è tale che

$$\|R(z, B)\mathbf{g}\|_X \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{g}\|_X, \quad \forall \mathbf{g} \in X \text{ e } \alpha > 0$$

Quindi

$$\|R(z, B)\| \leq \frac{1}{\alpha}$$

Resta da provare che l'operatore B è chiuso.

Per ottenere ciò sfruttiamo il Teorema 1.4, che ci dice che la somma di un operatore chiuso e di un operatore limitato è ancora un operatore chiuso.

Per sfruttare tale risultato è sufficiente osservare che

$$(zI - B)^{-1} \in \mathcal{B}(X) \implies -(zI - B)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$$

e quindi poichè $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{C}(X)$, allora $-(zI - B)^{-1} \in \mathcal{C}(X)$.

Applicando un'altra caratterizzazione degli operatori chiusi, illustrata anch'essa nel Teorema 1.4 appena richiamato, si ha che

$$-(zI - B) \in \mathcal{C}(X)$$

Inoltre $zI \in \mathcal{B}(X)$.

Da cui, applicando il risultato sopra richiamato, si ottiene che

$$B \in \mathcal{C}(X)$$

Mettendo insieme quanto dimostrato, si ottiene infine la tesi

$$B \in \mathcal{G}(1, 0; X)$$

(ii) In tale caso si procede esattamente come nel caso scalare di un'equazione del trasporto radiattivo classica, [17].

Se $t = 0$, allora e^{tB} coincide con l'identità e quindi ovviamente mappa il cono positivo X^+ in sé.

Consideriamo ora $t > 0$ e $\mathbf{g} \in X^+$, allora ponendo $z = n/t$, costruiamo la seguente successione

$$\mathbf{f}_n = \left\{ \frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, B\right) \right\}^n \mathbf{g}, \quad n \in \mathbb{N}$$

A questo punto è sufficiente osservare che $\mathbf{f}_n \in X^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e che \mathbf{f}_n è propriamente una successione approssimante per il semigruppato associato a B calcolato in \mathbf{g} , cioè

$$e^{tB} \mathbf{g} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, B\right) \right\}^n \mathbf{g}$$

Poichè X^+ è un sottospazio vettoriale chiuso di X , allora dalle precedenti osservazioni segue subito che

$$e^{tB} \mathbf{g} \in X^+$$

Da cui si ottiene la tesi. □

Lemma 2.3. *Supponiamo che $\Sigma_{uv}, \Sigma_{ir} \in L^\infty(0, l)$, allora*

- (i) $A_1 = B - \Sigma \in \mathcal{G}(1, M_\sigma; X)$.
- (ii) $e^{tA_1}(X^+) \subset X^+, \quad \forall t \geq 0$.
- (iii) $A = B - \Sigma + J \in \mathcal{G}(1, M_\sigma + M; X)$, con $M_\sigma = \max \{ \|\Sigma_{uv}\|_\infty, \|\Sigma_{ir}\|_\infty \}$.
- (iv) $e^{tA}(X^+) \subset X^+, \quad \forall t \geq 0$.

Dimostrazione (Lemma 2.3)

- (i) Dobbiamo provare che $-\Sigma \in \mathcal{B}(X)$ e che la sua norma è stimata mediante M_σ .

Da ciò infatti segue immediatamente la tesi poichè abbiamo già provato che $B \in \mathcal{G}(1, 0; X)$ e quindi il Teorema 1.11 ci assicura che $A_1 \in \mathcal{G}(1, M_\sigma; X)$.

$$\|\Sigma \mathbf{f}\|_X = \|\Sigma_{uv} f_1\|_1 + \|\Sigma_{ir} f_2\|_1 \leq \|\Sigma_{uv}\|_\infty \|f_1\|_1 + \|\Sigma_{ir}\|_\infty \|f_2\|_1$$

Quindi

$$\|\Sigma \mathbf{f}\|_X \leq M_\sigma \|\mathbf{f}\|_X$$

Da cui segue che $\|\Sigma\| \leq M_\sigma$ e, per le ipotesi fatte su le sezioni d'urto, segue anche che $\Sigma \in \mathcal{B}(X)$.

- (ii) Segue immediatamente dalla seconda parte del Teorema 1.11.
Infatti è immediato osservare che se $\mathbf{f} \in X^+$, allora $Z^{(n)}(t)\mathbf{f} \in X^+$ e quindi $\widehat{Z}(t)\mathbf{f} \in X^+$ perchè limite di funzioni a componenti positive quasi ovunque.
- (iii) Basta osservare che $A_1 \in \mathcal{G}(1, M_\sigma; X)$.
Da ciò, applicando il risultato utilizzato per dimostrare il punto (i) e usando il fatto che $J \in \mathcal{B}(X)$ e inoltre $\|J\| \leq M$, come dimostrato nel Lemma 2.2, segue immediatamente la tesi.
- (iv) Si procede esattamente come fatto per provare il passo (ii).

□

Dimostrazione (Teorema 2.1)

Una volta provato che $A = B - \Sigma + J \in \mathcal{G}(1, M_\sigma + M; X)$, è sufficiente applicare il Teorema di Hille-Yosida per ottenere il risultato di esistenza e unicità espresso mediante la tesi del teorema.

□

Osservazione 2.8. *Il teorema che è stato dimostrato in questo paragrafo considerando lo spazio di Banach $X = L^1((0, l) \times (-1, 1)) \oplus L^1((0, l) \times (-1, 1))$ vale anche se consideriamo $X = L^p((0, l) \times (-1, 1)) \oplus L^p((0, l) \times (-1, 1))$ per $1 < p < +\infty$, con la norma definita, $\forall \mathbf{f} \in X$, da*

$$\|\mathbf{f}\|_X := \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$$

e si può generalizzare anche considerando la norma definita come la seguente variante della precedente norma

$$\|\mathbf{f}\|_X := (\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p)^{1/p}$$

Osserviamo anche che le due norme sopra definite sono due norme equivalenti.

Dimostrazione (Osservazione 2.8)

Dimostriamo che quanto visto vale considerando $X = L^p((0, l) \times (-1, 1)) \oplus L^p((0, l) \times (-1, 1))$ con la prima delle due norme definite su di esso.

Una volta provata tale generalizzazione l'altra segue banalmente.

Si sfruttano i lemmi precedenti che continuano a valere con enunciato del tutto invariato.

Le dimostrazioni rimangono anch'esse invariate nella sostanza, variano soltanto i calcoli necessari per ottenere la stima delle norme sia nel Lemma 2.1 che nel Lemma 2.2.

Vediamo più in dettaglio come.

(a) Stimiamo la norma dell'operatore J.

Sia $\mathbf{f} \in X$, allora

$$\|J\mathbf{f}\|_X \leq \|J_1 f_1\|_p + \|J_2 f_1\|_p + \|J_3 f_2\|_p$$

Quindi, per $i = 1, 2, 3$ otteniamo le seguenti stime

$\forall f \in L^p((0, l) \times (-1, 1))$

$$\begin{aligned} \|J_i f\|_p^p &= \int_{-1}^1 d\mu \int_0^l \left| \int_{-1}^1 k_i(x, \mu, \mu'; t) f(x, \mu'; t) d\mu' \right|^p dx \\ &\leq \int_{-1}^1 d\mu \int_0^l \left(\int_{-1}^1 k_i(x, \mu, \mu'; t) |f(x, \mu'; t)| d\mu' \right)^p dx \end{aligned}$$

Usando Hölder con esponente p e p' , dove con p' indichiamo il coniugato di p , dalla precedente catena si ottiene

$$\begin{aligned} \|J_i f\|_p^p &\leq \\ &\int_{-1}^1 d\mu \int_0^l \left(\int_{-1}^1 k_i(x, \mu, \mu'; t)^{p'} d\mu' \right)^{p/p'} \left(\int_{-1}^1 |f(x, \mu'; t)|^p d\mu' \right) dx \end{aligned}$$

Consideriamo ora, come fatto in precedenza, la scrittura in dettaglio dei nuclei di scattering del nostro modello per calcolarne l'integrale.

$$\int_{-1}^1 k_i(x, \mu, \mu'; t)^{p'} d\mu' = \Sigma_{s,i}(x)^{p'} \int_{-1}^1 p_i(x, \mu, \mu'; t)^{p'} d\mu'$$

Poichè $p_i(x, \mu, \mu'; t)$ è positiva per quasi ovunque $\mu' \in (-1, 1)$, e il suo integrale su tale intervallo è 1, allora deve necessariamente risultare

$$p_i(x, \mu, \mu'; t) \leq 1 \quad \text{per quasi ovunque } \mu' \in (-1, 1)$$

Quindi, considerando il fatto che $p' > 1$, si ottiene la seguente maggiorazione per l'integrale del nucleo di scattering

$$\int_{-1}^1 p_i(x, \mu, \mu'; t)^{p'} d\mu' \leq \int_{-1}^1 p_i(x, \mu, \mu'; t) d\mu' = 1$$

Da cui

$$\Sigma_{s,i}(x)^{p'} \int_{-1}^1 p_i(x, \mu, \mu'; t)^{p'} d\mu' \leq \Sigma_{s,i}(x)^{p'}$$

Sfruttando tale risultato per stimare la norma di Jf , abbiamo

$$\begin{aligned} \|J_i f\|_p^p &\leq \int_{-1}^1 d\mu \int_0^l \Sigma_{s,i}(x)^p dx \int_{-1}^1 |f(x, \mu'; t)| d\mu' \\ &\leq 2 \|\Sigma_{s,i}(x)\|_\infty^p \int_0^l dx \int_{-1}^1 |f(x, \mu'; t)| d\mu' \leq \left(2^{1/p} \|\Sigma_{s,i}(x)\|_\infty \|f\|_p\right)^p \end{aligned}$$

Quindi

$$\|J\| \leq M$$

con $M := \max \{2^{1/p+1} \|\Sigma_{uv}\|_\infty, 2^{1/p+1} \|\Sigma_{uv \rightarrow ir}\|_\infty, 2^{1/p} \|\Sigma_{ir}\|_\infty\}$.

- (b) Stimiamo la norma della funzione trovata come soluzione dell'equazione risolvente per B, per provare che appartiene al nostro spazio di Banach X.

Sia $\alpha > 0$ e $\mu \in (0, 1)$.

$$|f_i(x, \mu; t)| \leq \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(x-x')} |g_i(x', \mu; t)| dx'$$

Da cui

$$\begin{aligned} |f_i(x, \mu; t)|^p &\leq \frac{1}{c^p \mu^p} \left(\int_0^x e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(x-x')} |g_i(x', \mu; t)| dx' \right)^p \\ &= \frac{1}{c^p \mu^p} \left(\int_0^x e^{-\frac{\alpha}{p'c\mu}(x-x')} e^{-\frac{\alpha}{pc\mu}(x-x')} |g_i(x', \mu; t)| dx' \right)^p \\ &\leq \frac{1}{c^p \mu^p} \left(\int_0^x e^{-\frac{\alpha}{p'c\mu} p'(x-x')} dx' \right)^{p/p'} \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{pc\mu} p(x-x')} |g_i(x', \mu; t)| dx' \\ &= \frac{1}{c^p \mu^p} \frac{c^{p/p'} \mu^{p/p'}}{\alpha^{p/p'}} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{c\mu} x}\right)^{p/p'} \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(x-x')} |g_i(x', \mu; t)| dx' \\ &= \frac{1}{c\mu \alpha^{p/p'}} \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(x-x')} |g_i(x', \mu; t)| dx' \end{aligned}$$

per $i = 1, 2, 3$.

Quindi

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\mu \int_0^l |f_i(x, \mu; t)|^p dx \\
& \leq \int_0^1 \frac{1}{c\mu\alpha^{p/p'}} d\mu \int_0^l dx \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(x-x')} |g_i(x', \mu; t)|^p dx' \\
& = \frac{1}{c\alpha^{p/p'}} \int_0^1 \frac{1}{\mu} d\mu \int_0^l |g_i(x', \mu; t)|^p dx' \int_{x'}^l e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(x-x')} dx \\
& = \frac{1}{c\alpha^{p/p'}} \int_0^1 \frac{1}{\mu} d\mu \int_0^l |g_i(x', \mu; t)|^p \frac{c\mu}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{c\mu}(l-x')}\right) \\
& \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_0^1 d\mu \int_0^l |g_i(x', \mu; t)|^p dx'
\end{aligned}$$

Analogamente si ottiene

$$\int_{-1}^0 d\mu \int_0^l |f_i(x, \mu; t)|^p dx \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_{-1}^0 d\mu \int_0^l |g_i(x', \mu; t)|^p dx'$$

Mettendo insieme le due stime ricavate si ha la seguente stima per la norma della soluzione \mathbf{f} .

$$\|\mathbf{f}\|_X \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{g}\|_X$$

Fatte tali modifiche si procede come precedentemente fatto fino ad ottenere il risultato desiderato.

□

2.3 Variazione del numero totale di particelle

Indichiamo con $N_{uv}(t)$ il numero totale di fotoni UV presenti nella regione di spazio considerata $(0, l) \times (-1, 1)$ all'istante t e con $N_{ir}(t)$ la corrispondente quantità di fotoni.

Tali quantità si scrivono come segue

$$\begin{cases} N_{uv}(t) = \int_0^l dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \\ N_{ir}(t) = \int_0^l dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu \end{cases}$$

Calcoliamo la variazione totale del numero totale di particelle che è espressa dalla seguente quantità

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{uv}(t) + \frac{\partial}{\partial t} N_{ir}(t)$$

Poichè $\mathbf{f}(t)$ è una soluzione stretta del problema ne segue che $\mathbf{f}(t)$ è continua e fortemente differenziabile in X e quindi $\mathbf{f} \in C^1([0, +\infty); X)$.

Sappiamo perciò che

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{f} dx d\mu = \int \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f} dx d\mu$$

In componenti la precedente identità si scrive

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) dx d\mu = \int_0^l dx \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial t} f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) dx d\mu = \int_0^l dx \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial t} f_{ir}(x, \mu; t) d\mu \end{cases} \quad (2.18)$$

Lavoriamo sui due termini che forniscono la variazione totale di particelle, separatamente.

(1)

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{uv}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^l dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \right\} \quad (2.19)$$

Quindi, applicando la prima equazione fornita dalla (2.18), la (2.19) diventa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N_{uv}(t) &= \int_0^l dx \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial t} f_{uv}(x, \mu; t) d\mu = \\ &= \int_0^l dx \int_{-1}^1 \left\{ -c\mu \frac{\partial}{\partial x} f_{uv}(x, \mu; t) - \Sigma_{uv}(x) f_{uv}(x, \mu; t) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 K_{uv}(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' \right\} d\mu \quad (2.20) \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che f_{uv} è soluzione dell'equazione di evoluzione. Applichiamo Fubini al primo termine a secondo membro verificando poi in seguito la legittimità analitica di tale passaggio.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N_{uv}(t) &= -c \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} f_{uv}(x, \mu; t) dx \\ &\quad - \int_0^l \Sigma_{uv}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \\ &\quad + \int_0^l dx \int_{-1}^1 d\mu \int_{-1}^1 K_{uv}(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' \quad (2.21) \end{aligned}$$

Utilizziamo il lemma fondamentale del calcolo delle distribuzioni nel caso di funzioni $W^{1,1}$ sempre al primo termine, tralasciando in un primo momento la dimostrazione che il passaggio effettivamente valga, analogamente a quanto fatto sopra. In tale modo otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N_{uv}(t) &= -c \int_{-1}^1 \mu [f_{uv}(l, \mu; t) - f_{uv}(0, \mu; t)] d\mu \\ &\quad - \int_0^l \Sigma_{uv}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \\ &\quad + \int_0^l dx \int_{-1}^1 d\mu \int_{-1}^1 K_{uv}(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' \quad (2.22) \end{aligned}$$

Osserviamo che le seguenti espressioni definiscono il flusso d'inflow e d'outflow rispettivamente.

$$\begin{aligned}\Psi_{uv}^{in}(t) &= c \int_{-1}^1 |\mu| \varphi^{in}(\mu) d\mu = \\ &= c \int_0^1 \mu f_{uv}(0, \mu; t) d\mu - c \int_{-1}^0 \mu f_{uv}(l, \mu; t) d\mu\end{aligned}$$

e inoltre

$$\begin{aligned}\Psi_{uv}^{out}(t) &= c \int_{-1}^1 |\mu| \varphi^{out}(\mu) d\mu = \\ &= -c \int_{-1}^0 \mu f_{uv}(0, \mu; t) d\mu + c \int_0^1 \mu f_{uv}(l, \mu; t) d\mu\end{aligned}$$

Sostituendo le quantità appena definite, la (2.22) si scrive

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} N_{uv}(t) &= -\{\Psi_{uv}^{out}(t) - \Psi_{uv}^{in}(t)\} - \int_0^l \Sigma_{uv}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \\ &\quad + \int_0^l dx \int_{-1}^1 d\mu \int_{-1}^1 K_{uv}(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' \quad (2.23)\end{aligned}$$

Lavoriamo ulteriormente su quanto ottenuto scrivendo in dettaglio sia la sezione d'urto che il nucleo di scattering.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} N_{uv}(t) &= -\{\Psi_{uv}^{out}(t) - \Psi_{uv}^{in}(t)\} - \\ &\int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow uv}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu - \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \\ &\quad + \int_0^l dx \int_{-1}^1 d\mu \int_{-1}^1 \Sigma_{uv \rightarrow uv}(x) p_1(x, \mu', \mu; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' \quad (2.24)\end{aligned}$$

Applichiamo Fubini all'ultimo termine rimandando a dopo la verifica

analitica di tale passaggio, ottenendo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} N_{uv}(t) = & -\{\Psi_{uv}^{out}(t) - \Psi_{uv}^{in}(t)\} - \int_0^l \Sigma_{uv,c}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \\
& - \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow uv}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu - \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \\
& + \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow uv}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' \int_{-1}^1 p_1(x, \mu', \mu; t) d\mu \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} N_{uv}(t) = & -\{\Psi_{uv}^{out}(t) - \Psi_{uv}^{in}(t)\} - \int_0^l \Sigma_{uv,c}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \\
& - \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow uv}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu - \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \\
& + \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow uv}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' = \\
= & -\{\Psi_{uv}^{out}(t) - \Psi_{uv}^{in}(t)\} - \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow uv}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \\
& + \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \quad (2.26)
\end{aligned}$$

perciò in definitiva abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} N_{uv}(t) = & -\{\Psi_{uv}^{out}(t) - \Psi_{uv}^{in}(t)\} - \int_0^l \Sigma_{uv,c}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \\
& - \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Passiamo ora a calcolare la seconda delle due quantità che ci servono per ottenere un'espressione della variazione del numero totale di particelle.

(2)

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{ir}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^l dx \int_{-1}^1 -1^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu \right\} \quad (2.28)$$

Procedendo con gli stessi passaggi e utilizzando le stesse regolarità si ottiene un risultato analogo a quello trovato nel punto (1).

La legittimità dei passaggi fatti verrà poi verificata contemporaneamente a quelle degli analoghi passaggi compiuti al punto (1).

Vediamo più in dettaglio i passaggi necessari.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} N_{ir}(t) &= \int_0^l dx \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial t} f_{ir}(x, \mu; t) d\mu = \\
&+ \int_0^l \left\{ -c\mu \frac{\partial}{\partial x} f_{ir}(x, \mu; t) - \Sigma_{ir}(x) f_{ir}(x, \mu; t) + \right. \\
&\int_{-1}^1 K_{ir}(x, \mu, \mu'; t) f_{ir}(x, \mu'; t) d\mu' + \int_{-1}^1 K_{uv \rightarrow ir}(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu; t) d\mu' \left. \right\} d\mu \\
&= -c \int_0^l dx \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial}{\partial x} f_{ir}(x, \mu; t) d\mu - \int_0^l \Sigma_{ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu \\
&+ \int_0^l dx \int_{-1}^1 d\mu \int_{-1}^1 K_{ir}(x, \mu, \mu'; t) f_{ir}(x, \mu'; t) d\mu' \\
&+ \int_0^l dx \int_{-1}^1 K_{uv \rightarrow ir}(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' = -c \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} f_{ir}(x, \mu; t) dx \\
&- \int_0^l \Sigma_{ir, c}(x) dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu - \int_0^l \Sigma_{ir \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu \\
&+ \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 p_2(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' \\
&+ \int_0^l \Sigma_{ir \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 p_3(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' = -\{\Psi_{ir}^{out}(t) - \Psi_{ir}^{in}(t)\} \\
&- \int_0^l \Sigma_{ir, c}(x) dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu - \int_0^l \Sigma_{ir \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu \\
&+ \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' \int_{-1}^1 p_2(x, \mu, \mu'; t) d\mu \\
&+ \int_0^l \Sigma_{ir \rightarrow ir}(x) \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' \int_{-1}^1 p_3(x, \mu, \mu'; t) d\mu \\
&= -\{\Psi_{ir}^{out}(t) - \Psi_{ir}^{in}(t)\} - \int_0^l \Sigma_{ir, c}(x) dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu \\
&- \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu + \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu \\
&+ \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu'; t) d\mu' = -\{\Psi_{ir}^{out}(t) - \Psi_{ir}^{in}(t)\} \\
&+ \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu
\end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N_{ir}(t) = & -\{\Psi_{ir}^{out}(t) - \Psi_{ir}^{in}(t)\} - \int_0^l \Sigma_{uv, c}(x) dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu \\ & + \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu \quad (2.29) \end{aligned}$$

Mettendo insieme la (2.27) e la (2.29), si ottiene infine un'espressione per la quantità che ci interessava calcolare.

Infatti si può concludere che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N(t) = & -\{\Psi_{uv}^{out}(t) - \Psi_{uv}^{in}(t)\} - \{\Psi_{ir}^{out}(t) - \Psi_{ir}^{in}(t)\} - \\ & \int_0^l \Sigma_{uv, c}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu - \int_0^l \Sigma_{ir, c}(x) dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu \quad (2.30) \end{aligned}$$

Ci resta ora da verificare che i passaggi fatti siano tutti leciti sfruttando le regolarità che derivano alla funzione dal fatto di essere soluzione.

Esaminiamo i singoli passaggi incriminati.

- (i) Verifichiamo la legittimità dello scambio dell'ordine d'integrazione tra la (2.20) e la (2.21) e per l'analogo passaggio relativo ai fasci a frequenza IR.

Poniamo

$$g_1(x, \mu; t) = \mu \frac{\partial}{\partial x} f_{uv}(x, \mu; t) \quad \text{e} \quad g_2(x, \mu; t) = \mu \frac{\partial}{\partial x} f_{ir}(x, \mu; t)$$

Poichè $\mathbf{f}(t) \in \mathcal{D}(B)$, allora per ogni $t > 0$ fissato si ha che $B\mathbf{f}(t) \in X$.

Quindi

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} f_{uv}(x, \mu; t) \in L^1((0, l) \times (0, l))$$

e analogamente

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} f_{ir}(x, \mu; t) \in L^1((0, l) \times (0, l))$$

Perciò otteniamo che le funzioni $g_1(x, \mu; t)$ e $g_2(x, \mu; t)$ sono entrambe sommabili, da cui la legittimità del passaggio applicando Fubini.

(ii) Verifichiamo adesso il passaggio dalla (2.21) alla (2.22).

Consideriamo $f_{uv}(x) := f_{uv}(x, \mu; t)$ e analogamente

$f_{ir}(x) := f_{ir}(x, \mu; t)$ con μ e t fissati.

Per quanto provato al passo (i) abbiamo che

$$\int_{-1}^1 |\mu| d\mu \left(\int_0^l \frac{\partial}{\partial x} f_{uv}(x, \mu; t) dx \right) < +\infty$$

Per la positività della funzione integranda si ha

$$\int_0^l \frac{\partial}{\partial x} f_{uv}(x, \mu; t) dx \quad \text{per q.o. } \mu \in (-1, 1)$$

Quindi $\frac{\partial}{\partial x} f_{uv}(x) \in L^1(0, l)$.

Ragionando allo stesso modo si ha anche che $f_{uv}(x) \in L^1(0, l)$.

Quindi si ottiene che $f_{uv}(x) \in W^{1,1}(0, l)$ per q.o. $\mu \in (-1, 1)$.

Osservato ciò possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo delle variazioni nel caos particolare di funzioni $W^{1,1}$, [13], che ci dice che

$$\int_0^l \frac{\partial}{\partial x} f_{uv}(x, \mu; t) dx = f_{uv}(l, \mu; t) - f_{uv}(0, \mu; t) \quad \text{per q.o. } \mu \in (-1, 1)$$

Quindi integrando in $d\mu$ si ha la tesi.

Nello stesso modo si ottiene lo stesso passaggio relativo ai fotoni IR.

(iii) Verifichiamo il passaggio dalla (2.26) alla (2.27).

Il passaggio risulta immediato applicando il Teorema di Fubini. Infatti basta osservare che le funzioni di probabilità di scattering $p_i(x, \mu, \mu'; t)$ con $i = 1, 2, 3$ sono quasi ovunque minori di 1 e quindi dalla sommabilità delle densità di probabilità f_{uv} e f_{ir} segue immediatamente la sommabilità delle corrispondenti funzioni prodotto.

$$p_1(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) \in L^1((0, l) \times (-1, 1) \times (-1, 1))$$

$$p_2(x, \mu, \mu'; t) f_{uv}(x, \mu'; t) \in L^1((0, l) \times (-1, 1) \times (-1, 1))$$

$$p_3(x, \mu, \mu'; t) f_{ir}(x, \mu'; t) \in L^1((0, l) \times (-1, 1) \times (-1, 1))$$

□

Osservazione 2.9. *Il risultato ottenuto ci dice in particolare che*

$$\frac{\partial}{\partial t}N(t) \leq 0$$

Quindi il numero totale di particelle diminuisce.

L'espressione trovata inoltre ci dice che tale diminuzione è proporzionale da una parte alla differenza tra il flusso d'inflow e quello d'outflow, dall'altra invece è in parte dovuta all'assorbimento relativo alla sezione d'urto di cattura degli UV e in parte all'analogo relativo però agli IR.

2.4 Variazione dell'energia totale del sistema

Poichè il sistema che stiamo studiando è costituito da fasci di fotoni, l'energia del sistema è esclusivamente di tipo elettromagnetico (ovvero non c'è energia cinetica in quanto i fotoni, a differenza dei neutroni non partecipano di questo tipo di energia).

L'energia di un fotone è quindi data da

$$E = h\nu$$

con h costante di Planck ($h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$) e ν frequenza del fotone considerato.

Indichiamo con ν_{uv} la frequenza dei fotoni UV e con ν_{ir} la frequenza IR.

In tale modo si ottiene la seguente espressione per l'energia totale del sistema:

$$E(t) = h\nu_{uv} N_{uv}(t) + h\nu_{ir} N_{ir}(t)$$

dove $N_{uv}(t)$ e $N_{ir}(t)$ sono rispettivamente il numero totale di fotoni UV e IR presenti all'interno della nube, all'istante t .

Calcoliamo la variazione dell'energia totale del sistema cercando conferme alle considerazioni fisiche che ci inducono a presupporre che l'energia totale del sistema diminuisca. Ci aspettiamo inoltre che tale diminuzione sia dovuta in parte alla fuoriuscita di particelle attraverso la frontiera del nostro insieme, in parte all'assorbimento relativo alla sezione d'urto di scattering $\Sigma_{uv \rightarrow ir}$, e in parte all'assorbimento relativo alle sezioni d'urto di cattura

$\Sigma_{uv, c}$ e $\Sigma_{ir, c}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E(t) = h\nu_{uv} \frac{\partial}{\partial t} N_{uv}(t) + h\nu_{ir} \frac{\partial}{\partial t} N_{ir}(t) = h\nu_{uv} \left\{ -\varphi_{uv}^{out}(t) - \right. \\ \left. - \int_0^l \Sigma_{uv, c}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu - \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) \right\} \\ + h\nu_{ir} \left\{ -\varphi_{ir}^{out}(t) - \int_0^l \Sigma_{ir, c}(x) dx \int_{-1}^1 f_{ir}(x, \mu; t) d\mu + \right. \\ \left. \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \right\} \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E(t) = -h[\nu_{uv} \varphi_{uv}^{out}(t) + \nu_{ir} \varphi_{ir}^{out}(t)] - \\ h\nu_{uv} \int_0^l \Sigma_{uv, c}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu - h\nu_{ir} \int_0^l \Sigma_{ir, c}(x) dx \int_{-1}^1 \nu_{ir} f_{ir}(x, \mu; t) d\mu \\ - h(\nu_{uv} - \nu_{ir}) \int_0^l \Sigma_{uv \rightarrow ir}(x) dx \int_{-1}^1 f_{uv}(x, \mu; t) d\mu \end{aligned}$$

Osservazione 2.10. Osserviamo che $\nu_{uv} \geq \nu_{ir}$ e quindi le nostre aspettative sono confermate.

Infatti otteniamo tre termini negativi e pertanto una diminuzione d'energia che risulta proporzionale ai due flussi uscenti pesati, ai due fenomeni d'assorbimento dovuti alla sezione d'urto di cattura, sempre pesati, e dai fenomeni d'assorbimento originanti transizioni di frequenza (da UV a IR), in maniera proporzionale alla differenza di frequenze che si crea.

2.5 Un ulteriore stima per il semigrupp associato all'operatore $A+J$

La necessità di una stima migliore per la norma del semigrupp asociato all'operatore $A + J$, che indichiamo con $S(t)$, è data dal fatto che il risultato trovato fino ad ora ci garantisce una crescita meno che esponenziale mentre noi ci aspetteremmo una decrescita più che esponenziale.

Si dimostra quindi il seguente risultato.

Proposizione 2.1. *Sia $\sigma_c := \min\{m, m'\}$, dove con m e m' si indicano i seguenti minimi*

$$m = \min \{ \Sigma_{uv, c}(x) \mid x \in (0, l) \} \quad e \quad m' = \min \{ \Sigma_{ir, c}(x) \mid x \in (0, l) \}$$

allora,

$$\|S(t)\| \leq e^{-\sigma_c t}$$

da cui segue che

$$A + J \in \mathcal{G}(1, -\sigma_c; X)$$

Dimostrazione (Proposizione 2.1)

Supponiamo $\mathbf{f}(0) \in X^+$. In tale ipotesi sappiamo che, posto $\mathbf{f}(t)$ la soluzione relativa al dato iniziale $\mathbf{f}(0)$, vale la seguente stima.

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{f}\|_{L^1} \leq - \left\{ \varphi_{uv}^{out} + \varphi_{ir}^{out} \right\} - \sigma_c \|\mathbf{f}\|_{L^1} \leq -\sigma_c \|\mathbf{f}\|_{L^1}$$

Da cui

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{f}\|_{L^1} \leq -\sigma_c \|\mathbf{f}\|_{L^1} \tag{2.31}$$

Applichiamo a (2.31) il **Lemma di Gronwall**, [14]:

Sia $\eta(t) \geq 0$, assolutamente continua in $[0, T]$ e tale che

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

con $\phi(t)$ e $\psi(t)$ funzioni positive e sommabili in $[0, T]$, allora

$$\eta(t) \leq \exp \left\{ \int_0^t \phi(s) ds \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right] \right\}$$

Se poniamo

$$\eta(t) = \|\mathbf{f}(t)\|_{L^1}$$

otteniamo che η è positiva e assolutamente continua in $[0, T]$, per ogni $T \in (0, +\infty)$.

Poniamo inoltre $\phi(t) = -\sigma_c$, che è anch'essa sommabile in $[0, T]$ (MA NON È POSITIVA!!!).

Vale pertanto la seguente stima, per ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $T \in (0, +\infty)$

$$\|\mathbf{f}(t)\|_{L^1} \leq e^{-\sigma_c t} \|\mathbf{f}(0)\|_{L^1}$$

Mandando $T \rightarrow +\infty$, si ha che per ogni $0 \leq t < +\infty$, vale

$$\|\mathbf{f}(t)\|_{L^1} \leq e^{-\sigma_c t} \|\mathbf{f}(0)\|_{L^1} \quad (2.32)$$

Poichè la soluzione $\mathbf{f}(t)$, relativa al dato iniziale $\mathbf{f}(0)$ è data da

$$\mathbf{f}(t) = S(t)\mathbf{f}(0)$$

Allora la (2.32) si scrive

$$\|S(t)\mathbf{f}(0)\|_{L^1} \leq e^{-\sigma_c t} \|\mathbf{f}(0)\|_{L^1} \quad (2.33)$$

Tale ragionamento ci porta ad ottenere una stima che vale solo per $\mathbf{f}(0) \in X^+$ e che quindi a priori non ci permette di stimare la norma di $S(t)$. Possiamo però sfruttare il Teorema ??.

Infatti abbiamo già provato che il semigruppoo $S(t)$ è lineare e continuo (poichè limitato) e che inoltre $S(t)(X^+) \subset X^+$ e quindi il nostro semigruppoo soddisfa tutte le richieste del Teorema ??.

Il precedente risultato ci permette di ottenere la stima cercata per la stima della norma del semigruppoo associato al nostro problema.

$$\|S(t)\| \leq e^{-\sigma_c t} \quad (2.34)$$

Da tale stima e dai risultati provati nel paragrafo 2 di questo capitolo, segue immediatamente che

$$A_J \in \mathcal{G}(1, -\sigma_c; X)$$

□

2.6 Condizioni di inflow non nullo

2.6.1 Esistenza della soluzione

Ricordiamo la definizione delle frontiere d'inflow e d'outflow relative al nostro modello.

$$\Psi^{in} = \left\{ (l, 0) \mid \mu \in (0, 1) \right\} \cup \left\{ (l, \mu) \mid \mu \in (-1, 0) \right\}$$

$$\Psi^{out} = \left\{ (l, 0) \mid \mu \in (-1, 0) \right\} \cup \left\{ (l, \mu) \mid \mu \in (0, 1) \right\}$$

Fino ad ora abbiamo supposto che le condizioni del nostro problema fossero d'inflow nullo

$$\mathbf{f}|_{\Psi^{in}} = 0$$

In realtà tale ipotesi non è una condizione plausibile per il modello del fenomeno che stiamo studiando.

Infatti il dato d'inflow è un valore, in generale non nullo, determinato dall'emissione di fotoni da parte della stella-sorgente.

Quindi è necessario studiare il caso con condizioni d'inflow non nullo.

Supponiamo quindi

$$\mathbf{f}|_{\Psi^{in}}(t) = \varphi(t)$$

con $\varphi(t)$ funzione assegnata.

In tale caso ci ritroviamo a dovere considerare un problema d'evoluzione affine.

Studiamo quindi questo caso utilizzando la teoria delle equazioni d'evoluzioni affini, vista nella parte conclusiva del Capitolo 1.

Per poter applicare il risultato di esistenza della soluzione, dato dal Teorema (1.14), dobbiamo determinare una rappresentazione p che soddisfi le richieste di regolarità del Teorema (1.14).

Consideriamo, per esempio, la rappresentazione ottenuta estendendo in

maniera costante il dato d'inflow all'intero insieme.

Quindi

$$\mathbf{p}(x, \mu, t) = \Phi(x, \mu, t)$$

con Φ definita come

$$\Phi(x, \mu, t) = \begin{cases} \varphi(0, \mu, t), & t \geq 0, \mu \in (0, 1) \text{ e } x \in (0, l) \\ \varphi(l, \mu, t), & t \geq 0, \mu \in (-1, 0) \text{ e } x \in (0, l) \end{cases}$$

Ci resta da determinare le condizioni necessarie sul dato d'inflow $\varphi(\mu, t)$ affinché la rappresentazione Φ sia effettivamente una rappresentazione che ci permetta di applicare il Teorema sopra richiamato.

(1) Vediamo per prima cosa che ipotesi deve soddisfare φ perchè Φ sia una rappresentazione per il nostro problema affine.

Dobbiamo quindi imporre

$$\mathcal{D}(A_t) = \Phi(t) + \mathcal{D}(A) \quad (2.35)$$

Supponiamo che $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(A_t)$, allora $\mathbf{f} \in X$ e $B\mathbf{f} \in X$ e inoltre

$$\mathbf{f} |_{\Psi^{in}} = \varphi$$

Se poniamo $\mathbf{f}_0(t) = \mathbf{f}(t) - \Phi(t)$, dobbiamo inanzitutto provare che $\mathbf{f}_0 \in \mathcal{D}(A)$. Per la linearità dell'operatore B è sufficiente supporre che

(i) $\Phi(t) \in X$.

(ii) $B\Phi(t) \in X$.

Inoltre

$$\mathbf{f}_0 |_{\Psi^{in}}(t) = \mathbf{f} |_{\Psi^{in}}(t) - \Phi |_{\Psi^{in}(t)} = \varphi(t) - \varphi(t) = 0$$

e quindi, dalle ipotesi fatte, segue che $\mathbf{f}_0(t) \in \mathcal{D}(A)$.

Abbiamo quindi provato che, se $\Phi(t) \in X$ e $B\Phi(t) \in X$, allora $\mathcal{D}(A_t) \subset \Phi(t) + \mathcal{D}(A)$.

In maniera analoga si dimostra che, con le medesime ipotesi, si ottiene anche l'inclusione inversa e quindi la (2.35).

Resta da vedere che ipotesi determinano sul dato φ , le richieste fatte su Φ .

(i) Se $\Phi(t) \in X$, allora le sue componenti appartengono a $L^1((0, l) \times (-1, 1))$.

Quindi

$$\int_0^l dx \int_{-1}^1 |\varphi_1(\mu, t)| d\mu = l \int_{-1}^1 |\varphi(\mu, t)| d\mu < +\infty \quad (2.36)$$

dove abbiamo posto $\varphi_1 := \varphi_{uv}$ e corrispondentemente $\varphi_2 := \varphi_{ir}$.

Dalla (2.36) si ottiene quindi che deve risultare

$$\varphi \in L^1(-1, 1) \oplus L^1(-1, 1)$$

(ii) Se inoltre $B\Phi(t) \in X$, allora deve essere

$$-c \mu \frac{\partial}{\partial x} \Phi_i(x, \mu, t) \in L^1((0, l) \times (-1, 1)), \quad \text{con } i = 1, 2. \quad (2.37)$$

Poichè, per definizione, Φ è costante rispetto a x , allora la (2.37) è sempre soddisfatta.

Quindi in definitiva otteniamo che la funzione $\Phi(t)$ è una rappresentazione per l'equazione d'evoluzione affine relativa al nostro problema se il dato d'inflow φ è definito come segue

$$\begin{aligned} \varphi : [0, +\infty) &\longrightarrow Y := L^1(-1, 1) \oplus L^1(-1, 1) \\ t &\longmapsto \varphi(t) := \varphi(\mu; t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

(2) Dobbiamo anche provare che $\Phi(t)$ è una rappresentazione continua e differenziabile.

(i) Imponiamo dapprima la continuità, cioè

$$0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \|\Phi(x, \mu, t) - \Phi(x, \mu, t_0)\|_X$$

Da cui si ricava

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow t_0} \|\Phi_i(x, \mu, t) - \Phi_i(x, \mu, t_0)\|_{L^1((0,l) \times (-1,1))} = \\ &= l \lim_{t \rightarrow t_0} \int_{-1}^1 |\varphi_i(\mu, t) - \varphi_i(\mu, t_0)| \, d\mu = 0 \end{aligned}$$

per $i = 1, 2$.

Pertanto si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{-1}^1 |\varphi_i(\mu, t) - \varphi_i(\mu, t_0)| \, d\mu = 0$$

Quindi il dato φ deve essere continuo in Y .

(ii) Resta da imporre la differenziabilità, quindi

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} \left(\Phi(x, \mu, t_0 + h) - \Phi(x, \mu, t_0) \right) \right\|_X$$

Procedendo come sopra si ottiene che tale condizione implica che $\varphi(t)$ risulti anch'essa fortemente differenziabile in Y .

(3) Resta infine da provare che il termine di sorgente

$$\mathcal{Q}_p(t) := A_t(\Phi(t)) - \Phi'(t) \text{ sia regolare.}$$

Per l'Osservazione 1.8, imporre per semplicità che tale termine sia continuo e differenziabile.

$$\text{Osserviamo che } B(\Phi(t)) = 0 \text{ e inoltre } A_t(\Phi(t)) = A(\Phi(t)).$$

Quindi

$$A_t(\Phi(t)) = -\Sigma(\Phi(t)) + J(\Phi(t)) - \Phi'(t)$$

Poichè l'operatore $-\Sigma + J$ è lineare e limitato e quindi continuo. In realtà vale di più perchè l'operatore in questione è somma di una matrice a coefficienti costanti e di un operatore integrale e quindi non

mantiene solo la continuità dell'elemento in cui lo calcolo ma anche la differenziabilità.

Da quanto provato al punto (2) segue dunque che $\mathbf{Q}_p(t)$ è continuo e differenziabile se e solo se la funzione $\Phi'(t)$ è continua e differenziabile. Ripercorrendo il ragionamento impiegato al punto (2) si ottiene che in definitiva il dato d'inflow deve risultare continuo fino alla sua derivata seconda, ovvero

$$\varphi(t) \in C^2([0, +\infty); X)$$

Ricapitolando abbiamo ottenuto il seguente risultato di esistenza per la soluzione del nostro problema.

Teorema 2.2. *Poniamo $A = B - \Sigma + J$, e consideriamo il problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f} = A(\mathbf{f}) \\ \mathbf{f}|_{\Phi^{in}} = \varphi \\ (0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (2.39)$$

che equivale al problema affine

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_t(\mathbf{f}(t)) \\ \mathbf{f}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (2.40)$$

con $\{A_t \mid t \geq 0\}$ famiglia A -affine definita da $A_t \mathbf{f} = A\mathbf{f}$ e $\mathcal{D}(A_t) = \{\mathbf{f} \in X \mid B\mathbf{f} \in X \text{ e } \mathbf{f}|_{\Phi^{in}} = \varphi\}$.

Se il dato d'inflow $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow Y$, con $Y = L^1(-1, 1) \oplus L^1(-1, 1)$, è una funzione appartenente a $C^2([0, +\infty); X)$.

Allora il problema (2.39) ammette un'unica soluzione esprimibile mediante la seguente formula rappresentativa:

$$\mathbf{f}(t) = \Phi(t) + e^{tA} \left(\mathbf{f}(0) - \Phi(0) \right) + \int_0^t e^{(t-s)A} \left[(B - \Sigma)(\Phi(s)) + J(\Phi(s)) - \Phi'(s) \right] ds$$

Con $\Phi(t)$ rappresentazione ottenuta estendendo in maniera costante il dato d'inflow $\varphi(t)$ a tutto l'insieme $(0, l) \times (-1, 1)$.

2.6.2 Calcolo esplicito di una particolare rappresentazione

Il risultato di esistenza dimostrato nella sezione precedente fornisce anche una formula rappresentativa esplicita della soluzione.

Tuttavia tale formula è molto complicata da applicare a causa della sua complessità di termini.

In questa sezione ci riproponiamo di trovare una diversa rappresentazione per l'operatore affine A_t che porti a determinare una formula rappresentativa per la soluzione del problema molto più semplice.

Per ottenere ciò si può, per esempio, cercare una rappresentazione $p(t)$ come soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} \mathbf{p}'(t) = (B - \Sigma)(\mathbf{p}(t)) := \tilde{A}(\mathbf{p}(t)) \\ \mathbf{p}(0, \mu, t) = \varphi(\mu, t), \quad \text{se } \mu \in (0, 1) \text{ e } t \geq 0 \\ \mathbf{p}(l, \mu, t) = \varphi(\mu, t), \quad \text{se } \mu \in (-1, 0) \text{ e } t \geq 0 \\ \mathbf{p}(0) = \mathbf{u}_0(x, \mu) \end{cases} \quad (2.41)$$

Se riusciamo a trovare una soluzione di tale problema e a verificare che tale soluzione è una rappresentazione continua e differenziabile si può scrivere la soluzione del problema (2.39) mediante la seguente semplice formula

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{p}(t) + \int_0^t e^{(t-s)A} J(\mathbf{p}(s)) ds$$

Per trovare una soluzione del problema (2.41) utilizziamo il metodo delle linee caratteristiche, [15].

Per prima cosa è necessario osservare che, poichè \tilde{A} è un operatore che agisce diagonalmente, otteniamo due equazioni scalari disaccoppiate e della stessa

forma.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} p_i = -c \mu \frac{\partial}{\partial x} p_i - \Sigma_i p_i \\ p_i(0, \mu, t) = \varphi_i(\mu, t), \quad \text{se } \mu \in (0, 1) \text{ e } t \geq 0 \\ p_i(l, \mu, t) = \varphi_i(\mu, t), \quad \text{se } \mu \in (-1, 0) \text{ e } t \geq 0 \\ p_i(0) = f_i(0) = u_{0,i}(0)(x, \mu), \quad \text{per } x \in (0, l) \text{ e } \mu \in (-1, 1) \end{cases} \quad (2.42)$$

per $i = 1, 2$ e con $\Sigma_1 := \Sigma_{uv}$ e $\Sigma_2 := \Sigma_{ir}$. Quindi è sufficiente studiare un sistema formato da un'equazione semilineare del primo ordine, scalare, con relativo dato iniziale e condizioni al contorno.

Tale sistema può essere studiato come una famiglia di sistemi a variare del parametro μ .

$$\begin{cases} u_t + c \mu u_x = -\sigma u, \quad x \in (0, l), \mu \in (-1, 1) \text{ e } t \geq 0 \\ u(0, t; \mu) = \varphi(\mu, t), \quad \mu \in (0, 1) \text{ e } t \geq 0 \\ u(l, t; \mu) = \varphi(\mu, t), \quad \mu \in (-1, 0) \text{ e } t \geq 0 \\ u(x, 0; \mu) = u_0(x, \mu), \quad x \in (0, l) \text{ e } \mu \in (-1, 1) \end{cases} \quad (2.43)$$

L'equazione delle linee caratteristiche è quindi data dal seguente sistema.

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} x = c \mu \\ \frac{d}{d\tau} t = 1 \\ \frac{d}{d\tau} z = -\sigma z \end{cases} \quad (2.44)$$

Resta da costruire opportunamente la curva che porta i dati, separando il caso in cui il parametro μ varia in $(0, 1)$ dal caso in cui invece varia in $(-1, 0)$.

1. Studiamo il caso in cui il parametro μ varia in $(0, 1)$.

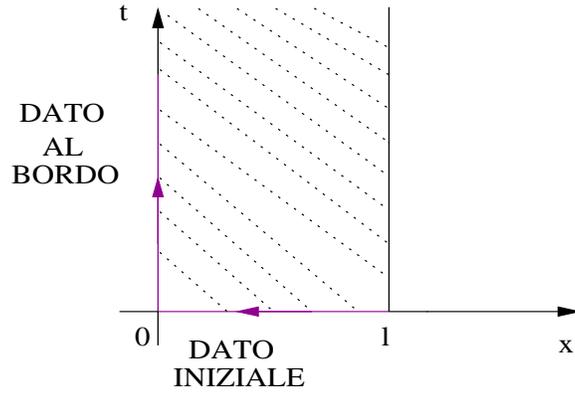
In tale caso la curva che porta i dati è parametrizzata da

$$\gamma(s) = \begin{cases} x_0(s) = l - s \\ t_0(s) = 0 \\ z_0(s) = u_0(l - s, \mu) \end{cases} \quad (2.45a)$$

se $0 \leq s < l$, e

$$\gamma(s) = \begin{cases} x_0(s) = 0 \\ t_0(s) = s - l \\ z_0(s) = \varphi(\mu, s - l) \end{cases} \quad (2.45b)$$

se $s \geq l$.



2. Passiamo a considerare il caso in cui il parametro μ varia in $(-1, 0)$.

In tale caso la curva che porta i dati è data da

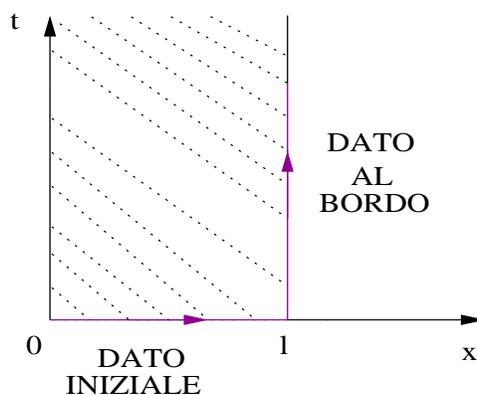
$$\begin{cases} x_0(s) = s \\ t_0(s) = 0 \\ z_0(s) = u_0(s, \mu) \end{cases} \quad (2.46a)$$

se $0 \leq s < l$, e

$$\begin{cases} x_0(s) = l \\ t_0(s) = s - l \\ z_0(s) = \varphi(\mu, s - l) \end{cases} \quad (2.46b)$$

La forma generale di una linea caratteristica per l'equazione relativa al problema (2.43), è

$$\begin{cases} x = x_0(s) + c \mu \tau \\ t = t_0(s) + \tau \\ z = z_0(s) e^{-\sigma \tau} \end{cases} \quad (2.47)$$



con $\tau \geq 0$.

Resta da risolverla sostituendo in ciascun caso la relativa curva.

1. Risolviamo il caso $\mu \in (0, 1)$.

(a) Consideriamo il caso $0 \leq s < l$ e $\tau \geq 0$, e quindi la curva (2.45a) come dato iniziale.

Otteniamo la soluzione

$$u = u_0(x - c\mu t, \mu) e^{-\sigma t}$$

e inoltre le condizioni diventano

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ c\mu t < x \leq l + c\mu t \end{cases}$$

(b) Se invece $s \geq l$ e $\tau \geq 0$, si deve considerare la curva (2.45b), che ci fornisce la seguente soluzione

$$u = \varphi\left(\mu, t - \frac{x}{c\mu}\right) e^{-\sigma \frac{x}{c\mu}}$$

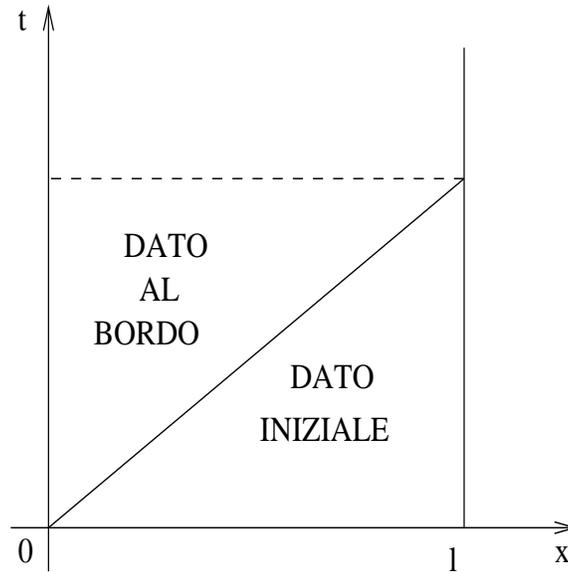
con condizioni

$$\begin{cases} t \leq \frac{x}{c\mu} \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Quindi per $\mu \in (0, 1)$ si ottiene la seguente soluzione

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - c\mu t, \mu) e^{-\sigma t}, & t \geq 0 \text{ e } c\mu t < x \leq l + c\mu t \\ \varphi(\mu, t - \frac{x}{c\mu}) e^{-\sigma \frac{x}{c\mu}}, & x \geq 0 \text{ e } t \geq \frac{x}{c\mu} \end{cases} \quad (2.48)$$

Restringendosi al dominio di partenza si ottiene



$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - c\mu t, \mu) e^{-\sigma t}, & 0 \leq x \leq l \text{ e } 0 \leq t < \frac{x}{c\mu} \\ \varphi(\mu, t - \frac{x}{c\mu}) e^{-\sigma \frac{x}{c\mu}}, & 0 \leq x \leq l \text{ e } t \geq \frac{x}{c\mu} \end{cases} \quad (2.49)$$

2. Consideriamo invece il caso $\mu \in (-1, 0)$.

(a) Se $0 \leq s < l$ e $\tau \geq 0$, ponendo come dato iniziale la curva (refcurva21), si ha

$$u(x, t) = u_0(x - c\mu t, \mu) e^{-\sigma t}$$

con condizioni

$$\begin{cases} c\mu t \leq x < l + c\mu t \\ t \geq 0 \end{cases}$$

(b) Se invece $s \geq l$ e $\tau \geq 0$, allora il dato iniziale è portato dalla curva (2.46b) e quindi

$$u(x, t) = \varphi\left(\mu, t - \frac{x-l}{c\mu}\right) e^{-\sigma \frac{x-l}{c\mu}}$$

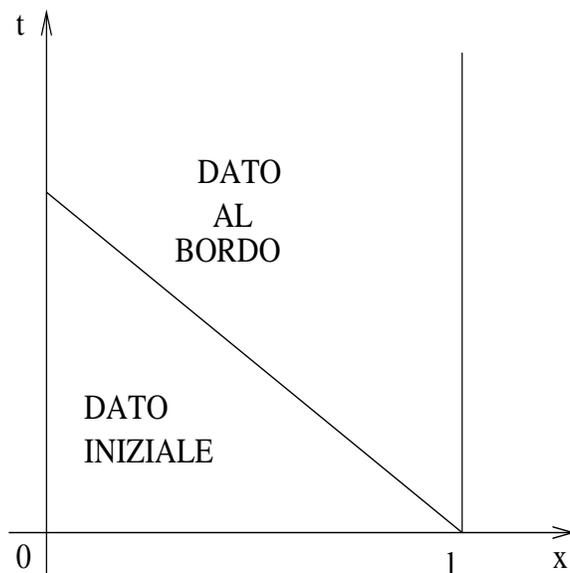
con condizioni

$$\begin{cases} x \leq l \\ t \geq \frac{x-l}{c\mu} \end{cases}$$

Per $\mu \in (0, 1)$ la soluzione è data da

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - c\mu t, \mu) e^{-\sigma t}, & t \geq 0 \text{ e } c\mu t < x \leq l + c\mu t \\ \varphi\left(\mu, t - \frac{x}{c\mu}\right) e^{-\sigma \frac{x}{c\mu}}, & x \geq l \text{ e } t \geq \frac{x-l}{c\mu} \end{cases} \quad (2.50)$$

Restringendoci, come fatto nel caso precedente, al dominio di partenza



si ottiene

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - c\mu t, \mu) e^{-\sigma t}, & 0 \leq x \leq l \text{ e } 0 \leq t < \frac{x-l}{c\mu} \\ \varphi\left(\mu, t - \frac{x}{c\mu}\right) e^{-\sigma \frac{x}{c\mu}}, & 0 \leq x \leq l \text{ e } t \geq \frac{x-l}{c\mu} \end{cases} \quad (2.51)$$

Mettendo insieme i due risultati ottenuti e considerando il problema vettoriale (2.41) si trova la seguente soluzione.

$$\mathbf{p}(x, \mu, t) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_0(x - c\mu t, \mu) \mathbf{e}^{\Sigma t}, \quad \text{se } 0 \leq t < \frac{l}{c\mu}, \quad c\mu t < x \leq l \text{ e } \mu \in (0, 1) \\ \varphi(\mu, t - \frac{x}{c\mu}) \mathbf{e}^{-\Sigma \frac{x}{c\mu}}, \quad \text{se } 0 \leq t < \frac{l}{c\mu}, \quad 0 \leq x \leq c\mu t \text{ e } \mu \in (0, 1) \\ \text{oppure se } t \geq \frac{l}{c\mu}, \quad 0 \leq x \leq l \text{ e } \mu \in (0, 1) \\ \mathbf{u}_0(x - c\mu t, \mu) \mathbf{e}^{-\Sigma t}, \quad \text{se } 0 \leq t < \frac{l}{c\mu}, \quad 0 \leq x \leq l \text{ e } \mu \in (-1, 0) \\ \varphi(\mu, t - \frac{x-l}{c\mu}) \mathbf{e}^{-\Sigma \frac{x-l}{c\mu}}, \quad \text{se } 0 \leq t < \frac{l}{c\mu}, \quad c\mu t \leq x \leq l \text{ e } \mu \in (-1, 0) \\ \text{oppure se } t \geq \frac{l}{c\mu}, \quad 0 \leq x \leq l \text{ e } \mu \in (-1, 0) \end{array} \right. \quad (2.52)$$

2.7 Problema stazionario

Per quanto riguarda questo modello lo studio del problema stazionario risulta particolarmente importante poichè, avendo a che fare con raggi di fotoni che viaggiano alla velocità della luce, il sistema raggiunge quasi istantaneamente con regime stazionario.

L'equazione del trasporto nel caso stazionario si scrive

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{uv}(x, \mu) = -\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu} f_{uv}(x, \mu) + \frac{1}{c\mu} \int_{-1}^1 K_{uv}(x, \mu, \mu') f_{uv}(x, \mu') d\mu' \quad (2.53)$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_{ir}(x, \mu) = & -\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} f_{ir}(x, \mu) + \frac{1}{c\mu} \int_{-1}^1 K_{ir}(x, \mu, \mu') f_{ir}(x, \mu') d\mu' \\ & + \frac{1}{c\mu} \int_{-1}^1 K_{uv \rightarrow ir}(x, \mu, \mu') f_{uv}(x, \mu') d\mu' \end{aligned} \quad (2.54)$$

Osserviamo che per studiare il modello nel caso stazionario poniamo le sezioni d'urto costanti, il che equivale a richiedere che la densità del mezzo non dipenda dalla variabile spaziale x e che quindi le due polveri presenti nella nube siano omogeneamente distribuite.

Le due precedenti equazioni in forma contratta si scrivono come un'unica equazione vettoriale, analogamente a quanto visto nel caso evolutivo.

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(x, \mu) = -\frac{\Sigma}{c\mu} \mathbf{f}(x, \mu) + \frac{1}{c\mu} \int_{-1}^1 K(x, \mu, \mu') \mathbf{f}(x, \mu') d\mu' \quad (2.55)$$

nello spazio di Banach $X = L^1((0, l) \times (-1, 1)) \oplus L^1((0, l) \times (-1, 1))$.

Il seguente risultato ci permette di associare all'equazione integro-differenziale (2.55) un'opportuna equazione integrale di più facile risoluzione.

Teorema 2.3. Se $\mathbf{f} \in X$ è una soluzione della (2.55), allora soddisfa anche la seguente equazione integrale

$$\mathbf{f}(x, \mu) = \begin{cases} e^{-\frac{\Sigma}{c\mu} x} \varphi^+(\mu) + \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{-\frac{\Sigma}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K(x', \mu, \mu') \mathbf{f}(x', \mu') d\mu', & \mu \in (0, 1) \\ e^{-\frac{\Sigma}{c\mu} (l-x)} \varphi^-(\mu) + \frac{1}{c\mu} \int_x^l e^{-\frac{\Sigma}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K(x', \mu, \mu') \mathbf{f}(x', \mu') d\mu', & \mu \in (-1, 0) \end{cases} \quad (2.56)$$

con

$$\mathbf{e}^{-\frac{\Sigma}{c\mu} x} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu} x} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\Sigma_{ix}}{c\mu} x} \end{pmatrix}$$

Viceversa se $\mathbf{f} \in X$ è una soluzione dell'equazione integrale (2.56), allora è anche una soluzione della (2.55).

Corollario 2.1. Se proviamo che esiste una e una sola soluzione dell'equazione (2.56) allora abbiamo come immediata conseguenza che esiste una e una soluzione anche per l'equazione (2.55).

Dimostrazione (Teorema 2.3)

Sia \mathbf{f} soluzione della (2.55).

Moltiplichiamo ambo i membri della (2.55) per $\mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x}$, si ottiene

$$\mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(x, \mu) = -\frac{\Sigma}{c\mu} \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x} \mathbf{f}(x, \mu) + \frac{\mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x}}{c\mu} \int_{-1}^1 K(x, \mu, \mu') \mathbf{f}(x, \mu') d\mu'$$

Procediamo studiando separatamente il caso in cui $\mu \in (0, 1)$ da quello in cui $\mu \in (-1, 0)$.

(I) Se $\mu \in (0, 1)$, integriamo tra 0 e x.

$$\int_0^x \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x'} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(x', \mu) dx' = -\frac{\Sigma}{c\mu} \int_0^x \mathbf{f}(x', \mu) \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x'} dx' + \frac{1}{c\mu} \int_0^x \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x'} dx' \int_{-1}^1 K(x', \mu, \mu') \mathbf{f}(x', \mu') d\mu'$$

Integrando per parti il primo membro , si ottiene

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x} \mathbf{f}(x, \mu) - \mathbf{f}(0, \mu) - \frac{\Sigma}{c\mu} \int_0^x \mathbf{f}(x', \mu) \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x'} dx' = \\ & -\frac{\Sigma}{c\mu} \int_0^x \mathbf{f}(x', \mu) \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x'} dx' + \frac{1}{c\mu} \int_0^x \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x'} dx' \int_{-1}^1 K(x', \mu, \mu') \mathbf{f}(x', \mu') d\mu' \end{aligned}$$

Osserviamo che il precedente risultato segue dall'applicazione del teorema fondamentale del calcolo delle distribuzioni nel caso in cui la funzione integranda sia $W^{1,1}$.

Dobbiamo verificare che tale risultato si possa effettivamente applicare.

Per prima cosa poichè $\mathbf{f} \in X$, dalla (2.55), segue che $\mu \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f} \in X$.

Dobbiamo ora verificare che da quanto appena osservato si ottiene che

$$\mathbf{F}_\mu(x) := \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x} \mathbf{f}(x, \mu) \in W^{1,1}(0, l) \oplus W^{1,1}(0, l)$$

Il fatto che $\mathbf{F}_\mu(x) \in L^1(0, l) \oplus L^1(0, l)$ per quasi ovunque $\mu \in (-1, 1)$ è immediato, inoltre dalla precedente osservazione segue che

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f} \in X \implies \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}_\mu \in L^1(0, l) \oplus L^1(0, l)$$

e quindi il passaggio fatto risulta lecito.

Sostituendo a $\mathbf{f}(0, \mu)$ il relativo dato al bordo $\varphi^+(\mu)$ e moltiplicando ambo i membri per $\mathbf{e}^{-\frac{\Sigma}{c\mu} x}$, abbiamo

$$\mathbf{f}(x, \mu) = \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x} \varphi^+(\mu) + \frac{1}{c\mu} \int_0^x \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} (x-x')} dx' \int_{-1}^1 K(x', \mu, \mu') \mathbf{f}(x', \mu') d\mu'$$

(II) Se $\mu \in (-1, 0)$, integriamo tra x e l.

$$\begin{aligned} \int_x^l \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x'} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(x', \mu) dx' &= -\frac{\Sigma}{c\mu} \int_x^l \mathbf{f}(x', \mu) \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x'} dx' + \\ & \frac{1}{c\mu} \int_x^l \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} x'} dx' \int_{-1}^1 K(x', \mu, \mu') \mathbf{f}(x', \mu') d\mu' \end{aligned}$$

Analogamente a quanto fatto nel caso precedente integrando per parti il primo membro e sostituendo l'opportuno dato al bordo, si ottiene

$$\mathbf{f}(x, \mu) = \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} (l-x)} \varphi^-(\mu) + \frac{1}{c\mu} \int_x^l \mathbf{e}^{\frac{\Sigma}{c\mu} (x-x')} dx' \int_{-1}^1 K(x', \mu, \mu') \mathbf{f}(x', \mu') d\mu'$$

Quindi \mathbf{f} è soluzione anche dell'equazione integrale (2.56).

Viceversa, sia $\mathbf{f} \in X$ soluzione della (2.56), dobbiamo provare che essa è anche una soluzione dell'equazione di partenza (2.55).

Sia $\mu \in (0, 1)$, allora \mathbf{f} soddisfa l'equazione integrale corrispondente.

Derivando rispetto ad x ambo i membri si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f} = -\frac{\Sigma}{c\mu} e^{-\frac{\Sigma}{c\mu} x} \boldsymbol{\varphi}^+(\mu) + \frac{1}{c\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x e^{\frac{\Sigma}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K(x', \mu, \mu') \mathbf{f}(x', \mu') d\mu'$$

Osserviamo che, posto

$$g(x, x', \mu) = e^{\frac{\Sigma}{c\mu} (x'-x)} \int_{-1}^1 K(x', \mu, \mu') \mathbf{f}(x', \mu') d\mu'$$

Poiché $g(x, x', \mu) \in L^1((0, l) \times (0, l))$ posso applicare il teorema di Fubini e quindi vale

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x g(x, x') dx' = g(x, x) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} g(x, x') dx'$$

Applicando tale risultato alla precedente identità otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(x, \mu) &= \frac{\Sigma}{c\mu} e^{-\frac{\Sigma}{c\mu} x} \boldsymbol{\varphi}^+(\mu) \frac{1}{c\mu} \int_{-1}^1 K(x', \mu, \mu') \mathbf{f}(x', \mu') d\mu' - \\ &\quad \frac{\Sigma}{c^2 \mu^2} \int_0^x e^{\frac{\Sigma}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K(x', \mu, \mu') \mathbf{f}(x', \mu') d\mu' \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} -\frac{\Sigma}{c\mu} \mathbf{f}(x, \mu) + \int_{-1}^1 K(x, \mu, \mu') \mathbf{f}(x, \mu') d\mu' &= -\frac{\Sigma}{c\mu} e^{-\frac{\Sigma}{c\mu} x} \boldsymbol{\varphi}^+(\mu) - \\ \frac{1}{c^2 \mu^2} \int_0^x e^{-\frac{\Sigma}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K(x', \mu, \mu') \mathbf{f}(x', \mu') d\mu' &+ \int_{-1}^1 K(x, \mu, \mu') \mathbf{f}(x, \mu') d\mu' \end{aligned}$$

Quindi la funzione è soluzione anche dell'equazione di partenza per $\mu \in (0, 1)$.

Si procede analogamente nel caso in cui $\mu \in (-1, 0)$ ottenendo l'analogo risultato e quindi il teorema risulta dimostrato.

□

Dimostrazione (Corollario 2.1)

Supponiamo di avere provato l'esistenza e l'unicità della soluzione per l'equazione integrale (2.56).

Dalla prima implicazione del teorema appena provato si ottiene come immediata conseguenza l'unicità per l'equazione di partenza, mentre dalla seconda implicazione si ottiene l'esistenza.

□

Passiamo ora alla risoluzione dell'equazione integrale trovata.

Per prima cosa é necessario scrivere l'equazione componente per componente e risolvere le due equazioni scalari ricavate separatamente.

Consideriamo quindi le due seguenti equazioni integrali scalari.

$$f_{uv}(x, \mu) = \begin{cases} e^{-\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu} x} \varphi_{uv}^+(\mu) + \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{uv}(x', \mu', \mu) f_{uv}(x', \mu') d\mu', & \text{se } \mu \in (0, 1) \\ e^{-\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu} x} \varphi_{uv}^-(\mu) - \frac{1}{c\mu} \int_x^l e^{\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{uv}(x', \mu', \mu) f_{uv}(x', \mu') d\mu', & \text{se } \mu \in (-1, 0) \end{cases} \quad (2.57a)$$

$$f_{ir}(x, \mu) = \begin{cases} e^{-\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} x} \varphi_{ir}^+(\mu) + \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{ir}(x', \mu', \mu) f_{ir}(x', \mu') d\mu' + \\ \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{uv \rightarrow ir}(x', \mu', \mu) f_{uv}(x', \mu') d\mu', & \text{se } \mu \in (0, 1) \\ e^{-\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} x} \varphi_{ir}^-(\mu) - \frac{1}{c\mu} \int_x^l e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{ir}(x', \mu', \mu) f_{ir}(x', \mu') d\mu' - \\ \frac{1}{c\mu} \int_x^l e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{uv \rightarrow ir}(x', \mu', \mu) f_{uv}(x', \mu') d\mu', & \text{se } \mu \in (-1, 0) \end{cases} \quad (2.57b)$$

L'idea base per affrontare la risoluzione del problema stazionario mediante la sua espressione tramite equazioni integrali scalari consiste nel risolvere la (2.57a) e poi, nota tale soluzione, risolvere la (2.57b) considerando il termine

che accoppia le due equazioni come se fosse un termine noto aggiuntivo.

Vediamo in dettaglio come si procede.

La (2.57a) si può scrivere come segue

$$f_{uv} = g + Hf_{uv} \quad (2.58)$$

con termine noto

$$g(x, \mu) = \begin{cases} e^{-\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu} x} \varphi_{uv}^+(\mu), & \text{se } \mu \in (0, 1) \\ e^{-\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu} (l-x)} \varphi_{uv}^-(\mu), & \text{se } \mu \in (-1, 0) \end{cases}$$

e con l'operatore H definito, $\forall \in L^1((0, l) \times (-1, 1))$, come

$$(Hf)(x, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{\frac{\Sigma_{uv}}{\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{uv}(x', \mu, \mu') f(x', \mu') d\mu', & \text{se } \mu \in (0, 1) \\ -\frac{1}{c\mu} \int_x^l e^{\frac{\Sigma_{uv}}{\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{uv}(x', \mu, \mu') f(x', \mu') d\mu', & \text{se } \mu \in (-1, 0) \end{cases}$$

$\forall \in L^1((0, l) \times (-1, 1))$. Per il Teorema ?? visto nel Capitolo 1, per provare che l'equazione (2.57a) ha una e una sola soluzione in $X_0 = L^1((0, l) \times (-1, 1))$ è sufficiente provare che

(i) $g \in X$.

(ii) $\|H\| < 1$.

Se ciò accade sappiamo inoltre che la soluzione ha la seguente forma

$$f_{uv}(x, \mu) = \sum_{n=0}^{+\infty} (H^n g)(x, \mu)$$

Passiamo quindi a dimostrare tali risultati.

(i) Proviamo che $g \in X$.

Per ottenere ciò dobbiamo valutare la norma di g in X_0 .

$$\|g\|_{X_0} = \int_0^l dx \int_{-1}^1 |g(x, \mu)| d\mu = \int_0^l dx \int_0^1 e^{-\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu} x} |\varphi_{uv}^+(\mu)| d\mu + \int_0^l dx \int_{-1}^0 e^{-\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu} (l-x)} |\varphi_{uv}^-(\mu)| d\mu$$

Poichè gli esponenziali che compaiono sono entrambi negativi si possono maggiorare con 1 ottenendo

$$\begin{aligned}\|g\|_{X_0} &\leq \int_0^l dx \int_0^1 |\varphi_{uv}^+(\mu)| d\mu + \int_0^l dx \int_{-1}^0 |\varphi_{uv}^-(\mu)| d\mu = \\ &= \int_0^l dx \int_{-1}^1 |\varphi_{uv}^+(\mu)| d\mu = l \|\varphi_{uv}\|_{L^1(-1,1)}\end{aligned}$$

Da ciò segue che se $\|\varphi_{uv}\|_{L^1(-1,1)} < +\infty$ allora $\|g\|_{X_0} < +\infty$.

Quindi basto supporre $\varphi_{uv} \in L^1(-1,1)$ perchè risulti dimostrato il punto (i).

(ii) Adesso ci resta da provare che H è un operatore di contrazione, cioè che $\|H\| < 1$.

Sia $f \in X_0 = L^1((0,l) \times (-1,1))$ valutiamo la norma della sua immagine tramite H in X_0 .

$$\begin{aligned}\|Hf\|_{X_0} &= \int_0^l dx \int_{-1}^1 |Hf(x, \mu)| d\mu = \\ &= \int_0^l dx \int_0^1 d\mu \int_0^x dx' \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{c\mu} e^{\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu}(x'-x)} K_{uv}(x', \mu, \mu') |f(x', \mu')| \right\} d\mu' \\ &+ \int_0^l dx \int_{-1}^0 d\mu \int_x^l dx' \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{c\mu} e^{\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu}(x'-x)} K_{uv}(x', \mu, \mu') |f(x', \mu')| \right\} d\mu' = \\ &= \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^1 d\mu \int_0^l K_{uv}(x', \mu, \mu') |f(x', \mu')| dx' \frac{1}{c\mu} \int_{x'}^l e^{\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu}(x'-x)} dx \\ &+ \int_{-1}^1 d\mu' \int_{-1}^0 d\mu \int_0^l K_{uv}(x', \mu, \mu') |f(x', \mu')| dx' \left(-\frac{1}{c\mu} \right) \int_0^{x'} e^{\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu}(x'-x)} dx\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{c\mu} \int_{x'}^l e^{\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu}(x'-x)} dx = \frac{1}{\Sigma_{uv}} \left(1 - e^{\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu}(x'-l)} \right) \leq \frac{1}{\Sigma_{uv}}$$

e analogamente

$$\left(-\frac{1}{c\mu} \right) \int_0^{x'} e^{\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu}(x'-x)} dx = \frac{1}{\Sigma_{uv}} \left(1 - e^{\frac{\Sigma_{uv}}{c\mu} x'} \right) \leq \frac{1}{\Sigma_{uv}}$$

Utilizzando tali maggiorazioni nella precedente catena di uguaglianze si ottiene il seguente risultato

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_{X_0} &\leq \frac{1}{\Sigma_{uv}} \int_{-1}^1 d\mu' \int_{-1}^1 d\mu \int_0^l K_{uv}(x', \mu, \mu') |f(x', \mu')| dx' = \\
&= \frac{1}{\Sigma_{uv}} \int_0^l dx' \int_{-1}^1 |f(x', \mu')| d\mu' \int_{-1}^1 K_{uv}(x', \mu, \mu') d\mu = \\
&= \frac{1}{\Sigma_{uv}} \int_0^l dx' \int_{-1}^1 |f(x', \mu')| d\mu' \int_{-1}^1 \Sigma_{uv \rightarrow uv} p_1(x', \mu, \mu') d\mu = \\
&= \frac{\Sigma_{uv \rightarrow uv}}{\Sigma_{uv}} \int_0^l dx' \int_{-1}^1 |f(x', \mu')| d\mu' \int_{-1}^1 p_1(x', \mu, \mu') d\mu
\end{aligned}$$

Poichè

$$\int_{-1}^1 p_1(x', \mu, \mu') d\mu = 1$$

In definitiva si ottiene

$$\|Hf\|_{X_0} \leq \frac{\Sigma_{uv \rightarrow uv}}{\Sigma_{uv}} \|f\|_{X_0}$$

la norma di H quindi si stima con la seguente costante che dipende solo dalle sezioni d'urto

$$\|H\| \leq \frac{\Sigma_{uv \rightarrow uv}}{\Sigma_{uv}}$$

A questo punto è sufficiente supporre $\Sigma_{uv, c} + \Sigma_{uv \rightarrow ir} > 0$ per ottenere che H è una contrazione stretta, come volevasi dimostrare.

Abbiamo quindi provato l'esistenza e unicità della soluzione della (2.57a) qualora valgano le ipotesi fatte.

Risolviamo ora l'equazione (2.57b) in maniera analoga a quanto fatto per l'equazione (2.57a).

L'equazione in forma contratta si scrive

$$f_{ir}(x, \mu) = g'(x, \mu) + H'f - ir(x, \mu)$$

con termine noto

$$g'(x, \mu) = \begin{cases} e^{-\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} x} \varphi_{ir}^+(\mu) + \\ \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{uv \rightarrow ir}(x', \mu, \mu') f_{uv}(x', \mu') d\mu', & \mu \in (0, 1) \\ e^{-\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} (x-l)} \varphi_{ir}^-(\mu) - \\ \frac{1}{c\mu} \int_x^l e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{uv \rightarrow ir}(x', \mu, \mu') f_{uv}(x', \mu') d\mu', & \mu \in (-1, 0) \end{cases}$$

e con l'operatore H' definito $\forall f \in L^1((0, l) \times (-1, 1))$ da

$$(H'f)(x, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{uv \rightarrow ir}(x', \mu, \mu') f(x', \mu') d\mu', & \text{se } \mu \in (0, 1) \\ -\frac{1}{c\mu} \int_x^l e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{ir}(x', \mu, \mu') f(x', \mu') d\mu', & \text{se } \mu \in (-1, 0) \end{cases}$$

Come fatto per dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione per l'equazione integrale precedente si devono provare i due seguenti risultati

(i) Proviamo che $g' \in X_0$.

Stimiamone la norma

$$\begin{aligned} \|g'\|_{X_0} &= \int_0^l dx \int_{-1}^1 |g'(x, \mu)| d\mu = \\ & \int_0^l dx \int_0^1 e^{-\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} (x'-x)} |\varphi_{ir}^+(\mu)| d\mu + \int_0^l dx \int_{-1}^0 e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} (l-x)} |\varphi_{ir}^-(\mu)| d\mu \\ & + \int_0^l dx \int_0^1 d\mu \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{uv \rightarrow ir}(x', \mu, \mu') |f_{uv}(x', \mu')| d\mu' \\ & + \int_0^l dx \int_{-1}^0 d\mu \left(-\frac{1}{c\mu}\right) \int_x^l e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} (x'-x)} dx' \int_{-1}^1 K_{uv \rightarrow ir}(x, \mu, \mu'; t) |f_{uv}(x', \mu')| d\mu' \end{aligned}$$

Quindi vale la seguente maggiorazione

$$\begin{aligned} \|g'\|_{X_0} &\leq \|\varphi_{ir}\|_{X_0} \\ &+ \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^1 d\mu \int_0^l K_{uv \rightarrow ir}(x', \mu, \mu') |f(x', \mu')| dx' \frac{1}{c\mu} \int_{x'}^l e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu}(x'-x)} dx \\ &+ \int_{-1}^1 d\mu' \int_{-1}^0 d\mu \int_0^l K_{uv \rightarrow ir}(x', \mu, \mu') |f(x', \mu')| dx' \left(-\frac{1}{c\mu}\right) \int_0^{x'} e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu}(x'-x)} dx \end{aligned}$$

Analogamente a quanto già visto si utilizzano le seguenti maggiorazioni

$$\frac{1}{c\mu} \int_{x'}^l e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu}(x'-x)} dx = \frac{1}{\Sigma_{ir}} \left(1 - e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} x'}\right) \leq \frac{1}{\Sigma_{ir}}$$

e

$$\left(-\frac{1}{c\mu}\right) \int_0^{x'} e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu}(x'-x)} dx \leq \frac{1}{\Sigma_{ir}} \left(1 - e^{\frac{\Sigma_{ir}}{c\mu} x'}\right) \leq \frac{1}{\Sigma_{ir}}$$

La precedente maggiorazione quindi ci fornisce

$$\begin{aligned} \|g'\|_{X_0} &\leq l \|\varphi_{ir}\|_{L^1(-1,1)} \\ &+ \frac{1}{\Sigma_{ir}} \int_{-1}^1 d\mu' \int_{-1}^1 d\mu \int_0^l K_{uv \rightarrow ir}(x', \mu, \mu') |f_{uv}(x', \mu')| dx' \\ &= l \|\varphi_{ir}\|_{L^1(-1,1)} + \frac{\Sigma_{uv \rightarrow ir}}{\Sigma_{ir}} \|f_{uv}\|_{X_0} \end{aligned}$$

Poichè $f_{uv} \in X_0$, è sufficiente porre $\varphi_{ir} \in L^1(-1, 1)$ e si può concludere che $g' \in X_0$.

(ii) A questo punto si procede del tutto analogamente a quanto fatto nello studio della norma H e si ottiene la seguente stima per la norma H'

$$\|H'\| \leq \frac{\Sigma_{ir \rightarrow ir}}{\Sigma_{ir}}$$

Supponendo $\Sigma_{ir, c} > 0$ l'operatore H' risulta essere anch'esso una contrazione stretta.

Ricapitolando abbiamo appena dimostrato il seguente risultato

Teorema 2.4. *Se il dato al bordo $\varphi \in L^1(-1, 1) \oplus L^1(-1, 1)$ e se inoltre $\Sigma_{uv, c} + \Sigma_{uv \rightarrow ir} > 0$ e $\Sigma_{ir, c} > 0$ allora l'equazione integrale (2.56) ammette una e una sola soluzione nello spazio di Banach X .*

Per la soluzione del problema stazionario vale un risultato di positività della soluzione qualora il dato di inflow lo siano come accade nel nostro modello avendo a che fare con dati di inflow che esprimono delle densità. Abbiamo provato che il medesimo risultato vale nel caso evolutivo e quindi è opportuno vedere come questa proprietà si mantenga anche nel caso stazionario.

Teorema 2.5. *Supponiamo che $\varphi \in Y^+$ con $Y = L^1(-1, 1) \oplus L^1(-1, 1)$ allora la soluzione del corrispondente problema stazionario \mathbf{f} è tale che $\mathbf{f} \in X^+$.*

Dimostrazione (Teorema 2.5)

Proviamo per prima cosa che se $\varphi_{uv}(\mu) \geq 0$ q.o. $\mu \in (-1, 1)$ allora $f_{uv}(x, \mu) \geq 0$ q.o. $x \in (0, l)$, $\mu \in (-1, 1)$.

Per ottenere ciò sfruttiamo la forma della soluzione mediante serie fornita dal Teorema (1.2)

$$f_{uv} = \sum_{n=0}^{+\infty} H^n g$$

Possiamo quindi ricondurci a provare che $g(x, \mu) \geq 0$ per q.o. $x \in (0, l)$, $\mu \in (-1, 1)$ e che inoltre $Hf \geq 0$ per ogni $f \geq 0$ per q.o. $x \in (0, l)$, $\mu \in (-1, 1)$.

Da ciò applicando un ragionamento iterato si ottiene che

$$H^n f \geq 0$$

per q.o. $x \in (0, l)$, $\mu \in (-1, 1)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi la soluzione è positiva quasi ovunque perchè espressa come serie a termini positivi.

La positività quasi ovunque del termine noto g è immediata conseguenza della sue espressione come prodotto del dato g stesso e di esponenziali reali.

Per ottenere la positività di Hf in conseguenza della positività della funzione f segue analogamente osservando che anche i nuclei di scattering sono positivi q.o.

Una volta provata tale proprietà per f_{uv} si dimostra procedendo esattamente allo stesso modo per f_{ir} e quindi mettendo insieme si ottiene la tesi del teorema.

□

Osservazione 2.11. *Si può inoltre notare che se il dato d'inflow appartiene al cono stretto e inoltre si suppone che le funzioni di probabilità di scattering $p_i(x, \mu, \mu')$ siano anch'esse strettamente positive quasi ovunque per $i = 1, 2, 3$, allora anche la soluzione del problema stazionario appartiene al cono stretto dello spazio di Banach di partenza X .*

Capitolo 3

Problema Inverso

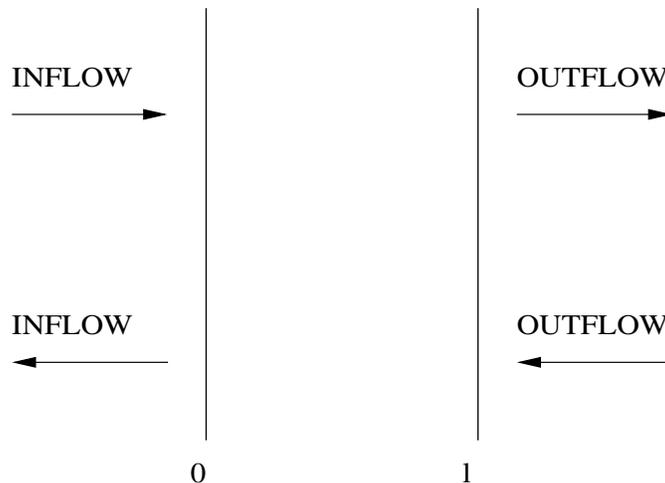
3.1 Formulazione del problema inverso

Il problema inverso riprende il modello studiato nel capitolo precedente ma considerandolo da un nuovo punto di vista.

Schematizziamo il fenomeno fisico che stiamo studiando, indicando con S_1 e S_2 le stelle che rappresentano le nostre sorgenti di raggi di fotoni a frequenze UV e IR e con O il punto di osservazione che è invece formato da uno strumento di rilevazione posto su di un satellite in orbita intorno alla terra. Il problema inverso consiste nel ricavare la densità di ciascuna delle due polveri che costituiscono la nube interstellare, tramite la conoscenza delle misurazioni fatte mediante lo strumento O e dell'emissione di raggi UV e IR da parte delle sorgenti S_1 e S_2 .

Per prima cosa è necessario osservare che, poichè si sono sempre trascurate le iterazioni tra fotone e fotone, considerando solo quelle tra fotone e molecola del mezzo ospite, i raggi non subiscono mutamenti al di fuori della nube.

Ciò è molto importante perchè dalla conoscenza delle quantità emesse dalle



sorgenti S_1 e S_2 e delle quantità misurate dall'osservatore O, possiamo ottenere il valore delle medesime in $x = 0$ e $x = l$, e lavorare quindi con esse.

Per studiare il problema inverso si deve partire da quanto dimostrato per il problema diretto nel caso stazionario, poichè tale caso è quello che nella realtà descrive il nostro fenomeno.

Si mantengono quindi le ipotesi introdotte nel relativo paragrafo e quindi in particolare si continua a supporre che le densità delle due polveri siano entrambe costanti.

$$\alpha_1(x) = \alpha_1 \quad \text{e} \quad \alpha_2(x) = \alpha_2, \quad \forall x \in (0, l)$$

Nel capitolo precedente abbiamo provato che il problema stazionario ammette una e una sola soluzione in X e quindi che ad ogni dato d'inflow $\varphi^{in}(\mu)$ è possibile associare una funzione soluzione in quasi ogni punto di $(0, l)$.

Ciò che adesso interessa a noi è associare a un dato d'inflow $\varphi^{in}(\mu)$ un dato d'outflow $\varphi^{out}(\mu)$.

In realtà, a priori, noi sappiamo solo che esiste una funzione soluzione $\mathbf{f} \in X = L^1((0, l) \times (-1, 1)) \oplus L^1((0, l) \times (-1, 1))$. Tale informazione da sola non è sufficiente per affermare che esista una sua espressione puntuale in $x = l$,

se $\mu > 0$ e in $x = 0$, se $\mu < 0$ e una conseguente buona definizione del dato d'outflow $\varphi^{out}(\mu)$.

Per ottenere ciò che a noi interessa non possiamo sfruttare i consueti risultati sulle tracce, [14], in quanto la nostra soluzione in generale non appartiene a $W^{1,1}((0, l) \times (-1, 1)) \oplus W^{1,1}((0, l) \times (-1, 1))$.

Pertanto dobbiamo usare dei teoremi di traccia più specifici in relazione ai risultati di regolarità di cui siamo in possesso.

Noi sappiamo che $\mathbf{f} \in X$ e $\mu \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f} \in X$, quindi possiamo applicare un teorema di traccia che sfrutti tali ipotesi, [22]. Tale teorema riscritto nel nostro caso ci permette di affermare che

Teorema 3.1. *Se $\mathbf{f} \in X$ e $\mu \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f} \in X$, allora possiamo associare ad essa le tracce $\varphi^{in}(\mu)$ e $\varphi^{out}(\mu)$ in modo che $\mu \varphi^{in}(\mu) \in L^1_{loc}(-1, 1) \oplus L^1_{loc}(-1, 1)$ e analogamente $\mu \varphi^{out}(\mu) \in L^1_{loc}(-1, 1) \oplus L^1_{loc}(-1, 1)$. Inoltre se $\mu \varphi^{in}(\mu) \in L^1(-1, 1) \oplus L^1(-1, 1)$ allora $\mu \varphi^{out}(\mu) \in L^1(-1, 1) \oplus L^1(-1, 1)$.*

Quindi è sufficiente considerare un dato d'inflow tale che $\mu \varphi^{in}(\mu) \in L^1(-1, 1) \oplus L^1(-1, 1)$ per ottenere un dato d'outflow che soddisfi la stessa regolarità.

Da quanto appena osservato segue che partendo da un dato di flusso d'inflow ben definito (dove con ben definito si intende finito) si può giungere a un dato di flusso d'outflow anch'esso ben definito.

Inoltre ciò ci assicura la possibilità di scrivere puntualmente quasi ovunque il dato di outflow.

Ricapitolando, possiamo associare a un dato d'inflow un relativo dato d'outflow e questo ci permette di passare alla formulazione matematica del problema inverso.

3.2 Risoluzione nel caso in cui vi sia solo assorbimento

Cominciamo considerando il caso in cui lo scattering sia in velocità che in frequenza sia nullo.

Tale caso particolare necessita di uno studio a perte perchè ci permette di ottenere risultati di gran lunga più soddisfacenti di quelli che otterremo studiando il caso più generale.

Infatti in questo caso lo studio del problema inverso si riduce facilmente allo studio dell'invertibilità di un sistema lineare, permettendoci quindi non solo di fornire una condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità ma anche un'espressione esplicita della soluzione.

Cominciamo inanzitutto con l'osservare che in questo particolare caso l'equazione integrale (2.56) fornisce direttamente una soluzione esplicita del problema stazionario relativo.

Consideriamo il caso $\mu \in (0, 1)$ fissato e scriviamo l'espressione calcolata nel capitolo precedente per la soluzione.

$$\mathbf{f}(x, \mu) = \begin{cases} \exp \left\{ - (\alpha_1 \sigma_{uv, 1} + \alpha_2 \sigma_{uv, 2}) \frac{x}{c\mu} \right\} \varphi_{uv}^{in}(\mu), & x \in (0, l) \\ \exp \left\{ - (\alpha_1 \sigma_{ir, 1} + \alpha_2 \sigma_{ir, 2}) \frac{x}{c\mu} \right\} \varphi_{ir}^{in}(\mu), & x \in (0, l) \end{cases} \quad (3.1)$$

D'ora in poi sarà sempre necessario separare il contributo portato al modello dalle due polveri di cui la nube è costituita.

Calcoliamo il valore assunto dalla soluzione sulla frontiera d'outflow.

$$\begin{cases} \varphi_{uv}^{out}(\mu) = \exp \left\{ - (\alpha_1 \sigma_{uv, 1} + \alpha_2 \sigma_{uv, 2}) \frac{l}{c\mu} \right\} \varphi_{uv}^{in}(\mu) \\ \varphi_{ir}^{out}(\mu) = \exp \left\{ - (\alpha_1 \sigma_{ir, 1} + \alpha_2 \sigma_{ir, 2}) \frac{l}{c\mu} \right\} \varphi_{ir}^{in}(\mu) \end{cases} \quad (3.2)$$

sempre per $\mu \in (0, 1)$.

Applichiamo ad ambo i membri della precedente espressione del dato d'outflow la funzione logaritmo.

$$\begin{cases} \ln \varphi_{uv}^{out}(\mu) - \ln \varphi_{uv}^{in}(\mu) = -\alpha_1 \sigma_{uv,1} \frac{l}{c\mu} - \alpha_2 \sigma_{uv,2} \frac{l}{c\mu} \\ \ln \varphi_{ir}^{out}(\mu) - \ln \varphi_{ir}^{in}(\mu) = -\alpha_1 \sigma_{ir,1} \frac{l}{c\mu} - \alpha_2 \sigma_{ir,2} \frac{l}{c\mu} \end{cases} \quad (3.3)$$

Si ottiene il seguente sistema per $\mu \in (0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha_1 \sigma_{uv,1} + \alpha_2 \sigma_{uv,2} = \frac{c\mu}{l} (\ln \varphi_{uv}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{uv}^{out}(\mu)) \\ \alpha_1 \sigma_{ir,1} + \alpha_2 \sigma_{ir,2} = \frac{c\mu}{l} (\ln \varphi_{ir}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{ir}^{out}(\mu)) \end{cases} \quad (3.4)$$

Osserviamo inanzitutto che è necessario supporre che il dato d'inflow relativo ai fotoni UV sia strettamente positivo quasi ovunque. Infatti da tale ipotesi, per quanto provato nel paragrafo relativo al problema stazionario, segue immediatamente che anche il dato d'outflow risulta strettamente positivo quasi ovunque e quindi tutti i precedenti logaritmi risultano finiti.

Fatta la precedente ipotesi si ottiene che il sistema (3.4) è invertibile se e solo se vale la seguente condizione sulle sezioni d'urto.

$$\sigma_{uv,1} \sigma_{ir,2} \neq \sigma_{uv,2} \sigma_{ir,1}$$

Consideriamo ora il caso relativo a $\mu \in (-1, 0)$ fissata.

Ragionando nello stesso modo si ottiene il seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} \alpha_1 \sigma_{uv,1} + \alpha_2 \sigma_{uv,2} = -\frac{c\mu}{l} (\ln \varphi_{uv}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{uv}^{out}(\mu)) \\ \alpha_1 \sigma_{ir,1} + \alpha_2 \sigma_{ir,2} = -\frac{c\mu}{l} (\ln \varphi_{ir}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{ir}^{out}(\mu)) \end{cases} \quad (3.5)$$

Mettendo insieme la (3.4) e la (3.5) si ottiene il seguente sistema lineare per le densità incognite, per ogni $\mu \in (-1, 1)$ fissato.

$$\begin{cases} \alpha_1 \sigma_{uv,1} + \alpha_2 \sigma_{uv,2} = \frac{c|\mu|}{l} (\ln \varphi_{uv}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{uv}^{out}(\mu)) \\ \alpha_1 \sigma_{ir,1} + \alpha_2 \sigma_{ir,2} = \frac{c|\mu|}{l} (\ln \varphi_{ir}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{ir}^{out}(\mu)) \end{cases} \quad (3.6)$$

Ricapitolando abbiamo provato il seguente risultato.

Teorema 3.2. (*soluzione del problema inverso nel caso di solo assorbimento*) Se si suppone che il dato d'inflow, relativo sia ai fotoni UV che ai fotoni IR, sia strettamente positivo e supponiamo inoltre che la matrice delle sezioni d'urto abbia determinante diverso da zero, allora il problema inverso relativo al caso in cui vi sia solo assorbimento ammette una e una sola soluzione.

Osservazione 3.1. Osserviamo che in questo particolare caso, piocchè le sezioni d'urto di scattering sono nulle, la matrice delle sezioni d'urto coincide con la matrice delle sezioni d'urto di cattura.

Osservazione 3.2. Osserviamo inoltre che è sufficiente supporre che $\varphi^{in} \in C(-1, 1) \oplus C(-1, 1)$ per ottenere che anche $\varphi^{out} \in C(-1, 1) \oplus C(-1, 1)$, in modo che il sistema risulti ben definito per ogni $\mu \in (-1, 1)$.

Tale osservazione segue dal fatto che il dato d'outflow non è altro che il dato d'inflow moltiplicato per un esponenziale.

In realtà vale un risultato di regolarità molto più forte. Il dato d'outflow infatti mantiene tutte le regolarità del dato d'inflow.

Una caratteristica molto importante del caso senza scattering è la possibilità di calcolare un'espressione esplicita della soluzione.

Per ottenere ciò è sufficiente applicare il metodo di Cramer al sistema (3.6), [10].

Vediamo cosa si ottiene procedendo in questo modo.

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sigma_{uv, 1}\sigma_{ir, 2} - \sigma_{uv, 2}\sigma_{ir, 1}} \det \begin{pmatrix} \frac{c|\mu|}{l} (\ln \varphi_{uv}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{uv}^{out}(\mu)) & \sigma_{ir, 1} \\ \frac{c|\mu|}{l} (\ln \varphi_{ir}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{ir}^{out}(\mu)) & \sigma_{ir, 2} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sigma_{uv, 1}\sigma_{ir, 2} - \sigma_{uv, 2}\sigma_{ir, 1}} \left\{ \frac{c|\mu|}{l} \sigma_{ir, 2} (\ln \varphi_{uv}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{uv}^{out}(\mu)) - \frac{c|\mu|}{l} \sigma_{ir, 1} (\ln \varphi_{ir}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{ir}^{out}(\mu)) \right\}$$

e nello stesso modo

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sigma_{uv,1}\sigma_{ir,2} - \sigma_{uv,2}\sigma_{ir,1}} \det \begin{pmatrix} \sigma_{uv,1} & \frac{c|\mu|}{l} (\ln \varphi_{uv}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{uv}^{out}(\mu)) \\ \sigma_{uv,2} & \frac{c|\mu|}{l} (\ln \varphi_{ir}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{ir}^{out}(\mu)) \end{pmatrix}$$

da cui

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sigma_{uv,1}\sigma_{ir,2} - \sigma_{uv,2}\sigma_{ir,1}} \left\{ \frac{c|\mu|}{l} \sigma_{uv,1} (\ln \varphi_{ir}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{ir}^{out}(\mu)) - \frac{c|\mu|}{l} \sigma_{ir,1}\sigma_{uv,2} (\ln \varphi_{uv}^{in}(\mu) - \ln \varphi_{uv}^{out}(\mu)) \right\}$$

Siamo quindi riusciti a calcolare le densità α_1 e α_2 in funzione del dato d'inflow e del relativo dato d'outflow misurato e quindi siamo riusciti a trovare un'espressione esplicita della soluzione del problema inverso nel caso in cui non vi sia scattering ma solo assorbimento.

Nei prossimi paragrafi vedremo come ciò non sarà possibile nel caso più generale in cui, inoltre, saremo costretti a procedere molto differenzialmente in quando l'utilizzo diretto dei dati d'inflow e d'outflow risulterà fallimentare.

Osservazione 3.3. *In questo caso inoltre se si suppone che il dato d'inflow φ^{in} sia zero quasi ovunque, si ottiene come immediata conseguenza che il dato d'outflow è anch'esso nullo quasi ovunque.*

3.3 Costruzione della funzione da invertire

Passiamo ora ad affrontare il caso generale.

In realtà le possibili strade per affrontare tale problema sono numerose.

Vediamone alcune e scegliamo la più opportuna.

Sia $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e con $\varphi_{\alpha_1, \alpha_2}^{out}(\mu)$ dato d'outflow relativo alle densità α_1 e α_2 incognite e al dato d'inflow $\varphi^{in}(\mu)$ noto.

Definiamo le tre seguenti funzioni.

(1)

$$F : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \longmapsto F(\alpha_1, \alpha_2) := \varphi_{\alpha_1, \alpha_2}^{out}(\mu)$$

con $\mu \in (-1, 1)$ parametro fissato opportunamente.

(2)

$$G : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \longmapsto G(\alpha_1, \alpha_2) := \int_{-1}^1 \varphi_{\alpha_1, \alpha_2}^{out}(\mu) d\mu = \Phi_{\alpha_1, \alpha_2}^{out}$$

(3)

$$H : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \longmapsto H(\alpha_1, \alpha_2) := \int_{-1}^1 |\mu| \varphi_{\alpha_1, \alpha_2}^{out}(\mu) d\mu = \Psi_{\alpha_1, \alpha_2}^{out}$$

Risolvere il problema inverso consiste nel riuscire a invertire una delle precedenti funzioni.

Si può subito osservare che la strada (3) è di gran lunga preferibile alla strada (2), poichè quanto precedentemente dimostrato per le tracce relative alla funzione soluzione del problema stazionario non è neppure sufficiente a rendere la funzione G ben definita, in quanto in generale φ^{out} non è sommabile.

La strada (1) porta anch'essa a notevoli complicazioni rispetto alla strada

(3) che vedremo più in dettaglio in seguito.

Quindi scegliamo la strada (3), che consiste nel cercare di risolvere il problema inverso invertendo la funzione H.

Prima di proseguire cerchiamo un'opportuna espressione del dato d'outflow, esplicitando la dipendenza dalle due densità incognite α_1 e α_2 .

Dall'equazione (2.56) si ottiene

$$\varphi_{uv}^{out}(\mu) = \left\{ \begin{array}{l} \exp \left\{ - \frac{-(\alpha_1 \sigma_{uv,1} + \alpha_2 \sigma_{uv,2})}{c\mu} l \right\} \varphi_{uv}^{in}(\mu) \\ + \frac{1}{c\mu} \int_0^l \exp \left\{ - \frac{-(\alpha_1 \sigma_{uv,1} + \alpha_2 \sigma_{uv,2})}{c\mu} (x' - l) \right\} dx' \\ \int_{-1}^1 \left\{ \alpha_1 \sigma_{uv \rightarrow uv,1} p_{1,1}(x', \mu, \mu') \right. \\ \left. + \alpha_2 \sigma_{uv \rightarrow uv,2} p_{1,2}(x', \mu, \mu') \right\} f_{uv}(x', \mu') d\mu', \mu \in (0, 1) \end{array} \right.$$

e

$$\varphi_{ir}^{out}(\mu) = \left\{ \begin{array}{l} \exp \left\{ - \frac{-(\alpha_1 \sigma_{ir,1} + \alpha_2 \sigma_{ir,2})}{c\mu} l \right\} \varphi_{ir}^{in}(\mu) \\ + \frac{1}{c\mu} \int_0^l \exp \left\{ - \frac{-(\alpha_1 \sigma_{ir,1} + \alpha_2 \sigma_{ir,2})}{c\mu} (x' - l) \right\} dx' \\ \int_{-1}^1 \left\{ \alpha_1 \sigma_{uv \rightarrow ir,1} p_{2,1}(x', \mu, \mu') \right. \\ \left. + \alpha_2 \sigma_{uv \rightarrow ir,2} p_{2,2}(x', \mu, \mu') \right\} f_{uv}(x', \mu') d\mu' \\ + \frac{1}{c\mu} \int_0^l \exp \left\{ - \frac{-(\alpha_1 \sigma_{ir,1} + \alpha_2 \sigma_{ir,2})}{c\mu} (x' - l) \right\} dx' \\ \int_{-1}^1 \left\{ \alpha_1 \sigma_{ir \rightarrow ir,1} p_{3,1}(x', \mu, \mu') \right. \\ \left. + \alpha_2 \sigma_{ir \rightarrow ir,2} p_{3,2}(x', \mu, \mu') \right\} f_{ir}(x', \mu') d\mu', \mu \in (0, 1) \end{array} \right.$$

dove indichiamo con $p_{j,i}$ le funzioni di probabilità di scattering relative allo scattering j (come già visto) e alla polvere i.

Analogamente si ottiene le corrispondenti per $\mu \in (-1, 0)$.

Le precedenti espressioni integrali si possono anche scrivere come

$$\varphi^{out}(\mu) = (I - B_{\alpha_1, \alpha_2})^{-1} \mathbf{Q}_{\alpha_1, \alpha_2}(l, \mu)$$

con

$$\mathbf{Q}_{\alpha_1, \alpha_2}(x, \mu) := \begin{pmatrix} \exp\left\{-\frac{-(\alpha_1 \sigma_{uv, 1} + \alpha_2 \sigma_{uv, 2})}{c\mu} x\right\} \varphi_{uv}^{in}(\mu) \\ \exp\left\{-\frac{-(\alpha_1 \sigma_{ir, 1} + \alpha_2 \sigma_{ir, 2})}{c\mu} l\right\} \varphi_{ir}^{in}(\mu) \end{pmatrix}$$

e con l'operatore B definito, per ogni $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in L^1((0, l) \times (-1, 1)) \oplus L^1((0, l) \times (-1, 1))$, come

$$(B_{\alpha_1, \alpha_2} \mathbf{f})(x, \mu) := \begin{pmatrix} \frac{1}{c\mu} \int_0^x \exp\left\{\frac{(\alpha_1 \sigma_{uv, 1} + \alpha_2 \sigma_{uv, 2})}{c\mu} (x' - x)\right\} dx' \\ \int_{-1}^1 \left\{ \alpha_1 \sigma_{uv \rightarrow uv, 1} p_{1, 1}(x', \mu, \mu') \right. \\ \left. + \alpha_2 \sigma_{uv \rightarrow uv, 1} p_{1, 2}(x', \mu, \mu') \right\} f_1(x', \mu') d\mu', \\ \frac{1}{c\mu} \int_0^x \exp\left\{\frac{(\alpha_1 \sigma_{ir, 1} + \alpha_2 \sigma_{ir, 2})}{c\mu} (x' - x)\right\} dx' \\ \int_{-1}^1 \left\{ \alpha_1 \sigma_{uv \rightarrow ir, 1} p_{2, 1}(x', \mu, \mu') \right. \\ \left. + \alpha_2 \sigma_{uv \rightarrow ir, 1} p_{2, 2}(x', \mu, \mu') \right\} f_1(x', \mu') d\mu' \\ + \frac{1}{c\mu} \int_0^x \exp\left\{\frac{(\alpha_1 \sigma_{ir, 1} + \alpha_2 \sigma_{ir, 2})}{c\mu} (x' - x)\right\} dx' \\ \int_{-1}^1 \left\{ \alpha_1 \sigma_{ir \rightarrow ir, 1} p_{3, 1}(x', \mu, \mu') \right. \\ \left. + \alpha_2 \sigma_{ir \rightarrow ir, 1} p_{3, 2}(x', \mu, \mu') \right\} f_2(x', \mu') d\mu' \end{pmatrix}$$

sempre per $\mu \in (0, 1)$.

Similmente, usando la relativa equazione, si ottiene un'analogha espressione per $\mu \in (-1, 0)$.

Osservazione 3.4. *L'operatore B ha la seguente struttura triangolare inferiore*

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ J_2 & J_3 \end{pmatrix}$$

Si può inoltre dimostrare che poichè le sezioni d'urto di cattura sono strettamente positive, gli operatori di scattering scalari J_i con $i = 1, 2, 3$ sono contrazioni strette.

Da ciò segue che anche l'operatore $(I - B)^{-1}$ mantiene tale struttura triangolare inferiore. Infatti $(I - B)^{-1}$ si scrive

$$(I - B)^{-1} = \begin{pmatrix} (I - J_1)^{-1} & 0 \\ (I - J_3)^{-1} J_2 (I - J_1)^{-1} & (I - J_3)^{-1} \end{pmatrix}$$

Poniamo adesso alcune ipotesi semplificanti prima di proseguire lo studio del problema.

- (i) Supponiamo che non ci siano sorgenti che si frappongano tra la nube e l'osservatore.
- (ii) Supponiamo anche che non ci sia scattering all'indietro e quindi

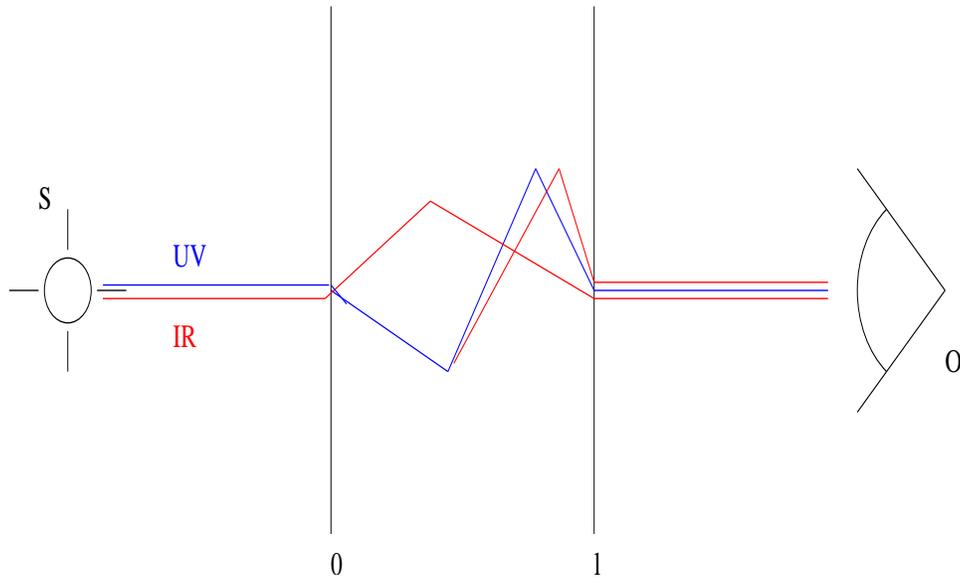
$$k_1(x, \mu, \mu') = 0, \quad \text{se } \mu \in (-1, 0)$$

$$k_2(x, \mu, \mu') = 0, \quad \text{se } \mu \in (-1, 0)$$

$$k_3(x, \mu, \mu') = 0, \quad \text{se } \mu \in (-1, 0)$$

Con tali ipotesi possiamo studiare l'equazione del problema considerando tutte le quantità definite solo per $\mu \in (0, 1)$.

Nella seguente figura rappresentiamo il caso semplificato che ci accingiamo a studiare.



È inoltre molto utile soffermarci fin da adesso su alcune notazioni che in seguito risulteranno di fondamentale importanza.

Poniamo

$$\sigma_{uv,i} = \sigma_{1,i} \text{ e } \sigma_{ir,i} = \sigma_{2,i}$$

analogamente

$$\sigma_{uv \rightarrow uv,i} = \sigma_{s,1,i}, \quad \sigma_{uv \rightarrow ir,i} = \sigma_{s,2,i}, \quad \sigma_{ir \rightarrow ir,i} = \sigma_{s,2,i}$$

per $i = 1, 2$.

Osserviamo che tali notazioni sono definite in modo da essere coerenti con quelle già usate sia per le funzioni di probabilità di scattering e più in generale per i nuclei e gli operatori di scattering.

3.4 Alcune proprietà della funzione nel caso generale

3.4.1 Continuità

In questa sezione si vuole provare che

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 \mu \varphi^{out}(\mu) d\mu$$

è continua.

Tale risultato non è immediato. Per provarlo si sfrutta la seguente scrittura della funzione H.

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 \mu F(\alpha_1, \alpha_2) d\mu$$

Lemma 3.1. $F(\alpha_1, \alpha_2)$ è continua.

Osservazione 3.5. La norma, considerata per dimostrare la continuità della funzione, in realtà dovrebbe essere fatta rispetto alla topologia indotta dalla metrica euclidea su \mathbb{R}^2 . Quindi

$$\lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} |F_1(\alpha'_1, \alpha'_2) - F_1(\alpha_1, \alpha_2)|^2 + |F_2(\alpha'_1, \alpha'_2) - F_2(\alpha_1, \alpha_2)|^2 = 0$$

e ciò equivale a provare che

$$\lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} |F_i(\alpha'_1, \alpha'_2) - F_i(\alpha_1, \alpha_2)| = 0, \quad i = 1, 2.$$

Dimostrazione (Lemma 3.1)

Dimostriamo per prima cosa che la funzione Q_{α_1, α_2} è continua in α_1 e α_2 .

Per l'osservazione appena fatta, ci riconduciamo a valutare il seguente limite scalare per $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} & \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} |Q_{\alpha'_1, \alpha'_2}^{(i)}(l, \mu) - Q_{\alpha_1, \alpha_2}^{(i)}(l, \mu)| \\ & \leq \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} |Q_{\alpha'_1, \alpha'_2}^{(i)}(l, \mu) - Q_{\alpha_1, \alpha_2}^{(i)}(l, \mu)| \\ & \quad + \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} |Q_{\alpha'_1, \alpha'_2}^{(i)}(l, \mu) - Q_{\alpha_1, \alpha_2}^{(i)}(l, \mu)| \quad (3.7) \end{aligned}$$

Cominciamo col provare che

$$\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha} |Q_{\alpha'_1, \alpha'_2}^{(j)}(l, \mu) - Q_{\alpha_1, \alpha_2}^{(j)}(l, \mu)| = 0 \quad (3.8)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha' \rightarrow \alpha} |Q_{\alpha'_1, \alpha'_2}^{(j)}(l, \mu) - Q_{\alpha_1, \alpha_2}^{(j)}(l, \mu)| &= \\ &= \lim_{\alpha' \rightarrow \alpha} \left| e^{\alpha_2 \frac{\sigma_{j,2}}{c\mu} l} \varphi_j^{in}(\mu) \left(e^{\alpha_1 \frac{\sigma_{j,1}}{c\mu} l} - e^{\alpha'_1 \frac{\sigma_{j,1}}{c\mu} l} \right) \right| = \\ &= e^{\alpha_2 \frac{\sigma_{j,2}}{c\mu} l} \varphi_j^{in}(\mu) \lim_{\alpha' \rightarrow \alpha} \left| e^{\alpha_1 \frac{\sigma_{j,1}}{c\mu} l} - e^{\alpha'_1 \frac{\sigma_{j,1}}{c\mu} l} \right| \quad (3.9) \end{aligned}$$

Poichè la funzione e^{-y} è continua, allora il limite (3.9) è nullo.

Quindi il limite (3.8) è provato.

Resta da provare che anche il secondi termine della (3.7) è nullo.

$$\begin{aligned} \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} |Q_{\alpha'_1, \alpha'_2}^{(i)}(l, \mu) - Q_{\alpha_1, \alpha_2}^{(i)}(l, \mu)| &= \\ &= \varphi_j^{in}(\mu) \lim_{\alpha'_1 \rightarrow \alpha_1} e^{-\alpha'_1 \frac{\sigma_{j,1}}{c\mu} l} \lim_{\alpha'_2 \rightarrow \alpha_2} \left| e^{-\alpha'_2 \frac{\sigma_{j,2}}{c\mu} l} - e^{-\alpha_2 \frac{\sigma_{j,2}}{c\mu} l} \right| = 0 \quad (3.10) \end{aligned}$$

sempre per la continuità di e^{-y} .

Quindi in definitiva abbiamo provato che

$$\lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} |Q_{\alpha'_1, \alpha'_2}^{(i)}(l, \mu) - Q_{\alpha_1, \alpha_2}^{(i)}(l, \mu)|$$

per $i = 1, 2$.

Pertanto la funzione $F(\alpha_1, \alpha_2)$ risulta continua.

Proviamo che B_{α_1, α_2} è un operatore continuo in α_1 e α_2 .

Dobbiamo quindi dimostrare che vale

$$\lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} |B_{\alpha'_1, \alpha'_2} \mathbf{f}(x, \mu) - B_{\alpha_1, \alpha_2} \mathbf{f}(x, \mu)| = 0 \quad (3.11)$$

Per quasi ovunque $\mu \in (0, 1)$ e per ogni $x \in [0, l]$.

Proviamo il risultato solo per la prima componente, perchè per la seconda si procede in maniera identica, salvo ottenere un termine in più da considerare. Vediamo in dettaglio come si procede.

$$\begin{aligned}
& \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} \left| (B_{(\alpha'_1, \alpha'_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu) - (B_{(\alpha_1, \alpha_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu) \right| \\
& \leq \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} \left| (B_{(\alpha'_1, \alpha_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu) - (B_{(\alpha_1, \alpha_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu) \right| \\
& \quad + \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} \left| (B_{(\alpha'_1, \alpha'_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu) - (B_{(\alpha'_1, \alpha_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu) \right| \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Proviamo solo che il primo dei due termini a secondo membro è nullo, perchè, come visto per la dimostrazione della continuità di $\mathbf{Q}_{\alpha_1, \alpha_2}$, le due dimostrazioni non presentano sostanziali differenze.

Quindi dobbiamo dimostrare che il seguente limite è nullo

$$\lim_{(\alpha'_1) \rightarrow (\alpha_1)} \left| (B_{(\alpha'_1, \alpha_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu) - (B_{(\alpha_1, \alpha_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu) \right| = 0 \quad (3.13)$$

Osserviamo che

$$0 \leq \liminf_{\alpha'_1 \rightarrow \alpha_1} |g| \leq \limsup_{\alpha'_1 \rightarrow \alpha_1} |g|$$

Pertanto, per provare che vale (3.13), è sufficiente provare che

$$\limsup_{(\alpha'_1) \rightarrow (\alpha_1)} \left| (B_{(\alpha'_1, \alpha_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu) - (B_{(\alpha_1, \alpha_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu) \right| = 0 \quad (3.14)$$

Inaffatti una volta provato (3.14) ne segue che esiste il limite ed il suo valore è proprio uguale a zero.

Vediamo come si procede.

$$\begin{aligned}
& \limsup_{\alpha'_1 \rightarrow \alpha_1} |(B_{(\alpha'_1, \alpha_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu) - (B_{(\alpha_1, \alpha_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu)| \\
& \leq \limsup_{\alpha'_1 \rightarrow \alpha_1} \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{\alpha_2 \frac{\sigma_{1,2}}{c\mu}(x'-x)} |\alpha_1 e^{\alpha_1 \frac{\sigma_{1,1}}{c\mu}(x'-x)} - \alpha'_1 e^{\alpha'_1 \frac{\sigma_{1,1}}{c\mu}(x'-x)}| dx' \\
& \quad + \frac{\alpha_2}{c\mu} \int_0^x e^{\alpha_2 \frac{\sigma_{1,2}}{c\mu}(x'-x)} \left| e^{\alpha_1 \frac{\sigma_{1,1}}{c\mu}(x'-x)} - e^{\alpha'_1 \frac{\sigma_{1,1}}{c\mu}(x'-x)} \right| dx' \\
& \quad + \int_0^1 \sigma_{s,1,1} p_{1,1}(x', \mu, \mu') |f_1(x', \mu')| d\mu' \\
& \quad + \int_0^1 \sigma_{s,1,2} p_{1,2}(x', \mu, \mu') |f_1(x', \mu')| d\mu'
\end{aligned}$$

Poichè le funzioni di cui dobbiamo fare il limite sono tutte sommabili e positive possiamo applicare il lemma di Fatou, e si ottiene

$$\begin{aligned}
& \limsup_{\alpha'_1 \rightarrow \alpha_1} |(B_{(\alpha'_1, \alpha_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu) - (B_{(\alpha_1, \alpha_2)} \mathbf{f})^{(1)}(x, \mu)| \\
& \leq \frac{1}{c\mu} \int_0^x e^{\alpha_2 \frac{\sigma_{1,2}}{c\mu}(x'-x)} \limsup_{\alpha'_1 \rightarrow \alpha_1} |\alpha_1 e^{\alpha_1 \frac{\sigma_{1,1}}{c\mu}(x'-x)} - \alpha'_1 e^{\alpha'_1 \frac{\sigma_{1,1}}{c\mu}(x'-x)}| dx' \\
& \quad + \int_0^1 \sigma_{s,1,1} p_{1,1}(x', \mu, \mu') |f_1(x', \mu')| d\mu' \\
& \quad + \frac{\alpha_2}{c\mu} \int_0^x e^{\alpha_2 \frac{\sigma_{1,2}}{c\mu}(x'-x)} \limsup_{\alpha'_1 \rightarrow \alpha_1} |e^{\alpha_1 \frac{\sigma_{1,1}}{c\mu}(x'-x)} - e^{\alpha'_1 \frac{\sigma_{1,1}}{c\mu}(x'-x)}| dx' \\
& \quad + \int_0^1 \sigma_{s,1,2} p_{1,2}(x', \mu, \mu') |f_1(x', \mu')| d\mu'
\end{aligned}$$

Per la continuità della funzione $y e^{-y}$, i due limiti a secondo membro sono entrambi nulli e quindi si è dimostrato (3.14) e di conseguenza il limite (3.11).

Proviamo che anche l'operatore $(I - B_{\alpha_1, \alpha_2})^{-1}$ è continuo in α_1 e α_2 , [?].

Per ottenere la continuità di tale operatore non si fa altro che sfruttare la

continuità dell'operatore B_{α_1, α_2} che abbiamo appena provato.

$$\begin{aligned} (I - B_{\alpha'_1, \alpha'_2})^{-1} - (I - B_{\alpha_1, \alpha_2})^{-1} &= \\ &= (I - B_{\alpha_1, \alpha_2})^{-1} (I - B_{\alpha_1, \alpha_2} - I + B_{\alpha'_1, \alpha'_2}) (I - B_{\alpha_1, \alpha_2})^{-1} = \\ &= (I - B_{\alpha'_1, \alpha'_2})^{-1} (B_{\alpha'_1, \alpha'_2} - B_{\alpha_1, \alpha_2}) (I - B_{\alpha'_1, \alpha'_2})^{-1} \end{aligned}$$

passando alla norma dell'operatore si ottiene

$$\begin{aligned} \left\| (I - B_{\alpha'_1, \alpha'_2})^{-1} - (I - B_{\alpha_1, \alpha_2})^{-1} \right\| &\leq \left\| (I - B_{\alpha_1, \alpha_2})^{-1} \right\| \|B_{\alpha'_1, \alpha'_2} - B_{\alpha_1, \alpha_2}\| \left\| (I - B_{\alpha'_1, \alpha'_2})^{-1} \right\| \\ &\leq L(\alpha'_1, \alpha'_2) L(\alpha_1, \alpha_2) \|B_{\alpha'_1, \alpha'_2} - B_{\alpha_1, \alpha_2}\| \end{aligned}$$

dove indichiamo con

$$L(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{1 - C(\alpha_1, \alpha_2)}$$

e con

$$c(\alpha_1, \alpha_2) = \max \left\{ \frac{\Sigma_{ir \rightarrow ir}}{\Sigma_{ir}}, \frac{\Sigma_{uv \rightarrow uv}}{\Sigma_{uv}}, \frac{\Sigma_{uv \rightarrow ir}}{\Sigma_{ir}} \right\}$$

Dalla definizione di $c(\alpha_1, \alpha_2)$ segue subito che

$$\|B_{\alpha_1, \alpha_2}\| \leq c(\alpha_1, \alpha_2)$$

Inoltre, essendo definita come massimo di funzioni continue, $c(\alpha_1, \alpha_2)$ è una funzione continua in α_1 e α_2 . Quindi anche $L(\alpha_1, \alpha_2)$ è continua in α_1 e α_2 . Utilizzando tali considerazioni passiamo a calcolare il limite che ci interessa.

$$\begin{aligned} \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} \left\| (I - B_{\alpha'_1, \alpha'_2})^{-1} - (I - B_{\alpha_1, \alpha_2})^{-1} \right\| &\leq L(\alpha'_1, \alpha'_2) \\ &\lim_{(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} L(\alpha'_1, \alpha'_2) \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} \|B_{\alpha'_1, \alpha'_2} - B_{\alpha_1, \alpha_2}\| \\ &= L(\alpha'_1, \alpha'_2)^2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

per la continuità di L e B.

Infine possiamo dimostrare che la funzione $F(\alpha_1, \alpha_2)$ è continua.
 Per fare ciò è necessario utilizzare la continuità di \mathbf{Q} e $(I - B)^{-1}$.

$$\begin{aligned}
 & |F(\alpha'_1, \alpha'_2) - F(\alpha_1, \alpha_2)| \\
 &= \left| (I - B_{\alpha'_1, \alpha'_2})^{-1} \mathbf{Q}_{\alpha'_1, \alpha'_2} - (I - B_{\alpha_1, \alpha_2})^{-1} \mathbf{Q}_{\alpha_1, \alpha_2} \right| \\
 &\leq \left| (I - B_{\alpha'_1, \alpha'_2})^{-1} (\mathbf{Q}_{\alpha'_1, \alpha'_2} - \mathbf{Q}_{\alpha_1, \alpha_2}) \right| \\
 &+ \left| (I - B_{\alpha'_1, \alpha'_2})^{-1} - (I - B_{\alpha_1, \alpha_2})^{-1} \right| |\mathbf{Q}_{\alpha_1, \alpha_2}| \\
 &\leq L(\alpha'_1, \alpha'_2) |\mathbf{Q}_{\alpha'_1, \alpha'_2} - \mathbf{Q}_{\alpha_1, \alpha_2}| \\
 &\quad + \left\| (I - B_{\alpha'_1, \alpha'_2})^{-1} - (I - B_{\alpha_1, \alpha_2})^{-1} \right\| |\mathbf{Q}_{\alpha_1, \alpha_2}|
 \end{aligned}$$

Da tale stima, passando al limite si ottiene che

$$\lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} |F(\alpha'_1, \alpha'_2) - F(\alpha_1, \alpha_2)| = 0 \quad (3.15)$$

□

Teorema 3.3. $H(\alpha_1, \alpha_2)$ è continua in α_1 e α_2 .

Dimostrazione (Teorema 3.3)

Per provare la continuità della funzione $H(\alpha_1, \alpha_2)$ si procede applicando il Lemma di Fatou per poter fare seguire la continuità cercata da quella già provata per la funzione $F(\alpha_1, \alpha_2)$.

Basta osservare che $\mu \varphi^{out}(\mu)$ è sommabile e positiva e quindi soddisfa la ipotesi del Lemma di Fatou.

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu \liminf_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} F(\alpha'_1, \alpha'_2) d\mu &\leq \liminf_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} H(\alpha'_1, \alpha'_2) \\ &\leq \limsup_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} H(\alpha'_1, \alpha'_2) \leq \int_0^1 \mu \limsup_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} F(\alpha'_1, \alpha'_2) d\mu \end{aligned}$$

Poichè F è continua, sappiamo che

$$\liminf_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} F(\alpha'_1, \alpha'_2) = \limsup_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} F(\alpha'_1, \alpha'_2) = \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} F(\alpha'_1, \alpha'_2)$$

Quindi

$$\liminf_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} H(\alpha'_1, \alpha'_2) = \limsup_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} H(\alpha'_1, \alpha'_2)$$

Da cui si può dedurre, sia l'esistenza del relativo limite per H , che il suo valore a partire dal quello assunto dal corrispondente limite per F .

$$\begin{aligned} \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} H(\alpha'_1, \alpha'_2) &= \int_0^1 \mu \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} F(\alpha'_1, \alpha'_2) d\mu = \\ &= \int_0^1 \mu F(\alpha_1, \alpha_2) d\mu = H(\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

Pertanto la funzione $H(\alpha_1, \alpha_2)$ risulta continua.

□

3.4.2 Differenziabilità

Dobbiamo innanzitutto trovare una buona espressione per le derivate parziali prima della funzione $F(\alpha_1, \alpha_2)$ e poi conseguentemente della funzione $H(\alpha_1, \alpha_2)$.

Osservazione 3.6. *Quando sarà possibile ometteremo gli indici che esprimono la dipendenza del termine \mathbf{Q} e dell'operatore B , dalle due variabili α_1 e α_2 per ottenere una scrittura più snella.*

Lemma 3.2. (Formula di derivazione)

Poiché $\mathbf{Q}_{\alpha_1, \alpha_2}$ e $(I - B_{\alpha_1, \alpha_2})^{-1}$ sono entrambi continui, allora vale la seguente formula di derivazione

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left\{ (I - B)^{-1} \mathbf{Q} \right\} = (I - B)^{-1} \frac{\text{partial}}{\text{partial} \alpha_i} (I - B)^{-1} \mathbf{Q} + (I - B)^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \mathbf{Q} \quad (3.16)$$

con $i = 1, 2$.

Dimostrazione (Lemma 3.2)

□

Lemma 3.3. $F(\alpha_1, \alpha_2)$ è differenziabile.

Dimostrazione (Lemma 3.3)

Poiché abbiamo già provato che F è continua e abbiamo trovato un'espressione ben definita per entrambe le sue derivate parziali, per dimostrare che è differenziabile è sufficiente verificare che le sue derivate parziali siano entrambe continue.

(1) Proviamo che $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \mathbf{Q}$ è continua.

Tale risultato è immediato perché

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \mathbf{Q} = \frac{\Sigma_i}{c\mu} l \mathbf{Q}$$

con Σ_i matrice delle sezioni d'urto totali relative alle due polveri.

Quindi $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \mathbf{Q}$ differisce da \mathbf{Q} solo per una matrice costante a moltiplicare e di conseguenza mantiene la continuità della funzione \mathbf{Q} .

- (2) Proviamo che $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} B$ Anche in questo caso non è necessario svolgere esplicitamente i conti perchè la continuità di tale operatore risulta evidente semplicemente osservando la sua struttura e sfruttando il risultato di continuità già provato per l'operatore B.

Scriviamo esplicitamente tale operatore derivata per chiarire quanto appena affermato.

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i} B \mathbf{f} \right)^{(1)}(x, \mu) := \left(\begin{array}{l} \frac{\sigma_{1,i}}{c^2 \mu^2} \int_0^x \exp \left\{ \frac{(\alpha_1 \sigma_{uv,1} + \alpha_2 \sigma_{uv,2})}{c \mu} (x' - x) \right\} \\ (x' - x) dx' \int_{-1}^1 \left\{ \alpha_1 \sigma_{uv \rightarrow uv, 1} p_{1,1}(x', \mu, \mu') \right. \\ \left. + \alpha_2 \sigma_{uv \rightarrow uv, 1} p_{1,2}(x', \mu, \mu') \right\} f_1(x', \mu') d\mu' \\ + \frac{1}{c \mu} \int_0^x \exp \left\{ \frac{(\alpha_1 \sigma_{uv,1} + \alpha_2 \sigma_{uv,2})}{c \mu} (x' - x) \right\} dx' \\ \left. \int_{-1}^1 \sigma_{uv \rightarrow uv, i} p_{1,i}(x', \mu, \mu') f_1(x', \mu') d\mu' \right) \end{array} \right)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i} B \mathbf{f} \right)^{(2)}(x, \mu) := \left(\begin{array}{l}
\frac{\sigma_{ir, i}}{c^2 \mu^2} \int_0^x \exp \left\{ \frac{(\alpha_1 \sigma_{ir, 1} + \alpha_2 \sigma_{ir, 2})}{c \mu} (x' - x) \right\} \\
(x' - x) dx' \int_{-1}^1 \left\{ \alpha_1 \sigma_{uv \rightarrow ir, 1} p_{2, 1}(x', \mu, \mu') \right. \\
+ \left. \alpha_2 \sigma_{uv \rightarrow ir, 1} p_{2, 2}(x', \mu, \mu') \right\} f_1(x', \mu') d\mu' \\
+ \frac{\sigma_{ir, i}}{c^2 \mu^2} \int_0^x \exp \left\{ \frac{(\alpha_1 \sigma_{ir, 1} + \alpha_2 \sigma_{ir, 2})}{c \mu} (x' - x) \right\} \\
(x' - x) dx' \int_{-1}^1 \left\{ \alpha_1 \sigma_{ir \rightarrow ir, 1} p_{3, 1}(x', \mu, \mu') \right. \\
+ \left. \alpha_2 \sigma_{ir \rightarrow ir, 1} p_{3, 2}(x', \mu, \mu') \right\} f_2(x', \mu') d\mu' \\
+ \frac{1}{c \mu} \int_0^x \exp \left\{ \frac{(\alpha_1 \sigma_{ir, 1} + \alpha_2 \sigma_{ir, 2})}{c \mu} (x' - x) \right\} dx' \\
\int_{-1}^1 \sigma_{uv \rightarrow ir, i} p_{2, i}(x', \mu, \mu') f_1(x', \mu') d\mu' \\
+ \frac{1}{c \mu} \int_0^x \exp \left\{ \frac{(\alpha_1 \sigma_{ir, 1} + \alpha_2 \sigma_{ir, 2})}{c \mu} (x' - x) \right\} dx' \\
\int_{-1}^1 \sigma_{ir \rightarrow ir, i} p_{3, i}(x', \mu, \mu') f_2(x', \mu') d\mu'
\end{array} \right)$$

Il primo termine della prima componente, e rispettivamente i primi due della seconda, differiscono dai corrispondenti termini di B solo per un termine $(x' - x)$ a moltiplicare che non influisce certo sulla continuità rispetto ad α_1 e α_2 .

Il secondo termine della prima componente, e corrispondentemente il terzo e il quarto della seconda, sono del tipo $\alpha_i k$, con K costante che non dipende da α_1 e α_2 e quindi sono ovviamente continui.

Per somma, da quanto appena osservato, segue immediatamente la continuità delle derivate parziali $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} B$.

- (3) Applicando quanto dimostrato nei due passi precedenti alla formula di derivazione (3.16), per linearità si ottiene che $F(\alpha_1, \alpha_2)$ è continua.

□

Teorema 3.4. $H(\alpha_1, \alpha_2)$ è differenziabile.

Dimostrazione (Teorema 3.4)

Per il Lemma 3.3, si ha che $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} F(\alpha_1, \alpha_2)$ è continua per $i = 1, 2$.

Poichè inoltre si nota subito che. sia F che $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} F$ sono funzioni sommabili e positive, si può applicare il lemma di Fatou, da cui segue immediatamente la tesi.

Infatti

$$\begin{aligned} \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} H(\alpha'_1, \alpha'_2) &= \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_0^1 \mu F(\alpha'_1, \alpha'_2) d\mu = \\ &= \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^1 \mu \frac{\partial}{\partial \alpha_i} F(\alpha'_1, \alpha'_2) d\mu = \int_0^1 \mu \lim_{(\alpha'_1, \alpha'_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} F(\alpha_1, \alpha_2) d\mu = \\ &= \int_0^1 \mu F(\alpha_1, \alpha_2) d\mu = H(\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

□

3.5 Risoluzione nel caso con scattering in frequenza nullo

3.5.1 Introduzione di un nuovo punto di vista per studiare la funzione da invertire

Poniamoci nel caso con scattering in frequenza nullo, cioè $k_3 = K_{uv \rightarrow ir}(x, \mu, \mu'; t) = 0$.

Ricordiamo che abbiamo supponiamo che non vi siano né sorgenti tra la nube e l'osservatore né scattering all'indietro.

Supponiamo infine che le funzioni di probabilità di scattering non dipendano né dalla polvere né dalla variabile spaziale x , cioè

(i) $p_{j,1} = p_{j,2} = p_j$ per $j = 1, 3$.

(ii) $p_j(x, \mu, \mu') = p_j(\mu, \mu')$ per ogni $x \in (0, l)$ e per $j = 1, 2, 3$.

Quanto fatto fino ad ora si è basato sull'espressione del dato d'outflow, e di conseguenza della funzione H, mediante l'equazione integrale (2.56) ricavata nel paragrafo riguardante il problema inverso.

Quanto invece faremo d'ora in poi sfrutterà l'espressione del dato d'outflow come soluzione dell'equazione integro-differenziale di partenza, scritta nel caso stazionario, (2.55).

Riscriviamo tale equazione nel nostro caso semplificato, completa di dato iniziale e dato al bordo.

(I)

con $\mu \in (0, 1)$ e $x \in [0, l]$.

Scritto in tale modo, il sistema può essere visto come un problema evolutivo nella variabile x. che si evolve dalle condizioni d'inflow alla condizioni d'outflow.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(x) = -\frac{\Sigma}{c\mu} \mathbf{f}(x) + \frac{1}{c\mu} K \mathbf{f}(x), & x \in (0, l) \\ \mathbf{f}(0) = \varphi^{in} \end{cases} \quad (3.17)$$

Per studiare il problema inverso è necessario esplicitare la dipendenza dalle densità delle due polvere.

Quindi l'equazione del problema evolutivo in x si scrive

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(x) = (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) \mathbf{f}(x) \quad (3.18)$$

con l'operatore A_i definito, per $i = 1, 2$, come

$$A_1 = -\frac{1}{c\mu} \begin{pmatrix} \sigma_{1,i} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,i} \end{pmatrix} + \frac{1}{c\mu} (II)$$

Ci resta da applicare la teoria dei semigruppri a questo nuovo problema evolutivo per dimostrare che la soluzione può essere scritta come

$$\mathbf{f}(x) = \exp \{x(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\} \varphi^{in} \quad (3.19)$$

Una volta provato ciò si ha come conseguenza che il dato d'outflow si scrive

$$\varphi^{out} = \mathbf{f}(l) = \exp \{l(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\} \varphi^{in} \quad (3.20)$$

3.5.2 Applicazione del teorema di Hilde-Yosida

Sia $X_0 = L^1(0, 1) \oplus L^1(0, 1)$ e

$$(A\mathbf{f})(x, \mu) = -\frac{\Sigma}{c\mu} \mathbf{f}(x, \mu) - \frac{\Sigma_s}{c\mu} \int_0^1 P \mathbf{f}(x, \mu') d\mu'$$

con Σ_s matrice delle sezioni d'urto di scattering e P matrice delle funzioni di probabilità di scattering.

Osserviamo che per l'ipotesi fatte entrambe le matrici risultano diagonali.

con dominio $\mathcal{D}(A) = \{\mathbf{f} \in X_0 \mid \mathbf{f} \in X_0\}$.

Teorema 3.5. $A \in \mathcal{G}(1, 0; X_0)$.

Dimostrazione (Teorema 3.5)

(1) $C_0^{+\infty}(0, 1) \oplus C_0^{+\infty}(0, 1) \subset \mathcal{D}(A)$ e quindi $\overline{\mathcal{D}(A)} = X_0$.

Pertanto abbiamo provato che A è densamente distribuito.

(2) Proviamo la proprietà di Hilde-Yosida.

Ricordiamo che ciò significa dimostrare che esiste z_0 tale che per ogni $z > z_0$ esista l'operatore $(zI - A)^{-1}$ e inoltre, posto $R(z, A) := (zI - A)^{-1}$, vale la disuguaglianza

$$\|R(z, A)\mathbf{g}\|_{X_0} \leq \frac{\|\mathbf{g}\|_{X_0}}{z - z_0}, \quad \forall \mathbf{g} \in X_0$$

Dobbiamo quindi studiare

$$(zI - A)\mathbf{f} = \mathbf{g}, \quad \text{con } \mathbf{f} \in \mathcal{D}(A) \text{ e } \mathbf{g} \in X_0 \quad (3.21)$$

Scriviamo esplicitamente le componenti della precedente equazione.

$$z f_i(\mu) + \frac{\Sigma_i}{c\mu} f_i(\mu) - \frac{\Sigma_{s,i}}{c\mu} \int_0^1 p_i(\mu, \mu') f_i(\mu) d\mu' = g_i(\mu) \quad (3.22)$$

per $i = 1, 2$.

Osserviamo che possiamo sottintendere la dipendenza dalle variabile x , che in questo modo di procedere si comporta come una variabile tempo.

Per ottenere l'esistenza della funzione inversa dobbiamo cercare di scrivere la precedente equazione in una forma del tipo

$$(I - H)\mathbf{f} = \mathbf{g}'$$

con $\|H\| < 1$ e $\mathbf{g}' \in X_0$. Vediamo come si può fare per ottenere ciò.

$$\left(z + \frac{\Sigma_i}{c\mu}\right)f_i(\mu) - \frac{\Sigma_{s,i}}{\int_0^1} p_i(\mu, \mu')f_i(\mu')d\mu' = g_i$$

Quindi

$$f_i(\mu) - \frac{\Sigma_{s,i}}{c\mu z + \Sigma_i} \int_0^1 p_i(\mu, \mu')f_i(\mu')d\mu' = \frac{c\mu}{c\mu z + \Sigma_i}g_i(\mu)$$

Poniamo

$$\tilde{g}_i(\mu) = \frac{c\mu}{c\mu z + \Sigma_i}g_i(\mu)$$

e

$$(H\mathbf{f})^{(i)}(\mu) = -\frac{\Sigma_{s,i}}{c\mu z + \Sigma_i} \int_0^1 p_i(\mu, \mu')f_i(\mu')d\mu'$$

con $i = 1, 2$.

Osserviamo che,poichè $\Sigma_{c,i} > 0$, posto $z_0 = 0$, abbiamo che per ogni $z > 0$ vale

$$\frac{\Sigma_{s,i}}{c\mu z + \Sigma_i} \leq \frac{\Sigma_{s,i}}{\Sigma_i} < 1.$$

Da tale osservazione si ricava la seguente stima

$$\begin{aligned}
\|H\mathbf{f}\|_{X_0} &= \left\| (H\mathbf{f})^{(1)} \right\|_{L^1(0,1)} + \left\| (H\mathbf{f})^{(2)} \right\|_{L^1(0,1)} \\
&= \int_0^1 \frac{\Sigma_{s,1}}{c\mu z + \Sigma_1} d\mu \int_0^1 p_1(\mu, \mu') |f_1(\mu')| d\mu' \\
&\quad + \int_0^1 \frac{\Sigma_{s,2}}{c\mu z + \Sigma_2} d\mu \int_0^1 p_2(\mu, \mu') |f_2(\mu')| d\mu' \\
&< \int_0^1 d\mu \int_0^1 p_1(\mu, \mu') |f_1(\mu')| d\mu' + \int_0^1 d\mu \int_0^1 p_2(\mu, \mu') |f_2(\mu')| d\mu' \\
&= \int_0^1 |f_1(\mu')| d\mu' \int_0^1 p_1(\mu, \mu') d\mu + \int_0^1 |f_2(\mu')| d\mu' \int_0^1 p_2(\mu, \mu') d\mu \\
&= \int_0^1 |f_1(\mu)| d\mu' + \int_0^1 |f_2(\mu)| d\mu' = \|\mathbf{f}\|_{X_0}
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\|H\| < 1$$

Quindi esiste $(I - H)^{-1}$.

Da ciò segue che

$$\mathbf{f} = (I - H)^{-1} \tilde{\mathbf{g}}$$

Inoltre vale

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{X_0} &= \left\| \frac{c\mu}{c\mu z + \Sigma_1} g_1 \right\|_{L^1(0,1)} + \left\| \frac{c\mu}{c\mu z + \Sigma_2} g_2 \right\|_{L^1(0,1)} \\
&< \left\| \frac{c\mu}{c\mu z} g_1 \right\|_{L^1(0,1)} + \left\| \frac{c\mu}{c\mu z} g_2 \right\|_{L^1(0,1)}
\end{aligned}$$

dove, per ottenere la maggiorazione, si è sfruttato il fatto che $\Sigma_i > 0$ per $i = 1, 2$.

Sfruttando inoltre la positività di z , lo si può portare fuori dalla norma

$$\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{X_0} \leq \frac{1}{z} \|\mathbf{g}\|_{X_0}$$

Da tale stima della norma del nuovo termine noto a partire da quello iniziale segue da una parte che $\tilde{\mathbf{g}} \in X_0$ e dall'altra che

$$\|R(z, A)\mathbf{g}\|_{X_0} \leq \frac{1}{1 - \|H\|} \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{X_0} < \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{X_0} \leq \frac{1}{z} \|\mathbf{g}\|_{X_0}$$

Quindi la proprietà di Hilde-Yosida è verificata.

(3) Resta da provare che l'operatore A è chiuso.

Osserviamo che quanto dimostrato al punto (2) ci garantisce che

$$\|R(z, A)\mathbf{g}\|_{X_0} < \frac{1}{z}\|\mathbf{g}\|_{X_0}, \quad \forall \mathbf{g} \in X_0$$

Quindi $R(z, A) \in \mathcal{B}(X_0)$.

Poichè, per il Teorema 1.4, sappiamo che $\mathcal{B}(X_0) \subset \mathcal{C}(X_0)$, segue che $R(z, A) \in \mathcal{C}(X_0)$.

Ma, per definizione, $R(z, A) = (zI - A)^{-1}$. Quindi, sempre per il Teorema 1.4, si ottiene che $(zI - A)^{-1} \in \mathcal{C}(X_0)$.

Osservando infine che l'operatore zI è lineare e limitato, si ricava che $A = zI - (zI - A)$ è chiuso, per un altro punto del medesimo Teorema 1.4.

Si può dunque concludere che $A \in \mathcal{G}(1, 0; X_0)$.

□

Da tale teorema segue che la scrittura mediante la teoria dei semigrupp, introdotta nella sezione precedente, è lecita.

3.5.3 Invertibilità locale

In questa sezione studieremo delle condizioni sufficienti per ottenere l'invertibilità locale della funzione H .

L'idea consiste nell'applicare alla funzione H il **Teorema della funzione inversa**, [9].

Poichè abbiamo già provato che H è una funzione C^1 , resta solo da trovare delle ipotesi affinché il determinante dello Jacobiano associato ad H sia diverso da zero in ogni punto.

Poniamo per semplificare ulteriormente le notazioni

$$\varphi_1^{in}(\mu) = \varphi_{uv}^{in}(\mu) \quad \text{e} \quad \varphi_2^{in}(\mu) = \varphi_{ir}^{in}(\mu)$$

Con tali notazioni le derivate parziali del dato d'inflow si scrivono

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \varphi_j^{out}(\mu) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \exp \{l(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\} \varphi_j^{out}(\mu) \quad (3.23)$$

Per poterle esprimere in maniera più maneggevole è necessario il seguente risultato.

Lemma 3.4. *Gli operatori A_1 e A_2 commutano tra loro.*

Corollario 3.1. *Il semigruppato associato all'operatore $l \alpha_1 A_1 + l \alpha_2 A_2$ si esprime come il prodotto dei semigruppato associati ai due suoi singoli addendi.*

$$\exp \{l(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\} = \exp \{l \alpha_1 A_1\} \exp \{l \alpha_2 A_2\}$$

Dimostrazione (Lemma 3.4)

□

Quindi possiamo calcolare esplicitamente le derivate parziali del dato d'outflow, utilizzando la scrittura fornita dal Corollario 3.1.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \varphi_j^{out}(\mu) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left\{ \exp \{l \alpha_1 A_1\} \exp \{l \alpha_2 A_2\} \right\} \varphi_j^{out}(\mu) = l A_i S \varphi_j^{out}(\mu) \quad (3.24)$$

per $i = 1, 2$ e con $S \varphi_j^{out}(\mu)$ scrittura usata per esprimere il semigruppato associato all'operatore $l \alpha_1 A_1 + l \alpha_2 A_2$, in analogia a quanto fatto nel Capitolo 2.

Una volta calcolate le derivate parziali del dato d'outflow, dobbiamo, utilizzando esse, calcolare quelle relative al flusso d'outflow, che coincide per definizione con la nostra funzione H.

Vediamo come si procede.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \Psi_j^{out} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left\{ \int_0^1 \mu \exp \{l(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\} \varphi_j^{in}(\mu) d\mu \right\} = \\ &= \int_0^1 \mu \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \exp \{l(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\} \varphi_j^{in}(\mu) d\mu = l \int_0^1 \mu A_i S \varphi_j^{in}(\mu) d\mu \end{aligned} \quad (3.25)$$

Consideriamo inizialmente il caso senza scattering e osserviamo come in questo caso ritroviamo esattamente la condizione necessaria e sufficiente trovata nel medesimo caso, seguendo la strada (1). In tale caso però la condizione che troveremo, a priori, ci darà solo l'invertibilità locale.

Se lo scattering è nullo abbiamo la seguente semplificazione

$$A_i S\varphi_j^{in}(\mu) = -\frac{\sigma_{j,i}}{c\mu} S\varphi_j^{in}(\mu)$$

Il determinante dello Jacobiano si calcola piuttosto semplicemente.

$$\begin{aligned} \det JH(\alpha_1, \alpha_2) &= \left(-l \int_0^1 \mu \frac{\sigma_{1,1}}{c\mu} S\varphi_1^{in}(\mu) d\mu \right) \left(-l \int_0^1 \mu \frac{\sigma_{2,2}}{c\mu} S\varphi_2^{in}(\mu) d\mu \right) \\ &\quad - \left(-l \int_0^1 \mu \frac{\sigma_{1,2}}{c\mu} S\varphi_1^{in}(\mu) d\mu \right) \left(-l \int_0^1 \mu \frac{\sigma_{2,1}}{c\mu} S\varphi_2^{in}(\mu) d\mu \right) \\ &= l^2 \left\{ \sigma_{1,1} \sigma_{2,2} - \sigma_{1,2} \sigma_{2,1} \right\} \left(\int_0^1 S\varphi_1^{in}(\mu) d\mu \right) \left(\int_0^1 S\varphi_2^{in}(\mu) d\mu \right) \end{aligned}$$

Quindi, se si impone, ritornando alle nostre consuete notazioni per esteso, che

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{uv,1} & \sigma_{ir,1} \\ \sigma_{uv,2} & \sigma_{ir,2} \end{pmatrix} \neq 0$$

e inoltre si suppone che il dato d'inflow $\varphi_j^{in}(\mu) > 0$ per quasi ogni $\mu \in (0, 1)$ e per $j = 1, 2$, per quanto provato nella sezione riguardante il problema stazionario, sappiamo che anche $\varphi_j^{out}(\mu) > 0$ per quasi ogni $\mu \in (0, 1)$ e per $j = 1, 2$.

Si ottiene quindi che la funzione H, nel caso di solo assorbimento, è localmente invertibile esattamente quando anche la funzione F lo è.

È utile ricordare nuovamente che nel caso di solo assorbimento la matrice delle sezioni d'urto (totali) coincide con la matrice delle sezioni d'urto di cattura, perchè sono gli unici termini non nulli.

Torniamo a considerare il nostro caso più generale in cui solo lo scattering in frequenza è nullo e vediamo cosa succede.

In generale abbiamo

$$\det JH(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \Phi_1^{out} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \Phi_2^{out} - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \Phi_2^{out} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \Phi_1^{out}$$

Dobbiamo inanzitutto calcolare in maniera più esplicita le singole derivate parziali del flusso d'outflow.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \Phi_j^{out} &= l \int_0^1 \mu A_i S \varphi_j^{in}(\mu) d\mu = -\frac{l}{c} \sigma_{j,i} \int_0^1 s \varphi_j^{in}(\mu) d\mu \\ &\quad + \frac{l}{c} \sigma_{s,j,i} \int_0^1 s \varphi_j^{in}(\mu') d\mu' \int_0^1 p_j(\mu, \mu') d\mu \end{aligned}$$

Poichè sappiamo che l'integrale su tutto il dominio di ciascuna funzione di probabilità di scattering è pari ad uno, allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \Phi_j^{out} &= -\frac{l}{c} \sigma_{j,i} \int_0^1 s \varphi_j^{in}(\mu) d\mu + \frac{l}{c} \sigma_{s,j,i} \int_0^1 s \varphi_j^{in}(\mu) d\mu \\ &= -\frac{l}{c} \sigma_{c,j,i} \int_0^1 s \varphi_j^{in}(\mu) d\mu \end{aligned}$$

Adesso possiamo passare a calcolare il determinante dello Jacobiano di H.

$$\begin{aligned} \det JH(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{l^2}{c} \left\{ \sigma_{c,1,1} \sigma_{c,2,2} - \sigma_{c,1,2} \sigma_{c,2,1} \right\} \\ &\quad \left(\int_0^1 S \varphi_1^{in}(\mu) d\mu \right) \left(\int_0^1 S \varphi_2^{in}(\mu) d\mu \right) \quad (3.26) \end{aligned}$$

Ricapitolando abbiamo ottenuto il seguente risultato.

Teorema 3.6. *Invertibilità Locale*

Supponiamo che il problema considerato fino ad esso soddisfi anche le seguenti ipotesi aggiuntive:

- (i) $\varphi_j^{in}(\mu) > 0$ per quasi ogni $\mu \in (0, 1)$ e per $j = 1, 2$.
- (ii) *Le sezioni d'urto di cattura siano tali che*

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{uw, c, 1} & \sigma_{ir, c, 1} \\ \sigma_{uw, c, 2} & \sigma_{ir, c, 2} \end{pmatrix} \neq 0$$

Allora $\det JH(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$ e quindi la funzione H è localmente invertibile.

Osservazione 3.7. *Le condizioni trovate non ci sorprendono affatto perchè fisicamente ci dicono che è necessario porci in una caso in cui vi sia una sorgente emittente effettiva (la (i)) e inoltre che la nebe sia formata da due polveri che si comportino significativamente in modo diverso (cioè tali che le relative grandezze, caratterizzanti il fenomeno di scattering, non siano proporzionali tra loro).*

Osservazione 3.8. *Notiamo che le condizioni trovate coincidono con quelle ottenute per l'invertibilità globale nel caso di solo assorbimento, seguendo la strada (1), (cioè invertendo la funzione F).*

In tale caso però tali condizioni, oltre che sufficienti come in questo caso, erano anche necessarie.

Questo ci fa presupporre di avere trovato le condizioni migliori possibili per ottenere l'invertibilità locale , anche in questo caso.

3.5.4 Invertibilità globale

In questa sezione ci proponiamo di dimostrare che il risultato d'inversione locale, provato per H nella sezione precedente, si può estendere a un risultato d'invertibilità globale.

Teorema 3.7. *La funzione H è tale che le sue due componenti sono funzioni scalari strettamente decrescenti rispetto ad entrambe le variabili separatamente.*

Dimostrazione (Teorema 3.7)

Abbiamo già visto che

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} H_j(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \Psi_j^{out} = -\frac{l \sigma_{j,c,i}}{c} \int_0^1 (S\varphi_j^{in})(\mu) d\mu$$

Supponendo $\varphi_j^{in}(\mu) > 0$ per q.o. $\mu \in (0, 1)$, si ottiene che $(S\varphi_j^{in})(\mu) > 0$ per q.o. $\mu \in (0, 1)$ e quindi

$$\int_0^1 (S\varphi_j^{in})(\mu) d\mu > 0$$

Inoltre $\sigma_{j, c, i} > 0$ per $i, j = 1, 2$.

Pertanto

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} H_j(\alpha_1, \alpha_2) < 0, \quad \text{per } i, j = 1, 2.$$

□

Adesso è necessario dimostrare un risultato che, sfruttando il teorema appena provato, ci fornisca un risultato globale per H.

Teorema 3.8. (Teorema di invertibilità globale)

Sia $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ aperto e $f \in C^1(D)$.

Siano f_1 e f_2 rispettivamente la prima e la seconda componente di f .

Supponiamo inoltre che f soddisfi le due seguenti condizioni:

1. $\det \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i \right) \neq 0$ in D .
2. $\frac{\partial}{\partial x_j} f_i > 0$ in D e per ogni $i, j = 1, 2$.

Allora la funzione f è iniettiva e quindi invertibile come funzione a valori sulla sua immagine.

Corollario 3.2. *Il precedente teorema continua a valere se all'ipotesi di crescita stretta delle componenti rispetto ad entrambe le variabili si sostituisce la corrispondente ipotesi di decrescita stretta, che è data da*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i < 0 \quad \text{in } D \text{ e per ogni } i, j = 1, 2.$$

Dimostrazione (Corollario 3.2)

Per ottenere la tesi basta applicare il Teorema 3.8 alla funzione $-f$ e dalla conseguente invertibilità di tale funzione si ottiene il risultato d'invertibilità cercato anche per la sua funzione opposta f .

□

Dimostrazione (Teorema 3.8)

Per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in D$ definiamo i seguenti coni, detti rispettivamente cono positivo e cono negativo.

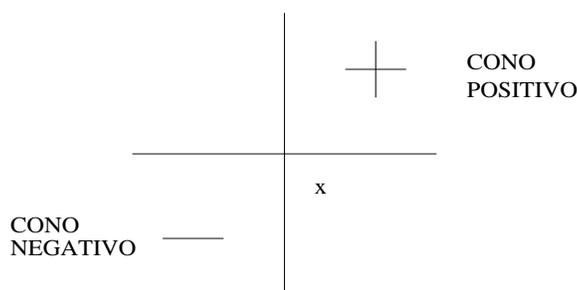
$$C_+(\mathbf{x}) := \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 > x_1 \text{ e } y_2 > x_2 \} \cap D$$

$$C_-(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 < x_1 \text{ e } y_2 < x_2\} \cap D$$

Denotiamo infine cono relativo al punto \mathbf{x} , il seguente insieme.

$$C(\mathbf{x}) := C_+(\mathbf{x}) \cup C_-(\mathbf{x}) \cup \{\mathbf{x}\}$$

Graficamente il cono positivo e il cono negativo in un punto si rappresentano come nella seguente figura.



Adesso dobbiamo provare che per ogni $P \in D$ fissato si ha che $f(P) \neq f(Q)$ per ogni $Q \in D$.

Procediamo per passi successivi.

(I) Fissiamo $P \in D$ e proviamo che $f(P) \neq f(Q)$ per ogni $Q \in C(P)$ e $Q \neq P$.

questa affermazione si dimostra facilmente sfruttando la monotonia stretta delle componenti.

Se infatti $Q \in C_+(P)$, allora $f_1(Q) > f_1(P)$ e contemporaneamente $f_2(Q) > f_2(P)$ e quindi $f(P) \neq f(Q)$.

Se invece $Q \in C_-(P)$, con lo stesso ragionamento si ottiene che $f_1(Q) < f_1(P)$ e $f_2(Q) < f_2(P)$ e quindi anche in questo caso $f(P) \neq f(Q)$.

(II) Per ottenere la tesi resta da provare che $f(P) \neq f(Q)$ per ogni $Q \in D \setminus C(P)$.

Supponiamo per assurdo che esista $Q \in D \setminus C(P)$ tale che $f(P) = f(Q)$ e quindi

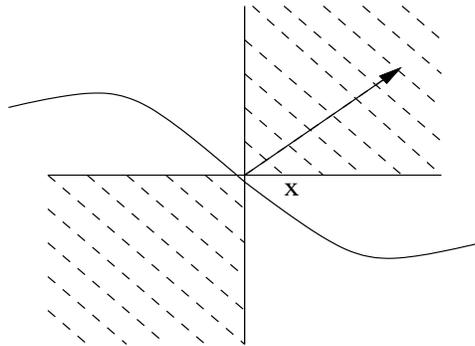
$$\begin{cases} f_1(P) = f_1(Q) \\ f_2(P) = f_2(Q) \end{cases}$$

Osserviamo che ogni curva di livello γ del tipo $f_1 = \text{costante}$ (e analogamente ogni curva di livello τ del tipo $f_2 = \text{costante}$) è tale che in ogni suo punto $\mathbf{x} \in \gamma$ la normale è interamente contenuta nel cono positivo $C_+(\mathbf{x})$.

Infatti per l'ipotesi 2 sappiamo che

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(\mathbf{x}) > 0$$

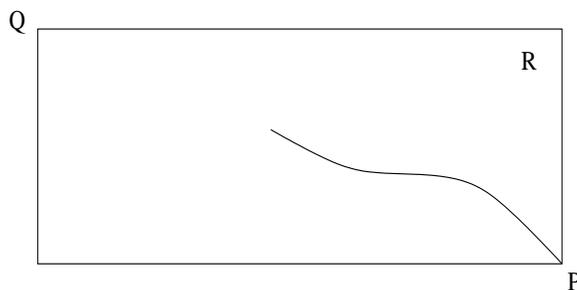
e quindi $\nabla f_1(\mathbf{x}) \in C_+(\mathbf{x})$.



Da tale osservazione segue in particolare che ogni curva di livello γ in un suo punto \mathbf{x} non passa mai attraverso il relativo cono $C(\mathbf{x})$ ma passa invece attraverso i due quadranti ad esso complementari.

Consideriamo adesso la curva di livello γ passante per P , di equazione $f_1 = f_1(P)$, che entra nel rettangolo R individuato da P e Q .

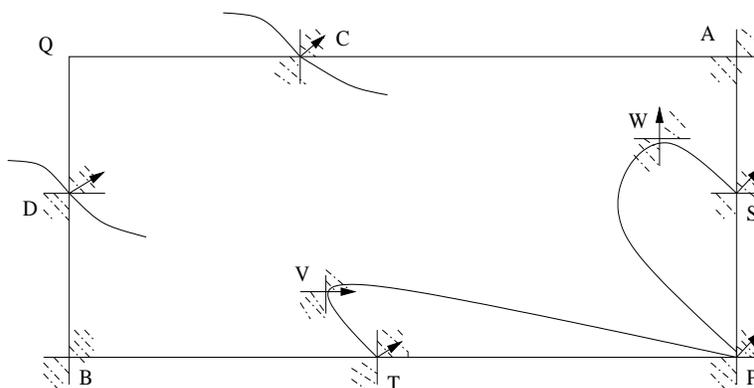
Osserviamo inanzitutto che $\overline{R} \subset D$.



Supponiamo in un primo momento che γ debba necessariamente uscire fuori dal rettangolo R .

Dimostreremo in seguito che tale ipotesi è sempre soddisfatta.

Dobbiamo quindi passare a considerare tutti i possibili punti di uscita.



1. Poichè abbiamo osservato che una curva di livello non può tagliare il cono relativo ad un suo punto nel passare attraverso il medesimo, allora γ non può uscire dal rettangolo dai due vertici A e B .

2. Supponiamo che γ attraversi il lato PA e quindi esca da R passando da un punto del tipo S .

Poichè γ cambia orientazione, allora dovrà necessariamente esistere un punto $W \in \gamma$, compreso tra P e S in cui $\nabla f_1(W)$ è parallelo all'asse x_2 e quindi

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(W) = 0$$

giungendo quindi a contraddire l'ipotesi 2,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1 > 0 \quad \text{in ogni punto di } D.$$

Quindi si può concludere che la curva γ non può uscire dal rettangolo R attraverso tale lato.

3. Supponiamo ora che γ esca da R attraverso il lato PB e procediamo ragionando in maniera analoga.

In questo caso il punto in cui la linea di livello γ esce da R sarà del tipo del punto T , rappresentato in figura.

Con gli stessi passaggi impiegati nel caso precedente, si ottiene che esisterà un punto $V \in \gamma$, posto tra P e T , in cui $\nabla f_1(V)$ è parallelo all'asse x_1 e quindi

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_1(V) = 0$$

Anche questa volta si giunge a una contraddizione, poichè per ipotesi risulta

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_1 > 0 \quad \text{in ogni punto di } D.$$

Quindi γ non può uscire neanche da tale lato del rettangolo.

4. Passiamo ora a considerare il caso in cui γ esca da R attraverso il lato AQ in certo punto C .

Poichè C giace sulla curva di livello relativa a P , allora

$$f_1(C) = f_1(P)$$

Inoltre per ipotesi $f_1(P) = f_1(Q)$, ne segue quindi che

$$f_1(C) = f_1(Q)$$

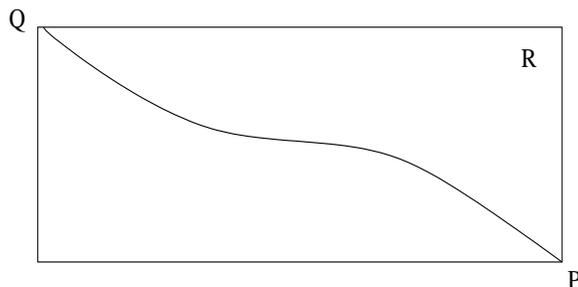
Poichè C e Q hanno la stessa ordinata si può sfruttare la monotonia stretta di f_1 rispetto alla variabile x_1 da cui segue che

$$f_1(Q) < f_1(C)$$

Siamo così giunti a una nuova contraddizione.

5. Si esclude il caso in cui γ esce da R attraverso il lato BQ esattamente come fatto nel caso precedente, sfruttando però la monotonia stretta di f_1 rispetto a x_2 .

Si può quindi concludere che γ esce dal rettangolo R passando esattamente attraverso il punto Q .



- (III) Una volta provato che la curva di livello $f_1 = \text{costante}$ unisce P e Q , consideriamo la funzione f_2 ristretta a γ .

Poichè $f_2(P) = f_2(Q)$, applicando il Teorema di Rolle, [8], si ha che $f_2|_{\gamma}$ ha un punto stazionario sulla curva γ stessa.

Quindi esiste $S \in \gamma \cap R$ tale che

$$(f_2|_{\gamma})(S) = 0$$

La precedente affermazione equivale a dire che $\nabla f_2(S) \perp \gamma$.

Poichè inoltre γ è una curva di livello per f_1 , si ha che $\nabla f_1(S) \perp \gamma$ e quindi

$$\nabla f_1(S) \parallel \nabla f_2(S)$$

Pertanto

$$\det Jf(S) = 0$$

Siamo quindi giunti a contraddire l'ipotesi 1.

Quindi abbiamo provato che

$$f(P) \neq f(Q)$$

per ogni $Q \in C(P) \cap D$.

Per concludere la dimostrazione nel caso in cui $Q \in C(P) \cap D$ ci resta solo da provare che la linea di livello γ non può non uscire dal rettangolo R .

Per dimostrare tale affermazione dobbiamo vedere caso per caso cosa può accadere.

Prima di procedere osserviamo che il ragionamento fatto per escludere il caso 1 e il caso 2, utilizzando il cambio di orientamento della curva di livello e il necessario annullamento di una delle due componenti del gradiente, serve in realtà ad escludere che le linee di livello tornino indietro (ovvero che presentino gobbe a tangente parallela ad uno dei due assi).

Con questa osservazione si possono escludere i primi due dei seguenti casi.

- a. Supponiamo che γ si avvolga su se stessa convergendo a un punto $S \in R$, come accade nella Fig.6.

Fig 6

Si vede immediatamente che se ciò accade devono necessariamente

esistere numerosi punti in cui una delle due componenti del gradiente si annulla e quindi tale caso è automaticamente escluso dall'ipotesi 2.

- b.** Supponiamo che γ serpeggi all'infinito all'interno di R .

Fig 7

Anche in questo caso si nota l'esistenza di gobbe della curva che ci permettono di escluderlo per gli stessi motivi per i quali si è escluso il caso precedente.

- c.** Se supponiamo che γ converga a un punto $S \in \partial R$ (e ovviamente $S \neq P$), per la continuità di f_1 si ottiene che γ deve necessariamente giungere fino al punto a cui converge e quindi rientriamo nel caso studiato in cui γ attraversa la frontiera del rettangolo R .

- d.** Resta solo da valutare il caso in cui γ si interrompa bruscamente all'interno di R .

Sempre per la continuità di f^1 abbiamo che γ è una curva chiusa nel senso che ad essa appartiene anche il suo secondo estremo che indichiamo con P' .

Fig 8

In questo caso si dimostra che γ deve raggiungere un punto di ∂R prolungandola.

Infatti si può considerare γ' linea di livello passante per P' e interna a R' .

Fig 9

Si osserva che $\gamma' \cup \gamma$ è una curva di livello $f^1 = \text{costante}$ relativa a P .

In questo modo per la compattezza di \overline{R} e per la continuità di f^1 possiamo giungere a prolungare γ in un numero finito di passi fino a portarla a raggiungere ∂R .

Ricapitolando abbiamo dimostrato che la linea di livello γ deve giungere fino alla frontiera del rettangolo che è in realtà ciò che ci serve nei punti 3 e 4 della dimostrazione.

Qualora, come accade invece nei punti 1 e 2, serva che la curva la oltrepassi è al massimo necessario un ulteriore prolungamento.

Quindi, in definitiva, il passo (III) risulta provato.

Unendo quanto appena dimostrato e il risultato provato al passo (I) si può concludere che

$$f(P) \neq f(Q), \quad \forall P \neq Q \text{ e } P, Q \in D$$

Quindi $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ è iniettiva e di conseguenza invertibile sulla sua immagine.

□

Osservazione 3.9. *Nella precedente dimostrazione non si è mai usato esplicitamente l'ipotesi $f \in C^1(D)$.*

In realtà però tale ipotesi è necessaria in quanto tutti i ragionamenti fatti sul gradiente della linea di livello $f^1 = \text{costante}$ utilizzano implicitamente tale ipotesi.

Applicando il Teorema 3.8 alla nostra funzione H si ottiene il risultato cercato.

Teorema 3.9. *Sia $H : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ definita da*

$$H(\alpha_1, \alpha_2) := \Psi_{\alpha_1, \alpha_2}^{out} = \int_0^1 |\mu| \varphi_{\alpha_1, \alpha_2}^{out}(\mu) d\mu$$

con $\varphi_{\alpha_1, \alpha_2}^{out}(\mu)$ dato d'outflow relativo al dato d'inflow $\varphi^{in}(\mu)$, calcolato come soluzione del problema (2.55) nel caso in cui siano soddisfatte le seguenti ipotesi.

- (i) Il nucleo di scattering sia nullo, cioè $k_2 = 0$
- (ii) Le funzioni di probabilità di scattering non dipendano né dal punto né dalla polvere. Ovvero
 - (a) $p_{j,i}(x, \mu, \mu') = p_{j,i}(\mu, \mu')$ per ogni $x \in (0, l)$ e per $i = 1, 2$ e $j = 1, 3$.
 - (b) $p_{j,1} = p_{j,2}$, per $j = 1, 3$.
- (iii) Supponiamo che non ci sia scattering all'indietro.

$$k_1(x, \mu, \mu') = 0 \text{ e } k_3(x, \mu, \mu') = 0, \text{ se } \mu \in (-1, 0)$$

- (iv) Le sezioni d'urto di cattura siano strettamente positive e inoltre la matrice delle sezioni d'urto di cattura abbia determinante diverso da zero.

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{uv, c, 1} & \sigma_{uv, c, 2} \\ \sigma_{ir, c, 1} & \sigma_{ir, c, 2} \end{pmatrix} \neq 0$$

- (v) Supponiamo che non ci siano sorgenti tra la nube e l'osservatore.
- (vi) Supponiamo infine che $\varphi_j^{in}(\mu) > 0$ per quasi ovunque $\mu \in (0, 1)$.

Allora la funzione H è invertibile sulla sua immagine.

In tali ipotesi il problema inverso corrispondente ammette una e una sola soluzione.

3.6 Cenni alle altre strade possibili e giustificazione della scelta fatta

All'inizio abbiamo visto altre due possibili strade che consistono nell'invertire le funzioni F e G precedentemente definite.

Il motivo per cui la seconda strada (relativa al tentativo d'invertire la funzione G) è stata scartata consiste essenzialmente nella mancanza della necessaria sommabilità.

Vedeiamo brevemente le caratteristiche della prima strada scartata.

L'inversione della funzione F è il metodo di risoluzione dell'analogo problema per una nube formata da un solo tipo di polvere, [?].

Nel nostro caso invece tale funzione, pur risultando facilmente sia continua che differenziabile, porta a condizioni d'urto molto più forti e poco plausibili dal punto di vista fisico.

Infatti imponendo che il sia $\det JF(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$ per ottenere l'invertibilità locale, già nel caso semplice con scattering in frequenza nullo, si ottienem oltre alla condizione che la matrice delle sezioni d'urto totali abbia determinante diverso da zero, anche delle condizioni molto forti sui segni di altre quantità dipendenti dalle varie sezioni d'urto (parziali e totali) determinati a partire dal segno del determinante della matrice delle sezioni d'urto.

Le condizioni che si ottengono sono le seguenti:

(i) $\varphi_j^{in}(\mu) > 0$ quasi ovunque $\mu \in (0, 1)$ e $j = 1, 2$.

(ii) $\sigma_{uv, 1} \sigma_{ir, 2} - \sigma_{uv, 2} \sigma_{ir, 1} \neq 0$.

(iii)

$$\begin{cases} \sigma_{uv, 2} \sigma_{ir \rightarrow ir, 1} - \sigma_{uv, 1} \sigma_{ir \rightarrow ir, 2} \geq 0 \\ \sigma_{ir, 1} \sigma_{uv \rightarrow uv, 2} - \sigma_{ir, 2} \sigma_{uv \rightarrow uv, 1} \geq 0 \\ \sigma_{uv \rightarrow uv, 1} \sigma_{ir \rightarrow ir, 2} - \sigma_{uv \rightarrow uv, 2} \sigma_{ir \rightarrow ir, 1} \geq 0 \end{cases}$$

se $\sigma_{uv, 1} \sigma_{ir, 2} - \sigma_{uv, 2} \sigma_{ir, 1} > 0$,

e

$$\begin{cases} \sigma_{uv, 2} \sigma_{ir \rightarrow ir, 1} - \sigma_{uv, 1} \sigma_{ir \rightarrow ir, 2} \leq 0 \\ \sigma_{ir, 1} \sigma_{uv \rightarrow uv, 2} - \sigma_{ir, 2} \sigma_{uv \rightarrow uv, 1} \leq 0 \\ \sigma_{uv \rightarrow uv, 1} \sigma_{ir \rightarrow ir, 2} - \sigma_{uv \rightarrow uv, 2} \sigma_{ir \rightarrow ir, 1} \leq 0 \end{cases}$$

se $\sigma_{uv, 1} \sigma_{ir, 2} - \sigma_{uv, 2} \sigma_{ir, 1} < 0$.

La condizione sul determinante della matrice delle sezioni d'urto di scattering sembra molto plausibile in funzione del segno scelto per il determinante della matrice delle sezioni d'urto totali. Le altre due invece sembrano poco concordi con tale scelta.

Le condizioni ottenute per l'invertibilità locale risultano quindi di gran lunga peggiori di quelle ottenute con la strada scelta.

Anche la ricerca della monotonia, indispensabile per ottenere un'invertibilità globale con il metodo da noi usato, si complica notevolmente.

Infatti, se da una parte è abbastanza facile dimostrare che il termine noto $\mathcal{Q}_{\alpha_1, \alpha_2}(l, \mu)$ è strettamente decrescente per q.o. $\mu \in (0, 1)$, dall'altra parte invece l'operatore B_{α_1, α_2} in generale non è strettamente decrescente in quanto ha un andamento del tipo $y e^{-y}$.

Si riesce comunque a dimostrare che la prima componente dell'operatore è strettamente decrescente rispetto ad α_1 se

$$\alpha_1 > \frac{c \mu}{l \sigma_{uv, 2}}$$

Anelogramente risulta strettamente decrescente rispetto ad α_2 se

$$\alpha_2 > \frac{c \mu}{l \sigma_{uv, 2}}$$

Quindi possiamo dare due stime c_1 e c_2 dal basso alle due densità α_1 e α_2 .

Fatta tale ulteriore ipotesi si può scegliere μ in modo che

$$\begin{cases} \frac{c \mu}{l \sigma_{uv, 1}} < c_1 \\ \frac{c \mu}{l \sigma_{uv, 2}} < c_2 \end{cases}$$

Da cui

$$\mu < \min \left\{ \frac{c_1 l \sigma_{uv, 1}}{c}, \frac{c_2 l \sigma_{uv, 2}}{c} \right\} := m$$

Ovviamente la seconda componente dell'operatore si comporta esattamente nello stesso modo e quindi sarà strettamente decrescente scelto μ in modo che risulti

$$\mu < \min \left\{ \frac{c_1 l \sigma_{ir, 1}}{c}, \frac{c_2 l \sigma_{ir, 2}}{c} \right\} := m'$$

Si può inoltre provare che dalla stretta decrescenza di $\mathbf{Q}_{\alpha_1, \alpha_2}(l, \mu)$ e dell'operatore B_{α_1, α_2} segue quella della relativa funzione F.

Esisterà dunque $\bar{\mu} \in (0, n)$ con $n := \min\{m, m'\}$ tale che la funzione

$$\begin{aligned} \bar{F} : (c_1, +\infty) \times (c_2, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\alpha_1, \alpha_2) &\longmapsto \varphi_{\alpha_1, \alpha_2}^{out}(\bar{\mu}) \end{aligned}$$

risulta strettamente decrescente nell'accezione precedentemente illustrata.

In tale caso quindi \bar{F} sarà invertibile globalmente, se soddisfatte tutte le ipotesi sui dati del problema trovate.

Nel caso trattato nell'articolo di Belleni, [?], l'operatore B ha un andamento del tipo e^{-y} e quindi è sempre strettamente decrescente.

Inoltre, una volta provata la continuità e la stretta monotonia della funzione, poichè il caso trattato nell'articolo è scalare, ne segue immediatamente l'invertibilità della funzione sulla propria immagine.

Gli argomenti esposti in questa sezione forniscono una ragionevole spiegazione della diversa strada scelta in questa tesi per la risoluzione del problema inverso rispetto a quella fatta nell'articolo di Belleni.

Bibliografia

- [1] M. Fazio, M.C. Montano. *Fisica, Vol 2.* Arnoldo Mondadori Scuola, Milano, 1991.
- [2] M. Fazio, M.C. Montano. *Fisica, Vol 3.* Arnoldo Mondadori Scuola, Milano, 1991.
- [3] c. Mencucci, V. Silvestrini. *Fisica II, Elettromagnetismo, Ottica.* Liguori Editore, Napoli, 1994.
- [4] H. Harwit. *Astrophysical Concepts.* Springer Verlag, New York, 1982.
- [5] A. Unsöld. *The New Cosmos.* Springer Verlag, New York, 1969.
- [6] J. Daintith, S. Mitchell, E. Tootill, D. Gertsen. *Biographical Encyclopedia of Scientists.* Institute of Physical Publishing, Philadelphia, 1994.
- [7] J.J. Duderstadt. *Transport Theory.* Wiley Interscience, New York, 1979.
- [8] E. Giusti. *Analisi Matematica 1.* Bollati Borlinghieri, Torino, 1988.
- [9] E. Giusti. *Analisi Matematica 2.* Bollati Borlinghieri, Torino, 1989.
- [10] M. Abate. *Geometria.* Mc Graw-Hill, Milano, 1996.
- [11] W. Rudin. *Analisi Reale e Complessa.* Bollati Boringhieri, Torino, 1996.
- [12] H. Brezis. *Analisi Funzionale.* Liguori Editore, 1986.

- [13] E.H. Lieb, M. Loss. *Analysis*. Providence, American Mathematical Society, Rhode Island, 1997.
- [14] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Providence, American Mathematical Society, Rhode Island, 1999.
- [15] F. Jhon. *Partial Differential Equations*. Springer Verlag, Berlin, 1982.
- [16] M.L. Krasnov. *Equazioni Integrali*. Mir, Mosca, 1983.
- [17] A. Belleni-Morante. *Applied Semigroups and Evolution Equations*. Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [18] A. Belleni-Morante and A. C. McBride. *Nonlinear Semigroups, an Introduction*. Wiley, New York, 1998.
- [19] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [20] L. Barletti. *Some Remarks on Affine Evolution Equations with Applications to Particel Transport Theory*. Mathematical Models Methods Applied Science, 10(6); 877-893, 2000.
- [21] H. Schaefer. *Banach Lattices and Positive Operators*. Springer Verlag, Berlin, 1974.
- [22] W. Greenberg, C. Van Der Mee, V. Protopopescu. *Boundary Value Problems in Abstract Kinetic Theory*. Birkhäuser Verlag Basel, Germany, 1987.