Università Cattolica del Sacro Cuore
Sede Di Brescia

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Principi di Convessità ed applicazioni alle Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali in domini convessi

Relatore:
Ch.mo Prof. Marco Squassina

Correlatore:
Ch.ma Dott.ssa Claudia Bucur

Candidato:
Michael Piantoni
Matricola: 4710626

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione

Lo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali (PDEs) riveste un ruolo di fondamentale importanza non solo nel campo della ricerca matematica, bensì anche in diverse discipline scientifiche che spaziano dalla fisica alla biologia: le relative applicazioni che richiedono la formulazione e la conseguente risoluzione di una specifica PDE sono infatti talmente numerose e diversificate fra loro che questo fatto non sorprende più di tanto. Questo elaborato propone una trattazione incentrata totalmente sullo studio di PDEs ellittiche definite su domini convessi, il cui obiettivo primario consiste nel determinare eventuali proprietà di convessità delle relative soluzioni.

Uno dei primi risultati inerente tale argomento fu quello ottenuto nel 1971 da L.Makar-Limanov. In [**1**] quest'ultimo riuscì a dimostrare attraverso un ragionamento prettamente geometrico il seguente fatto: considerata u la soluzione strettamente positiva dell'*equazione di torsione*

$$\Delta u + 1 = 0$$

sull'insieme convesso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, la funzione $\sqrt{u}$ risulta concava.

Nel 1976 H.J.Brascamp e E.H.Lieb proposero invece in [**2**] un breve compendio inerente alcune notevoli *disuguaglianze di convessità*, concentrandosi particolarmente sulla riformulazione della *disuguaglianza di Prèkopa-Leindler* nella propria forma essenziale. Utilizzando alcuni espedienti fondamentalmente fisico-probabilistici derivati interamente da quest'ultima disuguaglianza riuscirono inoltre nel proporre un'interessante applicazione basata sull'*equazione di diffusione* in $\mathbb{R}^n$. Quest'ultimo risultato portò infine alla semplice deduzione del seguente fatto: la *prima autofunzione u dell'operatore di Laplace* relativa al *primo autovalore* λ dello stesso operatore, soluzione sull'insieme convesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ della PDE ellitica

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

è una funzione *logaritmicamente concava*, ossia $-\log(u)$ è convessa.

Questi primi risultati si rivelarono basilari per poterne sviluppare alcune interessanti generalizzazioni. Nel 1983 N.J.Korevaar elaborò in [**3**] un metodo totalmente analitico per analizzare il medesimo problema affrontato da H.J.Brascamp e E.H.Lieb. Introducendo il *principio del massimo per la concavità (PMC I)* ottenne infatti un teorema estremamente utile per poter determinare la proprietà di *log-concavità* della soluzione del *problema agli autovalori generalizzato*.

Nel 1985 A.U.Kennington decise in [**4**] di rielaborare ulteriormente i risultati teorici ottenuti da N.J.Korevaar: definendo esplicitamente il concetto di *α-concavità* riuscì a proporre una versione migliorata del *principio del massimo per la concavità (PMC II)*, fornendo infine numerose applicazioni riguardanti PDEs nonlineari:

$$\Delta u + f(x, u) = 0.$$

Questi ultimi risultati mettono in evidenza un fatto estremamente rilevante: la diversa proprietà di concavità specifica richiesta sul termine nonlineare $f(x, u)$ forzava la soluzione u della PDE ad essere α-concava esclusivamente per determinati valori del parametro considerato. Risulta pertanto naturale chiedersi cosa potrebbe succedere se la funzione $f(x, u)$ fosse concava solamente a meno di una piccola perturbazione. L'obiettivo di questa trattazione consiste nel trovare una valida risposta per questo interrogativo. Introducendo preliminarmente il concetto di *δ-concavità* o *concavità approssimata*, generalizzeremo poi i risultati di N.J.Korevaar e A.U.Kennington proponendo le due versioni del *principio di δ-convessità (PCA I) e (PCA II)* per rispondere infine alla questione principale, stabilendo un risultato di δ-convessità per le soluzioni di determinate PDEs.

Capitolo 1

Makar-Limanov e l'equazione di torsione $\Delta u + 1 = 0$

1.1 Nozioni preliminari

Prima di iniziare lo sviluppo vero e proprio della trattazione sono innanzitutto necessarie alcune nozioni preliminari inerenti il concetto generale di *convessità*, sostanzialmente filo conduttore di tutto il discorso che affronteremo. Nonostante sia un argomento molto ampio, forniremo solamente alcune definizioni basilari e strettamente indispensabili, ampliandole man mano si riveleranno insufficienti.

In primo luogo, eccetto diverse ipotesi aggiuntive esplicitate, denoteremo con Ω un generico sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, generalmente dotato di una specifica proprietà di *convessità* in conformità con le definizioni successive.

1.1 Definizione. Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce *convesso* se $\forall x, y \in \Omega$ il segmento congiungente i due punti è interamente contenuto nell'insieme, ovvero $[x, y] \subseteq \Omega$.
Equivalentemente, Ω è *convesso* se $\forall x, y \in \Omega$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$ la *combinazione convessa* $(1-\lambda)x+\lambda y$ dei due punti appartiene all'insieme, ovvero si verifica che

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in \Omega.$$

1.2 Definizione. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Diremo che Ω è *strettamente convesso* se $\forall x \neq y \in \partial\Omega$[1] e $\forall \lambda \in (0, 1)$ la combinazione convessa dei due punti distinti appartiene all'interno di Ω, ovvero

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in \Omega \setminus \partial\Omega.$$

[1] Normalmente indichiamo con $\partial\Omega$ il bordo dell'insieme Ω. In questo capitolo tuttavia utilizzeremo spesso la notazione alternativa $\Gamma := \partial\Omega$ per indicarne la frontiera.

1.3 Definizione. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Diremo che Ω è *fortemente convesso*[2] se esiste $r > 0$ tale che $\forall x, y \in \Omega$ con distanza[3] $\|x - y\| \leq 2r$ si ottiene che

$$\mathcal{D}_r(x,y) := \bigcap_{x,y \in B_r(\cdot)} B_r(\cdot) \subseteq \Omega.$$

In altre parole, ciò significa che l'insieme Ω può essere rappresentato come l'unione, al variare di $x, y \in \Omega$, degli insiemi $\mathcal{D}_r(x,y)$, ciascuno definito come l'intersezione delle palle $B_r(\cdot)$ di raggio fissato r che contengono interamente il segmento $[x, y]$.[4]

In secondo luogo proponiamo alcune semplici ma fondamentali definizioni e caratterizzazioni (senza dimostrazione) inerenti i concetti di *concavità* e *convessità* di una funzione.

1.4 Definizione. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Una funzione[5] $u : \Omega \to \mathbb{R}$ si definisce *concava* se $\forall x, y \in \Omega$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ si verifica che

$$u\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \geq (1-\lambda)u(x) + \lambda u(y).$$

Diremo invece che u è *convessa* se la funzione $-u$ è concava, ovvero se la disuguaglianza precedente è verificata con verso opposto ($\leq$).

Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ si definisce inoltre *strettamente concava* se $\forall x, y \in \Omega$ e $\forall \lambda \in (0,1)$ si verifica che

$$u\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) > (1-\lambda)u(x) + \lambda u(y).$$

Diremo infine che u è *strettamente convessa* se $-u$ è strettamente concava, ovvero se la disuguaglianza precedente è verificata con verso opposto ($<$).

1.5 Proposizione. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e sia definita una funzione $u \in C^1(\Omega)$ il cui gradiente viene denotato con ∇u. Allora valgono le seguenti caratterizzazioni:*

$$u \ \textit{concava} \iff u(y) \leq u(x) + \nabla u(x) \cdot (y - x) \quad \forall x, y \in \Omega.$$

$$u \ \textit{convessa} \iff u(y) \geq u(x) + \nabla u(x) \cdot (y - x) \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Dimostrazione. Omessa. □

1.6 Proposizione. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e sia definita una funzione $u \in C^2(\Omega)$ la cui matrice hessiana viene denotata con $\nabla^2 u$.*

[2]Esiste un'analoga definizione di insieme *debolmente convesso*, tuttavia non enunciata in quanto non necessaria alla trattazione.

[3]Indichiamo con $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ la *norma euclidea* del vettore x in $\mathbb{R}^n$.

[4]Senza fornire dettagli in merito, una definizione equivalente in geometria differenziale afferma che un'insieme Ω è fortemente convesso se tutte le curvature principali di $\partial\Omega$ sono strettamente positive.

[5]Nel seguito della trattazione le funzione introdotte saranno spesso definite sulla chiusura $\bar{\Omega}$ dell'insieme, fatto che tuttavia non altererà la validità di tali definizioni.

La funzione u è concava se e solo se la matrice hessiana $\nabla^2 u$ è semidefinita negativa, ovvero se $\forall x \in \Omega$ e $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ con $\xi \neq 0$ si verifica che

$$\xi^T \cdot \nabla^2 u(x) \cdot \xi \leq 0.$$

La funzione u è convessa se e solo se la matrice hessiana $\nabla^2 u$ è semidefinita positiva, ovvero se $\forall x \in \Omega$ e $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ con $\xi \neq 0$ si verifica che

$$\xi^T \cdot \nabla^2 u(x) \cdot \xi \geq 0.$$

Dimostrazione. Omessa. □

Introduciamo infine alcuni teoremi inerenti in particolare le funzioni subarmoniche e superarmoniche, proponendo dunque (senza dimostrazione) il *principio del massimo* in entrambe le sue versioni ed il *Lemma di Hopf*. Premettiamo anzitutto la seguente definizione: considerata una funzione $u \in C^2(\Omega)$, definiamo l'*operatore di Laplace* (più semplicemente *Laplaciano*) nel seguente modo:

$$\Delta u(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i},$$

dove abbiamo denotato con $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i}$ la derivata parziale[6] seconda della funzione u calcolata in $x \in \Omega$ rispetto alla i-esima coordinata di $\mathbb{R}^n$, denotata con x_i.

1.7 Teorema (**Principio del massimo (forma debole)**)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e sia definita una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Allora valgono le seguenti implicazioni:*

$$\Delta u \geq 0 \quad (u \text{ subarmonica}) \quad \Longrightarrow \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

$$\Delta u \leq 0 \quad (u \text{ superarmonica}) \quad \Longrightarrow \quad \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Dimostrazione. Omessa. □

1.8 Teorema (**Principio del massimo (forma forte)**)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e connesso e sia definita una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Supponiamo che $\Delta u \geq 0$ (oppure $\Delta \leq 0$) e che esista un punto interno $x_0 \in \Omega$ tale che*

$$u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u \quad (\textit{oppure} \;\; u(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} u).$$

Allora la funzione u è costante, ovvero esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $u \equiv c$.

Dimostrazione. Omessa. □

[6] Per comodità utilizzeremo spesso la notazione alternativa $\partial_i^2 u(x)$ quando l'esplicitazione della variabile di derivazione non risulterà necessaria.

1.9 Lemma (di Hopf). *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme limitato tale che verifichi la condizione di sfera interna (ISC)*[7] *e sia definita una funzione* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. *Supponiamo che* $\Delta u \geq 0$ *(oppure* $\Delta u \leq 0$*) e che esista un punto* $x_0 \in \partial\Omega$ *tale che*

$$u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u \quad (\textit{oppure} \;\; u(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} u).$$

Allora la derivata normale[8] *di* u *verifica la disuguaglianza*

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} < 0 \quad \left(\textit{oppure} \;\; \frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} > 0\right),$$

dove $\nu \in \mathbb{R}^n$ *denota il versore normale interno a* Ω.

Dimostrazione. Omessa. □

1.2 La funzione di torsione

Dal punto di vista cronologico il primo risultato teorico in merito alle proprietà di convcavità delle soluzioni di particolari *equazioni differenziali alle derivate parziali (PDEs)* fu quello ottenuto in [**1**] dal matematico L.Makar-Limanov nel 1971. L'apporto fornito dal suddetto lavoro si rivelò talmente importante da diventare in breve tempo un modello per le ricerche successive in tale ambito. Di seguito proponiamo una breve ma esaustiva discussione inerente i risultati princiali ottenuti da L.Makar-Limanov, cercando soprattutto di chiarire eventuali punti non particolarmente sviluppati nell'articolo originale.

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e convesso con frontiera regolare $\Gamma \in C^2$, definiamo una funzione $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ tale che soddisfi la condizione[9] $u_{|\Gamma} = 0$ sulla frontiera Γ. Consideriamo ora la seguente PDE lineare del secondo ordine, denominata anche *equazione di torsione* relativa all'insieme Ω:

$$\Delta u + 1 = 0. \tag{1.1}$$

[7] Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ soddisfa la *condizione di sfera interna (ISC)* se $\forall x \in \partial\Omega$ esistono un punto $y \in \Omega$ ed una costante $r > 0$ tali che valgano le seguenti condizioni:

$$B_r(y) \subset \Omega \qquad e \qquad x \in \partial B_r(y).$$

Tale condizione viene generalmente soddisfatta da insiemi con frontiera parametrizzabile tramite curve con alta regolarità: se infatti $\partial\Omega \in C^2$, allora Ω soddisfa la (ISC).

[8] La *derivata normale* di una funzione $u \in C^1(\bar{\Omega})$ viene semplicemente definita come prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ tra il gradiente ∇u della funzione ed il versore normale all'insieme Ω al variare di $x \in \partial\Omega$:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} := \nabla u(x) \cdot \nu(x).$$

[9] Dato un generico insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ diremo che $u_{|A} \gtreqless 0$ se $\forall x \in A$ vale la condizione $u(x) \gtreqless 0$. Notazioni analoghe assumeranno il medesimo significato.

La soluzione[10] $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ dell'equazione (1.1) viene analogamente chiamata *funzione di torsione* relativa all'insieme Ω, terminologia specifica derivante dal fatto che u determina proprio la *rigidità torsionale* τ dell'insieme Ω, quantità definita nel seguente modo:

$$\tau(\Omega) := \max_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\left(\int_\Omega |v| \, dx \right)^2}{\int_\Omega \|\nabla v\|^2 \, dx}.$$

L.Makar-Limanov ottenne in [**1**] tre risultati fondamentali che descrivevano le proprietà caratteristiche della funzione u, riportati qui di seguito con relativa dimostrazione. Preliminarmente tuttavia enunciamo due lemmi indispensabili per sviluppare adeguatamente la trattazione.

1.10 Lemma. *I punti stazionari interni $(x_0, y_0) \in \Omega \setminus \Gamma$ della funzione u, soluzione dell'equazione (1.1), hanno hessiano $\nabla^2 u(x_0, y_0)$ noto, ovvero possono essere sempre classificati come punti di massimo, minimo o sella.*

Dimostrazione. Considerato un generico punto stazionario interno $(x_0, y_0) \in \Omega \setminus \Gamma$ della funzione u, otteniamo banalmente che $\nabla u(x_0, y_0) = 0$. Consideriamo inoltre il differenziale secondo $d^2 u$ della stessa, definito nel seguente modo:

$$d^2 u = a dx^2 + 2b dx dy + c dy^2 = \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}_{\nabla^2 u(x_0, y_0)} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R},$$

dove il termine $\nabla^2 u$ rappresenta la *matrice hessiana*[11] della funzione u nel punto (x_0, y_0). Supponiamo per assurdo che si verifichi la condizione $det(\nabla^2 u) = ac - b^2 \leq 0$, ovvero che (x_0, y_0) sia un punto di sella.
Definiamo allora una funzione ausiliaria nel seguente modo:

$$\varphi(x, y) := u(x, y) - u(x_0, y_0) - \frac{1}{2}[a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2].$$

Ricavando dall'equazione (1.1) che $\Delta u(x_0, y_0) = a + c = -1$, si può facilmente dedurre che $\Delta \varphi(x, y) = \Delta u(x, y) - (a + c) = 0$, ovvero che la funzione φ è armonica in Ω. Semplici

[10] Pur considerando esclusivamente soluzioni con regolarità al massimo C^2, specifichiamo che tali PDEs avrebbero comunque senso considerando regolarità inferiori del tipo H^1. Prenderemo inoltre in considerazione esclusivamente PDEs che ammettono proprietà di *esistenza* ed *unicità* della soluzione, assunte pertanto sempre verificate senza dimostrazione esplicita.

[11] Ricordiamo che la matrice hessiana di una funzione $u \in C^2(\Omega)$ risulta definita al variare di $i, j = 1, ..., n$ nel seguente modo:

$$\nabla^2 u := \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right],$$

dove $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ denota la derivata parziale seconda della funzione u rispetto alla i-esima e j-esima componente di $\mathbb{R}^n$.

calcoli mostrano che l'hessiano $\nabla^2 v$ della funzione v nel punto (x_0, y_0) risulta essere indefinito, pertanto solo applicando il cosiddetto "*metodo delle rette*"[12] si può verificare che lungo le direzioni delle rette $x = x_0$ e $y = y_0$ il comportamento della funzione nell'intorno del punto è quello di un flesso a tangente orizzontale, da cui otteniamo evidentemente che (x_0, y_0) deve essere per la funzione v un punto critico (di tipo sella) di ordine superiore al secondo. Per ragioni geometriche, ricordando oltretutto che $v(x_0, y_0) = 0$, esistono dunque almeno tre curve di livello passanti per il punto (x_0, y_0) tali che $v \equiv 0$ su di esse, ovvero si afferma che la funzione v è indirizzata su Γ a 0 in almeno sei punti distinti.[13]
Tuttavia sappiamo anche che la funzione v è indirizzata su Γ a 0 esclusivamente nei punti di intersezione di Γ con la curva γ, definita nel seguente modo:

$$u(x_0, y_0) + \frac{1}{2}[a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2] = 0.$$

Avendo supposto per ipotesi che $ac - b^2 \leq 0$, deduciamo immediatamente che la curva γ può essere classificata nei seguenti modi:

- nel caso in cui $u(x_0, y_0) = 0$ la curva γ consiste in una conica degenere che si spezza in due rette distinte $(ac - b^2 < 0)$ o eventualmente coincidenti $(ac - b^2 = 0)$;

- nel caso in cui $u(x_0, y_0) \neq 0$ la curva γ consiste invece in una coppia di rette distinte $(ac - b^2 = 0)$ oppure in una conica generale di tipo iperbole $(ac - b^2 < 0)$.

Nel caso in cui γ si spezza in due rette (distinte o coincidenti) passanti per il punto (x_0, y_0), tenendo presente l'ipotesi di convessità di Ω, l'insieme di intersezione $\gamma \cap \Gamma$ consiste al più di quattro punti (rispettivamente tutti distinti o coincidenti a due a due). Nel caso invece in cui γ consiste in un'iperbole con gli asintoti passanti per il punto (x_0, y_0), verifichiamo che non ci possono essere più di quattro punti d'intersezione. Denotato con γ_1 uno qualsiasi dei due rami dell'iperbole e fissato arbitrariamente un verso di percorrenza su di esso, si determinano due punti P e Q, intersezioni di γ_1 con Γ. Tenendo nuovamente presente la convessità di Ω, il triangolo T di vertici P, Q e (x_0, y_0) risulta interamente contenuto nell'insieme in questione. Dato che gli asintoti dell'iperbole passano per il punto (x_0, y_0), il triangolo contiene interamente l'arco di curva $\overset{\frown}{FL}$ appartenente a γ_1, pertanto $\gamma_1 \cap \Gamma$ consiste in un insieme di al più due punti. Ripetendo analogamente il ragionamento sull'altro arco di iperbole γ_2, otteniamo il medesimo risultato e possiamo affermare che $\gamma \cap \Gamma$ è costituito al più da quattro punti d'intersezione, fatto tuttavia assurdo per quanto precedentemente affermato. Il lemma è dunque dimostrato. □

1.11 Lemma. *Supponiamo che la funzione u, soluzione del problema (1.1), ammetta più di un punto di massimo locale interno (x_0, y_0). Allora la funzione u ammette almeno un punto di sella interno (x_1, y_1).*

[12] Questo metodo permette di determinare l'andamento generale della funzione in un punto delineandone il comportamento solamente lungo determinate rette o direzioni passanti per quello stesso punto.

[13] Per quanto spiegato in [**7**] la funzione v non può possedere un punto di sella "classico" poichè nell'intorno del punto (x_0, y_0) non assume il comportamento tipico di un paraboloide iperbolico, ma piuttosto quello di una cosiddetta "*monkey saddle*" o in ogni caso di un punto critico (di tipo sella) almeno del terzo ordine.

Dimostrazione. Omessa.[14] □

Combinando questi due lemmi appena dimostrati con il *principio del massimo (forma debole)* (1.7) possiamo ora dimostrare alcune proprietà fondamentali della *funzione di torsione* u. Innanzitutto dall'equazione (1.1) deduciamo che la funzione u è superarmonica in Ω poichè $\Delta u = -1 < 0$, pertanto applicando il Teorema (1.7) otteniamo che

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\Gamma} .$$

Ricordando inoltre che $u_{|\Gamma} = 0$, deduciamo immediatamente che la funzione u deve essere necessariamente positiva in Ω, ovvero $u_{|\Omega} \geq 0$. Il Lemma (1.10) afferma che la funzione u non può avere punti stazionari interni di tipo sella, ma esclusivamente di massimo o minimo. Combinando questa osservazione con il Lemma (1.11) possiamo affermare che la funzione u potrebbe ammettere al più un punto di massimo, altrimenti diversamente avrebbe anche un punto di sella.

Constatato ciò, possiamo ora proseguire dimostrando il primo teorema fondamentale enunciato da L.Makar-Limanov.

1.12 Teorema. *La funzione u, soluzione del problema (1.1), ammette un unico punto di massimo locale (x_0, y_0).*

Dimostrazione. Il risultato si deduce immediatamente combinando il Lemma (1.10) ed il Lemma (1.11), tenendo presente quanto appena osservato. □

Denotato con D il determinante della matrice hessiana della funzione u e considerate le seguenti quantità così definite:

$$Q := T + 2uD = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & 2u \end{vmatrix},$$

$$T := -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$D := det(\nabla^2 u) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

[14] La dimostrazione di questo lemma viene omessa poichè non indispensabile per la nostra trattazione. Può essere trovata completa consultando [**19**].

verifichiamo ora la validità del seguente lemma, indispensabile per la dimostrazione del teorema successivo.

1.13 Lemma. *Consideriamo la quantità Q precedentemente definita per la funzione u, soluzione del problema (1.1). Allora si verifica che $\Delta Q \leq 0$.*

Dimostrazione. Innanzitutto riscriviamo il determinante dell'hessiano $\nabla^2 u$ della funzione u nel seguente modo:

$$4D = 4\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)^2\right] = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 - 4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Applicando l'equazione (1.1) otteniamo facilmente la seguente disuguaglianza, condizione necessariamente soddisfatta:

$$4D \leq \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = (\underbrace{\Delta u}_{-1})^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad D \leq \frac{1}{4}.$$

Considerando esclusivamente la limitazione alla condizione $D < \frac{1}{4}$ risulta ben definita la seguente funzione:

$$\log\left(\frac{1}{4} - D\right).$$

Tramite opportuni calcoli si verifica che la funzione $\log\left(\frac{1}{4} - D\right)$ risulta essere armonica sull'insieme Ω, ovvero otteniamo che $\Delta \log\left(\frac{1}{4} - D\right) = 0$.
Fissato $r > 0$, consideriamo ora la *funzione di torsione* τ relativa ad una generica palla $B_r(z) \subset \Omega$ di centro $z = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega$ e raggio r, esplicitamente definita dalla seguente espressione:

$$\tau(x, y) := \frac{1}{4}\left[R^2 - (x - \tilde{x})^2 - (y - \tilde{y})^2\right].$$

Analogamente alla funzione u, si verifica facilmente che anche la funzione τ è soluzione del problema (1.1) precedentemente introdotto. Definita infine la funzione ausiliaria $v := u - \tau$, tramite opportuni calcoli otteniamo che $\Delta v = 0$, ovvero che v deve essere una funzione armonica in Ω. Denotata inoltre con $\nabla^2 v$ la sua matrice hessiana, applicando nuovamente l'equazione (1.1) otteniamo la seguente uguaglianza:

$$det(\nabla^2 v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = D + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}_{-1} + \frac{1}{4} = D - \frac{1}{4}.$$

Possiamo ora dimostrare che la funzione $\log\left(-det(\nabla^2 v)\right)$ è armonica ogniqualvolta v è armonica. Tramite opportuni calcoli otteniamo che

$$\Delta \log\left(-\underbrace{det(\nabla^2 v)}_{A}\right) = \Delta \log(-A) = \frac{\Delta A \cdot A - \|\nabla A\|^2}{A^2}. \tag{1.2}$$

Ricordando che $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ per il *Lemma di Schwarz* sulle derivate parziali seconde e che la funzione v risulta armonica ($\Delta v = 0$) in Ω, calcoliamo[15] esplicitamente ciascuna delle seguenti quantità:

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -4 \left[\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right)^2 \right],$$

$$\|\nabla A\|^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 = 4 \left[\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right],$$

$$\Downarrow$$

$$\|\nabla A\|^2 = \Delta A \cdot A.$$

Combinando l'ultima uguaglianza ottenuta con l'espressione (1.2) deduciamo immediatamente che la funzione $\log(-det(\nabla^2 v))$ deve essere armonica in Ω.
Da quest'ultimo risultato ricaviamo facilmente la seguente uguaglianza:

$$0 = \Delta \log\left(-det(\nabla^2 v)\right) = \Delta \log \left(\frac{1}{4} - D \right) = \frac{4\Delta D \cdot (4D-1) - 16\|\nabla D\|^2}{(1-4D)^2},$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta D = -\frac{4\|\nabla D\|^2}{1-4D}.$$

Tenendo presente che $u_{|\Omega} \geq 0$ per quanto precedentemente osservato, tramite opportuni calcoli otteniamo infine il seguente risultato:

$$\Delta Q = \Delta(T + 2uD) = -8u \left[\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right)^2 \right] = 2u\Delta D = -\frac{8u\|\nabla D\|^2}{1-4D} \leq 0.$$

Il lemma risulta dunque dimostrato. $\square$

Possiamo ora dimostrare il secondo teorema fondamantale enunciato da L.Makar-Limanov.

1.14 Teorema. *Tutti le curve di livello della funzione u, soluzione del problema (1.1), sono convesse.*

Dimostrazione. Supponendo che il bordo Γ dell'insieme Ω sia sufficientemente regolare[16], dimostriamo che la quantità Q precedentemente definita è positiva sulla frontiera Γ, ovvero $Q_{|\Gamma} \geq 0$.
Considerato un generico punto $P_1 = (x_1, y_1) \in \Gamma$, introduciamo localmente su Γ un nuovo

[15] Diversamente dalle notazioni utilizzate, qui "$\cdot$" non indica il *prodotto scalare standard* in $\mathbb{R}^n$, bensì un semplice prodotto tra due quantità numeriche.

[16] Supporremo per comodità $\Gamma \in C^2$, regolarità minima necessaria per seguire il ragionamento della dimostrazione.

sistema di coordinate $\{\xi, \nu\}$ in sostituzione delle classiche coordinate cartesiane $\{x, y\}$ tale che $\xi \in \mathbb{R}^2$ sia il versore tangente a Γ in P_1 mentre $\nu \in \mathbb{R}^2$ il corrispondente versore normale interno a Γ nel medesimo punto.
Definiamo ora un'opportuna curva regolare $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ di classe C^2 che parametrizza la frontiera di Ω. Dalla condizione al bordo $u_{|\Gamma} = 0$ della soluzione dell'equazione (1.1) deduciamo che $u(\gamma(t)) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$, pertanto tramite semplici calcoli otteniamo che

$$0 = \frac{d\,u(\gamma(t))}{dt} = \nabla u(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\xi} = \frac{\partial u(\gamma(t))}{\partial \xi},$$

$$0 = \frac{d^2 u(\gamma(t))}{dt^2} = \dot{\gamma}(t)^T \cdot \nabla^2 u(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) + \nabla u(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\ddot{\gamma}(t)}_{\nu} = \frac{\partial^2 u(\gamma(t))}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u(\gamma(t))}{\partial \nu}.$$

Applicando[17] il *Lemma di Hopf* (1.9) ricaviamo che sul bordo Γ deve necessariamente valere $\frac{\partial u(\gamma(t))}{\partial \nu} \geq 0$, condizione che impone la validità delle seguenti relazioni in $P_1 \in \Gamma$:

$$\frac{\partial u(x_1, y_1)}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u(x_1, y_1)}{\partial \xi^2} = -\underbrace{\frac{\partial u(x_1, y_1)}{\partial \nu}}_{\geq 0} \leq 0. \tag{1.3}$$

Tramite ulteriori calcoli[18] si verifica che la quantità Q precedentemente definita rappresenta un invariante per trasformazioni ortogonali di coordinate, dunque utilizzando il sistema $\{\xi, \nu\}$ in sostituzione delle coordinate cartesiane $\{x, y\}$ otteniamo[19] che nel punto P_1 deve valere la seguente disuguaglianza:

$$Q_{|P_1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} & \frac{\partial u}{\partial \nu} \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial \nu} & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) \geq 0.$$

L'arbitrarietà del punto $P_1 \in \Gamma$ implica immediatamente la validità della condizione $Q_{|\Gamma} \geq 0$, che risulta pertanto dimostrata.
Il Lemma (1.13) afferma che $\Delta Q \leq 0$ in Ω, pertanto applicando il *principio del massimo (forma debole)* (1.7) otteniamo immediatamente che

$$\min_{\bar{\Omega}} Q = \min_{\Gamma} Q.$$

Combinando quest'ultimo fatto con la condizione $Q_{|\Gamma} \geq 0$ appena verificata, possiamo ora determinare il possibile andamento della quantità Q.

---

[17]Supposto che $\Gamma \in C^2$, evidentemente Γ soddisfa la condizione (ISC). Combinando inoltre le condizioni $u_{|\Gamma} = 0$ e $u_{|\Omega} \geq 0$ otteniamo che u assume minimo assoluto sulla frontiera.

[18]La dimostrazione di questo fatto, omessa in quanto non indispensabile, può essere trovata completa consultando [**20**].

[19]Per comodità di notazione omettiamo la dipedenza esplicita delle derivate parziali dalle coordinate del punto P_1.

Innanziutto $Q_{|\Omega} \not\equiv 0$, ovvero tale quantità non può essere identicamente nulla sull'insieme Ω. Considerato infatti $P_0 = (x_0, y_0)$ l'unico punto di massimo locale interno della funzione u conformemente al Lemma (1.11), applicando invece il Lemma (1.10) otteniamo[20] che

$$Q_{|P_0} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2u \end{vmatrix} = 2u \underbrace{\left(ac - b^2\right)}_{>0} > 0.$$

D'altra parte non si può nemmeno verificare il caso $Q_{|P} = 0$ per $P \in \Omega \setminus \Gamma$, altrimenti applicando il *principio del massimo (forma forte)* (1.8) otterremmo $Q_{|\Omega} \equiv 0$, fatto evidentemente in contraddizione con quanto appena dimostrato. L'unica alternativa possibile è dunque il caso in cui $\forall P \in \Omega \setminus \Gamma$ si verifica la condizione $Q_{|P} > 0$.
Supponiamo ora per assurdo che non tutte le curve di livello della funzione u siano convesse, ovvero che esista un punto $P_2 = (x_2, y_2) \in \Omega \setminus \Gamma$ tale che la relativa curva al livello $u(x_2, y_2)$ non sia convessa. Considerato il sistema di coordinate locali $\{\hat{\xi}, \hat{\nu}\}$ analogo al precedente, si verifica facilmente che nel punto P_2 valgono le seguenti relazioni[21]:

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{\xi}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{\xi}^2} = -\frac{\partial u}{\partial \hat{\nu}} \geq 0.$$

Dall'equazione (1.1) deduciamo la disuguaglianza

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \hat{\nu}^2} = -1 - \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial \hat{\xi}^2}}_{\geq 0} < 0,$$

da cui ricaviamo che nel punto P_2 deve verificarsi la condizione

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \hat{\xi}^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial \hat{\nu} \partial \hat{\xi}} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \hat{\xi} \partial \hat{\nu}} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial \hat{\nu}^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{\xi}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{\nu}^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \hat{\xi} \partial \hat{\nu}}\right)^2 \leq 0.$$

Tenendo ora presente la condizione $u_{|\Omega} \geq 0$ otteniamo infine la seguente disuguaglianza:

$$Q_{|P_2} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \hat{\xi}^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial \hat{\nu} \partial \hat{\xi}} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \hat{\xi} \partial \hat{\nu}} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial \hat{\nu}^2} & \dfrac{\partial u}{\partial \hat{\nu}} \\ 0 & \dfrac{\partial u}{\partial \hat{\nu}} & 2u \end{vmatrix} = -\left(\frac{\partial u}{\partial \hat{\nu}}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \hat{\xi}^2}\right) + 2u \underbrace{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \hat{\xi}^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial \hat{\nu} \partial \hat{\xi}} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \hat{\xi} \partial \hat{\nu}} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial \hat{\nu}^2} \end{vmatrix}}_{\leq 0} \leq 0.$$

[20] Ovviamente vale $u_{|P_0} > 0$ poichè, se fosse $u_{|P_0} = 0$, per il Teorema (1.8) avremmo che $u_{|\Omega} = 0$ e la funzione non sarebbe evidentemente soluzione dell'equazione (1.1).

[21] É bene precisare che il cambio di segno del termine $\frac{\partial u}{\partial \hat{\nu}}$ è dovuto alla presenza di una porzione concava della curva $\hat{\gamma}(t)$ che parametrizza la curva di livello della funzione u nel punto P_2, in quanto la quantità $\ddot{\hat{\gamma}}(t)$ cambia verso e coincide ora con l'opposto del versore normale interno alla curva $-\hat{\nu}$.

Abbiamo tuttavia ottenuto un assurdo, poichè tale risultato è in contraddizione con la condizione $Q_{|P} > 0 \ \ \forall P \in \Omega \setminus \Gamma$ precedentemente dimostrata.
Il teorema risulta dunque dimostrato[22]. $\square$

1.3 Un primo risultato di concavità

Tramite l'ultimo teorema proposto da L.Makar-Limanov in [**1**] vorremmo determinare un'ulteriore proprietà della soluzione u dell'equazione (1.1). Considerando le caratteristiche della *funzione di torsione* relativa all'insieme Ω dedotte dai Teoremi (1.12) e (1.14), risulta naturale chiedersi se la funzione u sia concava, conformemente alla definione (1.4) precedentemente introdotta. Questo interrogativo tuttavia ammette risposta negativa, giustificata dalla seguente osservazione.

1.15 Osservazione. Richiamando la dimostrazione del Teorema (1.14) abbiamo verificato la validità delle seguenti condizioni:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}_{\big|\Gamma} \geq 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}_{\big|\Gamma} \leq 0.$$

Sapendo inoltre che $u_{|\Gamma} = 0$ deduciamo immeditamente che anche $\Delta u_{|\Gamma} = 0$. Combinando le due condizioni ottenute ricaviamo la validità della seguente disuguaglianza:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}_{\big|\Gamma} \geq 0.$$

La soluzione u dell'equazione (1.1) risulta pertanto essere convessa nella direzione normale interna al bordo di Ω in virtù della caratterizzazione fornita nella Proposizione (1.6), affermazione nettamente in contraddizione con la possibilità che la funzione u sia concava sull'insieme Ω.

Ciononostante risulta possibile trasformare opportunamente la soluzione u dell'equazione (1.1) applicando una funzione con determinate proprietà[23] affinchè quest'ultima diventi effettivamente concava. Questo risultato notevole è proprio il contenuto dell'ultimo teorema proposto in questo capitolo.

1.16 Teorema. *Data la soluzione u del problema (1.1), la funzione $\sqrt{u}$ risulta ben definita e concava sull'insieme convesso $\bar{\Omega}$.*

Dimostrazione. Sapendo che $u_{|\Omega} \geq 0$ la funzione $\sqrt{u}$ risulta ben definita. Innanzitutto calcoliamo esplicitamente il determinante $det\left(\nabla^2 \sqrt{u}\right)$ dell'hessiano della funzione $\sqrt{u}$ nel seguente

[22] L'ipotesi di regolarità sulla frontiera $\Gamma \in C^2$ non è necessaria per ottenere questo risultato, pur risultando indispensabile per applicare questa particolare dimostrazione. Tuttavia, dato che nelle nostre applicazioni considereremo esclusivamente insiemi sufficientemente regolari, ci atteniamo all'approccio qui proposto.

[23] Ulteriori dettagli a riguardo verranno discussi nel Capitolo 3, più precisamente nel Lemma (3.8).

modo:

$$
\begin{aligned}
det\left(\nabla^2\sqrt{u}\right) &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\sqrt{u}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\sqrt{u}}{\partial y\partial x} \\ \dfrac{\partial^2\sqrt{u}}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\sqrt{u}}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{4\sqrt{u^3}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\dfrac{1}{4\sqrt{u^3}}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} \\ -\dfrac{1}{4\sqrt{u^3}}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & -\dfrac{1}{4\sqrt{u^3}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{8u^2}\left[-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + \\
&+ \frac{1}{4u}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)^2\right] = \\
&= \frac{1}{8u^2}\left(T + 2uD\right) = \frac{Q}{8u^2}.
\end{aligned}
$$

Richiamando la dimostrazione del Teorema (1.14) deduciamo facilmente che $Q_{|\Omega} \geq 0$, pertanto otteniamo la condizione $det(\nabla^2\sqrt{u}) \geq 0$.
Calcoliamo inoltre la traccia $tr\left(\nabla^2\sqrt{u}\right)$ dell'hessiano della funzione $\sqrt{u}$, ricavando dall'equazione (1.1) la validità della seguente disuguaglianza:

$$
\begin{aligned}
tr\left(D\nabla^2\sqrt{u}\right) &= \frac{\partial^2\sqrt{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sqrt{u}}{\partial y^2} = \\
&= +\frac{1}{2\sqrt{u}}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}_{-1} - \frac{1}{4\sqrt{u^3}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \leq 0^{\cdot}
\end{aligned}
$$

Combinando questi due risultati otteniamo che la matrice hessiana $\nabla^2\sqrt{u}$ della funzione $\sqrt{u}$ deve essere semidefinita negativa. In virtù della Proposizione (1.6) la funzione $\sqrt{u}$ deve essere concava sull'insieme $\bar{\Omega}$. Il teorema risulta dunque dimostrato[24]. □

1.17 Osservazione. L'*equazione di torsione* (1.1) rappresenta un caso notevole della più generale *equazione di torsione elastica (di Saint-Venant)*, definita analogamente nel seguente modo:

$$\Delta u + k = 0, \tag{1.4}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ denota una costante tale che $k > 0$. Adattando l'approccio utilizzato per determinare le proprietà della *funzione di torsione* u relativa all'insieme Ω possiamo analogamente determinare l'andamento generale della soluzione dell'equazione (1.4). La nostra trattazione svilupperà tuttavia un metodo di approccio all'equazione (1.4) totalmente diverso nel Capitolo 4, più precisamente discusso nel Teorema (4.11).

[24] Prestiamo attenzione esclusivamente alla frontiera di Ω: nonostante le derivate parziali non siano ivi definite per la condizione $u_{|\Gamma} = 0$, la funzione $\sqrt{u}$ risulta comunque concava su di essa per l'osservazione (1.15), risolvendo pertanto ogni tipo di problema.

Capitolo 2

Brascamp-Lieb ed il problema agli autovalori $\Delta u + \lambda u = 0$

Negli anni immediatamente successivi alla pubblicazione dell'articolo [**1**] di L.Makar-Limanov, H.J.Brascamp e E.H.Lieb decisero di dedicarsi alla medesima linea di ricerca, concentrandosi dunque sull'ottenimento di ulteriori risutati inerenti le proprietà di concavità delle soluzioni di determinate PDEs. Nel 1976, sfruttando la generalizzazione di alcune *disuguaglianze di convessità* ampiamente conosciute (*Brunn-Minkowsky* e *Prékopa-Leindler*) riuscirono ad ottenere tramite un approccio principalmente fisico-probabilistico un valido risultato di concavità relativo alla soluzione della ben nota *equazione di diffusione* in $\mathbb{R}^n$. Benchè fondamentale, l'articolo [**2**] venne principalmente impiegato come semplice modello per ottenere un risultato analogo inerente un diverso problema differenziale, di seguito riportato.

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso con $n \geq 2$, definiamo una funzione $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ tale che soddisfi la condizione $u_{|\partial\Omega} = 0$ sulla frontiera $\partial\Omega$. Consideriamo ora la seguente PDE lineare del secondo ordine, denominata anche *equazione agli autovalori per il Laplaciano* relativa all'insieme Ω:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \tag{2.1}$$

dove risulta definita la cosiddetta *frequenza principale* λ dell'insieme Ω nel seguente modo:

$$\lambda(\Omega) := \min_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \|\nabla v\|^2 \, dx}{\displaystyle\int_\Omega |v|^2 \, dx}.$$

Analogamente al problema (1.1), la soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ dell'equazione (2.1) determina proprio la quantità $\lambda(\Omega)$, dalla cui definizione ricaviamo immediatamente che deve verificare la condizione[1] $\lambda > 0$. Richiamando invece la nomenclatura tradizionale, λ corrisponde al *primo*

[1] D'ora in avanti ometteremo la dipendenza del valore λ dall'insieme Ω.

autovalore dell'operatore di Laplace[2], mentre la funzione u corrisponde alla *prima autofunzione dell'operatore di Laplace.*

Pur introducendo qualche opportuna modifica, questo capitolo seguirà essenzialmente il ragionamento sviluppato da H.J.Brascamp e E.H.Lieb in [**2**], perseguendo l'obiettivo principale di stabilire quali proprietà soddisfa la soluzione dell'equazione (2.1) precedentemente introdotta.

2.1 La disuguaglianza di Brunn-Minkowsky (BM)

La *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky* rappresenta senza dubbio una *disuguaglianza di convessità* notevole a livello insiemistico, ritenuta fondamentale principalmente per la sua forte valenza geometrica. Nonostante questa interpretazione generalmente prevalga, l'approccio scelto da H.J.Brascamp e E.H.Lieb nell'introduzione di tale disuguaglianza si discosta nettamente da quello tradizionale, cercando infatti di attribuirle maggiore rilevanza dal punto di vista analitico. Enunciamo pertanto il teorema relativo alla *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky* nella sua formulazione più generale possibile, premettendo tuttavia una definizione indispensabile.

2.1 Definizione. Dati $A, B \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi non vuoti ed un parametro $\lambda \in [0,1]$, definiamo la *combinazione di Minkowsky* degli insiemi A e B di coefficiente λ il seguente insieme:

$$(1-\lambda)A + \lambda B := \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\lambda)x + \lambda y, \quad x \in A, \quad y \in B\}.$$

L'insieme $(1-\lambda)A+\lambda B$ viene anche chiamato *combinazione convessa* di A e B di coefficiente λ poichè la proprietà di convessità viene conservata: qualora $A, B \subset \mathbb{R}^n$ siano insiemi convessi, allora $(1-\lambda)A + \lambda B$ risulta anch'esso un insieme convesso.

Possiamo ora enunciare il risultato principale di questa sezione.

2.2 Teorema (Disuguaglianza di Brunn-Minkowsky (BM)). *Sia μ_n la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. Dato un parametro*[3] *$\lambda \in (0,1)$, consideriamo $A, B \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi μ_n-misurabili*[4] *e non vuoti tali che la relativa combinazione convessa $(1-\lambda)A+\lambda B$ sia a sua volta μ_n-misurabile. Allora la funzione $[\mu_n(\cdot)]^{\frac{1}{n}}$ è concava, ovvero vale la seguente disuguaglianza:*

$$[\mu_n((1-\lambda)A + \lambda B)]^{\frac{1}{n}} \geqslant (1-\lambda)\,[\mu_n(A)]^{\frac{1}{n}} + \lambda\,[\mu_n(B)]^{\frac{1}{n}}. \tag{2.2}$$

[2]Assumiamo vero questo fatto, di cui non forniremo la dimostrazione esplicita: l'operatore di Laplace Δ ammette una successione (λ_k) di autovalori strettamente positivi, dove $\lambda(\Omega)$ corrisponde all'autovalore minimo λ_0, tale che $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$.

[3]In questo capitolo considereremo sempre il caso $\lambda \in (0,1)$ poichè i casi limite $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$, pur essendo ammessi da definizioni e teoremi, portano esclusivamente a conclusioni banali e non significative per la trattazione.

[4]Diremo semplicemente che un insieme oppure una funzione sono μ_n-misurabili quando sono misurabili secondo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Consideriamo il caso particolare in cui gli insiemi $A, B \subset \mathbb{R}^n$ siano limitati ed abbiano misura finita e non nulla[5], ovvero in cui valgono le condizioni $0 < \mu_n(A) < +\infty$ e $0 < \mu_n(B) < +\infty$.

▶ Dimostriamo preliminarmente la disuguaglianza quando A e B sono *n-parallelepipedi* i cui spigoli risultano paralleli agli iperpiani coordinati $\{x_i = 0\}$ di $\mathbb{R}^n$ per $i = 1, ...n$. In questo caso, denotando con a_i e b_i rispettivamente le lunghezze dell'i-esimo spigolo di A e B lungo la coordinata i-esima di $\mathbb{R}^n$, otteniamo che

$$\mu_n(A) = \prod_{i=1}^{n} a_i \quad e \quad \mu_n(B) = \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

Conseguentemente osserviamo che $(1 - \lambda)A$ e λB rappresentano gli n-parallelepipedi A e B i cui spigoli sono rispettivamente dilatati di un fattore di riscalamento $(1 - \lambda)$ e λ, ottenendo di fatto che

$$\mu_n((1-\lambda)A) = \prod_{i=1}^{n}(1-\lambda)a_i \quad e \quad \mu_n(\lambda B) = \prod_{i=1}^{n} \lambda b_i. \tag{2.3}$$

Infine deduciamo che $(1 - \lambda)A + \lambda B$ rappresenta dunque un n-parallelepipedo i cui spigoli risultano paralleli agli iperpiani coordinati $\{x_i = 0\}$ di $\mathbb{R}^n$ e misurano $(1-\lambda)a_i+\lambda b_i$, ottenendo pertanto la seguente relazione:

$$\mu_n((1-\lambda)A + \lambda B) = \prod_{i=1}^{n}((1-\lambda)a_i + \lambda b_i). \tag{2.4}$$

Confrontiamo ora le misure di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ degli n-parallelepipedi definiti nelle formule (2.3) e (2.4) in modo da ricavare esplicitamente, applicando ai rapporti ottenuti la *disuguaglianza Ma-Mg*[6], le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{[\mu_n((1-\lambda)A)]^{\frac{1}{n}}}{[\mu_n((1-\lambda)A+\lambda B)]^{\frac{1}{n}}} = \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{(1-\lambda)a_i}{(1-\lambda)a_i + \lambda b_i}\right]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(1-\lambda)a_i}{(1-\lambda)a_i + \lambda b_i},$$
$$\frac{[\mu_n(\lambda B)]^{\frac{1}{n}}}{[\mu_n((1-\lambda)A+\lambda B)]^{\frac{1}{n}}} = \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda b_i}{(1-\lambda)a_i + \lambda b_i}\right]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda b_i}{(1-\lambda)a_i + \lambda b_i}.$$

[5]É possibile estendere ulteriormente la dimostrazione al caso generale dell'enunciato, tuttavia forniamone una versione più adatta agli sviluppi successivi della trattazione.

[6]Senza fornirne la dimostrazione, ricordiamo la *disuguaglianza della media aritmetico-geometrica (o disuguaglianza Ma-Mg)*. Dati $c_i \in \mathbb{R}$ al variare di $i = 1, ..., n$ risultano definite rispettivamente la *media aritmetica* M_a e la *media geometrica* M_g dei valori c_i nel seguente modo:

$$M_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i \quad e \quad M_g = \left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Vale allora la cosiddetta *disuguaglianza Ma-Mg*:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Sommando membro a membro le espressioni appena ottenute e condensando le due sommatorie di indice i in'unica sommatoria di eguale indice, otteniamo tramite semplici calcoli la seguente relazione:

$$\begin{aligned}
&\frac{[\mu_n((1-\lambda)A)]^{\frac{1}{n}}}{[\mu_n((1-\lambda)A+\lambda B)]^{\frac{1}{n}}}+\frac{[\mu_n(\lambda B)]^{\frac{1}{n}}}{[\mu_n((1-\lambda)A+\lambda B)]^{\frac{1}{n}}}\leq \\
\leq&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-\lambda)a_i}{(1-\lambda)a_i+\lambda b_i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda b_i}{(1-\lambda)a_i+\lambda b_i}= \\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-\lambda)a_i+\lambda b_i}{(1-\lambda)a_i+\lambda b_i}=1.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Sistemando il risultato (2.5) appena ricavato otteniamo la *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky* per gli *n-parallelepipedi*, concludendo pertanto la dimostrazione di questo caso particolare.

► Dimostriamo ora la disuguaglianza quando A e B sono *unioni finite* di n-parallepipedi del tipo precedentemente definito, ovvero esplicitamente:

$$A=\bigcup_{i=1}^{k}Q_A^i \quad e \quad B=\bigcup_{j=1}^{h}Q_B^j,$$

dove indichiamo con Q_A^i e Q_B^j l'i-esimo e il j-esimo n-parallelepipedo che costituisce rispettivamente l'insieme A e B. Applichiamo ora un espediente matematico spesso chiamato *Hadwiger-Ohmann Cut*, ovvero trasliamo[7] l'insieme A in modo che l'iperpiano coordinato $\{x_n=0\}$ separi esattamente due n-parallelepipedi disitinti che costituiscono A. É possibile dunque introdurre A_+ e A_-, sottoinsiemi μ_n-misurabili e non vuoti di A definiti come l'unione degli n-parallepipedi formati dall'intersezione di ciascun n-parallelepipedo che costituisce A rispettivamente con i semispazi $\{x_n\geq 0\}$ e $\{x_n\leq 0\}$:

$$A_+=\bigcup_{i=1}^{k}\left[Q_A^i\cap\{x_n\geq 0\}\right] \quad e \quad A_-=\bigcup_{i=1}^{k}\left[Q_A^i\cap\{x_n\leq 0\}\right].$$

Trasliamo analogamente B e definiamo opportunamente B_+ e B_-, sottoinsiemi μ_n-misurabili e non vuoti di B, in modo che sia verificata la seguente relazione:

$$\frac{\mu_n(A_\pm)}{\mu_n(A)}=\frac{\mu_n(B_\pm)}{\mu_n(B)}. \tag{2.6}$$

Valgono inoltre le seguenti affermazioni, di cui non proponiamo la dimostrazione in quanto evidenti:

- ► $\mu_n(A_+)+\mu_n(A_-)=\mu_n(A)$ e $\mu_n(B_+)+\mu_n(B_-)=\mu_n(B)$;
- ► $A_++B_+\subseteq\{x_n\geq 0\}$ e $A_-+B_-\subseteq\{x_n\leq 0\}$;

[7] Ricordiamo che la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ risulta invariante per traslazione di un insieme, dunque la quantità $\mu_n(A)$ non viene modificata da tale espediente.

► $[(1-\lambda)A_+ + \lambda B_+] \cup [(1-\lambda)A_- + \lambda B_-] \subseteq ((1-\lambda)A + \lambda B)$.

Essendo il numero di n-parallelepipedi contenuti in $A_+ \cup B_+$ e in $A_- \cup B_-$ in entrambi i casi minore del numero h di n-parallelepipedi contenuti in $A \cup B$, procediamo ragionando per induzione su tale numero.[8] Dalla proprietà di monotonia[9] della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ ricaviamo la seguene disuguaglianza:

$$\begin{aligned}&\mu_n((1-\lambda)A + \lambda B) \geq \\ \geq &\mu_n((1-\lambda)A_+ + \lambda B_+) + \mu_n((1-\lambda)A_- + \lambda B_-) \geq ...\end{aligned}$$

Possiamo ora applicare la *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky* (2.5) per gli n-parallelepipedi precedentemente dimostrata[10] per continuare la disuguaglianza. Tenendo inoltre in considerazione la proprietà di omogeneità[11] della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ ed applicando la relazione (2.6), tramite opportuni calcoli ricaviamo il seguente risultato:

$$\begin{aligned}
... &\geq \left[(1-\lambda)[\mu_n(A_+)]^{\frac{1}{n}} + \lambda[\mu_n(B_+)]^{\frac{1}{n}}\right]^n + \left[(1-\lambda)[\mu_n(A_-)]^{\frac{1}{n}} + \lambda[\mu_n(B_-)]^{\frac{1}{n}}\right]^n = \\
&= \left[(1-\lambda)[\mu_n(A_+)]^{\frac{1}{n}} + \lambda\left[\mu_n(A_+)\frac{\mu_n(B)}{\mu_n(A)}\right]^{\frac{1}{n}}\right]^n \\
&+ \left[(1-\lambda)[\mu_n(A_-)]^{\frac{1}{n}} + \lambda\left[\mu_n(A_-)\frac{\mu_n(B)}{\mu_n(A)}\right]^{\frac{1}{n}}\right]^n = \\
&= \mu_n(A_+)\left[(1-\lambda) + \lambda\frac{[\mu_n(B)]^{\frac{1}{n}}}{[\mu_n(A)]^{\frac{1}{n}}}\right]^n + \mu_n(A_-)\left[(1-\lambda) + \lambda\frac{[\mu_n(B)]^{\frac{1}{n}}}{[\mu_n(A)]^{\frac{1}{n}}}\right]^n = \\
&= \left[\underbrace{\mu_n(A_+) + \mu_n(A_-)}_{\mu_n(A)}\right]\left[(1-\lambda) + \lambda\frac{[\mu_n(B)]^{\frac{1}{n}}}{[\mu_n(A)]^{\frac{1}{n}}}\right]^n = \\
&= \left[(1-\lambda)\left[\mu_n(A)\right]^{\frac{1}{n}} + \lambda\left[\mu_n(B)\right]^{\frac{1}{n}}\right]^n.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Sistemando il risultato (2.7) appena ricavato otteniamo la *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky* in quest'altro caso particolare, concludendone la dimostrazione.

► Verifichiamo infine la disuguaglianza nel caso generale enunciato all'inizio della dimostrazione del teorema. Ricordiamo anzitutto che un generico insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ μ_n-misurabile e limitato risulta approssimabile con una successione crescente (X_k) di unioni finite di n-parallepipedi:

$$\mu_n(A) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\mu_n(X_k) : \ X_k \textit{ unione di n-parallepipedi con } \bar{X}_k \subset A\right\} = \limsup_{k\to+\infty}\mu_n(X_k).$$

[8]Per semplificare la dimostrazione, verificheremo escluivamente il caso $h = 1$. L'implicazione relativa all'induzione si ricava svolgendo passaggi analoghi non riportati.

[9]$A \subseteq B \implies \mu_n(A) \leq \mu_n(B)$.

[10]Ricordiamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ la funzione $\{x \mapsto x^n\}$ risulta monotona crescente per $n > 0$, pertanto elevando alla potenza n-esima entrambi i membri della disuguaglianza questa si conserva.

[11]$\mu_n(\lambda A) = \lambda^n \mu_n(A)$

Considerando un'analoga successione (Y_k) che approssima l'insieme B, dalla *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky* (2.7) per le unioni finite di n-parallepipedi deduciamo facilmente che

$$(1-\lambda)\,[\mu_n(X_k)]^{\frac{1}{n}} + \lambda\,[\mu_n(Y_k)]^{\frac{1}{n}} \leq [\mu_n((1-\lambda)X_k + \lambda Y_k)]^{\frac{1}{n}}\,.$$

Tenendo presente la proprietà di continuità della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ passiamo al lim sup per $k \to +\infty$ in entrambi i membri della disuguaglianza precedente, ottenendo tramite opportuni calcoli la seguente relazione:

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)\,[\mu_n(A)]^{\frac{1}{n}} + \lambda\,[\mu_n(B)]^{\frac{1}{n}} = \\
=&\limsup_{k\to+\infty}\left[(1-\lambda)\,[\mu_n(X_k)]^{\frac{1}{n}} + \lambda\,[\mu_n(Y_k)]^{\frac{1}{n}}\right] \leq \\
\leq&\limsup_{k\to+\infty}\left[\mu_n\big(\underbrace{(1-\lambda)X_k + \lambda Y_k}_{Z_k}\big)\right]^{\frac{1}{n}} = \\
=&\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{[\mu_n(Z_k)]^{\frac{1}{n}} : Z_k \textit{ unione di n-parallepipedi con } \bar{Z}_k \subset (1-\lambda)A + \lambda B\right\} = \\
=&\,[\mu_n((1-\lambda)A + \lambda B)]^{\frac{1}{n}}\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto la *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky* nel caso generale, risultato che conclude la dimostrazione del teorema. □

2.3 Osservazione. La *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky* (2.2) presenta diverse formulazioni equivalenti, ciascuna delle quali risulta più conveniente utilizzare in un determinato contesto. Dal punto di vista analitico esiste una versione analoga alla (2.2) spesso utilizzata nel proseguo della trattazione, ricavabile tramite alcuni semplici passaggi di seguito proposti. Considerando la proprietà di concavità della funzione $\{x \mapsto \log(x)\}$ applichiamo l'identità $x = \exp(\log(x))$ con $x > 0$ alla disuguaglianza (2.2), ottenendo tramite semplici calcoli che

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\log\,[\mu_n((1-\lambda)A + \lambda B)]^{\frac{1}{n}}\right) \geq \\
\geq&\exp\left((1-\lambda)\log[\mu_n(A)]^{\frac{1}{n}} + \lambda\log[\mu_n(B)]^{\frac{1}{n}}\right) = \\
=&\exp\left(\log\left([\mu_n(A)]^{1-\lambda}[\mu_n(B)]^{\lambda}\right)^{\frac{1}{n}}\right).
\end{aligned}$$

Considerando ora per $x > 0$ la proprietà di monotonia cresente delle funzioni $\{x \mapsto \ln(x)\}$ e $\{x \mapsto \exp(x)\}$, sistemando la disuguaglianza precedente ricaviamo immediatamente la formulazione alternativa richiesta:

$$[\mu_n((1-\lambda)A + \lambda B)] \geq [\mu_n(A)]^{1-\lambda}[\mu_n(B)]^{\lambda}. \tag{2.8}$$

2.2 La disuguaglianza di Prékopa-Leindler (PL)

Ulteriori generalizzazioni della formulazione (2.8) della *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky* portarono ben presto ad ottenerne una versione totalmente analitica, eliminando ogni tipo di nozione insiemistica precedentemente utilizzata. Proponiamo dunque la "versione funzionale" della *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky*, identificata tradizionalmente come la cosiddetta *disuguaglianza di Prékopa-Leindler*. Preliminarmente tuttavia forniamo le seguenti definizioni, premesse indispensabili per poter enunciare il teorema inerente tale disuguaglianza.

2.4 Definizione. Considerati un parametro $\lambda \in [0,1]$ e due numeri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \geq 0$ e $b \geq 0$, definiamo al variare di $p \in [-\infty, +\infty]$ la *p-media (λ-pesata)* di a e b come la funzione $\mathcal{M}_{(\cdot)}(\lambda, a, b) \in C([-\infty, +\infty]) \cap C^{\infty}(\mathbb{R})$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_p(\lambda, a, b) := 0 \qquad\qquad \forall p \in \bar{\mathbb{R}} \qquad \text{se } ab = 0; \\ &\mathcal{M}_p(\lambda, a, b) := \begin{cases} \max\{a, b\} & p = +\infty \\ [(1-\lambda)a^p + \lambda b^p]^{\frac{1}{p}} & p \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \\ a^{1-\lambda} b^{\lambda} & p = 0 \\ \min\{a, b\} & p = -\infty \end{cases} \qquad \text{se } ab > 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Tale funzione risulta evidentemente ben definita $\forall p \in [-\infty, +\infty]$, fatto evidente grazie alla validità dei seguenti limiti[12]:

$$\begin{aligned} \lim_{p \to +\infty} [(1-\lambda)a^p + \lambda b^p]^{\frac{1}{p}} &= \max\{a, b\}, \\ \lim_{p \to -\infty} [(1-\lambda)a^p + \lambda b^p]^{\frac{1}{p}} &= \min\{a, b\}, \\ \lim_{p \to 0} [(1-\lambda)a^p + \lambda b^p]^{\frac{1}{p}} &= a^{1-\lambda} b^{\lambda}. \end{aligned}$$

La funzione (2.9) rappresenta concretamente una generalizzazione delle medie matematiche precedentemente introdotte: risulta infatti evidente che il caso $p = 0$ corrisponde alla *media geometrica M_g (λ-pesata)* di a e b mentre il caso $p = 1$ corrisponde alla *media aritmetica M_a (λ-pesata)* di a e b. Osservando inoltre che la funzione $\{x \mapsto x^{\frac{q}{p}}\}$ per $p, q \in \mathbb{R}$ con $p < q$ è strettamente convessa, otteniamo la disuguaglianza

$$[(1-\lambda)a^p + \lambda b^p]^{\frac{q}{p}} < [(1-\lambda)a^q + \lambda b^q],$$

dalla quale ricaviamo immediatamente che la funzione $\mathcal{M}_{(\cdot)}(\lambda, a, b)$ risulta[13] essere strettamente crescente:

$$\mathcal{M}_p(\lambda, a, b) = [(1-\lambda)a^p + \lambda b^p]^{\frac{1}{p}} < [(1-\lambda)a^q + \lambda b^q]^{\frac{1}{q}} = M_q(\lambda, a, b). \tag{2.10}$$

[12] I calcoli espliciti vengono omessi poichè la verifica dei limiti risulta banale.

[13] Il caso in cui $p = +\infty$ o $p = -\infty$ è banale, pertanto abbiamo analizzato esclusivamente i casi in cui $p \in \mathbb{R}$.

Scegliendo il caso particolare $p = 1$ e $q = 0$, per $\lambda = \frac{1}{2}$ la disuguaglianza (2.10) corrisponde alla *disuguaglianza Ma-Mg* precedentemente introdotta per $n = 2$. Nel Capitolo 4, più precisamente nella Proposizione (4.5), verranno introdotte ulteriori proprietà relative alla funzione (2.9), ora omesse in quanto non indispensabili per la trattazione.

2.5 Definizione. Date due funzioni $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ μ_n-misurabili, consideriamo due parametri $\lambda \in (0, 1)$ e $p \in [-\infty, +\infty]$. Risulta allora ben definita la funzione $h_{p,\lambda}(\cdot|\, f, g) : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, denominata (p, λ)-*convoluzione o convoluzione suprema* di f e g, nel seguente modo:

$$h_{p,\lambda}\,(x \mid f, g) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \mathcal{M}_p(\lambda, f\left(\frac{x-y}{1-\lambda}\right), g\left(\frac{y}{\lambda}\right) \right\}.$$

Tramite un semplice cambio variabile possiamo fornire una versione alternativa della precedente definizione:

$$h_{p,\lambda}\,(z \mid f, g) := \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \mathcal{M}_p(\lambda, f(x), g(y)) \; : \; z = (1-\lambda)x + \lambda y \right\}. \tag{2.11}$$

Questa seconda versione[14] della funzione, graficamente più compatta e di immediata comprensione, si rivelerà molto comoda ed utile per la dimostrazione del prossimo teorema.

Possiamo ora enunciare il risultato[15] principale di questa sezione.

2.6 Teorema (**Disuguaglianza di Prékopa-Leindler (PL)**). *Dato un parametro $\lambda \in (0, 1)$, siano definite tre funzioni $f, g, h : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ μ_n-misurabili tali che $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si verifichi la seguente condizione:*

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \mathcal{M}_0(\lambda, f(x), g(y)) = [f(x)]^{1-\lambda}\, [g(y)]^{\lambda}. \tag{2.12}$$

Allora risulta valida la seguente disuguaglianza[16]*:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx \right)^{1-\lambda} \tag{2.13}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\|h\|_1 \geq \|f\|_1^{1-\lambda} \|g\|_1^{\lambda},$$

dove $\|\cdot\|_1$ denota la norma[17] *$L^1(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni introdotte.*

---

[14]Per comodità di notazione elimineremo spesso la dipendenza esplicita della funzione $h_{p,\lambda}$ dalle variabili f e g, denotandola semplicemente con $h_{p,\lambda}(x)$.

[15]Nonostante tutti i teoremi successivi siano enunciati e dimostrati per semplicità in $\mathbb{R}^n$, è possibile fornirne una generalizzazione valida in un generico insieme convesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

[16]Utlizziamo l'unica variabile x al posto di y e z per semplicità di notazione, in quanto l'integrale non dipende dalla diversa variabile d'integrazione.

[17]Ricordiamo che per una funzione f misurabile secondo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ si definisce la norma $L^1(\mathbb{R}^n)$ semplicemente nel seguente modo:

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx.$$

Dimostrazione. Senza perdere di generalità, consideriamo le funzioni f, g e h integrabili[18] secondo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. La disuguaglianza risulta banalmente vera quando $f \equiv 0$ oppure $g \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n$. Analizziamo dunque solamente i casi restanti, procedendo per induzione sulla dimensione n dello spazio $\mathbb{R}^n$.

▶ Posto inizialmente $n = 1$, risultano innanzitutto ben definite le seguenti funzioni:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = F(x) > 0 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = G(x) > 0.$$

Consideriamo inoltre due funzioni ausiliarie $u, v : [0,1] \to [-\infty, +\infty]$ definite opportunamente in modo che $u(t)$ e $v(t)$ rappresentino i più piccoli numeri reali tali che

$$\frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u(t)} f(x)\, dx = \frac{1}{G}\int_{-\infty}^{v(t)} g(x)\, dx = t. \tag{2.14}$$

Nonostante le funzioni u e v possano risultare discontinue, dalla loro definizione risulta evidente che devono essere strettamente crescenti, dunque necessariamente derivabili *q.o.* $t \in [0,1]$. Posto dunque per definizione

$$w(t) := (1-\lambda)u(t) + \lambda v(t),$$

deriviamo nella variabile t tutti i membri della formula integrale (2.14), ottenendo facilmente che

$$\frac{f(u(t))u'(t)}{F} = \frac{g(v(t))v'(t)}{G} = 1.$$

Utilizzando tale espressione e ricordando la *disuguaglianza Ma-Mg (λ-pesata)* precedentemente introdotta, deriviamo nella variabile t la funzione w, ottenendo ogniqualvolta $f(u(t)) \neq 0$ e $g(u(t)) \neq 0$ la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned} w'(t) &= (1-\lambda)u'(t) + \lambda v'(t) \geq \\ &\geq \left[u'(t)\right]^{1-\lambda}\left[v'(t)\right]^{\lambda} = \\ &= \left[\frac{F}{f(u(t))}\right]^{1-\lambda}\left[\frac{G}{g(v(t))}\right]^{\lambda}. \end{aligned}$$

Applicando infine un opportuno cambio variabile $x = w(t)$ tale che $dx = w'(t)dt$, tramite semplici calcoli ricaviamo che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(x)\, dx &= \int_0^1 h(w(t))w'(t)\, dt \geq \\ &\geq \int_0^1 \left[f(u(t))\right]^{1-\lambda}\left[g(v(t))\right]^{\lambda}\left[\frac{F}{f(u(t))}\right]^{1-\lambda}\left[\frac{G}{g(v(t))}\right]^{\lambda} dt = \\ &= (F)^{1-\lambda}(G)^{\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx\right)^{1-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx\right)^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

[18] Diversamente la disuguaglianza sarebbe banalmente verificata per la presenza di termini $\|\cdot\|_1 = +\infty$ a seconda della non integrabilità delle tre funzioni f, g o h.

Abbiamo ottenuto il risultato cercato, concludendo dunque la dimostrazione della *disuguaglianza di Prékopa-Leindler* in $\mathbb{R}$.

▶ Considerando la tesi valida per $(n-1)$, dimostriamola per n. Fissato un generico valore $s \in \mathbb{R}$, definiamo opportunamente una funzione $h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to [0, +\infty)$ tale che $h_s(z) = h(s, z) \ \ \forall z \in \mathbb{R}^{n-1}$. Analogamente definiamo le funzioni f_s e g_s. Consideriamo inoltre due valori $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $c = (1-\lambda)a + \lambda b \in \mathbb{R}$. Presi due generici $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$, dall'ipotesi (2.12) ricaviamo tramite semplici calcoli che

$$
\begin{aligned}
h_c((1-\lambda)x + \lambda y) = h((1-\lambda)a + \lambda b), (1-\lambda)x + \lambda y) = h((1-\lambda)(a, x) + \lambda(b, y)) \geq \\
\geq [f(a, x)]^{1-\lambda} [g(b, y)]^{\lambda} = [f_a(x)]^{1-\lambda} [g_b(y)]^{\lambda} .
\end{aligned}
$$

Applicando ora l'ipotesi induttiva otteniamo immediatamente la seguente disuguaglianza:

$$
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(z) \, dz \geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_a(z) \, dz \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_b(z) \, dz \right)^{1-\lambda} .
$$

Introducendo per comodità le seguenti notazioni:

$$
H(c) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(z) \, dz, \quad F(a) = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_a(z) \, dz \right)^{1-\lambda}, \quad G(b) = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_b(z) \, dz \right)^{1-\lambda},
$$

possiamo riscrivere compattamente la disuguaglianza precedente nel seguente modo:

$$
H(c) = H((1-\lambda)a + \lambda b) \geq [F(a)]^{1-\lambda} [G(b)]^{\lambda} . \tag{2.15}
$$

Applicando ora il *Teorema di Fubini-Tonelli*[19] all'integrale su $\mathbb{R}^n$ e tenendo presente la validità della *disuguaglianza di Prékopa-Leindler* in $\mathbb{R}$ per l'espressione (2.15) otteniamo tramite semplici calcoli che

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} h(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(z) \, dz \, dc = \int_{\mathbb{R}} H(c) \, dc \geq \\
\geq \left(\int_{\mathbb{R}} F(a)) \, da \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} G(b) \, db \right)^{1-\lambda} = \\
= \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_a(z) \, dz \, da \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_b(z) \, dz \, db \right)^{1-\lambda} = \\
= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, dx \right)^{1-\lambda} .
\end{aligned}
$$

Abbiamo dunque ottenuto la disuguaglianza cercata anche per n, risultato che dimostra l'im-

[19]Senza fornirne una dimostrazione esplicita, richiamiamo un sintetico enunciato del *Teorema di Fubini-Tonelli*, risultato legato alla possibilità di poter scambiare le variabili d'integrazione. Data una funzione $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ integrabile secondo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^{m+n}$, allora valgono le seguenti uguaglianze:

$$
\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) \, dxdy = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, dx \right) dy.
$$

plicazione precedentemente enunciata.

► Applicando il ragionamento induttivo deduciamo immediatamente che la *disuguaglianza di Prékopa-Leindler* (2.13) risulta valida $\forall n \in \mathbb{N}$. La dimostrazione del teorema è dunque conclusa. □

Forniamo ora alcune interessanti precisazioni sull'importanza ricoperta dalla *disuguaglianza di Prékopa-Leindler*, confrontandola in particolar modo con altre disuguaglianze notevoli.

2.7 Osservazione. La *disuguaglianza di Prékopa-Leindler* presenta una formulazione alternativa alla (2.13), ottenibile sostituendo alla funzione h la *convoluzione suprema* $h_{p,\lambda}$ delle funzioni f e g nel caso particolare $p = 0$. Considerando infatti la definizione (2.5), la funzione $h_{0,\lambda}$ rappresenta la più piccola tra le funzioni h ammissibili, ovvero che soddisfano l'ipotesi (2.12) del Teorema (2.6).
Essendo inoltre evidente che $h(z) \geq h_{0,\lambda}(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$, si ottiene facilmente la relazione

$$\|h\|_1 \geq \|h_{0,\lambda}\|_1.$$

da cui deduciamo che la formulazione (2.13) della *disuguaglianza di Prékopa-Leindler* risulta più generale rispetto all'alternativa proposta, utilizzata dunque esclusivamente in applicazioni più specifiche.

2.8 Osservazione. La *disuguaglianza di Prékopa-Leindler* rappresenta semplicemente una versione della classica *disuguaglianza di Hölder* con il verso della disuguaglianza invertito. Considerate infatti due funzioni $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\tilde{g} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ tali che gli indici $p, q \in [1, +\infty]$ soddisfino la relazione $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sappiamo che vale la cosiddetta *disuguaglianza di Hölder*:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)|\, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Scegliendo ora come indici $p = \frac{1}{1-\lambda}$ e $q = \frac{1}{\lambda}$ e come funzioni $\tilde{f} = f^{1-\lambda}$ e $\tilde{g} = g^{\lambda}$ otteniamo facilmente la seguente disuguaglianza:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{1-\lambda} g(x)^{\lambda}\, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx \right)^{\lambda}.$$

Osservando che l'integrando del termine di sinistra corrisponde esattamente alla funzione $\mathcal{M}_0(\lambda, f(x), g(x))$, abbiamo dunque verificato che la funzione $f(x)^{1-\lambda}g(x)^{\lambda}$ rappresenta una delle possibili funzioni h che soddisfa l'ipotesi (2.12) del Teorema (2.6). Questo fatto dimostra pertanto che la disuguaglianza precedente rappresenta proprio la formulazione (2.13) della *disuguglianza di Prèkopa-Leindler* con il verso della disuguaglianza invertito.

2.9 Osservazione. La *disuguaglianza di Prèkopa-Leindler* non solo rappresenta la "versione funzionale" della *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky*, ma ne costituisce addirittura un'ulteriore generalizzazione, implicandola semplicemente nel seguente modo. Innanzitutto, preso un generico insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, definiamo esplicitamente la *funzione caratteristica (o indicatrice)* χ_E dell'insieme E nel seguente modo:

$$\chi_E(z) := \begin{cases} 1 & z \in E \\ 0 & z \in \mathbb{R}^n \setminus E \end{cases}.$$

Considerati ora $A, B \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi limitati e μ_n-misurabili tali che l'insieme $(1-\lambda)A+\lambda B$ sia anch'esso μ_n-misurabile, definiamo in modo opportuno le seguenti funzioni:

$$f = \chi_A, \quad g = \chi_B, \quad h = \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}.$$

Presi due generici punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ si verifica facilmente che

$$f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A \ \ e \ \ y \in B.$$

Deduciamo pertanto che $(1-\lambda)x + \lambda y \in (1-\lambda)A + \lambda B$, condizione da cui ricaviamo immediatamente che $h((1-\lambda)x + \lambda y) = 1$. Essendo dunque l'ipotesi (2.12) del Teorema (2.13) soddisfatta possiamo applicare la *disuguaglianza di Prékopa-Leindler* (2.13) alle funzioni f, g e h, ottenendo tramite semplici calcoli il seguente risultato:

$$\begin{aligned} \mu_n[(1-\lambda)A + \lambda B] &= \int_{\mathbb{R}^n} 1_{(1-\lambda)A+\lambda B}(x)\, dx \geq \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1_A(x)\, dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1_B(x)\, dx \right)^{\lambda} = \\ &= [\mu_n(A)]^{1-\lambda} [\mu_n(B)]^{\lambda}, \end{aligned}$$

corrispondente proprio alla *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky* nella versione enunciata nell'Osservazione (2.3).

2.3 La disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb (BBL)

Nella sezione precedente abbiamo considerato la funzione chiamata *p-media (λ-pesata)* $\mathcal{M}_p(\lambda, a, b)$ esclusivamente nel caso $p = 0$ per dimostrare la *disuguaglianza di Prèkopa-Leindler* (2.13). Nonostante la sua notevole importanza, quest'ultima rappresenta solamente un caso particolare di una classe più generale di disuguaglianze dipendenti proprio dal parametro $p \in [-\infty, +\infty]$, tutte denominate generalmente *disuguaglianze di Borell-Brascamp-Lieb*.

Una premessa indispensabile per dimostrare il teorema relativo alla classe di disuguaglianze appena accennata viene rappresentata dal seguente lemma.

2.10 Lemma. *Dati un parametro* $\lambda \in (0,1)$ *e due indici* $p \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *e* $q \in \mathbb{R}$ *tali che* $p+q > 0$, *siano* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *numeri reali positivi. Definito allora un terzo indice* $s \in [-\infty,+\infty]$ *nel seguente modo:*

$$s := \begin{cases} 0 & \textit{se } \ p = q = 0 \\ -\infty & \textit{se } \ p = -q \neq 0 \\ \frac{pq}{p+q} & \textit{altrimenti} \end{cases},$$

risulta valida la seguente disuguaglianza:

$$\mathcal{M}_p(\lambda,a,b)\mathcal{M}_q(\lambda,c,d) \geq \mathcal{M}_s(\lambda,ac,bd). \tag{2.16}$$

Dimostrazione. Senza fornirne una dimostrazione esplicita, richiamiamo innanzitutto una versione classica della *disuguaglianza di Hölder* in $\mathbb{R}$: dati $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ al variare di $i = 1,...,n$ e considerati due indici $p', q' \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$, vale allora la disuguaglianza

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Preso ora un generico[20] $r > 0$, sostituiamo nell'espressione precedente al posto di x_i e y_i rispettivamente $(x_i)^r$ e $(y_i)^r$ ed eleviamo entrambi i membri dell'equazione alla potenza $\frac{1}{r}$. Tenendo presente che la funzione $\{x \mapsto x^{\frac{1}{r}}\}$ risulta evidentemente crescente, tramite opportuni calcoli otteniamo che

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p'r}\right)^{\frac{1}{p'r}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{q'r}\right)^{\frac{1}{q'r}}.$$

Questa disuguaglianza ammette tuttavia una versione λ-pesata, esprimibile semplicemente utilizzando la funzione (2.9) precedentemente definita:

$$\mathcal{M}_{p'r}(\lambda,a,b)\mathcal{M}_{q'r}(\lambda,c,d) \geq \mathcal{M}_r(\lambda,ac,bd). \tag{2.17}$$

Possiamo ora procedere alla dimostrazione vera e propria del lemma utilizzando la disuguaglianza (2.17) appena ricavata.

- Nel caso in cui $p,q > 0$ scegliamo $r = s$, $p' = \frac{p}{s}$ e $q' = \frac{q}{s}$. Ricordando la definizione dell'indice $s \in [-\infty,+\infty]$ si verifica la condizione $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$, pertanto applicando la disuguaglianza (2.17) otteniamo che

$$\mathcal{M}_p(\lambda,a,b)\mathcal{M}_q(\lambda,c,d) \geq \mathcal{M}_s(\lambda,ac,bd).$$

[20]Limitiamoci alla dimostrazione nel caso strettamente positivo. Si può tuttavia facilmente verificare che se $r < 0$ l'espressione successiva inverte il segno della disuguaglianza, osservazione che in seguito ci tornerà utile.

- ▶ Nel caso[21] in cui $p < 0$ e $q > 0$ scegliamo invece $r = p < 0$, $p' = \frac{s}{p}$ e $q' = -\frac{q}{p}$ in modo che si verifichi la condizione $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$ analogamente al caso precedente, sostituendo tuttavia ai valori a, b, c, d rispettivamente ac, bd, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$.
  Applicando ora la disuguaglianza (2.17) con il segno invertito ($r < 0$), tramite opportuni calcoli otteniamo che

$$\mathcal{M}_s(\lambda, ac, bd)\mathcal{M}_{-q}\left(\lambda, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right) \leq \mathcal{M}_p(\lambda, a, c).$$

  Tramite ulteriori calcoli deduciamo il seguente risultato:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{-q}\left(\lambda, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right) &= \left[(1-\lambda)\left(\frac{1}{c}\right)^{-q} + \lambda\left(\frac{1}{d}\right)^{-q}\right]^{-\frac{1}{q}} = \\ &= \frac{1}{[(1-\lambda)c^q + \lambda d^q]^{\frac{1}{q}}} = \frac{1}{\mathcal{M}_q(\lambda, c, d)},\end{aligned}$$

  da cui, risistemando opportunamente l'ultima disuguaglianza ottenuta, ricaviamo proprio il risultato desiderato:

$$\mathcal{M}_p(\lambda, a, b)\mathcal{M}_q(\lambda, c, d) \geq \mathcal{M}_s(\lambda, ac, bd).$$

Il lemma risulta dunque verificato in tutti i casi possibili, concludendone pertanto la dimostrazione. □

Possiamo ora enunciare il risultato fondamentale di questa sezione.

2.11 Teorema (Disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb (BBL)). *Dato un parametro $\lambda \in (0,1)$, siano definite tre funzioni $f, g, h : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ μ_n-misurabili tali che $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\forall p \in \left[-\frac{1}{n}, +\infty\right]$ si verifichi la seguente condizione:*

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \mathcal{M}_p(\lambda, f(x), g(y)). \tag{2.18}$$

Allora risulta valida la seguente disuguaglianza:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, dx \geq \mathcal{M}_{\frac{p}{np+1}}\left(\lambda, \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx, \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx\right), \tag{2.19}$$

dove il numero $\frac{p}{np+1}$ è ben definito anche nei casi limite, ovvero $-\infty$ se $p = -\frac{1}{n}$ mentre $\frac{1}{n}$ se $p = +\infty$.

Dimostrazione. Senza perdere di generalità, consideriamo le funzioni f, g e h integrabili secondo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. La disuguaglianza risulta banalmente vera quando $f \equiv 0$ oppure $g \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n$. Analizziamo dunque solamente i casi restanti, procedendo per induzione sulla dimensione n dello spazio $\mathbb{R}^n$.

[21] Si ragiona analogamente per il caso simmetrico $p > 0$ e $q < 0$.

▶ Posto inizialmente $n = 1$, risultano innanzitutto definite le seguenti funzioni:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = F(x) > 0 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = G(x) > 0.$$

Consideriamo inotre due funzioni ausiliarie $u, v : [0,1] \to [-\infty, +\infty]$ definite opportunamente in modo che $u(t)$ e $v(t)$ rappresentino i più piccoli numeri reali tali che

$$\frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u(t)} f(x)\,dx = \frac{1}{G}\int_{-\infty}^{v(t)} g(x)\,dx = t. \tag{2.20}$$

Nonostante le funzioni u e v possano risultare discontinue, dalla loro definizione risulta evidente che devono essere strettamente crescenti, dunque necessariamente derivabili *q.o.* $t \in [0,1]$. Posto dunque per definizione

$$w(t) := (1-\lambda)u(t) + \lambda v(t),$$

deriviamo nella variabile t tutti i membri della formula integrale (2.20), ottenendo facilmente che

$$\frac{f(u(t))u'(t)}{F} = \frac{g(v(t))v'(t)}{G} = 1.$$

Combinando questa espressione con la definizione (2.4) e l'ipotesi (2.18), deriviamo nella variabile t la funzione w, ottenendo ogniqualvota $f(u(t)) \neq 0$ e $g(u(t)) \neq 0$ il seguente risultato:

$$\begin{aligned} w'(t) &= (1-\lambda)u'(t) + \lambda v'(t) = \\ &= (1-\lambda)\left[\frac{F}{f(u(t))}\right] + \lambda\left[\frac{G}{g(v(t))}\right] = \\ &\mathcal{M}_1\left(\lambda, \frac{F}{f(u(t))}, \frac{G}{g(v(t))}\right). \end{aligned}$$

Applicando infine un opportuno cambio variabile $x = w(t)$ tale che $dx = w'(t)dt$, dal Lemma (2.10) precedentemente dimostrato, scegliendo p generico, $q = 1$ e conseguentemente $s = \frac{p}{p+1}$, deduciamo facilmente che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx = \int_0^1 h(w(t))w'(t)\,dt \geq \\ \geq \int_0^1 \mathcal{M}_p(\lambda, f(u(t)), g(v(t))) \cdot \mathcal{M}_1\left(\lambda, \frac{F}{f(u(t))}, \frac{G}{g(v(t))}\right) dt \geq \\ \geq \int_0^1 \mathcal{M}_{\frac{p}{p+1}}(\lambda, F, G)\,dt = \mathcal{M}_{\frac{p}{p+1}}\left(\lambda, \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx, \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx\right). \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto il risultato cercato, concludendo dunque la dimostrazione della *disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb* in $\mathbb{R}$.

▶ Considerando la tesi valida per $(n-1)$, dimostriamola per n. Fissato un generico valore $s \in \mathbb{R}$ definiamo opportunamente una funzione $h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to [0, +\infty)$ tale che $h_s(z) = h(s,z)$ $\forall z \in \mathbb{R}^{n-1}$. Analogamente definiamo le funzioni f_s e g_s. Consideriamo inoltre due valori $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $c = (1-\lambda)a + \lambda b \in \mathbb{R}$. Presi due generici $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$, dall'ipotesi (2.18) ricaviamo tramite semplici calcoli che

$$h_c((1-\lambda)x + \lambda y) = h((1-\lambda)a + \lambda b), (1-\lambda)x + \lambda y) = h((1-\lambda)(a, x) + \lambda(b, y)) \geq$$
$$\geq \mathcal{M}_p(\lambda, f(a, x), g(b, y)) = \mathcal{M}_p(\lambda, f_a(x), g_b(y)).$$

Applicando ora l'ipotesi induttiva otteniamo immediatamente la disuguaglianza

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(z)\, dz \geq \mathcal{M}_{\frac{p}{(n-1)p+1}} \left(\lambda, \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_a(z)\, dz, \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_b(z)\, dz \right).$$

Introducendo per comodità le seguenti notazioni:

$$H(c) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(z)\, dz, \qquad F(a) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_a(z)\, dz, \qquad G(b) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_b(z)\, dz,$$

possiamo riscrivere compattamente la disuguaglianza precedentemente ottenuta nel seguente modo:

$$H(c) = H((1-\lambda)a + \lambda b) \geq \mathcal{M}_{\frac{p}{(n-1)p+1}} (\lambda, F(a), G(b)). \tag{2.21}$$

Teniamo ora presente la validità della *disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb* in $\mathbb{R}$ per l'espressione (2.21), ponendo particolare attenzione sulla seguente implicazione:

$$q = \frac{p}{(n-1)p+1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q}{q+1} = \frac{p}{np+1}.$$

Applichiamo infine il *Teorema di Fubini-Tonelli* all'integrale in $\mathbb{R}^n$, ottenendo tramite semplici calcoli il seguente risultato:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(z)\, dz\, dc = \int_{\mathbb{R}} H(c)\, dc \geq \\
&\geq \mathcal{M}_{\frac{q}{q+1}} \left(\lambda, \int_{\mathbb{R}} F(a))\, da, \int_{\mathbb{R}} G(b)\, db \right) = \\
&= \mathcal{M}_{\frac{p}{np+1}} \left(\lambda, \int_{\mathbb{R}} F(a))\, da, \int_{\mathbb{R}} G(b)\, db \right) = \\
&= \mathcal{M}_{\frac{p}{np+1}} \left(\lambda, \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_a(z)\, dz\, da, \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_b(z)\, dz\, db \right) = \\
&= \mathcal{M}_{\frac{p}{np+1}} \left(\lambda, \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx, \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx \right).
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque ottenuto la disuguaglianza cercata anche per n, risultato che dimostra l'implicazione precedentemente enunciata.

► Applicando il ragionamento induttivo deduciamo immediatamente che la *disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb* (2.19) risulta valida $\forall n \in \mathbb{N}$. La dimostrazione del teorema è dunque conclusa. □

2.4 Disuguaglianze generalizzate: dalla forma classica alla forma essenziale

Nelle sezioni precedenti abbiamo proposto alcune fondamentali *disuguaglianze di convessità* nella loro cosiddetta *"forma classica"*, ovvero enunciate utilizzando la definizione standard (2.11) della funzione di (p, λ)-*convoluzione*. Tuttavia in [**2**] H.J.Brascamp e E.H.Lieb proposero un'interessante estensione delle disuguaglianze (2.2) (2.13) e (2.19), ottenuta con un'opportuna modifica della definizione della funzione di *convoluzione suprema* $h_{p,\lambda}$.
La formulazione alternativa delle suddette disuguaglianze viene definita *"forma essenziale"* in quanto basata sostanzialmente sull'utilizzo nella definizione (2.11) dell'*estremo superiore essenziale* invece dell'*estremo superiore*.

Data una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile secondo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$, possiamo definirne l'*estremo superiore essenziale* $\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^n} \varphi$ nel seguente modo:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^n} \varphi := \min \{M \in \mathbb{R} : \quad \varphi(x) \le M \quad q.o.\ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

L'estremo superiore essenziale della funzione φ corrisponde al minimo dei maggioranti essenziali della medesima funzione, dunque risulta evidente la seguente relazione:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^n} \varphi \le \sup_{\mathbb{R}^n} \varphi.$$

Sfruttando questa definizione possiamo dunque modificare opportunamente la funzione $h_{p,\lambda}$ precedentemente introdotta definendo la funzione di *convoluzione suprema essenziale* $k_{p,\lambda}$ nel seguente modo:

$$k_{p,\lambda}(x \mid f, g) := \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \mathcal{M}_p(\lambda, f\left(\frac{x-y}{1-\lambda}\right), g\left(\frac{y}{\lambda}\right) \right\}.$$

Analogamente alla (2.11), tramite un semplice cambio variabile possiamo fornire una versione più compatta della precedente definizione:

$$k_{p,\lambda}(z \mid f, g) := \operatorname*{ess\,sup}_{x,y \in \mathbb{R}^n} \{\mathcal{M}_p(\lambda, f(x), g(y)) \ : \ z = (1-\lambda)x + \lambda y\}. \tag{2.22}$$

Risultando inoltre evidente la validità della seguente relazione:

$$k_{p,\lambda}(z \mid f, g) \le h_{p,\lambda}(z \mid f, g) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \qquad \Longrightarrow \qquad \|h_{p_\lambda}\|_1 \ge \|k_{p,\lambda}\|_1,$$

otteniamo che la *"forma classica"* delle disuguaglianze (2.2) (2.13) e (2.19) implica direttamente la rispettiva *"forma essenziale"*, considerata pertanto una generalizzazione.

Infine riassumiamo brevemente alcune proprietà notevoli della funzione $k_{p,\lambda}$, sostanzialmente legate al suo utilizzo in sostituzione della funzione $h_{p,\lambda}$:

- ▶ La funzione $k_{p,\lambda}$ rimane inalterata nel caso in cui le funzioni f e g vengano opportunamente modificate con funzioni f^* e g^* che differiscono dalle precedenti esclusivamente su insiemi μ_n-trascurabili[22], ovvero tali che valgano le seguenti condizioni:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - f^*| dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |g - g^*| dx = 0.$$

  In tal caso $\forall z \in \mathbb{R}^n$ otteniamo evidentemente che $k_{p,\lambda}(z \mid f, g) = k_{p,\lambda}(z \mid f^*, g^*)$.

- ▶ Le funzioni f^* e g^* precedentemente introdotte possono essere scelte in modo che le funzioni $h_{p,\lambda}$ e $k_{p,\lambda}$ verifichino la seguente condizione:

$$k_{p,\lambda}(z \mid f, g) = k_{p,\lambda}(z \mid f^*, g^*) = h_{p,\lambda}(z \mid f^*, g^*) \quad q.o.\ z \in \mathbb{R}^n.$$

Conclusa questa breve premessa, possiamo ora enunciare alcuni teoremi inerenti proprio le generalizzazioni delle *disuguaglianze di convessità* nella loro *"forma essenziale"*.

Seguendo il ragionamento proposto nell'Osservazione (2.9) ricaviamo inizialmente la generalizzazione della *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky*, ragionanando opportunamente sull'estensione della *disuguaglianza di Prékopa-Leindler* mediante la funzione $k_{p,\lambda}$. Considerati due insiemi $A, B \subset \mathbb{R}^n$ limitati e μ_n-misurabili, definiamo conseguentemente le funzioni $f = \chi_A$ e $g = \chi_B$. Necessariamente risulta definito un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ limitato e μ_n-misurabile tale che si verifichi la seguente condizione:

$$\chi_C(z) := k_{p,\lambda}(z \mid f, g) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Contrariamente all'Osservazione (2.9) l'insieme C non rappresenta tuttavia la *combinazione di Minkowsky* degli insiemi A e B di coefficiente λ, espressa equivalentemente alla (2.1) nella seguente forma:

$$(1-\lambda)A + \lambda B := \{z \in \mathbb{R}^n : (z - (1-\lambda)A) \cap (\lambda B) \neq \emptyset\},$$

bensì la cosiddetta *combinazione essenziale* $\oplus$ degli insiemi A e B di coefficiente λ, definita nel seguente modo:

$$(1-\lambda)A \oplus \lambda B := \{z \in \mathbb{R}^n : \mu_n[(z - (1-\lambda)A) \cap (\lambda B)] > 0\}.$$

Le due combinazioni insiemistiche appena utilizzate risultano drasticamente diverse, essendo la condizione richiesta dalla combinazione essenziale $\oplus$ più generale ed implicando[23] pertanto la rispettiva per la *combinazione di Minkowsky.*
Analogamente a quanto osservato per la funzione $k_{p,\lambda}$, è evidente che la *combinazione essen-*

[22] $A \subset \mathbb{R}^n$ μ_n-trascurabile $\Longrightarrow \mu_n(A) = 0$.

[23] Mentre infatti un insieme vuoto risulta evidentemente μ_n-trascurabile, non è detto che un qualsiasi insieme μ_n-trascurabile sia necessariamente vuoto. Prendiamo come esempio il caso del singoletto $\{x_0\}$: risulta evidente che $\{x_0\} \neq \emptyset$ nonostante $\mu_n(\{x_0\}) = 0$.

ziale $\oplus$ rimane inalterata nel caso in cui gli insiemi A e B vengano opportunamente sostituiti con due insiemi A^* e B^* che differescono dai precedenti per insiemi μ_n-trascurabili, ovvero tali che valgano le seguenti condizioni:

$$\mu_n(A^* \setminus A) = 0 \quad \text{e} \quad \mu_n(B^* \setminus B) = 0.$$

In tal caso otteniamo evidentemente che $(1-\lambda)A^* \oplus \lambda B^* = (1-\lambda)A \oplus \lambda B$.

Senza fornirne una dimostrazione dettagliata in quanto semplice riadattamento del Teorema (2.2), possiamo ora enunciare il teorema relativo alla versione generalizzata della *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky*.

2.12 Teorema (Disuguaglianza di Brunn-Minkowsky (forma essenziale)). *Sia μ_n la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. Dato un parametro $\lambda \in (0,1)$, consideriamo $A, B \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi μ_n-misurabili e non μ_n-trascurabili*[24] *tali che l'insieme $(1-\lambda)A \oplus \lambda B$ sia a sua volta μ_n-misurabile. Allora la funzione $[\mu_n(\cdot)]^{\frac{1}{n}}$ è concava, ovvero vale la seguente disuguaglianza:*

$$[\mu_n((1-\lambda)A \oplus \lambda B)]^{\frac{1}{n}} \geqslant (1-\lambda)\,[\mu_n(A)]^{\frac{1}{n}} + \lambda\,[\mu_n(B)]^{\frac{1}{n}}\,. \tag{2.23}$$

Dimostrazione. Omessa. $\square$

Utilizzando questo teorema possiamo ora dimostrare sia la *disuguaglianza di Prèkopa-Leindler* che la *disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb* nella loro rispettiva *"forma essenziale"*. Seguendo tuttavia lo schema dimostrativo proposto da H.J.Brascamp e E.H.Lieb in [**2**], verificheremo esclusivamente la *disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb* nella propria *"forma essenziale"*, essendone la *disuguaglianza di Prèkopa-Leindler* nella versione generalizzata un semplice caso particolare. Premettiamo innanzitutto un lemma indispensabile per lo sviluppo del teorema successivo.

2.13 Lemma. *Dato un parametro $\lambda \in (0,1)$, siano definite due funzioni $f, g : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ misurabili secondo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ tali che le rispettive norme uniformi*[25] *verifichino la condizione $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = m \in \mathbb{R}$. Sia definita la funzione $k_{-\infty,\lambda}(\cdot|\, f, g)$ nel seguente modo*[26]*:*

$$k_{-\infty,\lambda}\,(z \mid f, g) := \operatorname*{ess\,sup}_{x,y \in \mathbb{R}} \{\min\{f(x), g(y)\} \;:\; z = (1-\lambda)x + \lambda y\}\,. \tag{2.24}$$

Risulta allora verificata la seguente disuguaglianza:

$$\|k_{-\infty,\lambda}\|_1 \geq \lambda\|f\|_1 + (1-\lambda)\|g\|_1,$$

[24] Affinchè valga il teorema utilizzando la *combinazione essenziale* $\oplus$ risulta necessario che $\mu_n(A) > 0$ e $\mu_n(B) > 0$, ovvero non è sufficiente che gli insiemi siano non vuoti.

[25] Definiamo la *norma uniforme* (o *norma infinito*) della funzione f nel seguente modo:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

[26] In accordo con le Definizioni (2.9) e (2.22) precedentemente date.

dove $\|\cdot\|_1$ *denota la norma* $L^1(\mathbb{R})$ *delle funzioni introdotte.*

Dimostrazione. Fissato un generico valore $t > 0$, definiamo i seguenti insiemi μ_n-misurabili:

$$\begin{aligned} A(z) &:= \{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) > t\}, \\ B(z) &:= \{x \in \mathbb{R} : \quad g(x) > t\}, \\ C(z) &:= \{x \in \mathbb{R} : \quad k_{-\infty,\lambda}(x) > t\}, \end{aligned}$$

da cui ricaviamo immediatamente la seguente inclusione:

$$(1-\lambda)A(t) \oplus \lambda B(t) \subset C(t).$$

Considerato infatti un generico $z \in (1-\lambda)A(t) \oplus \lambda B(t)$, dalla definizione di *combinazione essenziale* $\oplus$ ricaviamo che esitono $x \in A(t)$ ed $y \in B(t)$ tali che valgano le seguenti condizioni:

$$z = (1-\lambda)x + \lambda y, \qquad f(x) > t, \qquad g(y) > t.$$

Ricordando la definizione (2.24) della funzione $h_{-\infty,\lambda}$ otteniamo facilmente la seguente disuguaglianza[27], da cui deduciamo immediatamente che $z \in C(t)$:

$$\begin{aligned} k_{-\infty,\lambda}(z \mid f, g) = \operatorname*{ess\,sup}_{x,y\in\mathbb{R}} &\{\min\{f(x), g(y)\} \;:\; z = (1-\lambda)x + \lambda y\} \geq \\ &\geq \min\{f(x), g(x)\} \;> t. \end{aligned}$$

Nel caso in cui $t \geq m$ dalle ipotesi sulle funzioni f e g deduciamo che $\mu_1(A(t)) = \mu_1(B(t)) = \mu_1(C(t)) = 0$ poichè $A(t) = B(t) = C(t) = \emptyset$. Nel caso invece in cui $t < m$ otteniamo che $\mu_1(A(t)) > 0$ e $\mu_1(B(t)) > 0$. Notiamo inoltre la validità delle seguenti uguaglianze di tipo integrale:

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \int_0^{+\infty} \mu_1(A(t))\, dt, \\ \|g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, dy = \int_0^{+\infty} \mu_1(B(t))\, dt, \\ \|k_{-\infty}\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |h_{-\infty,\lambda}(z)|\, dz = \int_0^{+\infty} \mu_1(C(t))\, dt. \end{aligned}$$

Applicando ora il Teorema (2.12) relativo alla *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky* generalizzata otteniamo che

$$\mu_1(C(t)) \geq \mu_1[(1-\lambda)A(t) \oplus \lambda B(t)] \geq \lambda\mu_1(A(t)) + (1-\lambda)\mu_1(B(t)).$$

Integrando tale disuguaglianza da 0 a $+\infty$ nella variabile t ed utilizzando le uguaglianze

[27]In particolare la disuguaglianza sull'ess sup risulta valida poichè l'insieme dei punti su cui valgono le condizioni $f(x) > t$ e $g(x) > t$ non è μ_n-trascurabile, in accordo con l'ipotesi sulla *combinazione essenziale* $\oplus$.

integrali precedentemente introdotte otteniamo in conclusione la seguente disuguaglianza:

$$\|k_{-\infty}\|_1 \geq \lambda\|f\|_1 + (1-\lambda)\|g\|_1.$$

Abbiamo ottenuto il risultato cercato, pertanto la dimostrazione è conclusa. □

Possiamo ora enunciare e dimostrare il teorema principale di questa sezione.

2.14 Teorema (**Disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb (forma essenziale)**). *Dato un parametro $\lambda \in (0,1)$, siano definite due funzioni $f, g : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ misurabili secondo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ tali che verifichino la condizione*[28] $\|f\|_1 > 0$ *e* $\| \ g \ \|_1 > 0$. *Considerata inoltre la funzione $k_{p,\lambda}$ definita precedentemente nella versione (2.22), allora $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall p \in \left[-\frac{1}{n}, +\infty\right]$ risulta verificata la seguente disuguaglianza:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} k_{p,\lambda}(x)\, dx \geq \mathcal{M}_{\frac{p}{np+1}}\left(\lambda, \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx, \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx\right) \tag{2.25}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\|k_{p,\lambda}\|_1 \geq \mathcal{M}_{\frac{p}{np+1}}\left(\lambda, \|f\|_1, \|g\|_1\right),$$

dove il numero $\frac{p}{np+1}$ è ben definito anche nei casi limite, ovvero $-\infty$ se $p = -\frac{1}{n}$ mentre $\frac{1}{n}$ se $p = +\infty$.

Dimostrazione. Senza perdere di generalità, consideriamo le funzioni f e g limitate[29] in $\mathbb{R}^n$. La disuguaglianza risulta banalmente vera quando $f \equiv 0$ oppure $g \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n$. Analizziamo dunque solamente i casi restanti, procedendo per induzione sulla dimensione n dello spazio $\mathbb{R}^n$.

► Posto inizialmente $n = 1$, consideriamo innanzitutto il caso in cui $p \in [-1, +\infty)$ con $p \neq 0$. Presi due generici $x, y \in \mathbb{R}^n$, poniamo $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ e definiamo le seguenti funzioni:

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_\infty} \quad \text{e} \quad G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_\infty}.$$

Tramite semplici calcoli, richiamando la definizione (2.9) della funzione $\mathcal{M}_p$, otteniamo che

$$\begin{aligned} k_{p,\lambda}(z \mid f,g) &= \operatorname*{ess\,sup}_{x,y\in\mathbb{R}^n} \Big\{ \mathcal{M}_p(\lambda, \underbrace{\|f\|_\infty F(x)}_{f(x)}, \underbrace{\|g\|_\infty G(y)}_{g(y)}) \Big\} = \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{x,y\in\mathbb{R}^n} \{(1-\lambda)\|f\|_\infty^p [F(x)]^p + \lambda\|g\|_\infty^p [G(y)]^p\}^{\frac{1}{p}} = \\ &= [(1-\lambda)\|f\|_\infty^p + \lambda\|g\|_\infty^p]^{\frac{1}{p}} \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{x,y\in\mathbb{R}^n} \{(1-\theta)[F(x)]^p + \theta[G(y)]^p\}^{\frac{1}{p}} = \\ &= [(1-\lambda)\|f\|_\infty^p + \lambda\|g\|_\infty^p]^{\frac{1}{p}} \cdot k_{p,\theta}(z \mid F, G), \end{aligned}$$

[28] Quest'ipotesi aggiuntiva risulta analoga all'ulteriore condizione richiesta dal Teorema (2.12) relativo alla *disuguaglianza di Brunn-Minkowsky* nella sua *"forma essenziale"* secondo cui $\mu_n(A) > 0$ e $\mu_n(B) > 0$.

[29] Senza fornirne una dimostrazione esplicita, ricordiamo che ogni funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ può essere approssimata tramite una funzione limitata $f^* \in B(\mathbb{R}^n)$.

dove abbiamo definito un nuovo parametro $\theta \in (0,1)$ nel seguente modo:

$$\theta = \frac{\lambda\|g\|_\infty^p}{(1-\lambda)\|f\|_\infty^p + \lambda\|g\|_\infty^p} \quad \text{e} \quad (1-\theta) = \frac{(1-\lambda)\|f\|_\infty^p}{(1-\lambda)\|f\|_\infty^p + \lambda\|g\|_\infty^p}.$$

Tenendo presente dalla definizione (2.4) che la funzione $\mathcal{M}_{(\cdot)}$ risulta strettamente crescente nella variabile p e scegliendo senza perdere di generalità $\lambda = \theta$, dall'uguaglianza precedente deduciamo che

$$\begin{aligned} k_{p,\lambda}(z \mid f,g) &= [(1-\lambda)\|f\|_\infty^p + \lambda\|g\|_\infty^p]^{\frac{1}{p}} \cdot k_{p,\theta}(z \mid F,G) \geq \\ &\geq [(1-\lambda)\|f\|_\infty^p + \lambda\|g\|_\infty^p]^{\frac{1}{p}} \cdot k_{-\infty,\lambda}(z \mid F,G). \end{aligned}$$

Passando ora alle norme $L^1(\mathbb{R}^n)$ in entrambi i membri della disuguaglianza ottenuta ed applicando il Lemma (2.13) alla funzione $k_{-\infty,\lambda}$, tramite semplici calcoli ricaviamo immediatamente che

$$\begin{aligned} \|k_{p,\lambda}\|_1 &\geq [(1-\lambda)\|f\|_\infty^p + \lambda\|g\|_\infty^p]^{\frac{1}{p}} \cdot \|k_{-\infty,\lambda}\|_1 \geq \\ &\geq [(1-\lambda)\|f\|_\infty^p + \lambda\|g\|_\infty^p]^{\frac{1}{p}} \cdot [(1-\lambda)\|F\|_1 + \lambda\|G\|_1] = \\ &\geq [(1-\lambda)\|f\|_\infty^p + \lambda\|g\|_\infty^p]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[(1-\lambda)\frac{\|f\|_1}{\|f|_\infty} + \lambda\frac{\|g\|_1}{\|g\|_\infty}\right] = \\ &= \mathcal{M}_p(\lambda, \|f\|_\infty, \|g\|_\infty) \cdot \mathcal{M}_1\left(\lambda, \frac{\|f\|_1}{\|f\|_\infty}, \frac{\|g\|_1}{\|g\|_\infty}\right) \geq ... \end{aligned}$$

Considerate ora le condizioni poste sul parametro p, possiamo continuare la catena di disuguaglianze applicando il Lemma (2.10), ricavando infine la disuguaglianza richiesta:

$$... \geq \mathcal{M}_{\frac{p}{p+1}}(\lambda, \|f\|_1, \|g\|_1).$$

Consideriamo ora il caso in cui $p = 0$. Tramite passaggi analoghi a quelli svolti nel caso precedente ricaviamo il seguente risultato:

$$\begin{aligned} k_{0,\lambda}(z \mid f,g) &= \operatorname*{ess\,sup}_{x,y\in\mathbb{R}^n}\left\{\mathcal{M}_0(\lambda, \underbrace{\|f\|_\infty F(x)}_{f(x)}, \underbrace{\|g\|_\infty G(y)}_{g(y)})\right\} = \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{x,y\in\mathbb{R}^n}\left\{\|f\|_\infty^{1-\lambda}[F(x)]^{1-\lambda} \cdot \|g\|_\infty^\lambda [G(y)]^\lambda\right\} = \\ &= \|f\|_\infty^{1-\lambda}\|g\|_\infty^\lambda \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{x,y\in\mathbb{R}^n}\left\{[F(x)]^{1-\lambda}[G(y)]^\lambda\right\} = \\ &= \|f\|_\infty^{1-\lambda}\|g\|_\infty^\lambda \cdot k_{0,\lambda}(z \mid F,G) \geq \\ &\geq \|f\|_\infty^{1-\lambda}\|g\|_\infty^\lambda \cdot k_{-\infty,\lambda}(z \mid F,G). \end{aligned}$$

Passando ora alle norme $L^1(\mathbb{R}^n)$ ed applicando i Lemmi (2.13) e (2.10), analogamente al caso precedente, ricaviamo infine la disuguaglianza richiesta:

$$\begin{aligned}
\|k_{0,\lambda}\|_1 &\geq \|f\|_\infty^{1-\lambda}\|g\|_\infty^\lambda \cdot \|k_{-\infty,\lambda}\|_1 \geq \\
&\geq \|f\|_\infty^{1-\lambda}\|g\|_\infty^\lambda \cdot [(1-\lambda)\|F\|_1 + \lambda\|G\|_1] = \\
&= \|f\|_\infty^{1-\lambda}\|g\|_\infty^\lambda \left[(1-\lambda)\frac{\|f\|_1}{\|f\|_\infty} + \lambda\frac{\|g\|_1}{\|g\|_\infty}\right] = \\
&= \mathcal{M}_0\left(\lambda, \|f\|_\infty, \|g\|_\infty\right) \cdot \mathcal{M}_1\left(\lambda, \frac{\|f\|_1}{\|f\|_\infty}, \frac{\|g\|_1}{\|g\|_\infty}\right) \geq \\
&\geq \mathcal{M}_0\left(\lambda, \|f\|_1, \|g\|_1\right).
\end{aligned}$$

Il caso $p = +\infty$ segue immediatamente dal primo caso per continuità ($p \to +\infty$).
Abbiamo dunque verificato la validità della *disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb* in $\mathbb{R}$ nella *"forma essenziale"*.

► Considerando la validità della tesi per $(n-1)$, dimostriamola per n. Fissato un generico $z \in \mathbb{R}^n$ tale che $z = (x, y)$ con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, definiamo opportunamente le seguenti funzioni integrali:

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx \qquad e \qquad G(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)\, dx.$$

Dalla definizione (2.22) della funzione $k_{p,\lambda}$ ricaviamo che, ogniqualvolta $x = (1-\lambda)u + \lambda v$ e $y = (1-\lambda)r + \lambda s$ con $u, v \in \mathbb{R}$ e $r, s \in \mathbb{R}^{n-1}$, si verifica la seguente uguaglianza:

$$k_{p,\lambda}((x,y) \mid f,g) = \operatorname*{ess\,sup}_{u,v\in\mathbb{R}} \operatorname*{ess\,sup}_{r,s\in\mathbb{R}^{n-1}} \left\{\mathcal{M}_p(\lambda, f(u,r), g(v,s))\right\}.$$

Integrando la precedente espressione nella sola[30] variabile $x \in \mathbb{R}$ ed applicando conseguentemente la *disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb* in $\mathbb{R}$ appena dimostrata si ricava la seguente disuguaglianza[31]:

$$\begin{aligned}
\|k_{p,\lambda}\|_1(y) &= \int_{\mathbb{R}} k_{p,\lambda}((x,y) \mid f,g)\, dx \geq \\
&\geq \operatorname*{ess\,sup}_{r,s\in\mathbb{R}^{n-1}} \left\{\mathcal{M}_{\frac{p}{p+1}}\left(\lambda, \int_{\mathbb{R}} f(u,r)\, du, \int_{\mathbb{R}} g(v,s)\, dv\right)\right\} = \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{r,s\in\mathbb{R}^{n-1}} \left\{\mathcal{M}_{\frac{p}{p+1}}\left(\lambda, F(r), G(s)\right)\right\} = \\
&= k_{\frac{p}{p+1},\lambda}(y \mid F, G).
\end{aligned}$$

[30]Esplicitiamo infatti la dipendenza dalla variabile y non saturata da questa prima integrazione.
[31]Esplicitiamo un passaggio cruciale di questo calcolo dove abbiamo applicato il seguente risultato:

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname*{ess\,sup}_{u,v\in\mathbb{R}}\{\cdot\}\, dx \geq \operatorname*{ess\,sup}_{u,v\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \{\cdot\}\, dx$$

Pur omettendone la dimostrazione, osserviamo che tale disuguaglianza ricorda in qualche modo una versione del *Lemma di Fatou* con il verso della disuguaglianza invertito.

Integrando ulteriormente nella variabile $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ e tenendo presente la validità del *Teorema di Fubini-Tonelli*, applichiamo ora l'ipotesi induttiva ricavando dalla disuguaglianza precedente il seguente risultato[32]:

$$\begin{aligned} \|k_{p,\lambda}(f,g)\|_1 &\geq \|k_{\frac{p}{p+1},\lambda}(F,G)\|_1 \geq \\ &\geq \mathcal{M}_q\left(\lambda, \int_{\mathbb{R}} F(r)\, dr, \int_{\mathbb{R}} G(s)\, ds\right) = \\ &= \mathcal{M}_q\left(\lambda, \|f\|_1, \|g\|_1\right), \end{aligned}$$

dove la funzione $\mathcal{M}_q$ è scelta in modo che valga la seguente condizione:

$$q = \frac{\frac{p}{p+1}}{(n-1)\frac{p}{p+1}+1} \qquad \Rightarrow \qquad q = \frac{p}{np+1}.$$

Abbiamo dunque ottenuto la disuguaglianza cercata

$$\|\ k_{p,\lambda}\ \|_1 \ \geq\ \mathcal{M}_{\frac{p}{np+1}}\left(\lambda, \|f\|_1, \|g\|_1\right)$$

anche per n, risultato che dimostra l'implicazione precedentemente enunciata.

▶ Applicando il ragionamento induttivo deduciamo immediatamente che la *disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb* (2.25) nella *"forma essenziale"* risulta valida $\forall n \in \mathbb{N}$. La dimostrazione del teorema è dunque conclusa. □

2.5 La log-concavità applicata all'equazione di diffusione in $\mathbb{R}^n$

2.5.1 La proprietà di log-concavità

La formulazione della *disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb* (2.25) nella *"forma essenziale"* si rivelò una conclusione di fondamentale importanza per H.J.Brascamp e E.H.Lieb, indispensabile per poter ulteriormente sviluppare la trattazione proposta in [**2**]. La Proposizione (2.16), dimostrabile direttamente applicando proprio il Teorema (2.11), rappresenta senza alcun dubbio il risultato di maggior interesse ottenuto in [**2**], necessario per studiare l'applicazione all'*equazione di diffusione* in $\mathbb{R}^n$ accennata all'inizio del capitolo.

Premettiamo anzitutto alcune nozioni aggiuntive derivate direttamente dalla definizione della funzione $k_{p,\lambda}$ (2.22).

2.15 Definizione. Considerato un paramentro $\alpha \in [-\infty, +\infty]$ ed una generica funzione $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ μ_n-misurabile, denotiamo con $K_\alpha(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle funzioni f tali che

[32] Esplcitiamo inoltre nelle funzioni $k_{p,\lambda}$ e $k_{\frac{p}{p+1},\lambda}$ la diversa dipendenza dalle variabili (f, g) e (F, G).

verifichino $\forall\lambda \in (0,1)$ la seguente condizione:

$$f(z) = k_{\alpha,\lambda}(z \mid f, f) \quad q.o.\ z \in \mathbb{R}^n. \tag{2.26}$$

Sostituita tuttavia la funzione f con una funzione f^* che differisce dalla precedente su di un insieme μ_n-trascurabile, per quanto precedentemente osservato otteniamo facilmente che ogniqualvolta $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$ si verifica $q.o.\ z \in \mathbb{R}^n$ la seguente disuguaglianza:

$$k_{\alpha,\lambda}(z \mid f, f) = h_{\alpha,\lambda}(z \mid f^*, f^*) = \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n} \{\mathcal{M}_\alpha(\lambda, f^*(x), f^*(y))\} \geq f^*(z) = f(z).$$

Deduciamo pertanto che esiste una condizione equivalente alla (2.26) appena fornita secondo cui

$$f \in K_\alpha(\mathbb{R}^n) \quad \iff \quad k_{\alpha,\lambda}(z \mid f, f) \leq f(z) \quad q.o.\ z \in \mathbb{R}^n. \tag{2.27}$$

Nonostante questa caratterizzazione dell'insieme $K_\alpha(\mathbb{R}^n)$ sia di difficile comprensione, forniremo una spiegazione dettagliata inerente il suo significato esplicito solamente nel Capitolo 4, in particolare nella Proposizione (4.5) quando sarà effettivamente necessario.

Possiamo ora dimostrare la proposizione sopra citata.

2.16 Proposizione. *Data una funzione $F \in K_\alpha(R^{m+n})$ tale che $F = F(x,y)$ con $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$, definiamo una funzione integrale G tale che*

$$G(x) := \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)\, dy.$$

Allora otteniamo che $G \in K_\beta(\mathbb{R}^m)$ con $\beta = \frac{\alpha}{n\alpha+1}$.

Dimostrazione. Osservando che $F(x,y) \geq 0 \ \ \forall(x,y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ deduciamo facilmente che $G(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^m$. Fissati due generici punti $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^m$ tali che $\bar{x} = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$ con $\lambda \in (0,1)$, definiamo opportunamente due funzioni F e G nel seguente modo:

$$f(y) = F(x_0, y) \quad e \quad g(y) = F(x_1, y).$$

Fissato dunque il punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, dall'ipotesi $F \in K_\alpha(\mathbb{R}^{m+n})$ deduciamo che $q.o.\ y \in \mathbb{R}^n$ si verifica il seguente risultato:

$$F(\bar{x}, y) = k_{\alpha,\lambda}((\bar{x}, y) \mid F, F) = k_{\alpha,\lambda}(y \mid F(x_0, y), F(x_1, y)) = k_{\alpha,\lambda}(y \mid f, g).$$

Integrando ora l'espressione precedente nella variabile $y \in \mathbb{R}^n$ ed applicando la *disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb* (2.25) nella sua *"forma essenziale"* otteniamo tramite semplici calcoli che

$$
\begin{aligned}
G(\bar{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} F(\bar{x}, y)\, dy \geq \int_{\mathbb{R}^n} k_{\alpha,\lambda}(y \mid f, g)\, dy = \|k_{\alpha,\lambda}\|_1 \geq \\
&\geq \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{n\alpha+1}}(\lambda, \|f\|_1, \|g\|_1) = \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{n\alpha+1}}\left(\lambda, \int_{\mathbb{R}^n} F(x_0, y)\, dy, \int_{\mathbb{R}^n} F(x_1, y)\, dy\right) = \\
&= \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{n\alpha+1}}(\lambda, G(x_0), G(x_1)).
\end{aligned}
$$

Per l'arbitrarietà dei punti $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^m$ possiamo passare senza problemi all'ess sup nel membro di destra per un generico $x \in \mathbb{R}^m$ nel seguente modo:

$$
G(x) \geq k_{\frac{\alpha}{n\alpha+1},\lambda}(x \mid G, G) \qquad q.o.\ x \in \mathbb{R}^m,
$$

ricavando infine dalla Definizione (2.15) che $G \in K_\beta(\mathbb{R}^m)$ con $\beta = \frac{\alpha}{n\alpha+1}$. La dimostrazione è dunque conclusa. □

A questo punto della trattazione risulta necessario ampliare la Definizione (1.4) precedentemente data, fornendo un'ulteriore proprietà di concavità per le funzioni. Recuperando innanzitutto la Definizione (2.15) e considerando esclusivamente il caso particolare $\alpha = 0$, dichiariamo che il corrispondente insieme $K_0(\mathbb{R}^n)$ denota l'insieme delle cosiddette funzioni *logaritmicamente concave* sull'insieme $\mathbb{R}^n$. Tale affermazione verrà ampiamente giustificata solamente nella Definizione (4.2) del Capitolo 4, pertanto per ora limitiamoci ad enunciare[33] la seguente definizione esaustiva.

2.17 Definizione. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Una funzione[34] $f : \Omega \to [0, +\infty)$ si definisce *logaritmicamente concava* (o *log-concava*) se $\forall x, y \in \Omega$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$ si verifica che

$$
f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq [f(x)]^{1-\lambda}[f(y)]^{\lambda}.
$$

Equivalentemente significa affermare che la funzione $\log(f)$ è concava, ovvero che $\forall x, y \in \Omega$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$ si verifica la seguente disuguaglianza:

$$
\log f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda) \log f(x) + \lambda \log f(y).
$$

L'equivalenza delle due condizioni discende immediatamente dalle proprietà della funzione logaritmo.

Diremo invece che la funzione f è *log-convessa* se la funzione $\frac{1}{f}$ è *log-concava* (equivalentemente se la funzione $-\log(f)$ è concava), ovvero se le disuguaglianze precedenti sono verificate con verso opposto ($\leq$).

[33] Le notazioni utilizzate sono coerenti con quelle introdotte nella Definizione (1.4).

[34] È infatti necessario che la funzione sia positiva per poter applicare la funzione log. Per convenzione dovremmo porre $\log(0) := -\infty$ in modo da poter considerare anche i punti dove la funzione è nulla, fatto che tuttavia non risulterà necessario: il perchè di questo verrà chiarito in seguito.

Osserviamo inoltre che il concetto di *log-concavità* appena introdotto risulta estremamente interessante poichè rappresenta una proprietà conservata da determinate operazioni tra funzioni, alcune delle quali indispensabili per ricavare il risultato principale di questo capitolo. Proponiamo pertanto alcuni casi notevoli inerenti tale osservazione, enunciati e brevemente dimostrati nella seguente proposizione.

2.18 Proposizione (**Proprietà delle funzioni log-concave**).

(1) *Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi convessi, siano definite due funzioni $f : A \to [0, +\infty)$ e $g : B \to [0, +\infty)$, entrambe log-concave sui rispettivi insiemi di definizione. Allora il prodotto puntuale $f \cdot g$ delle due funzioni date è un funzione log-concava sull'insieme convesso*[35] *$A \times B$.*

Dimostrazione. Le funzioni $\log(f)$ e $\log(g)$ risultano concave rispettivamente sugli insiemi A e B, pertanto applicando le proprietà dei logaritmi si verifica $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$ che

$$\log(f(x) \cdot g(y)) = \log(f(x)) + \log(g(y)).$$

Sapendo che la somma di due funzioni concave è banalmente concava, otteniamo che la funzione $\log(f \cdot g)$ è concava sull'insieme $A \times B$, da cui il risultato richiesto. $\square$

(2) *Data una successione (f_h) di funzioni positive e log-concave definite $\forall h \in \mathbb{N}$ sull'insieme convesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo $\forall x \in \Omega$ il limite puntuale di tale successione nel seguente modo:*

$$f(x) := \lim_{h \to +\infty} f_h(x).$$

Allora la funzione f è log-concava sull'insieme Ω.

Dimostrazione. È sufficiente scrivere la disuguaglianza della Definizione (2.17) per la generica funzione f_h per $h \in \mathbb{N}$ e passare al limite per $h \to +\infty$, ottenendo banalmente il risultato richiesto. $\square$

(3) *Dato $C \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ un insieme convesso, sia definita una funzione $f : C \to [0, +\infty)$ una funzione log-concava ed integrabile secondo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^{m+n}$. Considerata la proiezione ortogonale $C_{|\mathbb{R}^m}$ dell'insieme C su $\mathbb{R}^m$, definiamo $\forall x \in C_{|\mathbb{R}^m}$ il seguente insieme:*

$$C(x) := \{y \in \mathbb{R}^m \ : \ (x, y) \in C\}.$$

Risulta allora che la funzione F, chiamata anche sezione di f e definita esplicitamente come

$$F(x) := \int_{C(x)} f(x, y) \, dy,$$

è log-concava sull'insieme $C_{|\mathbb{R}^m}$.

[35] Si dimostra banalmente che il prodotto cartesiano di due insiemi convessi è a sua volta convesso.

Dimostrazione. La seguente proprietà discende immediatamente dalla Proposizione[36] (2.16) considerando il caso $\alpha = 0$. Proponiamo tuttavia una dimostrazione alternativa di immediata comprensione.
Considerati un parametro $\lambda \in (0,1)$ e due generici $x_i \in C_{|\mathbb{R}^m}$ per $i = 0,1$, consideriamo $x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$. Poniamo per comodità $g_i(y) = f(x_i, y)$ per $y \in C(x_i)$ con $i = 0,1$. Considerati ora $y_i \in C(x_i)$ per $i = 0,1$ tali che $y = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1$, poniamo inoltre $g(y) = f(x,y)$ per $y \in C(x)$. La log-concavità della funzione f implica la seguente disuguaglianza:

$$g((1-\lambda)y_0 + \lambda y_1) \geq g_0(y_0)^{1-\lambda} g_1(y_1)^{\lambda}.$$

Si verifica facilmente dalle osservazioni precedenti che $(1-\lambda)C(x_0) + \lambda C(x_1) \subset C(x)$, da cui deduciamo immediatamente che

$$g(y)\chi_{C(x)}(y) \geq [g_0(y_0)\chi_{C(x_0)}(y_0)]^{1-\lambda}[g_1(y_1)\chi_{C(x_1)}(y_1)]^{\lambda}.$$

Applicando ora la *disuguaglianza di Prékopa-Leindler* (2.6) otteniamo tramite semplici calcoli la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned}
F((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) = F(x) = \int_{C(x)} f(x,y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\chi_{C(x)}(y)\, dy \geq \\
\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_0(y_0)\chi_{C(x_0)}(y_0)\, dy_0 \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_1(y_1)\chi_{C(x_1)}(y_1)\, dy_1 \right)^{\lambda} = \\
= \left(\int_{C(x_0)} f(x_0, y_0)\, dy_0 \right)^{1-\lambda} \left(\int_{C(x_1)} f(x_1, y_1)\, dy_1 \right)^{\lambda} = \\
= [F(x_0)]^{1-\lambda}[F(x_1)]^{\lambda}.
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà dei punti x_0 e x_1 la funzione F è log-concava sull'insieme $C_{|\mathbb{R}^m}$, risultato che conclude la dimostrazione. □

(4) Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi convessi, siano definite due funzioni $f : A \to [0,+\infty)$ e $g : B \to [0,+\infty)$ μ_n-misurabili e log-concave sui rispettivi insiemi di definizione. Allora il prodotto di convoluzione $f * g$ delle due funzioni date, definito esplicitamente come

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy,$$

è un funzione log-concava sull'insieme convesso[37] *$A + B$.*

Dimostrazione. Dalla Proprietà (1) deduciamo che la funzione $f(x-y)g(y)$ è log-concava per $(x-y, y) \in A \times B$, ovvero per $x \in A + B$. Dalla Proprietà (3) ricaviamo che la

[36] Questa proprietà aggiunge rispetto alla proposizione precedente l'ipotesi di μ_{m+n}-integrabilità alla funzione f per comodità. Inoltre l'enunciato proposto risulta ora più specifico, verificando la proprietà non in $\mathbb{R}^{m+n}$ ma solamente in un suo generico sottoinsieme convesso C.

[37] Si dimostra banalmente che la somma di due insiemi convessi è a sua volta convesso.

funzione $(f * g)(x)$ è log-concava per $x \in A + B$, risultato che conclude brevemente la dimostrazione. $\square$

2.5.2 L'equazione di diffusione in $\mathbb{R}^n$

Sfruttando le premesse teoriche introdotte nelle sezioni precedenti H.J.Brascamp e E.H.Lieb elaborarono un approccio essenzialmente fisico-probabilistico per studiare l'*equazione di diffusione* in $\mathbb{R}^n$, ricavando un fondamentale risultato di concavità per la relativa soluzione. Il metodo dimostrativo implementato utilizza pertanto concetti e notazioni derivanti spesso dalla Meccanica Quantistica, argomento che esula totalmente dalla nostra trattazione basata invece sugli aspetti principalmente analitici dei problemi considerati. Per questa ragione molti dettagli superflui verrano tralasciati o addirittura eliminati, fornendo pertanto un quadro tanto generale quanto essenziale del ragionamento seguito e descritto in [**2**].

Considerato innanzitutto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso con frontiera[38] $\partial\Omega \in C^\infty$, definiamo una funzione $v : \bar{\Omega} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $\forall t \in [0, +\infty)$ fissato verifichi le condizioni $v(\cdot, t)_{|\partial\Omega} = 0$ e $v(\cdot, t)_{|\Omega} > 0$.
Introduciamo ora l'*equazione di diffusione (o del calore) in* $\mathbb{R}^n$ nella seguente forma:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\mathcal{H}[v](x,t). \tag{2.28}$$

Risulta inoltre definito l'operatore differenziale del secondo ordine $\mathcal{H}$, detto anche *operatore hamiltoniano*, nel seguente modo:

$$H[v](x,t) := -\frac{1}{2}\Delta v(x,t) + W(x)v(x,t).$$

dove la funzione $W : \bar{\Omega} \to [0, +\infty)$, chiamata anche *potenziale*, risulta convessa nel suo insieme di definizione.

Notiamo preliminarmente che la formulazione appena utilizzata per l'equazione di diffusione (2.28) deriva direttamente dalla versione classica dell'*equazione di Schrödinger*, una PDE fondamentale della Meccanica Quantistica che descrive essenzialmente l'evoluzione temporale dello stato di un sistema fisico. Questa correlazione esistente permette dunque di utilizzare alcune proprietà caratteristiche dell'*equazione di Schrödinger* per determinarne analoghe relative proprio all'*equazione di diffusione*.
Riferendoci nel dettaglio all'*equazione di Schrödinger* indipendente dal tempo, definiamo opportunamente una funzione $u_{\mathcal{E}} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ e consideriamo la seguente versione dell'equazione (2.28) indipendente dalla variabile t:

$$-\frac{1}{2}\Delta u_{\mathcal{E}}(x) + W(x)u_{\mathcal{E}}(x) = \mathcal{E}u(x).$$

[38] La necessità di quest'ipotesi verrà giustificata nel Teorema (3.9).

Dal punto di vista fisico il valore numerico $\mathcal{E}$ denota la cosiddetta *energia dello stato fondamentale*, mentre la funzione $u_{\mathcal{E}}$, denominata anche *funzione d'onda dello stato fondamentale*, rappresenta lo stato di energia $\mathcal{E}$ del sistema fisico, ovvero lo stato di minima energia possibile. Dal punto di vista matematico invece $\mathcal{E}$ denota l'autovalore di modulo minimo associato all'operatore hamiltoniano $\mathcal{H}$ ed $u_{\mathcal{E}}$ la corrispondente autofunzione. Risulta pertanto definita la seguente versione dell'*equazione agli autovalori per l'operatore hamiltoniano* $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}[u_{\mathcal{E}}](x) = \mathcal{E}u_{\mathcal{E}}(x), \tag{2.29}$$

dove $\mathcal{E}$ denota il *primo autovalore dell'operatore hamiltoniano* $\mathcal{H}$ mentre $u_{\mathcal{E}}$ denota la *prima autofunzione dell'operatore hamiltoniano* $\mathcal{H}$.
Evidentemente la funzione $u_{\mathcal{E}}$ deve verificare condizioni[39] analoghe a quelle soddisfatte dalla funzione v, ovvero devono valere i seguenti fatti:

$$u_{\mathcal{E}|\partial\Omega} = 0 \quad \text{e} \quad u_{\mathcal{E}|\Omega} > 0.$$

Utilizzando la funzione $u_{\mathcal{E}}$ reintroduciamo ora la dipendenza dalla variabile t definendo esplicitamente la seguente funzione:

$$v(x,t) := u_{\mathcal{E}}(x)e^{-t\mathcal{E}}. \tag{2.30}$$

Da questo fatto deduciamo immediatamente che la funzione v deve inoltre soddisfare la condizione iniziale $v(x,0) = u_{\mathcal{E}}(x) \ \ \forall x \in \bar{\Omega}$. La notazione utilizzata è coerente con le definizioni precedenti: tramite semplici calcoli deduciamo infatti dall'equazione (2.29) che tale funzione risolve proprio l'equazione (2.28):

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\mathcal{E}\,\underbrace{u_{\mathcal{E}}(x)e^{-t\mathcal{E}}}_{v(x,t)} = -\mathcal{H}[v](x,t).$$

Osservando la definizione (2.30) notiamo infine che individuare determinate proprietà della funzione v potrebbe rivelarsi un modo estremamente utile per caratterizzare la funzione $u_{\mathcal{E}}$ senza che sia necessario determinarla esplicitamente.

Senza fornire ulteriori dettagli aggiuntivi concludiamo questa digressione, premessa indispensabile per poter proseguire nel nostro ragionamento. Nei paragrafi successivi utilizzeremo necessariamente il concetto di *distribuzione* o funzione generalizzata senza tuttavia definirlo nel dettaglio[40].

[39] Queste condizioni esplicite sulla funzione $u_{\mathcal{E}}$ verranno chiarite e giustificate successivamente nel Capitolo 3. Risulta tuttavia chiaro che deve necessariamente verificarsi la condizione generale $u_{\mathcal{E}} \geq 0$ affinchè si possa studiare l'eventuale *log-concavità* della funzione in questione.

[40] Un'eccessiva formalizzazione di tale concetto risulterebbe prolissa e dispersiva per la trattazione, pertanto scegliamo deliberatamente di non introdurre definizioni o verificare proprietà relative alle distribuzioni, basandoci esclusivamente su quanto enunciato esplicitamente.

Definiamo opportunamente l'operatore differenziale del secondo ordine $\mathcal{L}$ nel seguente modo:

$$\mathcal{L}[v](x,t) := \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta v(x,t) - W(x)v(x,t).$$

Fissato[41] $y \in \Omega$ tale che $x \neq y$, determiniamo una *soluzione fondamentale* dell'operatore $\mathcal{L}$, ovvero una distribuzione $e(x,y,t)$ che $\forall x \in \Omega$ e $\forall t \in (0,+\infty)$ risolve nel senso delle distribuzioni la seguente equazione:

$$\mathcal{L}e(x,y,t) = \delta_y(x) \otimes \delta_0(t). \tag{2.31}$$

La distribuzione δ rappresenta[42] la *delta di Dirac* mentre il simbolo $\otimes$ denota il *prodotto tensoriale*[43] delle due distribuzioni.
Tramite un espediente probabilistico dedotto dalla *disuguaglianza di Prékopa-Leindler* H.J.Brascamp e E.H.Lieb riuscirono ad ottenere esplicitamente questa *soluzione fondamentale* dell'operatore $\mathcal{L}$, dimostrandone alcune proprietà fondamentali: verificata anzitutto $\forall t \in (0,+\infty)$ fissato la condizione al bordo $e(\cdot,y,t)_{|\partial\Omega} = 0$, mostrarono inoltre la validità nel senso delle distribuzioni del seguente limite:

$$\lim_{t\to 0^+} e(x,y,t) = \delta_y(x).$$

Utilizzando inoltre la cosiddetta *formula dei prodotti di Trotter* ricavarono inoltre una specifica formulazione esplicita della funzione[44] $e(x,y,t)$, espressa come limite puntuale del prodotto di convoluzione di funzioni *log-concave.* Applicando dunque la Proposizione (2.18) ottennero in aggiunta la proprietà di *log-concavità* della soluzione fondamentale dell'operatore $\mathcal{L}$.
Combinando questi risultati ricaviamo facilmente che la soluzione fondamentale dell'operatore $\mathcal{L}$ risolve l'*equazione di diffusione* (2.28) e soddisfa le relative condizioni al bordo, ottenendo pertanto la seguente uguaglianza:

$$v(x,t) \equiv e(x,y,t).$$

Richiamando nuovamente l'analogia con l'*equazione di Schrödinger*, senza fornire dettagli aggiuntivi sappiamo che dal punto di vista fisico ogni soluzione dell'*equazione di diffusione* (2.28) evolve nel tempo verso la *funzione d'onda dello stato fondamentale* $u_{\mathcal{E}}$, ovvero si verifica il seguente fatto:

$$u_{\mathcal{E}}(x) = \lim_{t\to+\infty} v(x,t)e^{t\mathcal{E}} = \lim_{t\to+\infty} e(x,y,t)e^{t\mathcal{E}}.$$

[41] Dal punto di vista fisico $x = y$ rappresenta lo stato del sistema nell'istante iniziale $t = 0$.

[42] Le due distribuzioni δ sono rispettivamente definite nella variabile $x \in \Omega$ relativa a $y \in \Omega$ e nella variabile $t \in (0,+\infty)$ relativa a $t = 0$.

[43] Il prodotto tensoriale delle distribuzioni generalizza quello delle funzioni: considerate infatti due generiche funzioni $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, definiamo esplicitamente il *prodotto tensiorale* $f \otimes g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ delle due funzioni nel seguente modo:

$$(f \otimes g)(x,y) := f(x) \cdot g(y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega \times \Omega.$$

[44] In realtà rappresenta in questo caso una distribuzione regolare, ovvero una funzione vera e propria.

Tenendo ora conto della *log-concavità* della funzione $e(x, y, t)$ e della Proprietà (2) della Proposizione (2.18), otteniamo infine il fondamentale risultato di concavità presentato all'inizio della sezione: la funzione $u_{\mathcal{E}}$, soluzione dell'*equazione agli autovalori per l'operatore hamiltoniano* H (2.29), è *log-concava* sull'insieme $\bar{\Omega}$.

2.5.3 Il problema agli autovalori per il Laplaciano

Supponendo infine che il potenziale $W \equiv 0$, sistemando opportunamente l'equazione (2.29) possiamo finalmente enunciare il risutato fondamentale di questo capitolo, la cui dimostrazione discende immediatamente dai risultati appena ricavati.

2.19 Teorema (Problema agli autovalori Δ). *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso, definiamo una funzione $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ tale che soddisfi le condizioni*[45] $u_{|\Omega} > 0$ *e* $u_{|\partial\Omega} = 0$ *sulla frontiera $\partial\Omega$. Consideriamo ora l'equazione agli autovalori per il Laplaciano (2.1) relativa all'insieme Ω precedentemente introdotta:*

$$\Delta u + \lambda u = 0.$$

Supposto che λ corrisponde al primo autovalore dell'operatore di Laplace, allora la soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ dell'equazione (2.1), ovvero la prima autofunzione dell'operatore di Laplace, è una funzione log-concava sull'insieme $\bar{\Omega}$.

Dimostrazione. Omessa. □

[45] Tali condizioni sono coerenti data la validità del *principio del massimo (forma debole)* (1.7).

Capitolo 3

Korevaar ed il principio del massimo per la concavità

L'approccio utilizzato da H.J.Brascamp e E.H.Lieb in [**2**], ampiamente illustrato nel capitolo precedente, permise di ottenere la proprietà di *log-concavità* relativa alla *prima autofunzione del Laplaciano* deducendola da un'applicazione particolare all'*equazione di diffusione in* $\mathbb{R}^n$. Nonostante la sua notevole importanza, ben presto il risultato ottenuto manifestò la propria limitatezza in quanto applicazione esclusiva dell'operatore di Laplace, mentre l'obiettivo era ottenerne uno più generale adatto allo studio di PDE non necessariamente lineari, caratterizzate inoltre dalla presenza di un generico *operatore ellittico*[1]. Qualche anno dopo, precisamente nel 1983, N. J. Korevaar riuscì nell'intento di generalizzare il Teorema (2.19), proponendo inoltre un approccio al classico *problema agli autovalori per il Laplaciano* totalmente analitico, sviluppato dunque senza dover ricorrere ad espedienti di natura differente.
In questo capitolo proporremo essenzialmente due risultati principali, entrambi ritenuti fondamentali nello studio delle proprietà di concavità delle soluzioni delle PDEs ellittiche: una versione del *principio del massimo per la concavità (PMC I)* e, come già accennato, la generalizzazione del Teorema (2.19) enunciato nel capitolo precedente.

[1]Data una funzione $u \in C^2(\Omega)$, definiamo un operatore differenziale del secondo ordine $\mathcal{L}$ nel seguente modo:

$$\mathcal{L}u(x) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u(x) \qquad \forall x \in \Omega,$$

dove $\partial_{ij}^2 u$ denota la derivata parziale seconda della funzione u rispetto alla i-esima e j-esima componente di $\mathbb{R}^n$. Richiamiamo il seguente fatto: l'operatore $\mathcal{L}$ è *ellittico* se $\forall x \in \Omega$ esiste un valore $\lambda(x) > 0$ tale che $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ si verifichi la seguente condizione:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda(x)\|\xi\|^2.$$

Equivalentemente significa affermare che la matrice $A(x) := [a_{ij}(x)]$ è definita positiva oppure definita negativa $\forall x \in \Omega$. Evidentemente l'*operatore di Laplace* Δ è ellittico in quanto corrisponde al caso particolare $a_{ij}(x) = \delta_{ij}(x)$, dove δ_{ij} denota la *delta di Kronecker*.

3.1 Il principio del massimo per la concavità (PMC)

Lo sviluppo di questa sezione prevede innanzitutto l'introduzione di alcune definizioni indispensabili per poter caratterizzare la proprietà di concavità[2] di una funzione non necessariamente regolare, fornendo di fatto una valida alternativa alle Proposizioni (1.5) e (1.6) precedentemente proposte.

3.1 Definizione. Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso, sia definita una funzione $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$. Definiamo allora la funzione $\mathcal{C}_u : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}$, detta *funzione di concavità* per la funzione u, nel seguente modo:

$$\mathcal{C}_u(x,y,\lambda) := u((1-\lambda)x + \lambda y) - (1-\lambda)u(x) - \lambda u(y) \quad \forall x,y \in \bar{\Omega}.$$

La funzione $\mathcal{C}_u$ viene introdotta in maniera naturale per misurare il cosiddetto "difetto di concavità (o convessità)" della funzione u, ovvero quanto essa si discosta dall'essere concava (o convessa): infatti $\mathcal{C}_u$ indica, al variare del paramentro λ[3], la distanza tra il grafico della funzione u ed il segmento congiungente i punti $(x, u(x))$ e $(y, u(y))$. Si verifica dunque facilmente che $\forall x, y \in \bar{\Omega}$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ valgono le seguenti caratterizzazioni:

$$\begin{aligned} u \ \textit{concava} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{C}_u(x,y,\lambda) \geq 0, \\ u \ \textit{convessa} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{C}_u(x,y,\lambda) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Geometricamente parlando, la concavità (o convessità) della funzione u equivale al fatto che il suo grafico giaccia interamente al di sopra (o al di sotto) del segmento congiungente i punti $(x, u(x))$ e $(y, u(y))$.

3.2 Osservazione. Diremo che la terna (x, y, λ) appartiene al bordo di Ω se almeno uno dei punti x, y o $(1-\lambda)x + \lambda y \in \partial\Omega$. In caso contrario diremo che la medesima terna appartiene all'interno di Ω.

Possiamo ora enunciare il teorema principale di questa sezione.

3.3 Teorema (Principio del massimo per la concavità (PMC I)). *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso, sia $A := [a_{ij}]$ una matrice simmetrica e definita positiva tale che le funzioni $a_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\forall i,j = 1, ..., n$ e sia data una funzione $b \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.*[4] *Sia definita la funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ soluzione in Ω della seguente PDE ellittica:*

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - b(x, u, \nabla u) = 0. \tag{3.2}$$

[2] La trattazione sarebbe egualmente valida nel caso decidessimo di analizzare la proprietà di *convessità* al posto della *concavità*. Ci atterremo tuttavia il più possibile alla linea dimostrativa seguita dagli articoli consultati per sviluppare l'argomento in questione.

[3] Nonostante la funzione $\mathcal{C}_u$ dipenda esplicitamente da λ, i successivi risultati legati a tale funzione saranno indipendenti da tale parametro, ragion per cui lo ometteremo quando superfluo.

[4] Assumiamo tali regolarità sulle funzioni a_{ij} e b per pura comodità, nonostante sia possibile affrontare il problema con regolarità inferiori.

Supponiamo inoltre che la funzione b verifichi le seguenti ipotesi:

$$(I) \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall p \in \mathbb{R}^n \qquad \frac{\partial b(x,s,p)}{\partial s} \geq 0,$$

$$(II) \qquad \forall p \in \mathbb{R}^n \qquad b(\cdot,\cdot,p) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{"}\mathit{congiuntamente}\text{" } \mathit{concava}.^5$$

Se $\mathcal{C}_u > 0$, allora C_u raggiunge il suo massimo assoluto positivo in un punto appartenente al bordo di Ω, ovvero esiste $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})$ appartenente al bordo[6] di Ω tale che

$$\max_{\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times[0,1]} \mathcal{C}_u = \mathcal{C}_u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}).$$

Dimostrazione. Sapendo che $u \in C(\bar{\Omega})$, osserviamo che la funzione $\mathcal{C}_u$ è continua sull'insieme chiuso e limitato $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$, che è quindi compatto. Applicando pertanto il *Teorema di Weierstrass*[7] otteniamo che la funzione $\mathcal{C}_u$ possiede un punto di massimo assoluto positivo nel suo insieme di definizione. La dimostrazione del teorema procede ora in due passi distinti, di seguito mostrati nel dettaglio.

▶ Poniamo innanzitutto un vincolo diverso sulla funzione b: mantenendo invariate tutte le altre ipotesi del teorema, supponiamo che quest'ultima sia *strettamente crescente* nella variabile u, ovvero che si verifichi la condizione

$$\frac{\partial b(x,u,\nabla u)}{\partial u} > 0.$$

Procediamo dunque a dimostrare il teorema in questo caso particolare.
Supponiamo per assurdo che la funzione $\mathcal{C}_u$ assuma il suo massimo assoluto positivo nel punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})$ interno a Ω. Se $\bar{x} = \bar{y}$ o $\bar{\lambda} = 0$ oppure $\bar{\lambda} = 1$ otteniamo tramite semplici calcoli che $\mathcal{C}_u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) = 0$, il che è assurdo: il teorema è pertanto banalmente dimostrato. Limitiamoci dunque al caso in cui $\bar{\lambda} \in (0,1)$ e $\bar{x} \neq \bar{y}$ entrambi interni all'insieme Ω. Considerando che $u \in C^1(\Omega)$, nel punto di massimo assoluto positivo si verifica che $\nabla\mathcal{C}_u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) = 0$, ovvero più esplicitamente

$$\frac{\partial \mathcal{C}_u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{C}_u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})}{\partial y} = 0.$$

---

[5] La dicitura *congiuntamente concava* afferma esplicitamente la concavità della suddetta funzione nel complesso delle sue variabili, ovvero tale proprietà deve essere contemporaneamente verificata in tutte le variabili considerate.

[6] Nel senso dell'Osservazione (3.2) precedente.

[7] Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e non vuoto, sia definita una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Allora la funzione f ammette massimo e minimo assoluto sull'insieme Ω, ovvero esistono $x_1, x_2 \in \Omega$ tali che

$$f(x_1) = \min_{\Omega} f \qquad \text{e} \qquad f(x_2) = \max_{\Omega} f.$$

Tramite semplici calcoli, ponendo $\bar{z} = (1-\lambda)\bar{x}+\lambda\bar{y}$, otteniamo le seguenti espressioni esplicite:

$$\frac{\partial \mathcal{C}_u(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda})}{\partial x} = (1-\lambda)\nabla u(\bar{z}) - (1-\lambda)\nabla u(\bar{x}) = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{C}_u(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda})}{\partial y} = \lambda\nabla u(\bar{z}) - \lambda\nabla u(\bar{y}) = 0,$$

da cui ricaviamo immediatamente che il gradiente della funzione u deve essere identico nei tre punti $\bar{x}, \bar{y}$ e $\bar{z}$ considerati:

$$\nabla u(\bar{z}) = \nabla u(\bar{x}) = \nabla u(\bar{y}). \tag{3.3}$$

Denotato con $\xi \in \mathbb{R}^n$ il generico vettore tramite cui possiamo traslare in modo unico i punti $\bar{x}, \bar{y}$ e $\bar{z}$, definiamo opportunamente la restrizione della funzione $\mathcal{C}_u$ ad un intorno del punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})$ nel seguente modo:

$$\bar{\mathcal{C}_u}(\xi) := \mathcal{C}_u(\bar{x}+\xi, \bar{y}+\xi, \bar{\lambda}).$$

Essendo evidente che la funzione $\bar{\mathcal{C}_u}$ possiede un punto di massimo interno in $\xi = 0$, dall'ipotesi di regolarità $u \in C^2(\Omega)$ ricaviamo facilmente la validità delle seguenti condizioni:

$$\nabla_\xi \bar{\mathcal{C}_u}(0) = 0 \quad e \quad \nabla^2_\xi \bar{\mathcal{C}_u}(0) = \left[\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{C}_u}}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right](0) \leq 0,$$

dove la seconda indica sinteticamente il fatto che la matrice hessiana $\nabla^2_\xi \bar{\mathcal{C}_u}$ della funzione $\bar{\mathcal{C}_u}$ nel punto $\xi = 0$ deve essere semidefinita negativa. Richiamando le ipotesi sulla matrice $A := [a_{ij}]$ deduciamo immediatamente che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{C}_u}}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(0) \leq 0.$$

Combinando tale disuguaglianza con il risultato (3.3) precedentemente ottenuto ricaviamo esplicitamente che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\nabla u) \left[\partial^2_{ij} u(\bar{z}) - (1-\lambda)\partial^2_{ij} u(\bar{x}) - \lambda \partial^2_{ij} u(\bar{y})\right] \leq 0,$$

dove $\partial^2_{ij} u$ denota la derivata parziale seconda della funzione u rispetto alla i-esima e j-esima componente[8] di $\mathbb{R}^n$.
Combinando quest'ultima disuguaglianza con l'ipotesi (II) del teorema, dall'equazione (3.2)

[8]La derivazione non dipende infatti dal vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$ arbitrariamente scelto.

ricaviamo tramite semplici calcoli[9] che

$$
\begin{aligned}
b(\bar{z}, u(\bar{z})) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\nabla u)\partial^2_{ij} u(\bar{z}) \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\nabla u)\left[(1-\bar{\lambda})\partial^2_{ij} u(\bar{x}) + \bar{\lambda}\partial^2_{ij} u(\bar{y})\right] = \\
&= (1-\bar{\lambda}) b(\bar{x}, u(\bar{x})) + \bar{\lambda} b(\bar{y}, u(\bar{y})) \leq b[(1-\bar{\lambda})(\bar{x}, u(\bar{x})) + \bar{\lambda}(\bar{y}, u(\bar{y}))] = \\
&= b(\bar{z}, (1-\bar{\lambda})u(\bar{x}) + \bar{\lambda} u(\bar{y})).
\end{aligned}
$$

Applicando ora l'ipotesi (I) modificata, avendo supposto in questo caso particolare che la funzione b fosse strettamente crescente, deduciamo facilmente la disuguaglianza

$$u(\bar{z}) \leq (1-\bar{\lambda})u(\bar{x}) + \bar{\lambda} u(\bar{y}),$$

da cui immediatamente il seguente risultato:

$$\mathcal{C}_u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) \leq 0.$$

Questo fatto è evidentemente in contraddizione con l'ipotesi $\mathcal{C}_u > 0$, pertanto il teorema risulta in questo caso dimostrato.

► Procediamo ora a dimostrare invece il teorema nel caso generale, ovvero quando vale l'ipotesi (I). È innanzitutto necessario premettere un lemma tecnico, di cui non riporteremo la dimostrazione[10] esplicita perchè solamente accessoria alla nostra trattazione.

$\Downarrow$

3.4 Lemma (di perturbazione). *Dato $\Omega' \subset\subset \Omega$ un sottoinsieme*[11] *di $\mathbb{R}^n$ con bordo regolare $\partial\Omega' \in C^\infty$, sia definita una funzione $u \in C^2(\Omega)$ tale che soddisfi le ipotesi del Teorema (3.3). Allora $\forall \epsilon_0 > 0$ fissato esiste ϵ tale che $0 < \epsilon < \epsilon_0$ ed esiste una funzione $v^\epsilon : \Omega' \to \mathbb{R}$ soluzione del seguente problema perturbato:*

$$
\begin{cases}
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\nabla v^\epsilon) \frac{\partial^2 v^\epsilon}{\partial x_i \partial x_j} = b(x, v^\epsilon, \nabla v^\epsilon) + \epsilon v^\epsilon & \text{in } \Omega' \\
v^\epsilon = u & \text{su } \partial\Omega'
\end{cases},
$$

dove esiste $M > 0$ tale che $v^\epsilon = u + \epsilon w^\epsilon$ con la condizione[12] $\|w^\epsilon\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} < M$.

Dimostrazione. Omessa. □

[9] Nell'espressione della funzione $b(x, u, \nabla u)$ non espliciteremo la dipendenza dal gradiente ∇u per l'osservazione (3.3).

[10] Vedi [**3**], Lemma (1.5), pag. 605.

[11] Precisiamo che la scrittura $A \subset\subset B$ significa *compattamente contenuto* ed equivale a dire che $\bar{A}$ è un sottoinsieme compatto di B.

[12] Senza fornire dettagli aggiuntivi, definiamo la *norma hölderiana* della funzione $w^\epsilon \in C^{2,\alpha}(\Omega')$ nel seguente modo:

$$\|w^\epsilon\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} = \sum_{|\beta|<2} \|D^\beta w^\epsilon\|_\infty + \sum_{|\beta|=2} \sup_{x \neq y \in \Omega'} \frac{\|D^\beta w^\epsilon(x) - D^\beta w^\epsilon(y)\|}{\|x-y\|}.$$

$$\Downarrow$$

Consideriamo ora una successione monotona crescente (Ω^m) di sottoinsiemi di Ω con bordo regolare $\partial\Omega^m \in C^\infty$ tale che verifichi le seguenti proprietà:

$$\Omega^m \subset \Omega^{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} \Omega^m = \Omega,$$

$$\lim_{m\to+\infty} d(\partial\Omega^m, \partial\Omega) = 0.$$

Preso allora un generico Ω^m, $\forall\epsilon > 0$ le ipotesi del Lemma (3.4) sono evidentemente verificate. Definita inoltre una funzione $\tilde{b}$ nel seguente modo:

$$\tilde{b}(x, v^\epsilon, \nabla v^\epsilon) := b(x, v^\epsilon, \nabla v^\epsilon) + \epsilon v^\epsilon,$$

deduciamo facilmente che quest'ultima soddisfa le ipotesi del Teorema (3.3) nel caso particolare precedentemente studiato in quanto vale la condizione

$$\frac{\partial\tilde{b}(x, v^\epsilon, \nabla v^\epsilon)}{\partial v^\epsilon} = \underbrace{\frac{\partial b(x, v^\epsilon, \nabla v^\epsilon)}{\partial v^\epsilon}}_{\geq 0} + \epsilon > 0.$$

Combinando pertanto i risultati ricavati otteniamo dalla precedente dimostrazione che la funzione $\mathcal{C}_{v^\epsilon}$ raggiunge il suo massimo assoluto positivo in un punto appartenente al bordo di Ω^m. Tramite semplici calcoli derivati dal Lemma (3.4) e dalla definizione della *norma hölderiana* $\|w^\epsilon\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')}$, per $\epsilon \to 0$ otteniamo che

$$\|v^\epsilon - u\|_\infty = \epsilon\|w^\epsilon\|_\infty \leq \epsilon\|w^\epsilon\|_{C^{2,\alpha}(\Omega^m)} < \epsilon M \to 0,$$

ovvero che la funzione $v^\epsilon \to u$ uniformemente in Ω^m. Dalla definizione (3.1) deduciamo immediatamente che anche $\mathcal{C}_{v^\epsilon} \to \mathcal{C}_u$ uniformemente in Ω^m, ragione per cui la funzione $\mathcal{C}_u$ raggiunge il suo massimo assoluto positivo in un punto appartenente al bordo di Ω^m. Sapendo infine che $u \in C(\bar{\Omega})$[13], mandando al limite per $m \to +\infty$ otteniamo che $\mathcal{C}_u$ raggiunge il suo massimo assoluto positivo in un punto appartenente al bordo di Ω. Il teorema risulta dunque dimostrato. $\square$

L'implicazione contenuta nel *principio del massimo per la concavità (PMC I)* può essere espressa in una forma equivalente tramite la propria negazione, ponendo l'attenzione su un aspetto totalmente diverso: mantenendo invariato il quadro d'ipotesi del Teorema (3.3), se la funzione $\mathcal{C}_u$ non raggunge il suo massimo assoluto positivo in un punto appartenente al bordo di Ω, allora $\mathcal{C}_u \leq 0$, ovvero la funzione u è convessa per la caratterizzazione (3.1). Per

[13] La continuità della funzione u fino al bordo dell'insieme Ω è condizione necessaria per poter mandare al limite per $m \to +\infty$.

stabilire dunque la proprietà di convessità della soluzione dell'equazione (3.2) risulta necessario individuare delle specifiche *condizioni al bordo* sulla funzione u affinchè $\mathcal{C}_u$ non raggunga il suo massimo assoluto positivo in un punto appartenente al bordo di Ω.

In primo luogo richiediamo una condizione di regolarità maggiore sull'insieme Ω: oltre ad essere limitato dovrà anche avere la frontiera regolare $\partial\Omega \in C^\infty$. Risulta inoltre fondamentale supporre che l'insieme Ω sia *strettamente convesso* secondo la definizione (1.2) precedentemente data.

In secondo luogo consideriamo la superficie G_u, detta anche *grafico* della funzione u, definita nel seguente modo:

$$G_u := \{(x, u(x)) \;:\; x \in \Omega)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Denotiamo inoltre con π_x il piano tangente alla superficie G_u nel punto $(x, u(x))$ al variare di $x \in \Omega$. Diremo allora che la funzione[14] $u \in C^1(\Omega)$ è convessa se e solo se $\forall x \in \Omega$ il suo grafico G_u giace interamente al di sopra del corrispondente piano tangente π_x, ovvero in modo equivalente[15]

$$u \;\; convessa \iff G_u \geq \pi_x \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.4}$$

Nonostante questa caratterizzazione geometrica delle funzioni convesse sia molto intuitiva, la condizione individuata risulta sufficiente ma non necessaria, dunque sostituibile con una meno restrittiva. Affinchè la funzione $\mathcal{C}_u$ non assuma il suo massimo assoluto positivo in un punto appartenente al bordo di Ω è infatti sufficiente richiedere che $G_u \geq \pi_x$ $\forall x \in \partial\Omega$, ovvero che la condizione appena introdotta valga esclusivamente per i punti appartenenti al bordo di Ω, proprio come afferma il seguente lemma.

3.5 Lemma. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e strettamente convesso con $\partial\Omega \in C^\infty$, sia definita $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che G_u ammetta $\forall x \in \partial\Omega$ piano tangente π_x. Supponiamo che valga la condizione*

$$G_u \geq \pi_x \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{3.5}$$

dove l'unico punto di contatto[16] *tra G_u e π_x è rappresentato proprio dal punto di tangenza $(x, u(x))$. Allora la funzione $\mathcal{C}_u$ non assume il suo massimo assoluto positivo in un punto appartenente al bordo di Ω.*

Dimostrazione. La dimostrazione del lemma procede per via geometrica. Supponiamo per assurdo che la funzione $\mathcal{C}_u$ assuma il suo massimo assoluto positivo nel punto (x, y, λ) appartenente al bordo di Ω. Posto $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ con $\lambda \in (0, 1)$, dato che $z \notin \partial\Omega$ per la convessità stretta, supponiamo che $x \in \partial\Omega$ e consideriamo la porzione della superficie G_u limitata al segmento $[x, y]$, ovvero la curva Γ interamente contenuta in G_u congiungente i punti

[14] La regolarità C^1 richiesta sulla funzione u è necessaria per l'esistenza $\forall x \in \Omega$ del piano tangente π_x.

[15] La notazione $\geq$ è ovviamente utilizzata in senso improprio in quanto in $\mathbb{R}^{n+1}$ non esiste una relazione d'ordine; tuttavia dal punto di vista geometrico il suo significato è chiaro.

[16] Ovvero l'unico punto che verifica impropriamente l'uguaglianza nella relazione precedente.

$(x, u(x))$ e $(y, u(y))$. Per l'ipotesi (3.5) sappiamo che il punto $(y, u(y))$ giace al di sopra della retta tangente t_x a Γ nel punto $(x, u(x))$. Fissati i punti y e z, muoviamo il punto x nel punto $\tilde{x}$ lungo il segmento $[x, y]$ in modo che valga la condizione $d(\tilde{x}, y) < d(x, y)$: approssimativamente il valore $u(\tilde{x})$ corrisponderà al valore della retta tangente t_x nel punto $\tilde{x}$.[17] Pertanto, tenendo presente la costruzione geometrica, nel punto z il segmento di estremi $(\tilde{x}, u(\tilde{x}))$ e $(y, u(y))$ si troverà più in basso rispetto a quello di estremi $(x, u(x))$ e $(y, u(y))$. Esplicitando tale risultato tramite un semplice calcolo otteniamo la disuguaglianza

$$(1-\lambda)u(\tilde{x}) + \lambda u(y) < (1-\lambda)u(x) + \lambda u(y),$$

dalla quale deduciamo immediatamente che

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_u(x, y, \lambda) &= u(z) - [(1-\lambda)u(x) + \lambda u(y)] < \\ &< u(z) - [(1-\lambda)u(\tilde{x}) + \lambda u(y)] = \\ &= \mathcal{C}_u(\tilde{x}, y, \lambda). \end{aligned}$$

Tuttavia per l'ipotesi sull'esistenza del massimo deve essere $\mathcal{C}_u(x, y, \lambda) \geq \mathcal{C}_u(\tilde{x}, y, \lambda)$, risultato incompatibile con la disuguaglianza appena ottenuta. Seguendo lo stesso ragionamento dimostrativo, si deduce una contraddizione supponendo invece che $y \in \partial\Omega$. Pertanto la funzione $\mathcal{C}_u$ non può assumere il suo massimo assoluto positivo in un punto appartenente al bordo di Ω. La dimostrazione del lemma è conclusa. $\square$

3.6 Osservazione. Un caso particolare della condizione enunciata nel Lemma (3.5) corrisponde al cosiddetto *angolo di contatto nullo.*
Date due generiche superfici S_1 e S_2 in $\mathbb{R}^{n+1}$ tali che ammettano rispettivamente piani tangenti $\pi_1(x)$ $\forall x \in S_1$ e $\pi_2(y)$ $\forall y \in S_2$, consideriamo un generico punto $z \in S_1 \cap S_2$ nell'intersezione delle due superfici. Definiamo l'*l'angolo di contatto* γ nel punto z come l'angolo formato dalla normale n_1 al piano tangente $\pi_1(z)$ di S_1 e dalla normale n_2 al piano tangente $\pi_2(z)$ di S_2.
Consideriamo nello specifico l'angolo di contatto γ tra la superficie G_u, grafico della funzione u, ed il cilindro generalizzato $\partial\Omega \times \mathbb{R}$: quando γ è nullo in un generico punto $(z, u(z)) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ significa che il piano tangente π_z alla superficie G_u in tale punto è verticale e pertento verifica evidentemente la condizione del Lemma (3.5) secondo cui

$$G_u \geq \pi_z \quad \forall z \in \partial\Omega.$$

Grazie all'osservazione precedente possiamo ora enunciare il secondo ed ultimo risultato della sezione.

[17] Non forniamo ulteriori dettagli su questo passaggio, basti pensare al corrispondente caso unidimensionale di una retta tangente ad una funzione in un punto che corrisponde ad un'approssimazione al primo ordine della funzione considerata nell'intorno del medesimo punto.

3.7 Teorema. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e strettamente convesso con $\partial\Omega \in C^\infty$, sia definita la funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, soluzione dell'equazione (3.2), tale che siano soddisfatte tutte le ipotesi del Teorema (3.3). Supponiamo che l'angolo di contatto γ tra G_u e $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ sia nullo. Allora la funzione u è convessa.*

Dimostrazione. Combinando le tesi del Teorema (3.3), del Lemma (3.5) e l'Osservazione (3.6) otteniamo immediatamente che $\mathcal{C}_u$ non può assumere il suo massimo assoluto in un punto appartenente al bordo di Ω, pertanto deve essere $\mathcal{C}_u \leq 0$, da cui la convessità della funzione u. □

3.2 L'approccio analitico al problema agli autovalori generalizzato

Nel capitolo precedente abbiamo analizzato il classico *problema agli autovalori per il Laplaciano*, dimostrando nel Teorema (2.19) che la *prima autofunzione u* corrispondente al *primo autovalore λ* di tale operatore è *log-concava* sull'insieme convesso $\bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$.
Diversamente dall'approccio fisico-probabilistico utilizzato in[**2**], N.J.Korevaar propose un metodo prettamente analitico per lo studio di tale problema, ottenendo di fatto un risultato più generale rispetto a quello precedentemente ricavato da H.J.Brascamp e E.H.Lieb.
Concluderemo pertanto il capitolo proponendo una breve trattazione sul cosiddetto *problema agli autovalori generalizzato* e fornendo ulteriori dettagli sul *problema agli autovalori per l'operatore hamiltoniano H* (2.29) definito in precedenza.

Innanzitutto possiamo chiederci se risulta possibile sostiuire alla (3.5) una condizione al bordo alternativa, posta sulla funzione u, affinchè la validità del Lemma (3.5) non venga annullata. L'interrogativo ammette una risposta parzialmente affermativa: nonostante la suddetta condizione esista, la funzione u deve essere opportunamente trasformata perchè il Lemma (3.5) continui a valere. Questo fatto viene giustificato dal contenuto del lemma successivo, indispensabile per il proseguo della trattazione.

3.8 Lemma. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e fortemente convesso con $\partial\Omega \in C^\infty$, indichiamo con ν il versore normale interno a $\partial\Omega$. Sia definita una funzione $u \in C^2(\bar{\Omega})$ tale che soddisfi le seguenti condizioni:*

$$u_{|\Omega} > 0, \qquad u_{|\partial\Omega} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}_{\big|\partial\Omega} > 0. \tag{3.6}$$

Posto $\delta > 0$, definiamo l'insieme

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega \ : \ d(x, \partial\Omega) > \delta\}.$$

Consideriamo infine una funzione $f \in C^\infty((0,+\infty))$ tale che $\forall z \in (0,+\infty)$ valgano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} f'(z) < 0 \\ f''(z) > 0 \\ \lim_{z\to 0^+} f'(z) = -\infty \\ \lim_{z\to 0^+} \frac{f(z)}{f'(z)} = 0 \\ \lim_{z\to 0^+} \frac{f'(z)}{f''(z)} = 0 \end{cases}. \tag{3.7}$$

Allora per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo la funzione $v := f(u)$ soddisfa il Lemma (3.5) sull'insieme Ω_δ.

Dimostrazione. Fissato un generico punto $x \in \partial\Omega_\delta$, definiamo l'insieme

$$A_x = \{y \in \Omega_\delta \;:\; \pi_x(y) \geq G_v(y)\}.$$

L'obiettivo è mostrare che ogni piano tangente π_x giace completamente al di sotto del grafico G_v, ovvero che $A_x = \emptyset \;\; \forall x \in \partial\Omega_\delta$. La dimostrazione si suddivide nella verifica di due affermazioni distinte, di seguito riportate.

► Ogniqualvolta x è "vicino" a $\partial\Omega$, allora anche l'insieme A_x è vicino[18] a $\partial\Omega$.
Formalizziamo questo fatto: dato $\epsilon > 0$ esiste $\delta_0 > 0$ tale che per $0 < \delta < \delta_0 < \epsilon$ e per $x \in \partial\Omega_\delta$ si verifica che $A_x \cap \Omega_\epsilon = \emptyset$.

Dalle ipotesi ricaviamo infatti che per x vicino" a $\partial\Omega$ il piano tangente π_x alla funzione v è quasi verticale ed il suo gradiente $\nabla v(x)$ ha quasi la stessa direzione del versore normale[19] esterno $-\nu$ a Ω. Sapendo tramite semplici calcoli che $\nabla v = f'(u)\nabla u$, dalle ipotesi ricaviamo la seguente disuguaglianza:

$$\nabla v(x)\cdot(-\nu(x)) = -f'(u(x))\nabla u(x)\cdot\nu(x) = -f'(u(x))\underbrace{\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}}_{>0} > 0.$$

Tenendo presente l'Osserazione (3.6) deduciamo che l'angolo di contatto γ deve essere relativamente piccolo. Senza formire ulteriori dettagli[20] tecnici, dal punto di vista geometrico l'affermazione risulta pertanto intuitiva.

► La funzione v risulta convessa su di una "striscia" di bordo vicina a $\partial\Omega$. Formalizziamo questo fatto: esiste $\epsilon > 0$ tale che valga la condizione[21] $\nabla^2 v(x) > 0 \;\; \forall x \in \Omega \setminus \Omega_\epsilon$.

Innanzitutto, analogamente alla verifica svolta nella dimostrazione del Teorema (1.14), dalle

[18]Impropriamente nel senso di *distanza euclidea* d in $\mathbb{R}^n$.

[19]Nonostante il versore normale interno $\nu(x)$ sia definito esclusivamente per $x \in \partial\Omega$, è possibile estenderlo ad un campo vettoriale $\tilde{\nu} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definito su tutto l'insieme tale che $\tilde{\nu}(x) = \nu(x) \;\; \forall x \in \partial\Omega$. Fatta questa precisazione, per semplicità di notazione useremo comunque ν anche dove intendiamo in realtà $\tilde{\nu}$.

[20]Vedi [**3**], Lemma (2.4), pag. 610.

[21]L'espressione $\nabla^2 v(x) > 0$ indica impropriamente il fatto che la matrice hessiana della funzione v sia definita positiva.

ipotesi (3.6) sulla funzione u ricaviamo che $\forall x \in \partial\Omega$ valgono i seguenti fatti:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(x)}{\partial \xi} = \nabla u(x) \cdot \xi = 0, \\ &\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \xi^2} = \xi^T \cdot \nabla^2 u(x) \cdot \xi = -\nabla u(x) \cdot \nu = -\underbrace{\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}}_{>0} < 0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

dove $\xi \in \mathbb{R}^n$ indica il versore tangente a $\partial\Omega$ nel punto x.
Preliminarmente calcoliamo esplicitamente la matrice hessiana della funzione v, osservando separatamente il comportamento dei due termini che la costituiscono:

$$\nabla^2 v = f'(u)\nabla^2 u + f''(u) \underbrace{(\nabla u)^T \cdot (\nabla u)}_{\|\nabla u\|^2}.$$

Per quanto riguarda il primo termine, dalla seconda condizione dell'ipotesi (3.7) ricaviamo immediatamente che $f'(u) < 0$, mentre dalla seconda relazione della (3.8) deduciamo che $\forall x \in \partial\Omega$ e $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$ tangenziale[22] a $\partial\Omega$ si verifica la disuguaglianza

$$\eta^T \cdot \nabla^2 u(x) \cdot \eta < 0.$$

Analizzando invece il secondo termine, dalla prima condizione dell'ipotesi (3.7) ricaviamo immediatamente che $f''(u) > 0$, mentre banalmente $|\nabla u|^2 \geq 0$. Tuttavia deduciamo inoltre che $\forall x \in \partial\Omega$ e $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$ non tangenziale a $\partial\Omega$ si verifica la disuguaglianza

$$\eta^T \cdot (\nabla u(x))^T \cdot (\nabla u(x)) \cdot \eta > 0.$$

Diversamente quest'ultima disuguaglianza risulta identicamente nulla $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$ tangenziale a $\partial\Omega$ per la prima relazione della (3.8).
Dall'ipotesi di regolarità $u \in C^2(\Omega)$ ricaviamo la continuità delle derivate parziali seconde $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ per $i, j = 1, ..., n$. Possiamo ora affermare che $\forall x \in \Omega \setminus \Omega_\epsilon$, "striscia" sufficientemente vicina a $\partial\Omega$, la matrice $\nabla^2 u$ è definita negativa $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$ direzione sufficientemente vicina alla direzione tangenziale[23], ottenendo pertanto che

$$f'(u(x)) \left[\eta^T \cdot \nabla^2 u(x) \cdot \eta\right] > 0,$$

$$f''(u(x)) \left[\eta^T \cdot (\nabla u(x))^T \cdot (\nabla u(x)) \cdot \eta\right] \approx 0.$$

Tenendo conto delle ipotesi (3.7) deduciamo invece che $\forall x \in \Omega \setminus \Omega_\epsilon$ il termine $\frac{f'(u)}{f''(u)}$ è sufficientemente piccolo, ottenendo dunque che $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$ direzione non tangenziale[24] vale la seguente

[22] Diremo infatti che un vettore $\eta \in \mathbb{R}^n$ è una *direzione tangenziale* nel punto x ad $\partial\Omega$ se $\nu \cdot \eta = 0$, dove ν indica la direzione normale a $\partial\Omega$ in quel punto.

[23] Estendendo il versore normale interno $\tilde{\nu}$ come fatto in precedenza, possiamo analogamente definire direzioni tangenziali e non tangenziali $\tilde{\eta}$ su tutto l'insieme Ω, rendendo pertanto valida quest'affermazione. Per quanto riguarda le notazioni, continueremo anche in questo caso ad utilizzare ν ed η avendo tuttavia chiaro il loro significato.

[24] Sufficientemente lontana da essa.

disuguaglianza:

$$f''(u(x)) \left[\eta^T \cdot (\nabla u(x))^T \cdot (\nabla u(x)) \cdot \eta\right] > f'(u(x)) \left[\eta^T \cdot \nabla^2 u(x) \cdot \eta\right].$$

Combinando infine tutti i risultati ottenuti sui due termini che costituiscono la matrice hessiana della funzione v, otteniamo globalmente che $\forall x \in \Omega \setminus \Omega_\epsilon$ il termine $\nabla^2 v(x)$ deve essere definito positivo $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$.

► Concludiamo la verifica del lemma combinando le due affermazioni appena dimostrate. Scelto un generico $\epsilon > 0$ tale che $\nabla^2 v(x) > 0 \;\; \forall x \in \Omega \setminus \Omega_\epsilon$, allora esiste $\delta_0 > 0$ tale che per $0 < \delta < \delta_0$ e per $x \in \partial\Omega_\delta$ si verifica che $A_x \cap \Omega_\epsilon = \emptyset$. Sapendo tuttavia che la funzione v risulta convessa $\forall x \in \Omega \setminus \Omega_\epsilon$ otteniamo che $A_x \cap (\Omega_\delta \setminus \Omega_\epsilon) = \emptyset$. Fissato $0 < \delta < \delta_0$, per l'arbitrarietà sulla scelta del parametro ϵ otteniamo immediatamente che $A_x = \emptyset$, fatto che conclude la dimostrazione. □

Tra tutte le trasformazioni possibili $f \in C^\infty(]0, +\infty[)$ che soddisfino le condizioni (3.7) enunciate nel Lemma (3.8) merita particolare attenzione il caso della funzione log. Proponiamo pertanto un risultato inerente questa specifica trasformazione, corrispondente proprio alla generalizzazione del Teorema (2.19) accennata all'inizio del capitolo.

3.9 Teorema (Problema agli autovalori generalizzato). *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e fortemente convesso con $\partial\Omega \in C^\infty$, sia definita $u \in C^2(\bar{\Omega})$ soluzione positiva della seguente PDE ellittica, denominata anche equazione agli autovalori generalizzata:*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\nabla u}{u}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + ub\left(x, -\log u, \frac{\nabla u}{u}\right) = 0, \tag{3.9}$$

dove sono definite le funzioni $a_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\; \forall i,j = 1,...,n$ e $b \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Supponiamo che la funzione b verifichi le condizioni (I) e (II) del Teorema (3.3) e che la funzione u verifichi inoltre le seguenti condizioni[25]:

$$u_{|\Omega} > 0, \qquad u_{|\partial\Omega} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} > 0,$$

dove ν indica il versore normale interno a $\partial\Omega$. Allora la funzione $v := -\log(u)$ è convessa sull'insieme $\bar{\Omega}$.

[25] Come annunciato in precedenza, la condizione $u_{|\Omega} > 0$ serve per poter applicare la funzione log. La condizione al bordo $u_{|\partial\Omega} = 0$ non comporta tuttavia alcun problema in quanto generalmente consideriamo Ω un insieme aperto e la log-*concavità* relativa solamente all'insieme Ω. Pertanto la convenzione $\log(0) := -\infty$ non è necessaria per affrontare questo tipo di problemi.

Dimostrazione. Innanzitutto si verifica che la funzione u è soluzione dell'equazione (3.9) se e solo se la funzione v verifica l'equazione

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(-\nabla v)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(-\nabla v)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + b(x,v,-\nabla v)}_{\tilde{b}(x,v,-\nabla v)}. \tag{3.10}$$

Per dimostrare questo fatto basta inserire all'interno dell'equazione (3.10) l'espressione $v = -\log(u)$ per ottenere la (3.9), osservando tramite semplici calcoli che si ottengono esplicitamente le seguenti quantità:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_i} &= -\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} &= -\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

L'equazione (3.10) presenta la medesima formulazione dell'equazione (3.2) mentre la funzione $\tilde{b}$ verifica anche'essa[26] le ipotesi (I) e (II) del Teorema (3.3). Applicando dunque il Lemma (3.8) deduciamo che, preso un generico $\delta > 0$, la funzione v soddisfa il Lemma (3.5) sull'insieme Ω_δ. Ciò significa che la funzione di concavità $\mathcal{C}_v$ non può assumere il suo massimo assoluto positivo in un punto appartenente al bordo di Ω_δ, ovvero che v deve essere convessa su tale insieme. Per l'arbitrarietà sulla scelta del parametro δ, concludiamo che la funzione $v = -\log(u)$ risulta convessa sull'insieme Ω. □

3.10 Osservazione. Il teorema appena dimostrato rappresenta esattamente l'approccio analitico di N.J.Korevaar, alternativa del metodo proposto da H.J.Brascamp e E.H.Lieb per lo studio dei problemi agli autovalori (2.29) e (2.1).

Consideriamo infatti l'*equazione agli autovalori per l'operatore hamiltoniano* $\mathcal{H}$ (2.29) precedentemente introdotta, riscrivendola nel seguente modo:

$$\Delta u(x) + 2[\lambda - W(x)]u(x) = 0.$$

Osserviamo che l'equazione (3.9) rappresenta evidentemente una forma generalizzata dell'equazione (2.29), avendo scelto opportunamente $\forall x \in \Omega$ le seguenti relazioni:

$$a_{ij}\left(\frac{\nabla u}{u}\right) = \delta_{ij}\left(\frac{\nabla u}{u}\right) \qquad e \qquad b\left(x, -\log u, \frac{\nabla u}{u}\right) = 2[\lambda - W(x)].$$

La funzione b dipende in modo esplicito solamente dalla variabile x, pertanto verifica sicuramente l'ipotesi (I) del Teorema (3.3). Sapendo inoltre che il potenziale W è convesso, ricaviamo facilmente anche la validità dell'ipotesi (II) del Teorema (3.3). Richiamando le condizioni $u_{|\Omega} > 0$ e $u_{|\partial\Omega} = 0$, supponiamo inoltre che $\forall x \in \Omega$ valga la disuguaglianza $W(x) \leq \lambda$.

[26] Le funzioni $\tilde{b}$ e b differiscono infatti per un termine indipendente dalla variabile esplicita v, dunque soddisfano necessariamente le medesime condizioni.

Oltre alla verifica della compatibilità delle precedenti condizioni con il *principio del massimo (forma debole)* (1.7), applicando il *Lemma di Hopf* (1.9) ricaviamo anche la validità della condizione $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega} > 0$. Verificate tutte le condizioni possiamo applicare il Teorema (3.9) all'equazione (2.29), dimostrando pertanto che la *prima autofunzione dell'operatore hamiltoniamo* $\mathcal{H}$ risulta *log-concava* sull'insieme Ω.

Analogamente possiamo applicare il Teorema (3.9) al *problema agli autovalori per il Laplaciano* precedentente definito nel Teorema (2.19):

$$\Delta u + \lambda u = 0.$$

Anche in questo caso otteniamo evidentemente che la *prima autofunzione dell'operatore di Laplace* Δ risulta *log-concava* sull'insieme Ω.

Capitolo 4

Kennington e l'estensione alle funzioni α-concave

I risultati ottenuti da N.J.Korevaar in [**3**], pur rivelandosi nell'immediato estremamente all'avanguardia per lo sviluppo della ricerca nell'ambito delle PDEs, non sembravano tuttavia essere definitivi. Nel 1985 A.U.Kennington propose infatti in [**4**] una versione avanzata e migliorata del *principio del massimo per la concavità (PMC II)*, utilizzata per studiare problemi differenziali sempre più generali e complessi sostanzialmente strutturati nel seguente modo.

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso, definiamo una funzione $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ tale che soddisfi la condizione $u_{|\partial\Omega} = 0$. Consideriamo ora la seguente PDE non lineare del secondo ordine:

$$\Delta u + f(x, u) = 0, \tag{4.1}$$

dove la funzione $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ può dipendere esplicitamente da entrambe le variabili x e u oltre che godere di alcune particolari proprietà che introdurremo succesivamente. Analogamente ai problemi studiati nei capitoli precedenti, vogliamo stabilire se la soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ dell'equazione (4.1) oppure una sua opportuna trasformazione possiede particolari proprietà di concavità.

Preliminarmente asserriamo che le Definizioni (1.4) e (2.17) precedentemente enunciate sono insufficienti per discutere i risutati di questo capitolo, pertanto risulta necessario introdurre per completezza alcune nozioni aggiuntive.

4.1 Definizione e proprietà dell'α-concavità

Innanzitutto richiamiamo la definizione (3.1) della *funzione di concavità* $\mathcal{C}_u$, modificandola[1] in modo opportuno.

4.1 Definizione. Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso, sia definita una funzione limitata $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$. Definiamo allora la funzione $-\mathcal{C}_u : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}$, detta *funzione di convessità* per la funzione u, nel seguente modo:

$$-\mathcal{C}_u(x,y,\lambda) := (1-\lambda)u(x) + \lambda u(y) - u((1-\lambda)x + \lambda y) \quad \forall x, y \in \bar{\Omega}.$$

Poniamo inoltre per definizione

$$\bar{\mathcal{C}} := \sup_{\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times[0,1]} -\mathcal{C}_u(x,y,\lambda).$$

In questo caso forniamo una diversa caratterizzazione per funzioni concave rispetto a quella precedentemente data in (3.1): oltre al fatto[2] che $\bar{\mathcal{C}} \geq 0$ sia nel caso di concavità $(-\mathcal{C}_u \leq 0)$ che di covessità $(-\mathcal{C}_u \geq 0)$ della funzione u, si verifica facilmente la seguente equivalenza:

$$u \ \ concava \iff \bar{\mathcal{C}} = 0. \tag{4.2}$$

Forniamo ora alcune nuove definizioni, introducendo alcuni concetti di fondamentale importanza per lo sviluppo della trattazione.

4.2 Definizione. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso e sia dato un parametro $\alpha \in]0,+\infty[$. Una funzione $u : \Omega \to [0,+\infty)$ si definisce *α-concava* sull'insieme Ω se la funzione u^α è concava sull'insieme Ω.

La precedente definizione può essere estesa[3] in modo del tutto naturale al variare del parametro $\alpha \in [-\infty,+\infty]$, fornendo le seguenti caratterizzazioni:

- $\alpha = +\infty \implies u(x) = c \ \ \forall x \in \Omega \quad (u \ costante)$;
- $0 < \alpha < +\infty \implies u^\alpha$ *concava*;
- $\alpha = 0 \implies u$ *log-concava*;
- $-\infty < \alpha < 0 \implies u^\alpha$ *convessa*;

[1] A.U.Kennington introduce direttamente la *funzione di convessità* $-\mathcal{C}_u$, diversamente dalla scelta di N.J.Korevaar di definire la *funzione di concavità* $\mathcal{C}_u$. Ritenendo inutile l'utilizzo di due notazioni distinte per funzioni che differiscono esclusivamente per il segno, scegliamo esplicitamente di utilizzare unicamente la convenzione adottata da N.J.Korevaar. Escludendo ciò, il resto della trattazione seguirà nel dettaglio il ragionamento proposto da A.U.Kennington in [**4**].

[2] In questo caso, banalmente, basta scelgliere $\lambda = 0$ per verificare l'asserto sull'estremo superiore della funzione $\mathcal{C}_u$.

[3] Prestiamo solamente attenzione al caso particolare in cui $u = 0$: affinchè l'estensione sia ben definita poniamo per convenzione $\log u = -\infty$ e $u^\alpha = +\infty$ per $-\infty < \alpha < 0$.

► $\alpha = -\infty \implies \{z \in \Omega \, : \, u(z) > t\}$[4] *convesso* $\forall t \in \mathbb{R}$ (*u unimodale*).

4.3 Definizione. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso. Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ si definisce[5] *armonicamente concava* (o *h-concava*) sull'insieme Ω se $\forall \lambda \in [0,1]$ e $\forall x, y \in \Omega$ si verificano le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{cases} u((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \dfrac{u(x)u(y)}{(1-\lambda)u(y) + \lambda u(x)} & (1-\lambda)u(y) + \lambda u(x) > 0 \\ u((1-\lambda)x + \lambda y) \geq 0 & u(x) = u(y) = 0 \end{cases}.$$

4.4 Osservazione. La definizione precedente contiene essenzialmente una generalizzazione della proprietà di (-1)-*concavità* estesa alle funzioni non necessariamente strettamente positive. Considerata infatti una funzione strettamente positiva $u : \Omega \to (0, +\infty)$ si verifica facilmente che

$$u \;\; h\text{-}concava \iff u \;\; (-1)\text{-}concava. \tag{4.3}$$

Tenendo presente che la (-1)-*concavità* di una funzione u corrisponde per definizione alla convessità della funzione $\frac{1}{u}$, nel caso in cui $(1-\lambda)u(y) + \lambda u(x) > 0$ la verifica dell'equivalenza (4.3) discende direttamente dalle seguenti disuguaglianze:

$$\frac{1}{u((1-\lambda)x + \lambda y)} \leq \frac{1-\lambda}{u(x)} + \frac{\lambda}{u(y)} = \frac{(1-\lambda)u(y) + \lambda u(x)}{u(x)u(y)}$$

$$\iff$$

$$u((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \frac{u(x)u(y)}{(1-\lambda)u(y) + \lambda u(x)},$$

mentre nel caso $u(x) = u(y) = 0$ la verifica risulta immediata.
Nonostante non valga il viceversa come nel caso precedente, risulta però decisamente più rilevante[6] la seguente implicazione: ogni funzione[7] *h-concava* è necessariamente concava, ovvero

$$u \;\; concava \implies u \;\; h\text{-}concava. \tag{4.4}$$

[4] Questo tipo di insiemi sono anche chiamati *sovra-insiemi di livello t* relativi alla funzione u.

[5] Non definiamo in modo analogo il concetto di funzione *armonicamente convessa* in quanto non necessario allo sviluppo del capitolo.

[6] Il perchè dell'utilizzo della proprietà di *concavità armonica* al posto della tradizionale concavità risulterà più chiaro successivamente.

[7] In questo caso non necessariamente strettamente positiva, ma semplicemente a valori reali.

Quest'affermazione è immediatamente verificata nel caso $u(x) = u(y) = 0$, mentre nel caso $(1-\lambda)u(y) + \lambda u(x) > 0$ discende dalla seguente catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
&u((1-\lambda)x + \lambda y) - \frac{u(x)u(y)}{(1-\lambda)u(y) + \lambda u(x)} \geq \\
\geq &(1-\lambda)u(x) + \lambda u(y) - \frac{u(x)u(y)}{(1-\lambda)u(y) + \lambda u(x)} = \\
= &\frac{\lambda(1-\lambda)[u(x)^2 + u(y)^2] - 2\lambda(1-\lambda)u(x)u(y)}{(1-\lambda)u(y) + \lambda u(x)} = \\
= &\frac{\lambda(1-\lambda)[u(x) - u(y)]^2}{(1-\lambda)u(y) + \lambda u(x)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Concludiamo questa sezione proponendo un compendio delle principali proprietà legate alle funzioni α-concave, ciascuna delle quali sarà brevemente dimostrata o giustificata a seconda dell'utilità nello sviluppo successivo della trattazione. Mentre considereremo sempre un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato e convesso ed una funzione $u : \Omega \to [0, +\infty)$, eventuali ipotesi aggiuntive necessarie verranno invece specificate di volta in volta.

4.5 Proposizione (**Proprietà della funzioni α-concave**).

(1) *u è una funzione α-concava se e solo se $\forall x, y \in \Omega$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ si verifica che*

$$u((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \mathcal{M}_\alpha(\lambda, u(x), u(y)),$$

dove $\mathcal{M}_{(\cdot)}(\lambda, u(x), u(y)) \in C([-\infty, +\infty]) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ denota la funzione di p-media (λ-pesata) (2.9) relativa alla funzione u precedentemente definita.

Dimostrazione. Tale proprietà discende immediatamente dalla Definizione (2.15) dell'insieme $K_\alpha(\Omega)$, corrispondente esattamente all'insieme delle funzioni α-concave. Posto $z = (1-\lambda)x + \lambda y$, la proprietà discende direttamente dalla caratterizzazione (2.27) precedentemente fornita in quanto vale la seguente disuguaglianza:

$$u((1-\lambda)x + \lambda y) \geq k_{\alpha,\lambda}(z \mid u(x), u(y)) \geq \mathcal{M}_\alpha(\lambda, u(x), u(y)) \quad \text{q.o. } z \in \mathbb{R}^n.$$

□

(2) Monotonia.

$$u \ \ \alpha\text{-concava} \implies u \ \ \beta\text{-concava} \quad \forall \beta \leq \alpha$$

Dimostrazione. La proprietà discende immediatamente dalla monotonia della funzione $\mathcal{M}_\alpha$ dimostrata precedentemente in (2.4). □

(3) Continuità. *Definito per ogni funzione $(-\infty)$-concava il cosiddetto numero di concavità $\alpha(u) := \sup\{\beta \in \mathbb{R} \ : \ u \ \ \beta\text{-concava}\}$, risulta allora che la funzione u è $\alpha(u)$-concava.*

Dimostrazione. La proprietà discende immediatamente dalla continuità della funzione $\mathcal{M}_\alpha$ rispetto alla variabile α. $\square$

(4) Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, una funzione $u \in C^2(\Omega)$ è α-concava se e solo se vale la condizione

$$u(x)u_{\theta\theta}(x) + (\alpha - 1)(u_\theta(x))^2 \leq 0$$

$\forall x \in \Omega$ e $\forall \theta \in \mathcal{S} := \{\theta \in \mathbb{R}^n : \|\theta\| = 1\}$, dove abbiamo denotato con $u_\theta(x)$ e $u_{\theta\theta}(x)$ rispettivamente le derivate prime e seconde della funzione u calcolate nel punto x nella direzione θ:

$$u_\theta(x) := \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{\partial u(x)}{\partial x_i},$$
$$u_{\theta\theta}(x) := \sum_{i=1}^{n} \theta_i \theta_j \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Dimostrazione. Considerata una generica funzione $u \in C^2(\Omega)$ richiamiamo la caratterizzazione fornita in (1.6):

$$u \ \textit{concava} \quad \Longleftrightarrow \quad u_{\theta\theta}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega, \ \ \forall \theta \in \mathbb{R}^n.$$

Tramite semplici calcoli otteniamo nel caso $\alpha \neq 0$ che

$$(u^\alpha)_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \theta^2} = \alpha u^{\alpha-2} \left[u u_{\theta\theta} + (\alpha - 1)(u_\theta)^2 \right],$$

mentre nel caso $\alpha = 0$ risulta che

$$(\log u)_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \log u}{\partial \theta^2} = u^{-2}[u u_{\theta\theta} - (u_\theta)^2].$$

In entrambi i casi è evidente la caratterizzazione dell'α-concavità tramite la condizione precedentemente enunciata, pertanto l'equivalenza risulta dimostrata. $\square$

4.6 Osservazione. Tenendo presente questo risultato si deduce immediatamente che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ una generica funzione $u \in C^2(\Omega)$ è α-concava se e solo se vale la condizione

$$\alpha \leq 1 - \sup \left\{ u(x)u_{\theta\theta}(x)(u_\theta(x))^{-2} : \ x \in \Omega, \theta \in \mathcal{S}, u_\theta(x) \neq 0 \right\}.$$

Tale caratterizzazione è estendibile anche al caso $\alpha = +\infty$ in cui la funzione u è costante e l'insieme precedente risulta vuoto: essendo per convenzione $\sup(\emptyset) = -\infty$ la disuguaglianza è banalmente verificata. Possiamo ora pertanto esplicitare il significato del *numero di concavità* $\alpha(u)$.

Per ogni funzione $u \in C^2(\Omega)$ tale che sia $(-\infty)$-concava otteniamo che

$$\alpha(u) = 1 - \sup \left\{ u(x)u_{\theta\theta}(x)(u_\theta(x))^{-2} : \ x \in \Omega, \theta \in \mathcal{S}, u_\theta(x) \neq 0 \right\}.$$

(5) *Fissato $\alpha \in [-\infty, +\infty]$ e data una successione (u_h) di funzioni α-concave $\forall h \in \mathbb{N}$, definiamo $\forall x \in \Omega$ il limite puntuale di tale successione nel seguente modo:*

$$u(x) = \lim_{h \to +\infty} u_h(x).$$

Allora la funzione u è α-concava sull'insieme Ω.

Dimostrazione. È sufficiente scrivere la disuguaglianza della Proprietà (1) per la generica funzione u_h e passare al limite per $h \to +\infty$, ottenendo il risultato richiesto per la continuità della funzione $\mathcal{M}_\alpha(\lambda, a, b)$ rispetto alle variabili[8] a e b. □

(6) *Per ogni $\alpha \geq 1$ l'insieme $K_\alpha(\Omega)$ delle funzioni α-concave è un un cono convesso, ovvero un insieme chiuso rispetto alla somma ed alla moltiplicazione per uno scalare positivo:*

$$\begin{aligned} f + g \in K_\alpha(\Omega) \qquad & \forall f, g \in K_\alpha(\Omega), \\ \mu f \in K_\alpha(\Omega) \qquad & \forall f \in K_\alpha(\Omega),\ \forall \mu \geq 0. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Mentre la seconda proprietà risulta banalmente vera, verifichiamo direttamente la prima. Considerati un generico valore $p \in (0, 1]$ e due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ tale che sia definita la seguente norma:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

risulta innanzitutto valida la seguente generalizzazione della *disuguaglianza di Minkowsky*[9]:

$$\|x + y\|_p \geq \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{4.5}$$

Date due generiche funzioni concave $f, g : \Omega \to [0, +\infty)$, notando che la funzione $\{t \mapsto t^p\}$ è concava per $p \in (0, 1]$, applichiamo la disuguaglianza (4.5) in $\mathbb{R}^2$ al caso particolare in cui $x = (f(x), g(x))$ e $y = (f(y), g(y))$ ottenendo per $\lambda \in [0, 1]$ il seguente

[8] Nonostante questo fatto non sia stato verificato esplicitamente, la regolarità della funzione $\mathcal{M}_\alpha$ nelle variabili diverse da α è banalmente ricavabile dalla Definizione (2.9).

[9] Mentre quella classica vale per $p \in [1, +\infty)$, quest'ultima vale nel caso $p \in (0, 1]$ e presenta in aggiunta il verso della disuguaglianza invertito. Notando che la funzione $\{t \mapsto t^p\}$ è concava per $p \in (0, 1]$, posto $t = \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} \in (0, 1)$, semplici calcoli portano al risultato desiderato:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} \left(t\frac{x_i}{t} + (1-t)\frac{y_i}{(1-t)} \right)^p \geq \sum_{i=1}^{n} \left[t\left(\frac{x_i}{t}\right)^p + (1-t)\left(\frac{y_i}{1-t}\right)^p \right] = \\ = t\frac{\|x\|_p^p}{t^p} + (1-t)\frac{\|y\|_p^p}{(1-t)^p} = (\|x\|_p + \|y\|_p)^p. \end{aligned}$$

risultato:

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)[f(x)^p+g(x)^p]^{\frac{1}{p}}+\lambda[f(y)^p+g(y)^p]^{\frac{1}{p}}=(1-\lambda)\|x\|_p+\lambda\|y\|_p\leq\\
\leq&\|(1-\lambda)x+\lambda y\|_p=[((1-\lambda)f(x)+\lambda g(x))^p+((1-\lambda)f(y)+\lambda g(y))^p]^{\frac{1}{p}}\leq\\
\leq&[f((1-\lambda)x+\lambda y)^p+g((1-\lambda)x+\lambda y)^p]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Deduciamo pertanto che la funzione $(f^p+g^p)^{\frac{1}{p}}$ è concava. Scelto ora $\alpha:=\frac{1}{p}\in[1,+\infty)$ concludiamo infine che la funzione $f+g$ è α-concava quando f e g sono entrambe α-concave, dimostrando in definitiva la proprietà richiesta. □

(7) ***Prodotto.*** *Presi due valori $\alpha,\beta\in[0,+\infty]$ e due funzioni tali che f sia α-concava e g sia β-concava, otteniamo che il prodotto puntuale delle due funzioni $f\cdot g$ è una funzione*[10] *γ-concava con $\gamma\in[0,+\infty]$ e $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$.*

$$f\ \ \alpha\text{-}concava \quad e \quad g\ \ \beta\text{-}concava$$

$$\Downarrow$$

$$(f\cdot g)\ \ \gamma\text{-}concava\ :\ \gamma=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

Dimostrazione. Utilizzando le convenzioni $0^{-1}=+\infty$ e $(+\infty)^{-1}=0$ il risultato è banalmente verificato quando uno tra α e β è uguale a $+\infty$ oppure quando sono entrambi nulli, pertanto limitiamoci a dimostrare il caso $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$. Fissato un generico valore $\lambda\in[0,1]$, consideriamo due generiche funzioni concave $f,g:\Omega\to[0,+\infty)$ tali che $\forall p\in(0,1]$ la funzione $[(1-\lambda)f^p+\lambda g^p]^{\frac{1}{p}}$ risulti anch'essa concava in virtù della Proprietà (6) appena dimostrata. Tramite un semplice calcolo otteniamo la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to0^+}[(1-\lambda)f^p+\lambda g^p]^{\frac{1}{p}}=\lim_{p\to0^+}\exp\left[\log((1-\lambda)f^p+\lambda g^p)^{\frac{1}{p}}\right]=\\
=&\lim_{p\to0^+}\exp\left[\frac{(1-\lambda)f^p\log f+\lambda g^p\log g}{(1-\lambda)f^p+\lambda g^p}\right]=\\
=&\exp\left[\log(f^{1-\lambda})+\log(g^\lambda)\right]=f^{1-\lambda}\cdot g^\lambda.
\end{aligned}$$

Applicando la Proprietà (5) otteniamo che la funzione $f^{1-\lambda}\cdot g^\lambda$ è concava in quanto limite puntuale di una successione di funzioni concave dipendente dal parametro p. Ponendo ora $\lambda:=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ ed applicando il risultato appena ottenuto alle funzioni concave f^α e g^β si verifica facilmente che la funzione

$$f^{(1-\lambda)\alpha}\cdot g^{\lambda\beta}=(f\cdot g)^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}$$

è concava. La dimostrazione è dunque conclusa. □

[10] Affinchè tale proprietà sia valida le due funzioni f e g devono dipendere dalle medesime variabili oppure separatamente da variabili reciprocamente indipendenti. Questa osservazione tornerà utile successivamente.

(8) ***Convoluzione.*** *Presi due valori $\alpha, \beta \in [0, +\infty]$ e due funzioni f e g rispettivamente α-concava e β-concava su due insiemi limitati e convessi $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$, otteniamo che il prodotto di convoluzione delle due funzioni*

$$(f * g)(x) = \int_{\Omega_1 \cap (x - \Omega_2)} f(y) \cdot g(x - y)\, dy$$

è una funzione η-concava sull'insieme convesso e limitato $\Omega_1 + \Omega_2$ con $\frac{1}{\eta} = n + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.

Dimostrazione. Dalla Proprietà (8) deduciamo immediatamente che la funzione integranda $f \cdot g$ è γ-concava con $\gamma = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. Applicando ora la Proposizione (2.16) otteniamo[11] che la funzione $(f * g)$ è η-concava sull'insieme $\Omega_1 + \Omega_2$ con

$$\eta = \frac{\gamma}{n\gamma + 1} = \frac{\alpha\beta}{n\alpha\beta + \alpha + \beta} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\eta} = n + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

□

4.2 Il principio del massimo per la concavità generalizzato (PMC II)

Nel capitolo precedente abbiamo enunciato una prima versione del *principio del massimo per la concavità (PMC I)*, rivelatasi indispensabile per l'ottenimento di alcuni risultati notevoli nell'ambito delle PDEs ellittiche. Nonostante la formulazione proposta da N.J.Korevaar in [**3**] fosse un risultato soddisfacente, A.U.Kennington tentò di migliorarla ulteriormente: eccetto qualche minima variazione sulla regolarità delle funzioni a_{ij}, b e u, la nuova assunzione richiede sostanzialmente l'ipotesi di *concavità armonica (o h-concavità)* sulla funzione b invece della classica *concavità*. In virtù dell'implicazione (4.4) precedentemente verificata tale modifica permette infatti l'ottenimento di un enunciato più generale, ampliando pertanto le possibili applicazioni del cosiddetto *principio del massimo per la concavità generalizzato (PMC II)*. Procediamo ad enunciare e dimostrare questa nuova versione del Teorema (3.3).

4.7 Teorema (**Principio del massimo per la concavità generalizzato (PMC II)**). *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso, sia $A := [a_{ij}]$ una matrice simmetrica e semidefinita positiva tale che le funzioni $a_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\forall i, j = 1, ..., n$ e sia data una funzione $b : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sia definita la funzione $u \in C^2(\Omega)$ soluzione in Ω della seguente PDE ellittica:*

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b(x, u, \nabla u) = 0. \tag{4.6}$$

[11] Nonostante la Proposizione (2.16) consideri esclusivamente il caso in $\mathbb{R}^n$, ne esiste una versione valida sugli insiemi convessi e limitati Ω_1 e Ω_2 analogamente alla Proprietà (4) della Proposizione (2.18).

Supponiamo inoltre che la funzione b *verifichi le seguenti ipotesi:*

$$(I) \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall p \in \mathbb{R}^n \qquad \frac{\partial b(x,s,p)}{\partial s} < 0,$$

$$(II) \qquad \forall p \in \mathbb{R}^n \qquad b(\cdot,\cdot,p) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{"congiuntamente" armonicamente concava.}$$

Se $\bar{\mathcal{C}} > 0$*, allora* $\bar{\mathcal{C}}$ *non viene raggiunto in un punto appartenente*[12] *all'insieme* $\Omega \times \Omega \times [0,1]$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un punto appartenente all'insieme $\Omega \times \Omega \times [0,1]$ in cui il sup viene effettivamente raggiunto[13], ovvero che esiste $(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) \in \Omega \times \Omega \times [0,1]$ tale che

$$\bar{\mathcal{C}} = \sup_{\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times[0,1]} -\mathcal{C}_u = -\mathcal{C}_u(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}).$$

Analogamente alla dimostrazione del Teorema (3.3) limitiamoci al caso in cui $\bar{x} \neq \bar{y}$ e $\bar{\lambda} \in (0,1)$ poichè il teorema risulta banalmente dimostrato nei casi rimanenti. Considerando che $u \in C^1(\Omega)$, nel punto di massimo interno si verifica che $-\nabla\mathcal{C}_u(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) = 0$, ovvero più esplicitamente[14]

$$-\frac{\partial \mathcal{C}_u(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda})}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{C}_u(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda})}{\partial y} = 0.$$

Tramite semplici calcoli, ponendo $\bar{z} = (1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}$, otteniamo le seguenti espressioni esplicite:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{C}_u(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda})}{\partial x} &= (1-\lambda)\nabla u(\bar{x}) - (1-\lambda)\nabla u(\bar{z}) = 0, \\ -\frac{\partial \mathcal{C}_u(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda})}{\partial y} &= \lambda\nabla u(\bar{y}) - \lambda\nabla u(\bar{z}) = 0, \end{aligned}$$

da cui ricaviamo immediatamente che il gradiente della funzione u deve essere identico nei tre punti $\bar{x}, \bar{y}$ e $\bar{z}$ considerati:

$$\nabla u(\bar{z}) = \nabla u(\bar{x}) = \nabla u(\bar{y}). \tag{4.7}$$

Considerando inoltre che $u \in C^2(\Omega)$ la matrice hessiana $-\nabla^2\mathcal{C}_u$ della funzione $-\mathcal{C}_u$ deve essere semidefinita negativa nel punto di massimo $(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda})$, ovvero sinteticamente

$$-\nabla^2\mathcal{C}_u(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) := -\begin{bmatrix} \nabla^2_x\mathcal{C}_u & \nabla^2_{xy}\mathcal{C}_u \\ \nabla^2_{yx}\mathcal{C}_u & \nabla^2_y\mathcal{C}_u \end{bmatrix}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) \leq 0,$$

dove abbiamo denotato con ∇^2_x la parte di matrice hessiana corrispondente alle derivate parziali seconde rispetto alla variabile x e similmente gli altri termini. Definiamo ora $\forall s,t \in \mathbb{R}$ una matrice simmetrica $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ nel seguente modo:

$$B := \begin{bmatrix} s^2A & stA \\ stA & t^2A \end{bmatrix}.$$

[12] Analogamente, in riferimento all'Osservazione (3.2), in un punto interno all'insieme Ω.

[13] Il sup risulta dunque un max.

[14] Anche se non necessario, specifichiamo il segno meno in tutte le espressioni in cui compare la funzione $-\mathcal{C}_u$ in accordo con la convenzione fissata in questo capitolo sulla *funzione di concavità*.

Tramite semplici calcoli matriciali otteniamo il seguente risultato:

$$-B\nabla^2\mathcal{C}_u = -\begin{bmatrix} s^2A\nabla^2_x\mathcal{C}_u + st\nabla^2_{xy}\mathcal{C}_u & s^2A\nabla^2_{xy}\mathcal{C}_u + st\nabla^2_y\mathcal{C}_u \\ stA\nabla^2_x\mathcal{C}_u + t^2\nabla^2_{xy}\mathcal{C}_u & stA\nabla^2_{yx}\mathcal{C}_u + t^2\nabla^2_y\mathcal{C}_u \end{bmatrix}.$$

La matrice B è evidentemente semidefinita positiva come la matrice A, pertanto otteniamo[15] che $tr(-B\nabla^2\mathcal{C}_u) \leq 0$. Questo risultato può essere riscritto esplicitamente nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \alpha s^2 + 2\beta st + \gamma t^2 \leq 0, \tag{4.8}$$

dove abbiamo sinteticamente denotato con α, β e γ le seguenti quantità:

$$\alpha = Tr(-A\nabla^2_x\mathcal{C}_u), \quad \beta = Tr(-A\nabla^2_{xy}\mathcal{C}_u), \quad \gamma = Tr(-A\nabla^2_y\mathcal{C}_u).$$

Posto ora per definizione $Q_w := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(\nabla u(w))\partial^2_{ij}u(w)$ al variare di $w = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \Omega$ otteniamo tramite calcoli espliciti che

$$\begin{aligned} \alpha &= (1-\bar{\lambda})Q_{\bar{x}} - (1-\bar{\lambda})^2 Q_{\bar{z}}, \\ \beta &= -\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})Q_{\bar{z}}, \\ \gamma &= \bar{\lambda}Q_{\bar{y}} - \bar{\lambda}^2 Q_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Dato che la forma quadratica (4.8) determinata dalla matrice D deve essere semidefinita negativa, deduciamo che devono essere valide le seguenti condizioni[16]:

$$\begin{aligned} tr(D) &= \alpha + \gamma \leq 0 \implies \alpha, \gamma \leq 0, \\ det(D) &= \alpha\gamma - \beta^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Tenendo presente che per ipotesi $\bar{\lambda} \in (0,1)$, esplicitiamo le espressioni appena ricavate rispettivamente nel seguente modo:

$$Q_{\bar{z}} \geq \frac{Q_{\bar{x}}}{1-\bar{\lambda}}, \tag{4.9}$$

$$Q_{\bar{z}} \geq \frac{Q_{\bar{y}}}{\bar{\lambda}}, \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} &[(1-\bar{\lambda})Q_{\bar{x}} - (1-\bar{\lambda})^2 Q_{\bar{z}}](\bar{\lambda}Q_{\bar{y}} - \bar{\lambda}^2 Q_{\bar{z}}) - \bar{\lambda}^2(1-\bar{\lambda})^2 Q_{\bar{z}}^2 = \\ &= \bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})[(1-\bar{\lambda})Q_{\bar{y}}Q_{\bar{z}} + \bar{\lambda}Q_{\bar{x}}Q_{\bar{z}} - Q_{\bar{x}}Q_{\bar{y}}] \geq 0 \\ &\iff \end{aligned}$$

[15] Questo risultato deriva da una semplice proprietà tipica dell'Algebra Lineare: date due matrici simmetriche $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ rispettivamente semidefinita positiva e negativa, il loro prodotto matriciale $A \cdot B$ è una matrice semidefinita negativa, pertanto $tr(A \cdot B) \leq 0$. Tramite la diagonalizzazione delle due matrici la dimostrazione risulta immediata.

[16] L'implicazione contenuta nella prima condizione deriva immediatamente dalla definizione di α e γ, anche se in generale non è assolutamente vera.

$$Q_{\bar{x}}Q_{\bar{y}} \geq Q_{\bar{z}}[(1-\bar{\lambda})Q_{\bar{y}} + \bar{\lambda}Q_{\bar{x}}]. \tag{4.11}$$

Nel caso in cui $(1-\bar{\lambda})Q_{\bar{y}} + \bar{\lambda}Q_{\bar{x}} \geq 0$, combinando la (4.9) con la (4.11), otteniamo che

$$Q_{\bar{x}}Q_{\bar{y}} \geq Q_{\bar{z}}[(1-\bar{\lambda})Q_{\bar{y}} + \bar{\lambda}Q_{\bar{x}}] \geq Q_{\bar{x}}Q_{\bar{y}} + \frac{\bar{\lambda}Q_{\bar{x}}^2}{1-\bar{\lambda}},$$

da cui si deduce che deve essere $Q_{\bar{x}} = 0$. Similmente, combinando la (4.10) con la (4.11), tramite calcoli analoghi deduciamo che deve essere $Q_{\bar{y}} = 0$. Si distinguono pertanto due casi differenti: $(1-\bar{\lambda})Q_{\bar{y}} + \bar{\lambda}Q_{\bar{x}} < 0$ oppure $Q_{\bar{x}} = Q_{\bar{y}} = 0$. Nel primo caso dalla (4.11) ricaviamo che

$$Q_{\bar{z}} \geq \frac{Q_{\bar{x}}Q_{\bar{y}}}{(1-\bar{\lambda})Q_{\bar{y}} + \bar{\lambda}Q_{\bar{x}}}.$$

Nel secondo caso, indifferentemente dalla (4.9) o (4.10), otteniamo invece che $Q_{\bar{z}} \geq 0$. Applicando ora l'equazione (4.6) deduciamo che

$$Q_{\bar{z}} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(\nabla u(\bar{z}))\frac{\partial^2 u(\bar{z})}{\partial x_i \partial x_j} = -b(\bar{z}, u(\bar{z}), \nabla u(\bar{z})) < ...$$

Dall'ipotesi $\bar{\mathcal{C}} > 0$ ricaviamo che $u(\bar{z}) < (1-\bar{\lambda})u(\bar{x}) + \bar{\lambda}u(\bar{y})$, pertanto applicando le ipotesi (I) e (II) sulla funzione b[17] la catena di disuguaglianze procede nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
... < &- b((1-\bar{\lambda})x + \bar{\lambda}y, (1-\bar{\lambda})u(\bar{x}) + \bar{\lambda}u(\bar{y})) \leq \\
\leq &\begin{cases} -\dfrac{b(\bar{x})b(\bar{y})}{(1-\bar{\lambda})b(\bar{y}) + \bar{\lambda}b(\bar{x})} < 0 & (1-\bar{\lambda})b(\bar{y}) + \bar{\lambda}b(\bar{x}) \\ 0 & b(\bar{x}) = b(\bar{y}) = 0 \end{cases} \\
= &\begin{cases} \dfrac{Q_{\bar{x}}Q_{\bar{y}}}{(1-\bar{\lambda})Q_{\bar{y}} + \bar{\lambda}Q_{\bar{x}}} & (1-\bar{\lambda})Q_{\bar{y}} + \bar{\lambda}Q_{\bar{x}} < 0 \\ 0 & Q_{\bar{x}} = Q_{\bar{y}} = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Le disuguaglianze appena ottenute sono però entrambe in contraddizione con quelle precedentemente ricavate per $Q_{\bar{z}}$ nei due casi distinti, pertanto abbiamo ottenuto un assurdo. La dimostrazione è conclusa, in quanto $\bar{\mathcal{C}}$ non viene raggiunto in un punto appartenente all'insieme $\Omega \times \Omega \times [0, 1]$. □

Questa nuova formulazione del *principio del massimo per la concavità generalizzato (PMC II)* ci consente immediatamente di determinare l'eventuale proprietà di α-concavità delle soluzioni di determinate PDEs al variare del parametro α in un opportuno intervallo. Enunciamo alcuni teoremi inerenti quanto appena accennato.

[17] Nei calcoli successivi eliminiamo esplicitamente la dipendenza della funzione b dalle variabili u e ∇u per non appesantire la notazione. Ciononostante, il significato delle equazioni rimane inalterato grazie al risultato (4.7) precedentemente ottenuto.

Il primo teorema proposto stabilisce quali ulteriori condizioni rispetto al Teorema (4.7) debba verificare la soluzione u dell'equazione (4.6) affinchè risulti semplicemente concava[18].

4.8 Teorema. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso, sia definita una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che siano verificate tutte le ipotesi del Teorema (4.7). Supponiamo inoltre che valga la disuguaglianza*

$$u(y) - u(x) < \limsup_{t \to 0^+} t^{-1} \left[u((1-t)x + ty) - u(x) \right] \tag{4.12}$$

$\forall x \in \partial\Omega$ e $\forall y \in \bar{\Omega}$ tali che il segmento congiungente i due punti considerati non sia interamente contenuto in $\partial\Omega$, ovvero $[x, y] \not\subset \partial\Omega$. Allora la funzione u è concava sull'insieme $\bar{\Omega}$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che u non sia concava sull'insieme $\bar{\Omega}$, equivalentemente dalla caratterizzazione (4.2) che si abbia $\bar{\mathcal{C}} > 0$. Dall'ipotesi di regolarità $u \in C(\bar{\Omega})$ deduciamo che la funzione di convessità $-\mathcal{C}_u$ è continua sull'insieme chiuso e limitato $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, che è dunque un compatto: applicando pertanto il *Teorema di Weierstrass* deduciamo che la funzione $-\mathcal{C}_u$ ammette massimo assoluto su tale insieme, ovvero esiste un punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [0, 1]$ tale che

$$\max_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [0,1]} -\mathcal{C}_u = -\mathcal{C}_u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) = \bar{\mathcal{C}}.$$

Escludiamo immediatamente i casi in cui $\bar{x} = \bar{y}$, $\bar{\lambda} = 0$ oppure $\bar{\lambda} = 1$ in quanto risulterebbe per assurdo vera l'uguaglianza $\bar{\mathcal{C}} = -\mathcal{C}_u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) = 0$. Applicando il Teorema (4.7) si deduce necessariamente che $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) \notin \Omega \times \Omega \times [0, 1]$, pertanto l'unica altra possibilità rimanente[19] è che $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) \in \partial\Omega \times \bar{\Omega} \times (0, 1)$. Escludiamo inoltre il caso in cui $[\bar{x}, \bar{y}] \subset \partial\Omega$ in quanto avremmo nuovamente per assurdo $\bar{\mathcal{C}} = 0$.
Dall'ipotesi (4.12) ricaviamo che esiste $\tau \in (0, \bar{\lambda})$ tale che

$$u(\bar{y}) - u(\bar{x}) < \frac{[u((1-\tau)\bar{x} + \tau\bar{y}) - u(\bar{x})]}{\tau} \qquad \Longrightarrow \qquad u((1-\tau)\bar{x} + \tau\bar{y}) > (1-\tau)u(\bar{x}) + \tau u(\bar{y}).$$

Poniamo per definizione $s := (1-\tau)\bar{x} + \bar{y} \in \Omega$ e $\mu := \frac{\bar{\lambda} - \tau}{1 - \tau} \in (0, \bar{\lambda})$ in modo che valga la seguente uguaglianza:

$$(1-\mu)s + \mu\bar{y} = \left(\frac{1 - \bar{\lambda}}{1 - \tau} \right) [(1-\tau)\bar{x} + \tau\bar{y}] + \left(\frac{\bar{\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \bar{y} = (1 - \bar{\lambda})\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{y}.$$

Utilizzando ora la disuguaglianza precedentemente ottenuta, tramite semplici calcoli ricaviamo

[18] Equivalentemente α-concava per $\alpha = 1$.

[19] La discussione del caso simmetrico $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) \in \bar{\Omega} \times \partial\Omega \times (0, 1)$ è del tutto analoga a quella svolta nel resto della dimostrazione, pertanto viene omessa.

dunque che

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{C}_u(s,\bar{y},\mu) &= (1-\mu)u(s)+\mu u(\bar{y})-u((1-\mu)s+\mu\bar{y}) > \\
&> (1-\mu)[(1-\tau)u(\bar{x})+\tau u(\bar{y})]+\mu u(\bar{y})-u((1-\mu)s+\mu\bar{y}) = \\
&= (1-\mu)(1-\tau)u(\bar{x})+[(1-\mu)\tau+\mu]u(\bar{y})-u((1-\mu)s+\mu\bar{y}) = \\
&= (1-\bar{\lambda})u(\bar{x})+\bar{\lambda}u(\bar{y})-u((1-\bar{\lambda})\bar{x}+\bar{\lambda}\bar{y}) = \\
&= -\mathcal{C}_u(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) = \bar{\mathcal{C}}.
\end{aligned}
$$

Questo fatto è tuttavia in contraddizione con l'ipotesi di massimalità di $\bar{\mathcal{C}}$. Ottenuto l'assurdo, deduciamo dunque che deve essere $\bar{\mathcal{C}} = 0$, condizione che stabilisce la concavità della funzione u sull'insieme $\bar{\Omega}$. □

Il secondo teorema propone invece le corrispondenti condizioni che la funzione u deve ulteriormente verificare per essere α-concava al variare di $\alpha \in (0,1]$.

4.9 Teorema. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso, sia definita una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che soddisfi le seguenti condizioni:*

$$
u_{|\Omega} > 0 \quad e \quad u_{|\partial\Omega} = 0. \tag{4.13}
$$

Sia dunque u soluzione della seguente PDE ellitica:

$$
\Delta u + b(x,u,\nabla u) = 0, \tag{4.14}
$$

dove la funzione $b : \Omega \times (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \to (0,+\infty)$ soddisfa le seguenti condizioni:

$$
(I) \quad \forall x \in \Omega,\ \forall p \in \mathbb{R}^n \quad t^{\alpha-1}b(x,t,t^{1-\alpha}p) \ \textit{strettamente decrescente nella variabile } t,
$$

$$
(II) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \quad s^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}}b(x,s^{\frac{1}{\alpha}},s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}p) \ \textit{"congiuntamente" concava nelle variabili } (x,s).
$$

Supponiamo che $\forall x \in \partial\Omega$, $\forall y \in \Omega$ e $\forall \alpha \in (0,1]$ valga inoltre la seguente condizione:

$$
(III) \quad \limsup_{t\to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}}u((1-t)x+ty) > u(y).
$$

Allora la funzione u è α-concava sull'insieme $\bar{\Omega}$ per $\alpha \in (0,1]$.

Dimostrazione. L'obiettivo della dimostrazione è applicare il Teorema (4.8) alla funzione ausiliaria $v := u^\alpha$ per ottenere il risultato desiderato. Innanzitutto calcoliamo esplicitamente i seguenti termini:

$$
\Delta u = \Delta(v^{\frac{1}{\alpha}}) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}\left(v^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}\right)\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{\alpha}\left(v^{\frac{1}{\alpha}}\right)\Delta v,
$$

$$
b(x,u,\nabla u) = b\left(x, v^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{1}{\alpha}\left(v^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)\nabla v\right).
$$

Otteniamo dunque che la funzione v deve verificare la seguente equazione:

$$\Delta v + \beta(x, v, \nabla v) = 0, \tag{4.15}$$

dove la funzione $\beta : \Omega \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$ è definita esplicitamente nel seguente modo:

$$\beta(x, s, p) := \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\frac{1}{s}\right) \|p\|^2 + \alpha \left(s^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right) b\left(x, s^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{1}{\alpha}\left(s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) p\right).$$

Essendo l'equazione (4.15) della stessa forma dell'equazione (4.6), procediamo ora verificando che la funzione β soddisfa le ipotesi (I) e (II) del Teorema (4.7):

- ► $\forall x \in \Omega$ e $\forall p \in \mathbb{R}^n$ il primo termine $\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{1}{s}\right)\|p\|^2$ è strettamente decrescente rispetto alla variabile s in quanto $\alpha \in (0, 1]$, mentre applicando la sostituzione $t = s^{\frac{1}{\alpha}}$ otteniamo che il secondo termine

$$\alpha \left(s^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right) b\left(x, s^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{1}{\alpha}\left(s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) p\right) = \alpha t^{\alpha-1} b\left(x, t, \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha} p\right)$$

  è strettamente decrescente nella variabile t per l'ipotesi (I) di questo teorema[20]. Globalmente la funzione $\beta(x, s, p)$ deve dunque essere strettamente decrescente nella variabile s poichè somma di termini con la medesima proprietà.

- Per dimostrare che $\forall p \in \mathbb{R}^n$ la funzione strettamente positiva $\beta(x, s, p)$ è *armonicamente concava* congiuntamente nelle variabili (x, s) utilizziamo la caratterizzazione (4.3) verificando semplicemente che la funzione $\frac{1}{\beta(x,s,p)}$ è convessa nelle stesse variabili. Poniamo per comodità

$$\frac{1}{\beta(x, s, p)} = \alpha s^2 \frac{1}{\gamma(x, s, p)},$$

  dove risulta definita la funzione

$$\gamma(x, s, p) := (1-\alpha)s\|p\|^2 + \alpha^2 \left(s^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}}\right) b\left(x, s^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{1}{\alpha}\left(s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) p\right).$$

  Il primo termine $(1-\alpha)s\|p\|^2$ è evidentemente concavo nelle varibili (x, s), mentre il secondo termine è anch'esso concavo per l'ipotesi (II) di questo teorema: pertanto la funzione strettamente positiva γ risulta congiuntamente concava nelle varaibili (x, s) in quanto somma di termini con la medesima proprietà.
  Consideriamo ora due generici punti $x, y \in \Omega$ tale che $z = (1-\lambda)z + \lambda y$ e due generici valori $l, m \in \mathbb{R}$ tali che $n = (1-\lambda)m + \lambda n$ con $\lambda \in [0, 1]$. Tramite semplici calcoli, sapendo che la funzione[21] $\gamma(x, s)$ è congiuntamente concava nelle variabili (x, s), otteniamo

[20] A meno dei coefficienti $\alpha > 0$ e $\frac{1}{\alpha} > 0$ che non influiscono sulla proprietà dell'ipotesi.
[21] Omettiamo la dipendenza della funzione γ dalla variabile p in quanto il risultato da ottenere deve essere valido $\forall p \in \mathbb{R}^n$.

dunque la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)l^2\frac{1}{\gamma(x,l)}+\lambda m^2\frac{1}{\gamma(y,m)}-n^2\frac{1}{\gamma(z,n)}\geq\\
\geq&(1-\lambda)l^2\frac{1}{\gamma(x,l)}+\lambda m^2\frac{1}{\gamma(y,m)}-n^2\frac{1}{(1-\lambda)\gamma(x,l)+\lambda\gamma(y,m)}=\\
=&\frac{(1-\lambda)^2l^2+\lambda^2m^2+\lambda(1-\lambda)\left[l^2\frac{\gamma(y,m)}{\gamma(x,l)}+m^2\frac{\gamma(x,l)}{\gamma(y,m)}\right]-n^2}{(1-\lambda)\gamma(x,l)+\lambda\gamma(y,m)}=\\
=&\frac{\lambda(1-\lambda)\left[l^2\gamma(y,m)^2+m^2\gamma(x,l)^2-2lm\gamma(x,l)\gamma(y,m)\right]}{\gamma(x,l)\gamma(y,m)[(1-\lambda)\gamma(x,l)+\lambda\gamma(y,m)]}=\\
=&\frac{\lambda(1-\lambda)(l\gamma(y,m)-m\gamma(x,l))^2}{\gamma(x,l)\gamma(y,m)[(1-\lambda)\gamma(x,l)+\lambda\gamma(y,m)]}\geq 0.
\end{aligned}$$

Da quest'ultima deduciamo infine che la funzione $\frac{1}{\beta(x,s,p)}=\alpha s^2\frac{1}{\gamma(x,s,p)}$ è convessa congiuntamente nelle variabili (x,s).

Ora che le ipotesi del Teorema (4.7) sono verificate, manca da verificare l'ipotesi (4.12) del Teorema (4.8). Sapendo che $u_{|\Omega}=0$ ed osservando che $t^{-1}v=(t^{-\frac{1}{\alpha}}u)^\alpha$, ricaviamo facilmente dall'ipotesi (III) di questo teorema che $\forall y\in\Omega$ vale l'implicazione

$$u(y)<\limsup_{t\to 0^+}t^{-\frac{1}{\alpha}}u((1-t)x+ty)$$

$$\Downarrow$$

$$v(y)=u(y)^\alpha<\limsup_{t\to 0^+}t^{-1}\left[u((1-t)x+ty)^\alpha\right]=\limsup_{t\to 0^+}t^{-1}\left[v((1-t)x+ty)\right].$$

Essendo verificate tutte le ipotesi, possiamo pertanto applicare il Teorema (4.8) ed affermare infine che la funzione v è concava, ovvero che u è α-concava sull'insieme $\bar{\Omega}$, risultato che conclude la dimostrazione. □

4.10 Osservazione. Il Teorema (4.9) appena dimostrato fornisce un'applicazione notevole del *principio del massimo per la concavità generalizzato (PMC II)* esclusivamente nei casi in cui $\alpha\in(0,1]$.
Per quanto riguarda il caso $\alpha=0$ il Teorema (3.9) enunciato nel capitolo precedente fornisce una relativa applicazione, determinando infatti un risultato di *log-concavità* per la soluzione u del *problema agli autovalori generalizzato* (3.9).
Analizzando invece il caso limite $\alpha=1$, il teorema appena dimostrato fornisce un risultato simile a quello del Teorema (4.8). Ciononostante, la condizione (II) richiesta dal Teorema (4.9) implica direttamente la corrispondente condizione[22] del Teorema (4.8) in virtù della (4.4). Per tali motivi nel caso $\alpha=1$ il Teorema (4.8) risulta più forte e generale se confrontato con quello appena dimostrato.

[22]Di fatto coincide con la condizione (II) del Teorema (4.7).

Nei casi restanti in cui $\alpha \notin [0,1]$ sembra non sia possibile determinare un'applicazione interessante delle tecniche dimostrative introdotte in questo capitolo, suggerendo il fatto che il vincolo $\alpha \in [0,1]$ non sia valicabile.

4.3 Alcune applicazioni: problemi differenziali con soluzioni α-concave

In quest'ultima sezione proponiamo alcune applicazioni interessanti dei teoremi precedentemente dimostrati per particolari *problemi differenziali al contorno*, fornendo ulteriori risultati riguardo l'eventuale α-concavità delle relative soluzioni per determinati valori del parametro α.

4.3.1 Problemi differenziali con soluzioni α-concave

4.11 Teorema. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso, sia definita una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che soddisfi le seguenti condizioni:*

$$u_{|\Omega} > 0 \quad e \quad u_{|\partial\Omega} = 0.$$

Sia dunque u soluzione della seguente PDE ellittica:

$$\Delta u + f(x) = 0,$$

dove la funzione $f : \Omega \to (0, +\infty)$ è β-concava per $\beta \in [1, +\infty)$. Allora la funzione u è α-concava sull'insieme $\bar{\Omega}$ per $\alpha = \frac{\beta}{1+2\beta}$.

Dimostrazione. L'obiettivo della dimostrazione è applicare il Teorema (4.9) alla funzione u, verificando innanzitutto che la funzione[23] $b(x, s, p) = f(x)$ soddisfi le relative ipotesi (I), (II) e (III).

- ▶ Innanzitutto $\forall x \in \Omega$ e $\forall p \in \mathbb{R}^n$ otteniamo che la funzione $t^{\alpha-1}b(x, t, t^{1-\alpha}p) = t^{1-\alpha}f(x)$ è strettamente decrescente nella variabile t solamente se[24] $\alpha < 1$ e $f(x) > 0$, condizioni entrambe sempre verificate.
- ▶ $\forall p \in \mathbb{R}^n$ la funzione $s^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}} b(x, s^{\frac{1}{\alpha}}, s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}p) = s^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}} f(x)$ deve risultare concava congiuntamente nelle variabili (x, s). Notiamo infatti che la funzione $s^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}}$ è banalmente $\left(\frac{\alpha}{3\alpha-1}\right)$-concava nella variabile s esclusivamente[25] per $\alpha \geq \frac{1}{3}$ e che la funzione f è β-concava nella

[23] In questo caso particolare la funzione $b(x, s, p)$ non dipende esplicitamente nè dalla variabile s nè dalla variabile p, pertanto valuteremo solamente la variabile $x \in \Omega$.

[24] Per la verifica della condizione $\alpha < 1$ si rimanda all'Osservazione (4.12).

[25] Nel caso $\alpha < \frac{1}{3}$ l'esponente diventa negativo e la funzione risulterebbe convessa, contrariamente a quanto richiesto. É ammesso anche il caso limite $\alpha = \frac{1}{3}$ in cui la funzione risulta $(+\infty)$-concava, ovvero costante.

variabile x per ipotesi. Pertanto per la Proprietà (7) della Proposizione (4.5) otteniamo che il prodotto $s^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}} f(x)$ è una funzione γ-concava congiuntamente nelle variabili[26] (x, s) con

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{3\alpha - 1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{3\alpha - 1}{\alpha} + \frac{1 - 2\alpha}{\alpha} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 1.$$

- In generale un insieme convesso Ω non verifica necessariamente la condizione (ISC) salvo regolarità maggiori. Topologicamente tuttavia, senza fornire dettagli specifici, sappiamo che esiste una successione crescente $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di insiemi convessi, tutti verificanti la condizione (ISC), tali che $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$. Possiamo dunque definire su ciascun Ω_i una funzione $u_i \in C^2(\Omega_i) \cap C(\bar{\Omega}_i)$ con la condizione $u_{i|\Omega_i} = 0$ tale che sia soluzione della seguente equazione differenziale:

$$\Delta u_i + f(x) = 0.$$

Sapendo che $\Delta u_i = -f(x) < 0$ deduciamo dal *principio del massimo (forma debole)* (1.7) che

$$\min_{\bar{\Omega}_i} u_i = \min_{\partial\Omega_i} u_i = 0.$$

Possiamo pertanto applicare[27] il *Lemma di Hopf* (1.9), prestando però attenzione al seguente fatto: dato che la funzione u è solamente $C(\bar{\Omega}_i)$ e non ha regolarità maggiore, il limite che definisce la sua derivata normale è in realtà un lim sup, ovvero $\forall x_0 \in \partial\Omega_i$ otteniamo esplicitamente che

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} := \limsup_{t\to 0^+} \frac{u(x_0 + t\nu) - u(x_0)}{t},$$

dove $\nu \in \mathbb{R}^n$ denota il versore normale interno a Ω_i. Tramite alcuni semplici calcoli otteniamo che per $\forall x \in \partial\Omega_i$ e $\forall y \in \Omega_i$ è sempre verificata anche la seguente condizione:

$$\begin{aligned} u_i(y) &< \limsup_{t\to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}} u_i((1-t)x + ty) = \limsup_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\frac{u_i(x + t(y-x)}{t}\right] = \\ &= \limsup_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \cdot \limsup_{t\to 0^+} \frac{u_i(x + t(y-x)) - u_i(x)}{t} = \limsup_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \underbrace{\frac{\partial u_i(x)}{\partial \nu}}_{>0} = +\infty. \end{aligned}$$

Avendo dunque verificato tutte le ipotesi, possiamo applicare il Teorema (4.9) ottenendo che $\forall i \in \mathbb{N}$ la funzione u_i è α-concava sull'insieme $\bar{\Omega}_i$ per $\alpha = \frac{\beta}{1+2\beta}$. Sapendo infine che $\forall x \in \bar{\Omega}$ vale il seguente limite

$$u(x) = \lim_{i\to+\infty} u_i(x),$$

[26]Questo accade esclusivamente per il fatto che le due funzioni dipendono separatamente ed indipendentemente dalle variabili x e s come precedentemente osservato.

[27]Il *Lemma di Hopf* è applicabile $\forall x \in \partial\Omega_i$ poichè $u_{|\partial\Omega_i} = 0$, ovvero tutti i punti del bordo risultano di minimo assoluto per la funzione u.

per la Proprietà (5) della proposizione (4.5) otteniamo che anche la funzione u è *α-concava* sull'insieme $\bar{\Omega}$ per $\alpha = \frac{\beta}{1+2\beta}$. La dimostrazione è dunque conclusa. □

4.12 Osservazione. Il Teorema (4.11) prevede che la funzione f debba essere β-concava con la limitazione $\beta \in [1, +\infty)$. In realtà la dimostrazione è estendibile in modo naturale anche al caso $\beta = +\infty$, quando cioè la funzione f diventa costante e la funzione u risulta essere α-concava con

$$\alpha = \lim_{\beta \to +\infty} \frac{\beta}{1+2\beta} = \frac{1}{2}.$$

Tenendo inoltre presente che per svolgere alcuni passaggi della dimostrazione abbiamo dovuto limitarci al caso $\alpha \geq \frac{1}{3}$, condizione coerente con l'ipotesi assegnata $\beta \in [1, +\infty)$, in definitiva il teorema precedente può essere applicato e quindi determinare la proprietà di α-concavità della funzione u esclusivamente quando $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

4.13 Osservazione. Scegliendo $f \equiv 1$ nel caso limite $\beta = +\infty$ otteniamo esattamente il problema relativo all'*equazione di torsione* (1.1) studiato nel Capitolo 1. Nel Teorema (1.16) avevamo mostrato che la funzione $\sqrt{u}$ è concava sull'insieme Ω, dove u denota la soluzione dell'equazione (1.1)

$$\Delta u(x) + f(x) = \Delta u + 1 = 0$$

con la condizione al bordo $u_{|\partial\Omega} = 0$. Utilizzando invece il Teorema (4.11) appena dimostrato possiamo affermare che la funzione u è $\left(\frac{1}{2}\right)$*-concava* sull'insieme $\bar{\Omega}$, risultato totalmente equivalente a quello precedentemente ottenuto. Per questa ragione possiamo asserire che il Teorema (4.11) rappresenta una valida alternativa analitica al procedimento dimostrativo originariamente utilizzato per studiare l'*equazione di torsione* (1.1), applicabile inoltre ad equazioni generalizzate analoghe alla (1.4).

4.14 Teorema. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso tale che soddisfi la condizione di sfera interna (ISC), sia definita una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che soddisfi le seguenti condizioni:*

$$u_{|\Omega} > 0 \quad e \quad u_{|\partial\Omega} = 0.$$

Supponiamo inoltre che u sia soluzione della seguente PDE ellittca:

$$\Delta u + h(u(x)) = 0,$$

dove la funzione $h : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ soddisfa $\forall \alpha \in (0, 1)$ le seguenti condizioni:

$$(I) \quad t^{\alpha-1} h(t) \ \textit{strettamente decrescente nella variabile } t,$$

$$(II) \quad s^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}} h(s^{\frac{1}{\alpha}}) \ \textit{concava nella variabile } s.$$

Allora la funzione u è α-concava sull'insieme $\bar{\Omega}$.

Dimostrazione. L'obiettivo della dimostrazione è applicare nuovamente il Teorema (4.9) alla funzione u, verificando innanzitutto che la funzione[28] $b(x,s,p) = h(s)$ soddisfi le relative ipotesi (I), (II) e (III).

- Innanzitutto $\forall x \in \Omega$ e $\forall p \in \mathbb{R}^n$ otteniamo che la funzione $t^{\alpha-1}b(x,t,t^{1-\alpha}p) = t^{\alpha-1}h(t)$ è strettamente decrescente nella variabile t per l'ipotesi (I) di questo teorema.
- $\forall p \in \mathbb{R}^n$ la funzione $s^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}}b(x,s^{\frac{1}{\alpha}},s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}p) = s^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}}h(s^{\frac{1}{\alpha}})$ è concava nella variabile s per l'ipotesi (II) di questo teorema.
- Sapendo che l'insieme Ω verifica la condizione (ISC) e che $\Delta u = -h(u(x)) < 0$, possiamo applicare il *Lemma di Hopf* (1.9) ed ottenere analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema (4.11) la validità dell'ipotesi (III) del Teorema (4.9), ovvero che $\forall x \in \partial\Omega$ e $\forall y \in \Omega$ vale la seguente condizione:

$$\limsup_{t\to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}}u((1-t)x+ty) > u(y).$$

Verificate dunque tutte le ipotesi, possiamo applicare il Teorema (4.9) ottenendo che la funzione u è α-concava sull'insieme $\bar{\Omega}$, risultato che conclude la dimostrazione. $\square$

4.15 Osservazione. Fissato un generico valore $k > 0$ e posto per definzione $\gamma := 1 - 2\alpha \in (0,1)$ con la condizione $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, definiamo esplicitamente la funzione h introdotta nel teorema precedente nel seguente modo:

$$h(t) = kt^{\gamma}.$$

Osserviamo che sono evidentemente verificate le seguenti condizioni:

$$t^{\alpha-1}h(t) = kt^{\gamma+\alpha-1} = kt^{-\alpha} \quad \text{strettamente decrescente nella variabile } t,$$

$$s^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}}h(s^{\frac{1}{\alpha}}) = ks^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}} = ks \quad \text{concava nella variabile } s.$$

Applicando pertanto il Teorema (4.14) deduciamo che la funzione u è α-concava sull'insieme $\bar{\Omega}$ con $\alpha = \frac{1}{2}(1-\gamma)$.
Più dettagliatamente, osserviamo che il caso limite $\gamma = 0$ identifica il *problema di torsione elastica* (1.4)

$$\Delta u + k = 0$$

che corrisponde esattamente al *problema di torsione* (1.1) quando scegliamo $k = 1$: in tal caso la funzione u risulta infatti $(\frac{1}{2})$-concava, coerentemente con quanto precedentemente osservato in (4.13).

[28]In quest'altro caso particolare la funzione b non dipende esplicitamente nè dalla variabile x nè dalla variabile p, pertanto valuteremo solamente la variabile $s \in (0,+\infty)$.

Notiamo invece che il caso limite $\gamma = 1$, ponendo per comodità $k = \lambda > 0$, corrisponde esattamente al *problema agli autovalori per l'operatore di Laplace* (2.1)

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

introdotto nel Teorema (2.19) ed analizzato ulteriormente nell'Osservazione (3.10): anche in questo caso particolare la funzione u risulta *log-concava* analogamente a quanto dimostrato nel Teorema (2.19).
In conclusione il Teorema (4.14) appena verificato rappresenta un'alternativa analitica estremamente rilevante rispetto ai procedimenti dimostrativi precedentemente sviluppati per lo studio di determinati problemi differenziali.

4.3.2 Risultati di non α-concavità.

Concludiamo il capitolo proponendo due teoremi utili per verificare che sotto opportune condizioni determinate funzioni non possono essere α-concave. In particolare mostriamo che il Teorema (4.11) non può ammettere un risultato rilevante di *α-concavità* per $\alpha > \frac{\beta}{1+2\beta}$, valore che dunque rappresenta un limite invalicabile per applicazioni di questo genere.

4.16 Teorema. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso, sia definita una funzione $u \in C(\bar{\Omega})$ tale che soddisfi le seguenti condizioni:*

$$u_{|\Omega} > 0 \quad e \quad u_{|\partial\Omega} = 0.$$

Dato un parametro $\alpha > 0$, supponiamo che $\forall x \in \partial\Omega$ e $\forall y \in \Omega$ valga inoltre la seguente condizione:

$$\liminf_{t\to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}} u((1-t)x + ty) = 0. \tag{4.16}$$

Allora la funzione u non è α-concava sull'insieme Ω.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la funzione u sia α-concava sull'insieme Ω, ovvero che $\forall t \in (0,1)$ valga la disuguaglianza

$$u^\alpha((1-t)x + ty) \geq (1-t)u^\alpha(x) + tu^\alpha(y) = tu^\alpha(y),$$

dove abbiamo preso $x \in \partial\Omega$ e $y \in \Omega$. Sapendo che la funzione $\{z \mapsto z^{\frac{1}{\alpha}}\}$ è crescente per $\alpha > 0$, deduciamo immediatamente che

$$t^{-\frac{1}{\alpha}} u((1-t)x + ty) \geq u(y) > 0.$$

Passando ora al lim inf per $t \to 0^+$ ad entrambi i membri otteniamo la disuguaglianza

$$\liminf_{t\to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}} u((1-t)x + ty) = u(z) > 0,$$

che è però in contraddizione con l'ipotesi (4.16) del teorema. La funzione u non può essere dunque α-concava sull'insieme Ω, risultato che conclude la dimostrazione. $\square$

Introuciamo ora alcuni concetti necessari per la dimostrazione del teorema successivo. Prendiamo un generico vettore $x \in \mathbb{R}^n$ e denotiamo la sua i-esima componente in $\mathbb{R}^n$ con $x_i = x \cdot e_i$, dove e_i corrisponde all'i-esimo versore della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Definito il vettore $x' := x - x_n e_n$, introduciamo un *cono aperto infinito* $K := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x'\| < l x_n\}$ con $l \in (0, 1)$.

4.17 Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso tale che $\Omega \subset K$, $0 \in \Omega$ e $e_n \in \Omega$. Sia definita una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che $u_{|\partial\Omega} = 0$. Posto $\beta \in [1, +\infty)$, supponiamo che u sia soluzione in Ω della seguente PDE ellittica:*

$$\Delta u + f(x) = 0,$$

dove la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è della forma

$$f(x) = k x_n^q - h x_n^{q-2} \|x'\|^2$$

con $q = \frac{1}{\beta} \in (0, 1]$ e tale che i coefficienti $k = 2(n-1) - l^2(q+1)(q+2)$ e $h = q(1-q)$ verifichino la disuguaglianza

$$l^2 \leq \frac{n-1}{2+q^2}. \tag{4.17}$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- *La funzione f è positiva e β-concava.*
- *La funzione u non è α-concava sull'insieme Ω per $\alpha > \frac{\beta}{1+2\beta}$.*

Dimostrazione. Suddividiamo la dimostrazione verificando separatamente le due tesi del teorema.

- Preso un generico $x \in K$ tale che $0 < \|x'\| < l x_n$, applicando l'ipotesi (4.17) otteniamo tramite semplici calcoli la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned} f(x) =& k x_n^q - h x_n^{q-2} \|x'\|^2 \geq \\ &\geq [2(n-1) - l^2(q+1)(q+2)](x_n)^q - q(1-q) l^2 x_n^q = \\ &= 2[(n-1) - l^2(2q+1)] x_n^q \geq 2 \left[(n-1) - \frac{(n-1)(2q+1)}{2+q^2} \right] x_n^q = \\ &= 2 \left[\frac{(n-1)(q-1)^2}{2+q^2} \right] x_n^q \geq 0, \end{aligned}$$

che afferma la positività della funzione f.
Considerando il caso limite $q = 1$, otteniamo che $f(x) = 2(n-1-3l^2)x_n$ è una funzione evidentemente concava, ovvero β-concava per $\beta = 1$. Ponendo ora $q \in (0, 1)$ e sapendo

dunque che $k > 0$ e $h > 0$, senza perdere di generalità possiamo definire una nuova costante $m = \frac{k}{h} > 0$ e considerare la funzione $g = \left(\frac{1}{h}f\right)$, essenziale in quanto è evidente la validità della seguente equivalenza:

$$f \;\; \beta\text{-}concava \iff g \;\; \beta\text{-}concava.$$

Vogliamo ora applicare la Proprietà (4) della Proposizione (4.5) secondo cui una funzione $g \in C^2(\Omega)$ è β-concava se e solo se $\forall x \in \Omega$ e $\forall \theta \in \mathcal{S} := \{\theta \in \mathbb{R}^n \; : \; \|\theta\| = 1\}$ vale la seguente condizione:

$$g(x)g_{\theta\theta}(x) + (\beta - 1)(g_\theta(x))^2 \leq 0.$$

Sapendo che $q \in (0, 1)$ e che $\beta - 1 = \frac{1-q}{q}$ possiamo mostrare equivalentemente la seguente condizione:

$$qg(x)g_{\theta\theta}(x) + (1 - q)(g_\theta(x))^2 \leq 0.$$

Innanzitutto calcoliamo esplicitamente le seguenti quantità:

$$\begin{aligned}
g(x) &= x_n^{q-2}[mx_n^2 + \|x'\|^2], \\
g_\theta(x) &= \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} = x_n^{q-3}[mqx_n^2\theta_n - (q - 2)\|x'\|^2\theta_n - 2x_n x' \cdot \theta], \\
g_{\theta\theta}(x) &= \sum_{i,j=1} \theta_i\theta_j \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \\
&= x_n^{q-4}[mq(q - 1)x_n^2(\theta_n)^2 - 4(q - 2)x_n\theta_n x' \cdot \theta - (q - 2)(q - 3)(\theta_n)^2\|x'\|^2 - 2x_n^2\|\theta'\|^2],
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto per analogia $\theta' = \theta - \theta_n e_n$. Mettendo insieme le informazioni a nostra disposizione, tramite ulteriori calcoli[29] arriviamo all'espressione finale

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x_n^{6-2q}[qg(x)g_{\theta\theta} + (1 - q)(g_\theta(x))^2] &= [mqx_n^2 + (q - 2)|x'|^2][2x_n\theta_n x' \cdot \theta - \theta_n^2\|x'\|^2] + \\
&+ x_n^2[2(1 - q)(x' \cdot \theta)^2 + q\|x'\|^2|\theta'|^2 - mqx_n^2\|\theta'\|^2],
\end{aligned}$$

dove abbiamo per comodità raccolto e risistemato il termine comune $2x_n^{2q-6} > 0$. Dalla *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* otteniamo che $x' \cdot \theta = x' \cdot \theta' \leq \|x'\|\|\theta'\|$. Notando inoltre che banalmente $x_n \geq 0$ e $\theta_n \leq |\theta_n|$, complessivamente ricaviamo che

$$2x_n\theta_n x' \cdot \theta - \theta_n^2\|x'\|^2 \leq 2x_n|\theta_n|\|x'\|\|\theta'\| - |\theta_n|^2\|x'\|^2,$$

$$2(1 - q)(x' \cdot \theta)^2 + q\|x'\|^2\|\theta'\|^2 - mqx_n^2\|\theta'\|^2 \leq -\|\theta'\|^2[mqx_n^2 + (q - 2)\|x'\|^2].$$

[29] La verifica dei calcoli risulta semplice ma dispendiosa in termini di tempo e spazio, pertanto viene omessa perchè non essenziale per la comprensione della dimostrazione.

Osserviamo infine che dall'ipotesi (4.17) deduciamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned} mqx_n^2 + (q-2)\|x'\|^2 &= \frac{[kx_n^2 - (2-q)(1-q)\|x'\|^2]}{(1-q)} \geq \\ &\geq \frac{x_n^2[2(n-1) - l^2(q+1)(q+2) - l^2(2-q)(1-q))]}{(1-q)} = \\ &= \frac{x_n^2[2(n-1) - 2l^2(q^2+2)]}{(1-q)} \geq \\ &\geq \frac{x_n^2[2(n-1) - 2(n-1)]}{(1-q)} = 0. \end{aligned}$$

Combinando pertanto tutte le disuguaglianze appena ottenute verifichiamo che

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}x_n^{6-2q}[qg(x)g_{\theta\theta} + (1-q)(g_\theta(x))^2] = \\ &= -[mqx_n^2 + (q-2)|x'|^2][x_n^2\|\theta'\|^2 - 2x_n|\theta_n|\|x'\|\|\theta'\| + |\theta_n|^2\|]x'\|^2 = \\ &= -[mqx_n^2 + (q-2)|x'|^2][x_n\|\theta'\| - |\theta_n|\|x'\|]^2 \leq 0. \end{aligned}$$

La funzione g è quindi β-concava, da cui immediatamente che anche la funzione f è β-concava per quanto precedentemente detto.

▶ Definiamo una funzione ausiliaria $b : \bar{K} \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$b(x) := x_n^q(l^2x_n^2 - \|x'\|^2)$$

in modo che risulti $b(x) \geq 0 \ \forall x \in K$. Tramite semplici calcoli si verifica che

$$\Delta b = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 b(x)}{\partial x_i^2} = (q+2)(q+1)l^2x_n^q + -q(q-1)x_n^{q-2}\|x'\|^2 + -2(n-1)x_n^q,$$

da cui si constata che la funzione b è soluzione sull'insieme Ω della seguente equazione differenziale:

$$\Delta b + f(x) = 0.$$

Ottenendo pertanto che $\Delta b = \Delta u$ sull'insieme Ω ed essendo evidente che $b(x) \geq u(x) \ \forall x \in \partial\Omega$ possiamo applicare il cosiddetto *principio forte del confronto (SCP)*[30] per il Laplaciano e dedurre che $b(x) \geq u(x) \ \forall x \in \Omega$. Ponendo ora $x = te_n$ per $t \in (0,1]$, dalle ipotesi del teorema si deduce che $x \in \Omega$, $x' = 0$, $t = x_n$ e che $u(x) \leq b(x) = l^2t^{q+2}$. Possiamo dunque verificare che

$$0 \leq \limsup_{t\to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}}u(x) \leq \limsup_{t\to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}+(q+2)} = 0$$

solamente se vale la condizione $\alpha > \frac{1}{q+2} = \frac{\beta}{2\beta+1}$. Scegliendo pertanto $y = 0 \in \partial\Omega$ e $z = e_n$

[30] Il *principio forte del confronto (SCP)* applicato al caso del Laplaciano afferma quanto segue: date due funzioni $u, v \in C^2(\Omega)$, se $\Delta v \geq \Delta u$ in Ω e $v \geq u$ su $\partial\Omega$, allora risulta $v \geq u$ in Ω.

otteniamo il seguente risultato:

$$\liminf_{t\to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}} u((1-t)y+tz) = \liminf_{t\to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}} u(x) = ^{31} \limsup_{t\to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}} u(x) = 0.$$

Applicando dunque il Teorema (4.16) deduciamo facilmente che la funzione u non può essere α-concava sull'insieme Ω per $\alpha > \frac{\beta}{1+2\beta}$, risultato che conclude la dimostrazione. $\square$

4.18 Osservazione. Nonostante il Teorema (4.17) preveda l'ipotesi $\beta \in [1, +\infty)$, è possibile estendere la dimostrazione anche al valore limite $\beta = +\infty$. In questo caso particolare risulta $q = 0$ ed è evidente che la funzione $f(x) = 2(n-1-l^2)$ sia una costante postiva, dunque β-concava con $\beta = +\infty$. Seguendo lo schema dimostrativo utilizzato nel teorema precedente si verifica infine che la funzione u non può essere α-concava per $\alpha > \frac{1}{2}$ in quanto

$$\alpha = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{\beta}{1+2\beta} = \frac{1}{2}.$$

[31] L'uguaglianza sussiste poichè il $\limsup$ di una funzione positiva esiste finito ed è nullo, pertanto lo deve essere anche il $\liminf$.

Capitolo 5

Principi di convessità approssimata e le funzioni δ-convesse.

Nei capitoli precedenti abbiamo ampiamente analizzato le proprietà di concavità delle soluzioni di specifiche PDE ellitiche in domini convessi ottenute applicando metodi intrinsecamente diversificati e sempre più elaborati.
Senza alcun dubbio i Teoremi (3.3) e (4.7) relativi alle due formulazioni progressive del *principio del massimo per la concavità (PMC I) e (PMCII)*, risultati rispettivamente ottenuti da N.J.Korevaar e A.U.Kennington, rappresentano quelli maggiormente rilevanti dal punto di vista analitco.
L'applicazione diretta di questi teoremi ci ha generalmente consentito di determinare in un generico dominio limitato e convesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ le caratteristiche peculiari delle soluzioni u di una vasta gamma di equazioni differenziali della forma

$$\Delta u + f(x, u) = 0 \tag{5.1}$$

al variare della caratterizzazione del termine non lineare $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Tra le conclusioni più interessanti spiccano quelle enunciate nei Teoremi (4.11) e (4.14) del capitolo precedente, dove viene essenzialmente affermato che determinate forme di regolarità e concavità poste sul termine nonlineare $f(x, u(x))$ implicano una relativa proprietà di α-concavità della soluzione u dell'equazione differenziale al variare del parametro $\alpha \in [0, +\infty]$.[1]

A questo punto della trattazione risulta tuttavia naturale sollevare le seguenti questioni: cosa succederebbe se la funzione $f(x, u)$ fosse concava solamente a meno di una piccola perturbazione? Potremmo comunque ottenere sulla funzione u una corrispondente proprietà di convessità[2] a meno di una piccola perturbazione proporzionale alla precedente?

[1]Come abbiamo già visto, il parametro α generalmente varia in un intervallo $I \subseteq [0, +\infty]$ la cui ampiezza dipende esclusivamente dalle diverse ipotesi poste sulla funzione f.

[2]Per quanto già accennato in precedenza, modificare l'approccio utilizzato studiando la convessità invece della concavità non mette in discussione la validità del ragionamento seguito in quanto i due concetti sono fortemente correlati.

Ammettendo entrambe le domande risposte affermative, quest'ultimo capitolo della trattazione verterà pertanto sull'argomentazione esaustiva di tali risposte, fornendo un quadro generale sui cosiddetti *principi di convessità approssimata* (*o principi di δ-convessità*) e sulle relative applicazioni.

5.1 La proprietà di δ-convessità.

5.1.1 Definizioni preliminari

Forniamo innanzitutto alcune nozioni di carattere generale, considerate ipotesi sempre valide nel seguito della sezione. Dato un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato e convesso, presi due generici punti $y_1, y_3 \in \bar{\Omega}$, definiamo[3] $y_2 := (1-\lambda)y_1 + \lambda y_3 \in \bar{\Omega}$ la relativa *combinazione convessa* di coefficiente $\lambda \in [0,1]$.
Risulta ora necessario fornire qualche definizione specifica riguardo la proprietà di δ-concavità di una funzione.

5.1 Definizione. Dato $\delta > 0$, sia definita una funzione $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ e la relativa *funzione di concavità* $\mathcal{C}_u$ coerentemente con la definizione (3.1). Diremo allora che la funzione u è *δ-convessa* in $\bar{\Omega}$ se $\forall y_1, y_3 \in \bar{\Omega}$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ vale la disuguaglianza

$$\mathcal{C}_u(y_1, y_3, \lambda) \leq \delta.$$

Analogamente, diremo che la funzione u è *δ-concava* in $\bar{\Omega}$ se la funzione $-u$ è δ-convessa, ovvero se $\forall y_1, y_3 \in \bar{\Omega}$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ vale la disuguaglianza[4]

$$\mathcal{C}_u(y_1, y_3, \lambda) \geq -\delta.$$

5.2 Definizione. Data una funzione $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g = g(x,s)$, definiamo la *funzione di concavità* $\mathcal{C}_g$ per la funzione g congiuntamente nelle sue variabili nel seguente modo:

$$\mathcal{C}_g((y_1, s_1), (y_3, s_3), \lambda) := g(y_2, s_2) - (1-\lambda)g(y_1, s_1) - \lambda g(y_2, s_2),$$

al variare di $y_1, y_3 \in \bar{\Omega}$, $s_1, s_3 \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in [0,1]$. Questa defnizione può essere ulteriormente estesa quando consideriamo la *funzione di concavità* $\mathcal{C}_g(\cdot, u(\cdot))$ per la funzione g lungo[5] la funzione $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, denotata nel seguente modo:

$$\mathcal{C}_{g(\cdot,u(\cdot))}(x_1, x_3, \lambda) := \mathcal{C}_g((x_1, u(x_1)), (x_3, u(y_3)), \lambda),$$

[3] Le medesime notazioni verranno utilizzate sia per $x_1, x_3 \in \bar{\Omega}$ e $s_1, s_3 \in \mathbb{R}$ che per le relative combinazioni convesse $x_2 \in \mathbb{R}$ e $s_2 \in \mathbb{R}$.

[4] Per verificarla è sufficiente notare che dalla definizione (3.1) segue immediatamente l'uguaglianza $\mathcal{C}_{-u}(y_1, y_3, \lambda) = -\mathcal{C}_u(y_1, y_3, \lambda)$.

[5] Prestiamo attenzione al fatto che la funzione di concavità $\mathcal{C}_g(\cdot, u(\cdot))$ non fornisce informazioni riguardo la concavità della funzione u, ma esclusivamente inerenti la funzione g.

al variare di $x_1, x_3 \in \bar{\Omega}$ e $\lambda \in [0,1]$.

5.3 Osservazione. In riferimento alla definizione precedente, $\forall y_1, y_3 \in \bar{\Omega}$, $\forall s_1, s_3 \in \mathbb{R}$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ valgono evidentemente le seguenti caratterizzazioni:

$$\begin{aligned} g \ \ \textit{congiuntamente concava} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{C}_g((x_1,s_1),(x_3,s_3),\lambda) \geq 0, \\ g \ \ \textit{concava lungo } u \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{C}_{g(\cdot,u(\cdot))}(x_1,x_3,\lambda) \geq 0. \end{aligned}$$

Ovviamente esistono le corrispettive caratterizzazioni della convessità, analogamente alle equivalenze (3.1).

5.4 Definizione. Dato $\delta > 0$, siano definite le funzioni $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremo allora che la funzione g è *δ-convessa* congiuntamente nelle sue variabili in $\bar{\Omega}$ se $\forall (y_1,s_1),(y_3,s_3) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ vale la disuguaglianza

$$\mathcal{C}_g((y_1,s_1),(y_3,s_3),\lambda) \leq \delta.$$

Analogamente, diremo che la funzione g è *δ-concava* congiuntamente nelle sue variabili in $\bar{\Omega}$ se la funzione $-u$ è *δ-convessa* congiuntamente nelle sue variabili in $\bar{\Omega}$, ovvero se $\forall (y_1,s_1),(y_3,s_3)$ $\in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ vale la disuguaglianza

$$\mathcal{C}_g((y_1,s_1),(y_3,s_3),\lambda) \geq -\delta.$$

Diremo inoltre che la funzione g è *δ-convessa lungo u* se $\forall x_1, x_3 \in \bar{\Omega}$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ vale la disuguaglianza

$$\mathcal{C}_{g(\cdot,u(\cdot))}(x_1,x_3,\lambda) \leq \delta.$$

Analogamente, diremo che la funzione g è *δ-concava lungo u* se la funzione $-g$ è *δ-convessa lungo u*, ovvero se $\forall x_1, x_3 \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ vale la disuguaglianza

$$\mathcal{C}_{g(\cdot,u(\cdot))}(x_1,x_3,\lambda) \geq -\delta.$$

5.5 Definizione. Considerata una funzione $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiamo al variare di (y_1,s_1), $(y_3,s_3) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ e $\lambda \in [0,1]$ la funzione $\mathcal{HC}_g : (\bar{\Omega} \times \mathbb{R}) \times (\bar{\Omega} \times \mathbb{R}) \times [0,1] \to \mathbb{R}$, detta anche *funzione di concavità armomica* per la funzione g congiuntamente nelle sue variabili, nel seguente modo:

$$\begin{cases} g(y_2,s_2) - \dfrac{g(y_1,s_1)g(y_3,s_3)}{(1-\lambda)g(y_3,s_3) + \lambda g(y_1,s_1)} & (1-\lambda)g(y_3,s_3) + \lambda g(y_1,s_1) > 0, \\ g(y_2,s_2) & g(y_1,s_1) = g(y_3,s_3) = 0. \end{cases}$$

Questa definizione può essere ulteriormente estesa quando consideriamo la *funzione di concavità armonica $\mathcal{HC}_{g(\cdot,u(\cdot))}$* per la funzione g lungo la funzione $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, denotata nel seguente modo:

$$\mathcal{HC}_{g(\cdot,u(\cdot))}(x_1,x_3,\lambda) := \mathcal{HC}_g((x_1,u(x_1)),(x_3,u(y_3)),\lambda),$$

al variare di $x_1, x_3 \in \bar{\Omega}$ e $\lambda \in [0,1]$.

5.6 Definizione. Dato $\delta > 0$, siano definite le funzioni $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremo allora che la funzione g è *armonicamente δ-concava* congiuntamente nelle sue variabili se $\forall (y_1, s_1), (y_3, s_3) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ vale la disuguaglianza

$$\mathcal{HC}_g((y_1,s_1),(y_3,s_3),\lambda) \geq -\delta.$$

Analogamente diremo che la funzione g è *armonicamente δ-convessa* congiuntamente nelle sue variabili se la funzione $-g$ è *armonicamente δ-concava* nelle medesime variabili, ovvero se $\forall (y_1, s_1), (y_3, s_3) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ vale la disuguaglianza

$$\mathcal{HC}_g((y_1,s_1),(y_3,s_3),\lambda) \geq \delta.$$

Diremo inoltre che la funzione g è *armonicamente δ-concava lungo u* se $\forall x_1, x_3 \in \bar{\Omega}$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ vale la disuguaglianza

$$\mathcal{HC}_{g(\cdot,u(\cdot))}(x_1,x_3,\lambda) \geq -\delta.$$

Analogamente, diremo che la funzione g è *armonicamente δ-convessa lungo u* se la funzione $-g$ è *armonicamente δ-concava lungo u*, ovvero se $\forall x_1, x_3 \in \bar{\Omega}$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ vale la disuguaglianza

$$\mathcal{HC}_{g(\cdot,u(\cdot))}(x_1,x_3,\lambda) \leq \delta.$$

5.7 Osservazione. Limitiamoci al caso particolare in cui la funzione $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è strettamente positiva. Riprendendo alcuni calcoli analoghi svolti nell'Osservazione (4.4) sappiamo che ogniqualvolta $(1-\lambda)g(y_3,s_3) + \lambda g(y_1,s_1) > 0$ risulta valida la disuguaglianza

$$(1-\lambda)g(y_1,s_1) + \lambda g(y_3,s_3) \geq \frac{g(y_1,s_1)g(y_3,s_3)}{(1-\lambda)g(y_3,s_3) + \lambda g(y_1,s_1)},$$

da cui ricaviamo immediatamete che

$$g(y_2,s_2) - \frac{g(y_1,s_1)g(y_3,s_3)}{(1-\lambda)g(y_3,s_3) + \lambda g(y_1,s_1)} \geq g(y_2,s_2) - (1-\lambda)g(y_1,s_1) + \lambda g(y_3,s_3)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{HC}_g((y_1,s_1),(y_3,s_3),\lambda) \geq \mathcal{C}_g((y_1,s_1),(y_3,s_3),\lambda).$$

Combinando quest'ultima disuguaglianza con le definizioni precedentemente date deduciamo che ogni funzione strettamente postiva g soddisfa le seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned} g \;\; \textit{armonicamente } \delta\textit{-convessa} \;&\Longrightarrow\; g \;\; \delta\textit{-convessa}, \\ g \;\; \textit{armonicamente } \delta\textit{-concava} \;&\Longleftarrow\; g \;\; \delta\textit{-concava}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.1.2 Risultati aggiuntivi

Concludiamo la sezione fornendo alcuni risultati aggiuntivi inerenti la proprietà di δ-*concavità armonica*, indispensabili successivamente per dimostrare i teoremi principali di questo capitolo.

5.8 Proposizione. *Dato un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato e convesso, siano definite le funzioni $f, g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora $\forall((y_1, s_1), (y_3, s_3), \lambda) \in (\Omega \times \mathbb{R}) \times (\Omega \times \mathbb{R}) \times [0, 1]$ tali che risultino definite le funzioni di concavità armonica $\mathcal{HC}_f$, $\mathcal{HC}_g$, $\mathcal{HC}_{f+g}$ si verifica la seguente disuguaglianza:*

$$\mathcal{HC}_{f+g}((y_1, s_1), (y_3, s_3), \lambda) \leq \mathcal{HC}_f((y_1, s_1), (y_3, s_3), \lambda) + \mathcal{HC}_g((y_1, s_1), (y_3.s_3), \lambda). \tag{5.3}$$

Inoltre $\forall((y_1, s_1), (y_3, s_3), \lambda) \in (\Omega \times \mathbb{R}) \times (\Omega \times \mathbb{R}) \times [0, 1]$ tali che risultino definite le funzioni di concavità armonica $\mathcal{HC}_f$, $\mathcal{HC}_g$, $\mathcal{HC}_{f-g}$ si verifica la seguente disuguaglianza:

$$\mathcal{HC}_{f-g}((y_1, s_1), (y_3, s_3), \lambda) \geq \mathcal{HC}_f((y_1, s_1), (y_3, s_3), \lambda) - \mathcal{HC}_g((y_1, s_1), (y_3, s_3), \lambda). \tag{5.4}$$

Dimostrazione. Sapendo che $y_2 = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_3 \in \Omega$ e $s_2 = (1 - \lambda)s_1 + \lambda s_3 \in \mathbb{R}$, poniamo per semplicità di notazione

$$f_i = f(y_i, s_i) \quad e \quad g_i = g(y_i, s_i) \qquad i = 1, 2, 3.$$

Nei casi particolari in cui $g_1 = g_3 = 0$ o $f_1 = f_3 = 0$ oppure $f_1 = -g_1 \neq 0$ e $f_3 = -g_3 \neq 0$ otteniamo tramite semplici calcoli che

$$\mathcal{HC}_{f+g}((y_1, s_1), (y_3, s_3), \lambda) - \mathcal{HC}_f((y_1, s_1), (y_3, s_3), \lambda) = \mathcal{HC}_g((y_1, s_1), (y_3, s_3), \lambda),$$

risultato che verifica la disuguaglianza (5.3) come uguaglianza. Nel caso in cui $(1-\lambda)f_3+\lambda f_1 > 0$ e $(1 - \lambda)g_3 + \lambda g_1 > 0$ otteniamo invece che

$$\begin{aligned}&\mathcal{HC}_{f+g}((y_1, s_1), (y_3, s_3), \lambda) - \mathcal{HC}_f((y_1, s_1), (y_3, s_3), \lambda) = \\ =&g_2 - \frac{(f_1 + g_1)(f_3 + g_3)}{(1 - \lambda)(f_3 + g_3) + \lambda(f_1 + g_1)} + \frac{f_1 f_3}{(1 - \lambda)f_3 + \lambda f_1} = g_2 - \psi(1) + \psi(0),\end{aligned}$$

dove abbiamo definito la funzione $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$\psi(\zeta) := \frac{(f_1 + \zeta g_1)(f_3 + \zeta g_3)}{(1 - \lambda)(f_3 + \zeta g_3) + \lambda(f_1 + \zeta g_1)}.$$

Denotato con $h_i = (f + \xi g)(y_i, s_i)$ per $i = 1, 2, 3$, osserviamo che la funzione ψ è continua e derivabile nella variabile ζ, pertanto otteniamo tramite semplici calcoli che

$$\begin{aligned}\psi(\xi) &= \frac{h_1 h_3}{(1 - \lambda)h_3 + \lambda h_1}, \\ \psi'(\xi) &= \frac{(g_1 h_3 + g_3 h_1)[(1 - \lambda)h_3 + \lambda h_1] - h_1 h_3[(1 - \lambda)g_3 + \lambda g_1]}{[(1 - \lambda)h_3 + \lambda h_1]^2} = \frac{(1 - \lambda)g_1 h_3^2 + \lambda g_3 h_1^2}{[(1 - \lambda)h_3 + \lambda h_1]^2}.\end{aligned}$$

Applichiamo alla funzione ψ il *Teorema di Lagrange (o del valor medio)*[6], ottendo che esiste $\xi \in (0,1)$ tale che

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\xi)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(f_1+g_1)(f_3+g_3)}{(1-\lambda)(f_3+g_3)+\lambda(f_1+g_1)} - \frac{f_1 f_3}{(1-\lambda)f_3+\lambda f_1} = \frac{(1-\lambda)g_1h_3^2+\lambda g_3 h_1^2}{[(1-\lambda)h_3+\lambda h_1]^2}.$$

Tramite opportuni calcoli deduciamo dunque la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{HC}_{f+g}((y_1,s_1),(y_3,s_3),\lambda) - \mathcal{HC}_f((y_1,s_1),(y_3,s_3),\lambda) = \\
=&g_2 - [\psi(1)-\psi(0)] = g_2 - \psi'(\xi) = \\
=&g_2 - \frac{(1-\lambda)g_1h_3^2+\lambda g_3h_1^2}{[(1-\lambda)h_3+\lambda h_1]^2} = \\
=&\mathcal{HC}_g((y_1,s_1),(y_3,s_3),\lambda) + \frac{g_1g_3}{(1-\lambda)g_3+\lambda g_1} - \frac{(1-\lambda)g_1h_3^2+\lambda g_3h_1^2}{[(1-\lambda)h_3+\lambda h_1]^2} = \\
=&\mathcal{HC}_g((y_1,s_1),(y_3,s_3),\lambda) + \frac{2g_1g_3\lambda(1-\lambda)h_1h_3 - \lambda(1-\lambda)g_3^2h_1^2 - \lambda(1-\lambda)g_1^2h_3^2}{[(1-\lambda)g_3+\lambda g_1][(1-\lambda)h_3+\lambda h_1]^2} = \\
=&\mathcal{HC}_g((y_1,s_1),(y_3,s_3),\lambda) - \underbrace{\frac{\lambda(1-\lambda)(g_1h_3-g_3h_1)^2}{[(1-\lambda)g_3+\lambda g_1][(1-\lambda)h_3+\lambda h_1]^2}}_{\geq 0} \leq \\
\leq&\mathcal{HC}_g((y_1,s_1),(y_3,s_3),\lambda).
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque ottenuto la relazione (5.3). Applichiamo infine il risultato appena ottenuto alle funzioni f e $f-g$ per ottenere semplicemente la relazione (5.4):

$$\mathcal{HC}_f = \mathcal{HC}_{(f-g)+g} \leq \mathcal{HC}_{f-g} + \mathcal{HC}_g.$$

Ottenuti entrambi i risultati, la dimostrazione è dunque conclusa. $\square$

5.9 Proposizione. *Date le costanti $c, C, m, \delta > 0$, sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso e sia definita una funzione $g : \Omega \times [-m,m] \to (0,+\infty)$ δ-concava congiuntamente nelle sue variabili con $2\delta \leq c < g \leq C$. Allora la funzione $h : \Omega \times \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ definita come*

$$h(x,s) := s^2 \frac{1}{g(x,s)}$$

è $C_1\delta$-convessa congiuntamente nelle variabili (x,s) con $C_1 = \frac{2m^2C}{c^3}$.
In particolare, data la funzione $\tilde{g} : \Omega \times [-m,m] \to (0,+\infty)$ congiuntamente concava nelle sue

[6] Richiamiamo brevemente l'enunciato del suddetto teorema: Presi due valori $a, b \in \mathbb{R}$, data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua sull'intervallo chiuso $[a,b]$ e derivabile sull'intervallo aperto (a,b), esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che si verifichi la seguente uguaglianza:

$$(b-a)f'(c) = f(b) - f(a).$$

variabili, allora la funzione $\tilde{h} : \Omega \times \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *definita come*

$$\tilde{h}(x, s) := \frac{s^2}{\tilde{g}(x, s)}$$

è congiuntamente convessa nelle variabili (x, s).

Dimostrazione. Consideriamo due generici punti $(x_1, s_1), (x_3, s_3) \in \Omega \times \mathbb{R}$ tali che per $\lambda \in [0, 1]$ si abbia $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3 \in \Omega$ e $s_2 = (1-\lambda)s_1 + \lambda s_3 \in \mathbb{R}$. Posto per comodità di notazione $g_i = g(x_i, s_i)$ con $i = 1, 2, 3$, dalla δ-concavità della funzione g e dalle ipotesi otteniamo la seguente catena di disuguaglianze:

$$g_2 \geq (1-\lambda)g_1 + \lambda g_3 - \delta > c - \delta \geq \delta > 0.$$

Tramite alcuni calcoli ricaviamo esplicitamente che

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_h((x_1, s_1), (x_3, s_3), \lambda) &= \frac{s_2^2}{g_2} - (1-\lambda)\frac{s_1^2}{g_1} - \lambda\frac{s_3^2}{g_3} \leq \\
\leq & \frac{s_2^2}{(1-\lambda)g_1 + \lambda g_3 - \delta} - (1-\lambda)\frac{s_1^2}{g_1} - \lambda\frac{s_3^2}{g_3} = \\
= & \frac{\delta[(1-\lambda)g_3 s_1^2 + \lambda g_1 s_3^2] - \lambda(1-\lambda)(s_1 g_3 - s_3 g_1)^2}{g_1 g_3[(1-\lambda)g_1 + \lambda g_3 - \delta]} \leq \\
\leq & \frac{\delta[(1-\lambda)g_3 s_1^2 + \lambda g_1 s_3^2]}{g_1 g_3[(1-\lambda)g_1 + \lambda g_3 - \delta]}.
\end{aligned}$$

Dalle ipotesi, dato che $s \in [-m, m]$, sappiamo inoltre che

$$(1-\lambda)g_3 s_1^2 + \lambda g_1 s_3^2 \leq m^2 C \quad e \quad g_1 g_3[(1-\lambda)g_1 + \lambda g_3 - \delta] \geq \delta c^2 \geq \frac{c^3}{2},$$

da cui ricaviamo immediatamente la disuguaglianza

$$\mathcal{C}_h((x_1, s_1), (x_3, s_3), \lambda) = \frac{s_2^2}{g_2} - (1-\lambda)\frac{s_1^2}{g_1} - \lambda\frac{s_3^2}{g_3} \leq \delta \underbrace{\left(\frac{2m^2 C}{c^3}\right)}_{C_1}.$$

Abbiamo pertanto ottenuto la $C_1\delta$-convessità della funzione $h(x, s)$. Scegliendo $\delta = 0$ otteniamo immediatamente anche il risultato analogo per la funzione $\tilde{h}$. La proposizione risulta dunque dimostrata. □

5.10 Proposizione. *Date le costanti* $C, \delta > 0$, *sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme limitato e convesso e sia definita una funzione* $g : \Omega \times \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *con* $0 < g < C$. *Se la funzione* $\frac{1}{g}$ *è* δ*-convessa congiuntamente nelle sue variabili, allora la funzione* g *è armonicamente* $C^2\delta$*-concava nelle stesse variabili.*
In particolare, data la funzione $\tilde{g} : \Omega \times \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, *se la funzione* $\frac{1}{\tilde{g}}$ *è congiuntamen-*

te convessa nelle sue variabili, allora la funzione $\tilde{g}$ è armonicamente concava nelle stesse variabili.

Dimostrazione. Consideriamo due generici punti $(x_1, s_1), (x_3, s_3) \in \Omega \times \mathbb{R}$ tali che per $\lambda \in [0, 1]$ si abbia $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3 \in \Omega$ e $s_2 = (1-\lambda)s_1 + \lambda s_3 \in \mathbb{R}$. Posto per comodità di notazione $g_i = g(x_i, s_i)$ con $i = 1, 2, 3$ e definito

$$p := \frac{1-\lambda}{g_1} + \frac{\lambda}{g_3} \geq \frac{1}{C},$$

ricaviamo per l'ipotesi di δ-convessità della funzione $\frac{1}{g}$ che

$$\mathcal{C}_{\frac{1}{g}}((x_1, s_1), (x_3, s_3), \lambda) = \frac{1}{g_2} - p \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad g_2 \geq \frac{1}{\delta + p}.$$

Tenendo conto della disuguaglianza ottenuta, verifichiamo semplicemente che

$$\mathcal{HC}_g((x_1, s_1), (x_3, s_3), \lambda) = g_2 - \frac{1}{p} \geq -\frac{\delta}{p(\delta + p)} \geq -\frac{\delta}{p^2} \geq -\delta C^2.$$

Abbiamo pertanto ottenuto che la funzione g è armonicamente $C^2\delta$-concava. Scegliendo $\delta = 0$ otteniamo immediatamente anche il risultato analogo per la funzione $\tilde{g}$. La proposizione risulta dunque dimostrata. □

5.2 I principi di δ-convessità (PCA)

Utilizzando le definizioni date nella precedente sezione procediamo allo sviluppo della trattazione introducendo i cosiddetti *principi di convessità approssimata o di δ-convessità (PCA)*, evoluzione naturale dei *principi del massimo per la concavità (PMC)* forniti nei capitoli precedenti.
Entrambe le versioni di N.J.Korevaar (PMC I) e di A.U.Kennington (PMC II) vengono dunque potenziate per poter essere applicate al caso di funzioni δ-convesse. Enunceremo pertanto i due fondamentali *principi di δ-convessità*, entrambi precedeuti da un relativo lemma preliminare indispensabile per poterne affrontare la dimostrazioni.

Preliminarmente proponiamo un risultato notevole per funzioni δ-convesse, la cui dimostrazione[7] viene però omessa in quanto troppo dispersiva.

5.11 Teorema (di Hyers-Hulam). *Sia X uno spazio[8] di dimensione finita $n < +\infty$ e sia $\Omega \subset X$ un insieme convesso. Supponiamo che la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sia δ-convessa per $\delta > 0$. Allora esiste una funzione $g : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa tale che*

$$\|f - g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta k_n$$

[7] Vedi [**11**].

[8] Generalmente sceglieremo per le nostre applicazioni $X = \mathbb{R}^n$.

dove $k_n := \frac{n^2+3n}{4(n+1)}$ *è una costante dipendente esclusivamente da* $n = dim(X)$.

Dimostrazione. Omessa. □

Il teorema precedente afferma sostanzialmente che una generica funzione f δ-convessa converge uniformemente in norma[9] $L^\infty(\Omega)$ ad una funzione g convessa secondo una costante che dipende esclusivamente da δ e dalla dimensione di X.

Procediamo ora proponendo il primo lemma preliminare, la cui dimostrazione, salvo qualche modifica, segue essenzialmente lo schema di quella del Teorema (3.3).

5.12 Lemma (I). *Dato* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme limitato e convesso, sia* $A := [a_{ij}]$ *una matrice simmetrica e definita positiva tale che le funzioni*[10] $a_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *siano* μ_n*-misurabili* $\forall i, j = 1, ..., n$ *e sia data una funzione* $b : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *derivabile rispetto alla sua seconda variabile in* $\mathbb{R}$.[11] *Sia data la funzione* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *soluzione in* Ω *della seguente PDE ellittica:*

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\nabla u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - b(x, u, \nabla u) = 0. \tag{5.5}$$

Supponiamo che la funzione $\mathcal{C}_u$ *raggiunga il suo massimo assoluto strettamente positivo*[12] *in un punto interno*[13] *all'insieme* Ω, *ovvero che esiste* $(x_1, x_3, \lambda) \in \Omega \times \Omega \times [0, 1]$ *tale che*

$$\max_{\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times[0,1]} \mathcal{C}_u = \mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) > 0.$$

Supponiamo inoltre che esista una costante $\beta > 0$ *tale che valga disuguaglianza*

$$\inf_{\xi\in[u(x_2),(1-\lambda)u(x_1)+\lambda u(x_3)]} \frac{\partial b(x_2, \xi, \nabla u(x_2))}{\partial u} \geq \beta, \tag{5.6}$$

dove ξ *appartiene al segmento non orientato di estremi* $u(x_2)$ *e* $(1-\lambda)u(x_1) + \lambda u(x_3)$. *Allora vale la seguente disuguaglianza:*

$$\mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) \leq \frac{1}{\beta}\mathcal{C}_{-b(\cdot.u(\cdot),\nabla u(\cdot))}(x_1, x_3, \lambda). \tag{5.7}$$

Dimostrazione. Analogamente alla dimostrazione del Teorema (3.3) limitiamoci al caso in cui $x_1 \neq x_3$ e $\lambda \in (0, 1)$ in quanto diversamente otterremmo che $\mathcal{C}_u \equiv 0$, da cui la convessità

[9] Definiamo la *norma* $L^\infty(\Omega)$ di una generica funzione f nel seguente modo:

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)|$$

[10] Analogamente ai Teroemi (3.3) e (4.7) anche in questo caso le funzioni a_{ij} devono dipendere in modo esplicito esclusivamente dal gradiente della soluzione ∇u. Diversamente, non sono ancora stati sviluppati risultati inerenti *principi di convessità o concavità* che prevedano una dipendenza esplicita dalla variabile x oppure dalla soluzione u.

[11] Diversamente dal Teorema (3.3), le regolarità richieste sulle funzioni a_{ij} e b risultano di gran lunga inferiori, permettendo dunque una generalizzazione maggiore dei risultati ottenuti.

[12] Quest'ipotesi è assolutamente necessaria, poichè in caso contrario otterremmo $\mathcal{C}_u \leq 0$ da cui la convessità della funzione u, fatto che non richiederebbe alcuna dimostrazione aggiuntiva.

[13] Conformemente alla Definizione (3.2) fornita in precedenza.

della funzione u. Considerando che $u \in C^1(\Omega)$, nel punto di massimo interno si verifica che $\nabla \mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) = 0$, ovvero più esplicitamente

$$\frac{\partial \mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda)}{\partial y_1} = \frac{\partial \mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda)}{\partial y_3} = 0.$$

Tramite semplici calcoli, ponendo $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3$, otteniamo le seguenti espressioni esplicite:

$$\frac{\partial \mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda)}{\partial y_1} = (1-\lambda)\nabla u(x_2) - (1-\lambda)\nabla u(x_1) = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda)}{\partial y_2} = \lambda \nabla u(x_2) - \lambda \nabla u(x_3) = 0,$$

da cui ricaviamo immediatamente che il gradiente della funzione u deve essere identico nei tre punti x_1, x_2 e x_3 considerati:

$$\nabla u(x_1) = \nabla u(x_2) = \nabla u(x_3) := z. \tag{5.8}$$

Denotato con $v \in \mathbb{R}^n$ il generico vettore tramite cui possiamo traslare in modo unico i punti x_1, x_2 e x_3, definiamo opportunamente la restrizione della funzione $\mathcal{C}_u$ ad un intorno del punto (x_1, x_3, λ) nel seguente modo:

$$\bar{\mathcal{C}_u}(v) := \mathcal{C}_u(x_1 + v, x_3 + v, \lambda).$$

Essendo evidente che la funzione $\bar{\mathcal{C}_u}$ possiede un punto di massimo interno in $v = 0$, dall'ipotesi di regolarità $u \in C^2(\Omega)$ ricaviamo facilmente la validità delle seguenti condizioni:

$$\nabla_v \bar{\mathcal{C}_u}(0) = 0 \quad e \quad \nabla_v^2 \bar{\mathcal{C}_u}(0) = \left[\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{C}_u}}{\partial v_i \partial v_j}\right](0) \leq 0,$$

dove la seconda indica sinteticamente che la matrice hessiana $\nabla_v^2 \bar{\mathcal{C}_u}$ della funzione $\bar{\mathcal{C}_u}$ nel punto $v = 0$ deve essere semidefinita negativa. Richiamando le ipotesi sulla matrice $A := [a_{ij}]$ deduciamo immediatamente che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{C}_u}}{\partial v_i \partial v_j}(0) \leq 0.$$

Combinando tale disuguaglianza con il risultato (5.8) precedentemente ottenuto ricaviamo esplicitamente che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(z) \left[\partial_{ij}^2 u(x_2) - (1-\lambda)\partial_{ij}^2 u(x_1) - \lambda \partial_{ij}^2 u(x_3)\right] \leq 0,$$

dove con $\partial_{ij}^2 u$ abbiamo denotato la derivata parziale seconda della funzione u rispetto alla i-esima e j-esima componente di $\mathbb{R}^n$.

Combinando quest'ultima disuguaglianza con l'equazione (5.5) otteniamo che

$$b(x_2, u(x_2), z) - (1-\lambda)b(x_1, u(x_1), z) - \lambda b(x_3, u(x_3), z) \geq 0.$$

da cui ricaviamo immediatamente il seguente risultato:

$$\begin{aligned} &b(x_2, u(x_2), z) - b(x_2, (1-\lambda)u(x_1) + \lambda u(x_2), z) \leq \\ \leq &(1-\lambda)b(x_1, u(x_1), z) + \lambda b(x_3, u(x_3), z) - b(x_2, (1-\lambda)u(x_1) + \lambda u(x_2), z) = \\ = &\mathcal{C}_{-b(\cdot, u(\cdot), z)}(x_1, x_3, \lambda). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Sapendo ora per ipotesi che la funzione b è derivabile in $\mathbb{R}^n$ rispetto alla sua seconda variabile, applicando il *Teorema di Lagrange (o del valor medio)* otteniamo che esiste ξ appartenente al segmento orientato $[u(x_2), (1-\lambda)u(x_1) + \lambda u(x_3)]$ tale che

$$\frac{b(x_2, u(x_2), z) - b(x_2, (1-\lambda)u(x_1) + \lambda u(x_2), z)}{u(x_2) - (1-\lambda)u(x_1) - \lambda u(x_3)} = \frac{\partial b(x_2, \xi, z)}{\partial u}.$$

Tenuto conto dell'ipotesi (5.6) e del fatto che $\mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) > 0$, ricaviamo semplicemente che

$$\beta \mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) = b(x_2, u(x_2), z) - b(x_2, (1-\lambda)u(x_1) + \lambda u(x_2), z),$$

da cui, applicando la disuguaglianza (5.9) precedentemente ottenuta, deduciamo che

$$\mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) \leq \frac{1}{\beta}\mathcal{C}_{-b(\cdot . u(\cdot), \nabla u(\cdot))}(x_1, x_3, \lambda).$$

La dimostrazione del lemma è pertanto conclusa. □

In breve, il Lemma (5.12) afferma che, sotto opportune condizioni, il massimo assoluto strettamente positivo della funzione $\mathcal{C}_u$ nel punto interno $(x_1, x_3, \lambda) \in \Omega \times \Omega \times [0, 1]$ è limitato dall'alto dal valore della funzione di concavità $\mathcal{C}_{-b(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))}$ della funzione $-b$ lungo u nel medesimo punto a meno di una costante $\beta > 0$.

Possiamo ora enunciare e dimostrare il primo *principio di δ-convessità*, il quale brevemente stabilisce la proprietà di convessità approssimata per la funzione u ogniqualvolta la funzione b è strettamente crescente e gode della proprietà di concavità approssimata lungo u.

5.13 Teorema (Principio I di δ-convessità (PCA I)). *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ soluzione dell'equazione (5.5) e poniamo per definizione*[14] *$M := \|u\|_{C^2(\Omega)}$ e $m := \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$.*
Presi $\delta \geq 0$ e $\beta > 0$ supponiamo che valgano le seguenti condizioni:

$$(I) \quad \forall (x, s, p) \in \Omega \times [-m, m] \times \bar{B}_M \quad \frac{\partial b(x, s, p)}{\partial s} \geq \beta,$$

[14] Senza fornire dettagli aggiuntivi, definiamo la *norma* C^2 della funzione $u \in C^2(\Omega)$ nel seguente modo:

$$\|u\|_{C^2(\Omega)} = \|u\|_\infty + \sum_{|\beta| \leq 2} \|D^\beta u\|_\infty.$$

$$(II) \quad \forall (y_1, y_3, \lambda) \in \Omega \times \Omega \times [0,1], \;\; \forall p \in \bar{B}_M \quad \mathcal{C}_{-b(\cdot, u(\cdot), p)}(y_1, y_3, \lambda) \leq \delta.$$

Supponiamo inoltre che la funzione $\mathcal{C}_u$ raggiunga il suo massimo assoluto strettamente positivo in un punto interno a Ω, ovvero che esiste $(x_1, x_3, \lambda) \in \Omega \times \Omega \times [0,1]$ tale che

$$\max_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [0,1]} \mathcal{C}_u = \mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) > 0.$$

Allora esistono una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa ed una costante $k_n > 0$ tale che

$$\|u - v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta \frac{k_n}{\beta}.$$

Dimostrazione. Il teorema si dimostra banalmente come combinazione del Lemma (5.12) e del Teorema (5.11). Grazie all'ipotesi (I) risultano valide tutte le ipotesi del Lemma (5.12), pertanto applicandolo in combinazione con l'ipotesi (II) ricaviamo che nel punto di massimo interno deve valere la disuguaglianza

$$\mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) \leq \delta \frac{1}{\beta},$$

da cui si ricava immediatamente la $\delta\frac{1}{\beta}$-convessità della funzione u. Utilizzando ora il *Teorema di Hyers-Ulam* (5.11) deduciamo che esiste una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa tale che

$$\|u - v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta \frac{k_n}{\beta}.$$

□

5.14 Osservazione. Nel caso $\delta = 0$ le assunzioni del Teorema (5.13) corrispondono esattamente a quelle del Teorema (3.3) precedentemente enunciato.
Prestiamo tuttavia particolare attenzione alla condizione (I) del teorema precedente

$$\frac{\partial b(x, s, p)}{\partial s} \geq \beta > 0$$

che corrisponde all'ipotesi considerata nella prima parte della dimostrazione del Teorema (3.3), diversamente dall'ipotesi generale

$$\frac{\partial b(x, s, p)}{\partial s} \geq 0$$

che contempla invece anche il caso limite $\beta = 0$. Vorremmo pertanto stabilire se è possibile trovare un espediente analogo al Lemma (3.4) precedentemente introdotto per poter verificare cosa accade anche quando $\beta = 0$. Essendo ovviamente la risposta affermativa, il lemma successivo fornisce esattamente il risultato cercato.

$$\Downarrow$$

5.15 Lemma (di perturbazione generalizzato). *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ soluzione dell'equazione (5.5) tale che sia verificata la condizione (I) del Teorema (5.13) per $\beta = 0$. Sia*

$\Omega' \subset\subset \Omega$ un insieme regolare con frontiera $\partial\Omega \in C^1$ e supponiamo che la funzione $\mathcal{C}_u$ raggiunga il suo massimo assoluto strettamente positivo nel punto interno $(x_1, x_3, \lambda) \in \Omega' \times \Omega' \times [0,1]$. Allora $\forall \eta > 0$ esiste un valore $\delta_0(\eta, \Omega')$ tale che $\forall \delta$ con $0 < \delta < \delta_0(\eta, \Omega')$ esistono una funzione $v_\delta : \Omega' \to \mathbb{R}$, una funzione $w_\delta : \Omega' \to \mathbb{R}$ convessa ed una costante $k_n > 0$ tali che, ogniqualvolta vale la condizione (II) del Teorema (5.13), si verifica che

$$\|u - v_\delta\|_{L^\infty(\Omega')} \leq \eta,$$

$$\|w_\delta - v_\delta\|_{L^\infty(\Omega')} \leq k_n\sqrt{\delta}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue direttamente dal Lemma (3.4) da cui deduciamo che, preso un generico $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, esistono $M > 0$ ed una funzione w con $\|w^\epsilon\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} < M$ tale che la funzione $v^\epsilon := u + \epsilon w^\epsilon$ è soluzione del seguente problema perturbato:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\nabla v^\epsilon) \frac{\partial^2 v^\epsilon}{\partial x_i \partial x_j} = b(x, v^\epsilon, \nabla v^\epsilon) + \epsilon v^\epsilon & in \;\; \Omega' \\ v^\epsilon = u & su \;\; \partial\Omega' \end{cases}. \tag{5.10}$$

La dimostrazione completa, basata proprio sullo studio del problema perturbato (5.10), viene omessa.[15] □

$$\Downarrow$$

Riassumendo brevemente, il lemma appena enunciato permette di determinare la convergenza uniforme in norma $L^\infty(\Omega')$ della soluzione del problema (5.5) alla soluziome del problema perturbato (5.10). Tuttavia, diversamente dal Teorema (5.13), non possiamo affermare che la soluzione del problema (5.5) converge uniformemente ad una funzione convessa.

Seguendo ora il ragionamento elaborato nel Capitolo 4 per introdurre il *principio del massimo per la concavità (PMC II)*, tenenendo presente l'implicazione (5.2), vogliamo comprendere se indebolire la condizione (II) del Teorema (5.13) sostituendo la *δ-concavità* sulla funzione $-b$ lungo u con la sola *δ-concavità armonica* della medesima funzione lungo u permette comunque di ottenere un risultato rilevante per la nostra trattazione.
Il lemma successivo, analogo per impostazione al Lemma (5.12), risponde in maniera affermativa alla questione appena sollevata.

5.16 Lemma (II). *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limiato e convesso, sia defnita la funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, soluzione dell'equazione (5.5). Supponiamo che la funzione $\mathcal{C}_u$ raggiunga il suo massimo assoluto strettamente positivo in un punto interno $(x_1, x_3, \lambda) \in \Omega \times \Omega \times [0,1]$. Supponiamo inoltre che esiste una costante $\beta > 0$ tale che valga l'ipotesi (5.6), ovvero che*

$$\inf_{\xi \in [u(x_2), (1-\lambda)u(x_1) + \lambda u(x_3)]} \frac{\partial b(x_2, \xi, \nabla u(x_2))}{\partial u} \geq \beta.$$

[15] Vedi [**5**], Proposizione (2.8), pag. 7.

Allora vale la seguente disuguaglianza:

$$\mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) \leq \frac{1}{\beta}\mathcal{H}\mathcal{C}_{-b(\cdot.u(\cdot),\nabla u(\cdot))}(x_1, x_3, \lambda). \tag{5.11}$$

Dimostrazione. Analogamente alla dimostrazione del Teorema (4.7) limitiamoci al caso in cui $x_1 \neq x_3$ e $\lambda \in (0, 1)$ in quanto diversamente otteniamo che $\mathcal{C}_u \equiv 0$, da cui la convessità della funzione u. Considerando che $u \in C^1(\Omega)$, nel punto di massimo interno si verifica che $\nabla\mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) = 0$. Pertanto, in modo indentico a quanto svolto nella dimostrazione del Lemma (5.12), otteniamo che il gradiente della funzione u deve essere identico nei tre punti x_1, x_2 e x_3 considerati:

$$\nabla u(x_1) = \nabla u(x_2) = \nabla u(x_3) := z. \tag{5.12}$$

Considerando inoltre che $u \in C^2(\Omega)$, la matrice hessiana $\nabla^2\mathcal{C}_u$ della funzione $\mathcal{C}_u$ deve essere semidefinita negativa nel punto di massimo (x_1, x_2, λ), ovvero sinteticamente

$$\nabla^2\mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) := \begin{bmatrix} \nabla^2_{y_1}\mathcal{C}_u & \nabla^2_{y_1y_3}\mathcal{C}_u \\ \nabla^2_{y_3y_1}\mathcal{C}_u & \nabla^2_{y_3}\mathcal{C}_u \end{bmatrix}(x_1, x_3, \lambda) \leq 0,$$

dove abbiamo denotato con ∇^2_x la parte di matrice hessiana corrispondente alle derivate parziali seconde rispetto alla variabile x e similmente gli altri termini. Definiamo ora $\forall s, t \in \mathbb{R}$ una matrice simmetrica $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ nel seguente modo:

$$B := \begin{bmatrix} s^2A & stA \\ stA & t^2A \end{bmatrix}.$$

Tramite semplici calcoli matriciali otteniamo il seguente risultato:

$$B\nabla^2\mathcal{C}_u = \begin{bmatrix} s^2A\nabla^2_{y_1}\mathcal{C}_u + st\nabla^2_{y_1y_3}\mathcal{C}_u & s^2A\nabla^2_{y_1y_3}\mathcal{C}_u + st\nabla^2_{y_3}\mathcal{C}_u \\ stA\nabla^2_{y_1}\mathcal{C}_u + t^2\nabla^2_{y_3y_1}\mathcal{C}_u & stA\nabla^2_{y_3y_1}\mathcal{C}_u + t^2\nabla^2_{y_3}\mathcal{C}_u \end{bmatrix}.$$

La matrice B è evidentemente definita positiva come la matrice A, pertanto otteniamo che $tr(B\nabla^2\mathcal{C}_u) \leq 0$. Questo risultato può essere riscritto esplicitamente nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}}_{D}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \alpha s^2 + 2\beta st + \gamma t^2 \leq 0, \tag{5.13}$$

dove abbiamo sinteticamente denotato α, β e γ le seguenti quantità:

$$\alpha = tr(A\nabla^2_{y_1}\mathcal{C}_u), \qquad \beta = tr(A\nabla^2_{y_1y_3}\mathcal{C}_u), \qquad \gamma = tr(A\nabla^2_{y_3}\mathcal{C}_u).$$

Posto ora per definizione $Q_\eta := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(\nabla u(\eta))\partial^2_{ij}u(\eta)$ al variare di $\eta = x_1, x_2, x_3 \in \Omega$

otteniamo tramite calcoli espliciti che

$$\begin{aligned}
\alpha &= (1-\lambda)^2 Q_{x_2} - (1-\lambda) Q_{x_1}, \\
\beta &= \lambda(1-\lambda) Q_{x_2}, \\
\gamma &= \lambda^2 Q_{x_2} - \lambda Q_{x_3}.
\end{aligned}$$

Dato che la forma quadratica (5.13) determinata dalla matrice D deve essere semidefinita negativa, deduciamo immediatamente che devono essere valide le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
tr(D) &= \alpha + \gamma \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha, \gamma \leq 0 \\
det(D) &= \alpha\gamma - \beta^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Tenendo presente che per ipotesi $\lambda \in (0,1)$, esplicitiamo le espressioni appena ricavate rispettivamente nel seguente modo:

$$Q_{x_2} \leq \frac{Q_{x_1}}{1-\lambda}, \tag{5.14}$$

$$Q_{x_2} \leq \frac{Q_{x_3}}{\lambda}, \tag{5.15}$$

$$\begin{gathered}
[(1-\lambda)^2 Q_{x_2} - (1-\lambda) Q_{x_1}](\lambda^2 Q_{x_2} - \lambda Q_{x_3}) - \lambda^2 (1-\lambda)^2 Q_{x_2}^2 = \\
= \lambda(1-\lambda)[Q_{x_1} Q_{x_3} - (1-\lambda) Q_{x_3} Q_{x_2} - \lambda Q_{x_1} Q_{x_2}] \geq 0 \\
\Longleftrightarrow
\end{gathered}$$

$$Q_{x_1} Q_{x_3} \geq Q_{x_2}[(1-\lambda) Q_{x_3} + \lambda Q_{x_1}]. \tag{5.16}$$

Nel caso in cui $(1-\lambda)Q_{x_3} + \lambda Q_{x_1} \leq 0$, combinando la (5.14) con la (5.16), otteniamo che

$$Q_{x_1} Q_{x_3} \geq Q_{x_2}[(1-\lambda) Q_{x_3} + \lambda Q_{x_1}] \geq Q_{x_1} Q_{x_3} + \frac{\lambda Q_{x_1}^2}{1-\lambda},$$

da cui si deduce che deve essere $Q_{x_1} = 0$. Similmente, combinando la (5.15) con la (5.16), tramite calcoli analoghi deduciamo che deve essere $Q_{x_3} = 0$. Si distinguono pertanto due casi differenti, caratterizzati rispettivamente da implicazioni dedotte dalle condizioni (5.14) e (5.16):

$$(1-\lambda) Q_{x_3} + \lambda Q_{x_1} \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_{x_1} = Q_{x_3} = 0, \;\; Q_{x_2} \leq 0, \tag{5.17}$$

$$(1-\lambda) Q_{x_3} + \lambda Q_{x_1} > 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_{x_2} \leq \frac{Q_{x_1} Q_{x_3}}{(1-\lambda) Q_{x_3} + \lambda Q_{x_1}}. \tag{5.18}$$

Utilizzando l'equazione (5.5) deduciamo facilmente che

$$Q_\eta = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(\nabla u(\eta)) \partial_{ij}^2 u(\eta) = b(\eta, u(\eta), \nabla u(\eta)) \qquad \eta = x_1, x_2, x_3.$$

Nel caso della condizione (5.18) otteniamo dunque la disuguaglianza

$$b(x_2, u(x_2), z) \leq \frac{b(x_1, u(x_1), z) b(x_3, u(x_3), z)}{(1-\lambda) b(x_3, u(x_3), z) + \lambda b(x_1, u(x_1), z)},$$

da cui ricaviamo immediatamente che

$$\begin{aligned} & b(x_2, u(x_2), z) - b(x_2, (1-\lambda) u(x_1) + \lambda u(x_3), z) \leq \\ \leq & \frac{b(x_1, u(x_1), z) b(x_3, u(x_3), z)}{(1-\lambda) b(x_3, u(x_3), z) + \lambda b(x_1, u(x_1), z)} - b(x_2, (1-\lambda) u(x_1) + \lambda u(x_3), z) = \\ = & - \mathcal{HC}_{b(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))}(x_1, x_3, \lambda). \end{aligned}$$

Applicando *il Teorema di Lagrange (o del valor medio)* otteniamo che esiste ξ appartenente al segmento orientato $[u(x_2), (1-\lambda) u(x_1) + \lambda u(x_3)]$ tale che

$$\frac{b(x_2, u(x_2), z) - b(x_2, (1-\lambda) u(x_1) + \lambda u(x_2), z)}{u(x_2) - (1-\lambda) u(x_1) - \lambda u(x_3)} = \frac{\partial b(x_2, \xi, z)}{\partial u}. \tag{5.19}$$

Tenuto conto dell'ipotesi (5.6) e del fatto che $\mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) > 0$, ricaviamo semplicemente che

$$\beta \mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) = b(x_2, u(x_2), z) - b(x_2, (1-\lambda) u(x_1) + \lambda u(x_2), z),$$

da cui, applicando la disuguaglianza (5.19) precedentemente ottenuta, deduciamo che

$$\mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) \leq \frac{1}{\beta} \mathcal{HC}_{-b(\cdot . u(\cdot), \nabla u(\cdot))}(x_1, x_3, \lambda).$$

Nel caso invece della condizione (5.17) otteniamo facilmente il medesimo risultato, in quanto la definizione della funzione $\mathcal{HC}_{b(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))}$ risulta consistente rispetto alle nuove disuguaglianze in cui i termini $b(x_1, u(x_1) z) = b(x_3, u(x_3), z) = 0$. La dimostrazione del lemma è pertanto conclusa. □

In breve, il Lemma (5.16) afferma la medesima tesi del Lemma (5.12), sostituendo alla funzione di concavità $\mathcal{C}_{-b(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))}$ la funzione di concavità armonica $\mathcal{HC}_{-b(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))}$ della funzione $-b$ lungo u nella disuguaglianza finale.

Possiamo infine enunciare e dimostrare il secondo *principio di δ-convessità*, diverso dal primo nella sola ipotesi (II) dove viene richiesta la proprietà di concavità armonica approssimata della funzione b lungo u invece della semplice concavità approssimata.

5.17 Teorema (Principio II di δ-convessità (PCA II)). *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ soluzione dell'equazione (5.5) e poniamo per definizione $M := \|u\|_{C^2(\Omega)}$ e $m := \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$.*
Presi $\delta \geq 0$ e $\beta > 0$ supponiamo che valgano le seguenti condizioni:

$$(I) \quad \forall (x, s, p) \in \Omega \times [-m, m] \times \bar{B}_M \quad \frac{\partial b(x, s, p)}{\partial s} \geq \beta,$$

$$(II) \quad \forall (y_1, y_3, \lambda) \in \Omega \times \Omega \times [0, 1], \quad \forall p \in \bar{B}_M \quad \mathcal{HC}_{-b(\cdot, u(\cdot), p)}(y_1, y_3, \lambda) \leq \delta.$$

Supponiamo inoltre che la funzione $\mathcal{C}_u$ raggiunga il suo massimo assoluto strettamente positivo in un punto interno a Ω, ovvero che esiste $(x_1, x_3, \lambda) \in \Omega \times \Omega \times [0,1]$ tale che

$$\max_{\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times[0,1]} \mathcal{C}_u = \mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) > 0.$$

Allora esistono una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa ed una costante $k_n > 0$ tale che

$$\|u - v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta \frac{k_n}{\beta}.$$

Dimostrazione. Il teorema si dimostra banalmente come combinazione del Lemma (5.16) e del Teorema (5.11). Grazie all'ipotesi (I) risultano valide tutte le ipotesi del Lemma (5.16), pertanto applicandolo in combinazione con l'ipotesi (II) ricaviamo che nel punto di massimo interno deve valere la disuguaglianza

$$\mathcal{C}_u(x_1, x_3, \lambda) \leq \delta \frac{1}{\beta},$$

da cui si ricava immediatamente la $\delta\frac{1}{\beta}$-convessità armonica della funzione u. Dall'implicazione (5.2) deduciamo tuttavia anche la $\delta\frac{1}{\beta}$-convessità della funzione u. Utilizzando ora il *Teorema di Hyers-Ulam* (5.11) deduciamo che esiste una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa tale che

$$\|u - v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta \frac{k_n}{\beta}.$$

□

5.18 Osservazione. Nel caso $\delta = 0$ le assunzioni del Teorema (5.17) corrispondono esattamente a quelle del Teorema (4.7) precedentemente enunciato.

5.3 Alcune applicazioni: condizioni al contorno e problemi differenziali con soluzioni δ-concave

In quest'ultima sezione proponiamo alcune applicazioni notevoli delle due versioni dei *principi di δ-convessità (PCA I) e (PCA II)*, fornendo specificamente due tipologie di risultati. In primo luogo, prendendo come modello i Teoremi (4.8) e (4.16) precedentemente dimostrati, determineremo quali condizioni al contorno debba soddisfare una generica funzione u affinchè la relativa funzione di convessità $\mathcal{C}_u$ non raggiunga il suo massimo assoluto in un punto appartente al bordo dell'insieme Ω. In secondo luogo, facendo invece riferimento ai Teoremi (4.11) e (4.14), studieremo alcuni specifici problemi differenziali, determinando mediante (PCA I) o (PCA II) l'eventuale δ-concavità delle rispettive soluzioni.

5.3.1 Condizioni al contorno

5.19 Proposizione. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso, sia definita una funzione $u \in C(\bar{\Omega})$ che soddisfi le seguenti condizioni:*

$$u_{|\Omega} > 0 \quad e \quad u_{|\partial\Omega} = 0.$$

Supponiamo inoltre che $\forall x \in \partial\Omega$ e $\forall y \in \Omega$ valga la seguente condizione:

$$\limsup_{t \to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}} u((1-t)x + ty) > u(y). \tag{5.20}$$

Allora $\forall \alpha \in (0,1)$ la funzione $\mathcal{C}_{-u^\alpha}$ non raggiunge il suo massimo assoluto strettamente positivo in un punto appartenente al bordo di Ω.

Dimostrazione. Ricordando che $\mathcal{C}_{-u^\alpha} = -\mathcal{C}_{u^\alpha}$, supponiamo per assurdo che esista un punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [0,1]$ appartenente al bordo di Ω tale che la funzione $\mathcal{C}_{-u^\alpha}$ vi raggiunga il suo massimo assoluto strettamente positivo $\mathcal{C}_{-u^\alpha}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) > 0$. Notiamo che se almeno due dei punti $\bar{x}, \bar{y}$ o $(1-\bar{\lambda})\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{y}$ appartengono a $\partial\Omega$ otteniamo banalmente l'assurdo $\mathcal{C}_{-u^\alpha} \leq 0$, pertanto la dimostrazione sarebbe banalmente conclusa. Limitiamoci pertanto al solo caso di un punto appartenente a $\partial\Omega$, in particolare $\bar{x} \in \partial\Omega$ e $\bar{y} \in \Omega$[16]
L'ipotesi (5.20) risulta essere equivalente alla seguente condizione:

$$\limsup_{t \to 0^+} t^{-1} u^\alpha((1-t)x + ty) > u^\alpha(y).$$

da cui ricaviamo che esiste $\tau \in (0, \bar{\lambda})$ tale che

$$u^\alpha(\bar{y}) < \frac{u^\alpha((1-\tau)\bar{x} + \tau\bar{y})}{\tau} \qquad \Longrightarrow \qquad u^\alpha((1-\tau)\bar{x} + \tau\bar{y}) > \tau u^\alpha(\bar{y}).$$

Poniamo per definizione $\xi := (1-\tau)\bar{x} + \tau\bar{y} \in \Omega$ e $\mu := \frac{\bar{\lambda}-\tau}{1-\tau} \in (0, \bar{\lambda})$ in modo che valga la seguente uguaglianza:

$$(1-\mu)\xi + \mu\bar{y} = \left(\frac{1-\bar{\lambda}}{1-\tau}\right)[(1-\tau)\bar{x} + \tau\bar{y}] + \left(\frac{\bar{\lambda}-\tau}{1-\tau}\right)\bar{y} = (1-\bar{\lambda})\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{y}.$$

Utilizzando ora la disuguaglianza precedentemente ottenuta, tramite semplici calcoli ricaviamo dunque che

$$\begin{aligned} -\mathcal{C}_{u^\alpha}(\xi, \bar{y}, \mu) &= (1-\mu)u^\alpha(\xi) + \mu u^\alpha(\bar{y}) - u^\alpha((1-\mu)\xi + \mu\bar{y}) > \\ &> (1-\mu)(\tau u^\alpha(\bar{y})) + \mu u^\alpha(\bar{y}) - u^\alpha((1-\mu)\xi + \mu\bar{y}) = \\ &= [(1-\mu)\tau + \mu]u^\alpha(\bar{y}) - u((1-\mu)\xi + \mu\bar{y}) = \\ &= \bar{\lambda}u(\bar{y}) - u((1-\bar{\lambda})\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{y}) = \\ &= -\mathcal{C}_{u^\alpha}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}). \end{aligned}$$

[16] Il caso simmetrico $\bar{y} \in \partial\Omega$ e $\bar{x} \in \Omega$ si discute in modo analogo, mentre il caso $\bar{x}, \bar{y} \in \Omega$ e $(1-\bar{\lambda})\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{y} \in \partial\Omega$ è escluso in virtù della convessità dell'insieme Ω.

Questo fatto è tuttavia in contraddizione con l'ipotesi di massimalità di $-\mathcal{C}_{u^\alpha}(\xi, \bar{y}, \mu)$. Ottenuto l'assurdo, deduciamo dunque che la funzione $-\mathcal{C}_{u^\alpha} = \mathcal{C}_{-u^\alpha}$ non raggiunge il suo massimo assoluto strettamente positivo in un punto appartenente al bordo di Ω. La dimostrazione è dunque conclusa. $\square$

5.20 Corollario. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso, sia definita una funzione $u \in C(\bar{\Omega})$ tale che soddisfi le seguenti condizioni:*

$$u_{|\Omega} > 0, \qquad u_{|\partial\Omega} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} > 0, \tag{5.21}$$

dove ν indica il versore normale interno a $\partial\Omega$. Allora $\forall \alpha \in (0,1)$ la funzione $\mathcal{C}_{-u^\alpha}$ non raggiunge il suo massimo assoluto strettamente positivo in un punto appartenente al bordo di Ω.

Dimostrazione. La dimostrazione del corollario deriva direttamente dalla Proposizione (5.19), basta stabilire la validtà dell'ipotesi secondo cui $\forall x \in \partial\Omega$ e $\forall y \in \Omega$ vale la condizione

$$\limsup_{t \to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}} u((1-t)x + ty) > u(y).$$

Sapendo che $\alpha \in (0,1)$, dall'ipotesi (5.21) otteniamo facilmente che

$$\begin{aligned} u(y) &< \limsup_{t \to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}} u((1-t)x + ty) = \limsup_{t \to 0^+} t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\frac{u(x + t(y-x))}{t} \right] = \\ &= \limsup_{t \to 0^+} t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \cdot \limsup_{t \to 0^+} \frac{u(x + t(y-x)) - u(x)}{t} = \limsup_{t \to 0^+} t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \underbrace{\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}}_{>0} = +\infty. \end{aligned}$$

Verificate tutte le ipotesi della Proposizione (5.19) otteniamo che la funzione $-\mathcal{C}_{u^\alpha} = \mathcal{C}_{-u^\alpha}$ non raggiunge il suo massimo assoluto strettamente positivo in un punto appartenente al bordo di Ω. La dimostrazione è dunque conclusa. $\square$

5.21 Lemma. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso, sia definita una funzione $u \in C^1(\bar{\Omega})$ tale che soddisfi le seguenti condizioni:*

$$u_{|\Omega} > 0 \quad e \quad u_{|\partial\Omega} = 0.$$

Supponiamo inoltre che $\forall x \in \partial\Omega$ e $\forall y \in \Omega$ valga la seguente condizione:

$$\limsup_{t \to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}} u((1-t)x + ty) = 0. \tag{5.22}$$

Allora esiste un valore $\delta > 0$ tale che la funzione u^α non è δ-concava.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un valore $\delta > 0$ tale che la funzione u^α è δ-concava, ovvero che $\forall x, y \in \bar{\Omega}$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ si verifichi la disuguaglianza

$$\mathcal{C}_{u^\alpha}(x,y,\lambda) \geq -\delta.$$

Da questo fatto deduciamo semplicemente che $\forall x \in \partial\Omega$ e $\forall y \in \Omega$ deve valere il seguente fatto:

$$u^\alpha((1-t)x + \lambda y) \geq t u^\alpha(y) - \delta.$$

Ponendo per definizione $\delta_0 = t\delta$ con $\delta_0 \in (0, u^\alpha(y))$, dividendo per t ed elevando alla $\frac{1}{\alpha}$ entrambi i membri della precedente espressione otteniamo che

$$t^{-\frac{1}{\alpha}} u((1-t)x + ty) \geq (u^\alpha(z) - \delta_0)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Mandando ora entrambi i membri al limite per $t \to 0^+$ ricaviamo una contraddizione con l'ipotesi (5.22). Dunque deve necessariamente esistere $\delta > 0$ tale che la funzione u^α non sia δ-concava, risultato che conclude la dimostrazione. □

5.22 Lemma. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme regolare con frontiera $\partial\Omega \in C^1$, limitato e strettamente convesso, sia definita una funzione $u \in C^1(\bar{\Omega})$ tale che soddisfi le seguenti condizioni:*

$$u_{|\Omega} > 0, \qquad u_{|\partial\Omega} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}_{\big|\partial\Omega} > 0,$$

dove ν indica il versore normale interno a $\partial\Omega$. Consideriamo inoltre una funzione $f \in C^1((0,+\infty))$ tale che $\forall u \in (0,+\infty)$ soddisfi le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} f'(u) < 0 \\ \lim\limits_{u \to 0^+} f'(u) = -\infty \end{cases} . \tag{5.23}$$

Allora la funzione $\mathcal{C}_{f(u)}$ non raggiunge il suo massimo assoluto strettamente positivo in un punto appartenente al bordo di Ω.

Dimostrazione. Omessa[17]. □

5.23 Osservazione. La dimostrazione del Lemma (5.22) segue essenzialmente quella del Lemma (3.8), fornendo di fatto un risultato pressochè identico. In particolare osserviamo che la funzione $f(u) := -\log(u)$ soddisfa le condizioni richieste da entrambi gli enunciati, perciò risulta una trasformazione candidata a diventare di uso frequente nelle varie applicazioni analogamente a quanto visto nei capitoli precedenti.

[17] Vedi [**7**], Lemma (3.12).

5.3.2 Problemi differenziali con soluzioni δ-concave

5.24 Teorema. *Sia definita una funzione $f \in C^2((0,+\infty))$ tale che soddisfi le condizioni (5.23). Supponiamo inoltre che valga il seguente fatto:*

$$(I) \quad \textit{la funzione } \left\{ s \mapsto \frac{f''(f^{-1}(s))}{[f'(f^{-1}(s))]^2} \right\} \textit{ è crescente e concava } \forall s \in \mathbb{R}.$$

Considerato ora $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e strettamente convesso, sia definita una funzione $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C(\Omega)$ tale che soddisfi le seguenti condizioni:

$$u_{|\Omega} > 0, \qquad u_{|\partial\Omega} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}_{\big|\partial\Omega} > 0,$$

dove ν indica il versore normale interno a $\partial\Omega$. Supponiamo inoltre che u sia soluzione in Ω della seguente PDE ellittica:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(-f'(u)\nabla u)\partial^2_{ij} u = \frac{1}{f'(u)} b(x, f(u), -f'(u)\nabla u), \tag{5.24}$$

dove le funzioni a_{ij} e b possiedono le medesime proprietà del Teorema (5.12). Posto $M = \|u\|_{C^2(\Omega)}$ e $m = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, supponiamo infine che esistano $\beta > 0$ e $\delta \geq 0$ tali che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$(II) \quad \forall (x,s,p) \in \Omega \times [f(m), \lim_{x\to 0^+} f(x)) \times \mathbb{R}^n \quad \frac{\partial b(x,s,p)}{\partial s} \geq \beta,$$

$$(III) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \quad \sup_{(x_1,x_3,\lambda)\in\Omega\times\Omega\times[0,1]} \mathcal{C}_{-b(\cdot,f(u(\cdot)),p)}(x_1,x_3,\lambda) \leq \delta.$$

Allora esistono una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa ed una costante $k_n > 0$ tali che

$$\|f(u) - v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta \frac{k_n}{\beta}. \tag{5.25}$$

Dimostrazione. Posto innanzitutto $w = f(u)$, si verifica che la funzione w soddisfa la seguente equazione:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(-\nabla w)\partial^2_{ij} w = \underbrace{b(x,w,\nabla w) + \frac{f''(f^{-1}(w))}{[f'(f^{-1}(w))]^2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(-\nabla w)\partial_i w \partial_j w}_{\tilde{b}(x,w,-\nabla w)}. \tag{5.26}$$

Per dimostrare questo fatto basta semplicemente eseguire calcoli espliciti delle seguenti quantità:

$$\partial_i w = f'(u)\partial_i u,$$
$$\partial^2_{ij} w = f''(u)\partial^2_{ij} u + [f'(u)]^2 \partial_i u \partial_j u,$$

ed inserirle nell'equazione (5.26), ricordando che $u = f^{-1}(w)$, al fine di ottenere nuovamente l'equazione (5.24) originaria. Sapendo che la matrice $A := [a_{ij}]$ è definita positiva, si verifica facilmente che $\forall x \in \Omega$ deve essere

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(-\nabla w(x))\partial_i w(x)\partial_j w(x) > 0.$$

Definiamo inoltre la funzione b_0 nel seguente modo:

$$b_0(w, -\nabla w) = \frac{f''(f^{-1}(w))}{[f'(f^{-1}(w))]^2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(-\nabla w)\partial_i w \partial_j w.$$

Combinando ora l'ipotesi (I) del teorema con il precedente risultato ricaviamo che la funzione[18] b_0 deve essere monotona crescente e concava nella variabile w, pertanto per caratterizzazione che $\mathcal{C}_{-b_0} \leq 0$. Combinando invece l'ipotesi (I) e (II) del teorema deduciamo che la funzione $\tilde{b}(x, w, -\nabla w)$ deve essere monotona crescente nella variabile w e che la relativa derivata deve soddisfare la seguente disuguaglianza:

$$\partial_w \tilde{b}(x, w, -\nabla w) = \partial_w b(x, w, -\nabla w) + \underbrace{\partial_w b_0(w, -\nabla w)}_{\geq 0} \geq \beta.$$

Sfruttando tali risultati e l'ipotesi (III) del teorema otteniamo che $\forall p \in \mathbb{R}^n$ vale la seguente condizione:

$$\begin{aligned} &\sup_{(x_1,x_3,\lambda)\in\Omega\times\Omega\times[0,1]} \mathcal{C}_{-\tilde{b}(\cdot,w(\cdot),p)}(x_1, x_3, \lambda) \leq \\ \leq &\sup_{(x_1,x_3,\lambda)\in\Omega\times\Omega\times[0,1]} \mathcal{C}_{-b(\cdot,w(\cdot),p)}(x_1, x_3, \lambda) + \sup_{(x_1,x_3,\lambda)\in\Omega\times\Omega\times[0,1]} \underbrace{\mathcal{C}_{-b_0(\cdot,w(\cdot),p)}(x_1, x_3, \lambda)}_{\leq 0} \leq \delta \end{aligned}$$

Per le ipotesi poste sulla funzione f, applicando il Lemma (5.22) otteniamo che la funzione $\mathcal{C}_w$ non può raggiungere il suo massimo assoluto strettamente positivo in un punto appartenente al bordo di Ω, pertanto lo deve necessariamente raggiungere in un punto interno. Possiamo dunque applicare il *principio I di δ-convessità (PCA I)* (5.13) alla funzione w, ricavando infine che esistono una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa ed una costante $k_n > 0$ tali che

$$\|w - v\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f(u) - v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta \frac{k_n}{\beta}.$$

Ottenuta la tesi, la dimostrazione del teorema è dunque conclusa. $\square$

Il corollario successivo, diretta conseguenza del Teorema (5.24), riguarda una generalizzazione del *problema agli autovalori per l'operatore di Laplace* (2.1) precedentemente studiato nel Teorema (2.19) e nell'Osservazione (3.10), risultati che avevano portato a determinare la proprietà di *log-concavità* della *prima autofunzione* del relativo operatore. In questo caso particolare analizzeremo invece un *problema semilineare agli autovalori per il Laplaciano*, ovvero un problema lineare esclusivamente nelle derivate di ordine massimo per via dell'in-

[18] Non dipende esplicitamente dalla variabile $x \in \Omega$

troduzione di un termine dipendente in modo nonlineare dalla variabile u. Analogamente al Teorema (3.9) foniremo un risultato notevole per la soluzione u del *problema semilienare agli autovalori*, determinandone di fatto la proprietà di δ-concavità.

5.25 Corollario. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e strettamente convesso con frontiera $\partial\Omega \in C^1$, sia definita una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che soddisfi le seguenti condizioni:*

$$u_{|\Omega} > 0 \quad e \quad u_{|\partial\Omega} = 0.$$

Supponiamo inoltre che u sia soluzione in Ω della seguente PDE semilineare ellittica:

$$\Delta u + \lambda u - ug(u) = 0. \tag{5.27}$$

Siano dunque $\lambda, \delta, c > 0$, $m = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ e sia definita la funzione $g \in C^1((0, m], (0, +\infty)$ tale che $\forall t \in (0, m]$ verifichi le seguenti condizioni:

$$(I) \quad g(t) \leq \lambda \quad e \quad g'(t)t \geq c.$$

Supponiamo inoltre che, data la funzione $h(s) := g(e^{-s})$, si verifichi l'ulteriore condizione

$$(II) \quad \forall (x_1, x_3, \lambda) \in \Omega \times \Omega \times [0, 1] \quad \mathcal{C}_{h(u(\cdot))}(x_1, x_3, \lambda) \leq \delta.$$

Allora esistono una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ concava ed una costante $C := C(n, c, m) > 0$ tali che

$$\|\log(u) - v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\delta.$$

Dimostrazione. Innanzitutto combinando l'equazione (5.27) con l'ipotesi (I) otteniamo che

$$\Delta u = u \underbrace{(g(u) - \lambda)}_{\leq 0} \leq 0.$$

Pertanto applicando[19] il *Lemma di Hopf* (1.9) deduciamo che deve essere $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} > 0$ dove ν indica il versore normale interno a Ω. Conformemente al Lemma (5.22) scegliamo la trasformazione $s = f(u) = -\log(u)$. Osserviamo che nel nostro caso particolare, oltre ad avere $a_{ij} = \delta_{ij}$, ponendo $b(x, s) = \lambda - g(e^{-s})$ si ottengono le seguenti uguaglianze:

$$\frac{1}{f'(s)} b(x, f(s), -f'(s)\nabla s) = -ub(x, -\log(u)) = -u(\lambda - g(u)).$$

Si verifica dunque facilmente che l'equazione (5.27) rappresenta un caso particolare dell'equazione generale (5.24). Osserviamo inoltre che la funzione $b : \Omega \times [\log(m), +\infty) \to \mathbb{R}$ verifica le seguenti condizioni:

$$\partial_s b(x, s) = g'(e^{-s})e^{-s} \geq c,$$

[19] Le condizioni di convessità stretta e di regolarità richieste sull'insieme Ω permettono di applicare il lemma in questione.

$$\mathcal{C}{-}b(x_1, x_3, \lambda) = \mathcal{C}_h(x_1, x_3, \lambda) - \lambda \leq \mathcal{C}_h(x_1, x_3, \lambda) \leq \delta.$$

Verificate dunque tutte le ipotesi del Teorema (5.24), possiamo applicarlo ed affermare che esistono una funzione concava $v : \Omega \to \mathbb{R}$ ed una costante $C(n, c, m) = \dfrac{k_n}{c} > 0$ tale che

$$\|f(u) - (-v)\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\log(u) - v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\delta.$$

Ottenuta la tesi, il corollario è dunque dimostrato. □

Il teorema sucessivo rappresenta invece un'ulteriore generalizzazione del Teorema (4.14) precedentemente dimostrato, il quale considerava una generica PDE ellittica della seguente forma:

$$\Delta u + h(u) = 0,$$

dove il termine nonlineare h dipendeva in modo esplicito esclusivamente dalla variabile u. Nel dettaglio, facendo riferimento all'Osservazione (4.15), analizzeremo un'estensione del caso particolare $h(u) = ku^\gamma$ con $\gamma \in [0, 1)$ introducendo un termine nonlineare aggiuntivo. Il risultato ottenuto si rivelerà analogo a quello originariamente ricavato in (4.11), adattato ovviamente alla proprietà di δ-convessità.

5.26 Teorema. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e convesso tale che soddisfi la condizione di sfera interna (ISC), sia definita una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che soddisfi le seguenti condizioni:*

$$u_{|\Omega} > 0 \quad e \quad u_{|\partial\Omega} = 0.$$

Supponiamo inoltre che u sia soluzione in Ω della seguente PDE semilineare ellittica:

$$\Delta u + u^\gamma - u^{\frac{1+\gamma}{2}} g(u) = 0. \tag{5.28}$$

Preso $\gamma \in [0, 1)$ e posto $m = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, sia definita la funzione $g \in C^1((0, m], (0, +\infty))$ tale che $\forall s \in (0, m]$ verifchi le seguenti condizioni:

$$(I) \quad g(s) \leq s^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad e \quad g'(s) \geq 0.$$

Supponiamo inoltre che, considerato $\delta \geq 0$ e data la funzione $h(s) = g(s^{\frac{2}{1-\gamma}})$, si verifichi per $\lambda \in [0, 1]$ l'ulteriore condizione

$$(II) \quad \forall s_1, s_3 \in (0, m] \quad \mathcal{HC}_h(s_1, s_3, \lambda) \leq \delta.$$

Allora esistono una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ concava ed una costante $C := C(n, m, \gamma) > 0$ tali che

$$\left\| u^{\frac{1-\gamma}{2}} - v \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\delta.$$

Dimostrazione. Innanzitutto dall'ipotesi (I) sulla funzione g ricaviamo la disuguaglianza

$$u^{\frac{1+\gamma}{2}} g(u) \leq u^{\frac{1+\gamma}{2}+\frac{\gamma-1}{2}} = u^{\gamma},$$

che combinata con l'equazione (5.28) implica il seguente risultato:

$$\Delta u = \underbrace{u^{\frac{1+\gamma}{2}} g(u) - u^{\gamma}}_{\leq 0} \leq 0.$$

Applicando pertanto il *Lemma di Hopf* (1.9) deduciamo che deve essere $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} > 0$ dove ν indica il versore normale interno a Ω. Consideriamo ora la trasformazione della funzione u data dall'espressione

$$w := -u^{\frac{1-\gamma}{2}}$$

in modo da poter applicare il Corollario (5.20) alla funzione $w = -u^{\alpha}$ con $\alpha = \frac{1-\gamma}{2} \in (0,1)$ ed ottenere che la funzione di concavità $\mathcal{C}_w$ non può raggiungere il suo massimo assoluto strettamente positivo[20] in un punto appartenente al bordo di Ω, ovvero che esiste $(x_1, x_3\lambda) \in \Omega \times \Omega \times [0,1]$ tale che

$$\max_{\Omega\times\Omega\times[0,1]} \mathcal{C}_w = \mathcal{C}_w(x_1, x_3, \lambda).$$

Verifichiamo ora che la funziome w soddisfa l'equazione

$$\Delta w - \tilde{b}(w, \nabla w) + \tilde{g}(w) = 0, \tag{5.29}$$

dove risultano definite le funzioni $\tilde{b} : [-m^{\frac{1-\gamma}{2}}, 0) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\tilde{g} : [-m^{\frac{1-\gamma}{2}}, 0) \to \mathbb{R}$ rispettivamente nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\tilde{b}(s,z) :=& \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\|z\|^2 + \frac{1-\gamma}{2}\right)\frac{1}{(-s)},\\ \tilde{g}(s) :=& \frac{1-\gamma}{2} g\left((-s)^{\frac{2}{1-\gamma}}\right).\end{aligned}$$

[20]Di fatto, se tale massimo non fosse strettamente positivo, otterremmo $\mathcal{C}_w \leq 0$ ed avremmo dimostrato la concavità della funzione $-w = u^{\frac{1-\gamma}{2}}$, concludendo banalmente la dimostrazione.

Per dimostrare questo fatto è sufficiente eseguire calcoli[21] espliciti delle seguenti quantità:

$$\begin{aligned}\Delta w =&\partial^2_{ii} w = \partial_i \left(\partial_i(-u^{\frac{1-\gamma}{2}})\right) = \partial_i \left(\frac{\gamma-1}{2} u^{-\frac{\gamma+1}{2}}\partial_i u\right) = \\ =&\frac{1-\gamma^2}{4} u^{-\frac{\gamma+3}{2}}(\partial_i u)^2 + \frac{\gamma-1}{2} u^{-\frac{\gamma+1}{2}}\partial^2_{ii} u = \\ =&\frac{1-\gamma^2}{4}\frac{u^{\frac{1-\gamma}{2}}}{u}\|\nabla u\|^2 + \frac{\gamma-1}{2}\frac{u^{\frac{1-\gamma}{2}}}{u^2}\Delta u,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}(w,\nabla w) =& \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\|\nabla w\|^2 + \frac{1-\gamma}{2}\right)\frac{1}{(-w)} = \\ =& \left(\frac{1-\gamma^2}{4}\frac{u^{1-\gamma}}{u^2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1-\gamma}{2}\right) u^{\frac{\gamma-1}{2}} = \\ =&\frac{1-\gamma^2}{4}\frac{u^{\frac{1-\gamma}{2}}}{u^2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1-\gamma}{2} u^{\frac{\gamma-1}{2}},\end{aligned}$$

$$\tilde{g}(w) =\frac{1-\gamma}{2} g\left((-w)^{\frac{2}{1-\gamma}}\right) = \frac{1-\gamma}{2} g(u).$$

ed inserirle nell'equazione (5.29) al fine di ottenere nuovamente l'equazione (5.28) originaria. Dall'ipotesi (I) deduciamo inoltre le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}\tilde{b}(w,\nabla w) =& \underbrace{\frac{1-\gamma^2}{4}\frac{u^{\frac{1-\gamma}{2}}}{u^2}\|\nabla u\|^2}_{\geq 0} + \frac{1-\gamma}{2} u^{\frac{\gamma-1}{2}} \geq \\ \geq& \frac{1-\gamma}{2} u^{\frac{\gamma-1}{2}} \geq \frac{1-\gamma}{2} g(u) = \tilde{g}(w),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_w(\tilde{b}(w,\nabla w) - \tilde{g}(w)) =& \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\|\nabla w\|^2 + \frac{1-\gamma}{2}\right)\frac{1}{w^2} + (-w)^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} g'\left((-w)^{\frac{2}{1-\gamma}}\right) \geq \\ \geq& \frac{1-\gamma}{2}\frac{1}{u^{1-\gamma}} + \underbrace{u^{\frac{1+\gamma}{2}} g'(u)}_{\geq 0} \geq \frac{1-\gamma}{2m^{1-\gamma}} > 0.\end{aligned}$$

Possiamo pertanto applicare[22] la Proposizione (5.8) alle funzioni $\tilde{b}$, $\tilde{g}$ e $\tilde{b}-\tilde{g}$ ed ottenere $\forall (s_1, s_3, \lambda) \in (0, m] \times (0, m] \times [0, 1]$ che

$$\mathcal{HC}_{\tilde{b}-\tilde{g}}(s_1, s_3, \lambda) \geq \mathcal{HC}_{\tilde{b}}(s_1, s_3, \lambda) - \mathcal{HC}_{\tilde{g}}(s_1, s_3, \lambda).$$

Sapendo inoltre che la funzione $\tilde{b} \geq \frac{1-\gamma}{2m^{\frac{1-\gamma}{2}}} > 0$ è strettamente positiva e che banalmente la funzione

$$\left\{ s \mapsto \frac{1}{\tilde{b}(s,z)} \right\}$$

[21] Utilizziamo in questo caso per comodità la *convenzione di Einstein* per la somma sugli indici ripetuti.

[22] Le rispettive funzioni di concavità armonica sono ben definite in quanto le suddette funzioni sono sempre positive.

è convessa nella variabile s, dalla Proposizione (5.10) deduciamo che $\tilde{b}$ è armonicamente concava nella variabile s, pertanto per caratterizzazione $\mathcal{HC}_{\tilde{b}}(s_1, s_3, \lambda) \geq 0$. Tramite semplici calcoli otteniamo infine dall'ipotesi (II) che

$$\mathcal{HC}_{\tilde{b}-\tilde{g}}(s_1, s_3, \lambda) \geq \underbrace{\mathcal{HC}_{\tilde{b}}(s_1, s_3, \lambda)}_{\geq 0} - \mathcal{HC}_{\tilde{g}}(s_1, s_3, \lambda) \geq -\mathcal{HC}_{\tilde{g}}(s_1, s_3, \lambda) \geq -\frac{1-\gamma}{2}\delta.$$

Possiamo dunque applicare il *principio II di δ-convessità (PCA II)* (5.17) ed ottenere che esistono una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ concava ed una costante $k_n > 0$ tale che

$$\|w - (-v)\|_{L^\infty(\Omega)} = \left\| u^{\frac{1-\gamma}{2}} - v \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\delta,$$

con $C = C(n, m, \gamma) = k_n m^{1-\gamma} > 0$. Ottenuta la tesi, il teorema risulta dunque dimostrato. $\square$

L'ultimo teorema proposto in questa trattazione corrisponde ad una generalizzazione del Teorema (4.11) precedentemente dimostrato, il quale considerava una generica PDE ellittica della seguente forma:

$$\Delta u + f(x) = 0,$$

dove il termine lineare f dipende solamente dalla variabile x. Nel dettaglio, il prossimo enunciato introduce per la funzione f una dipendenza esplicita anche dalla variabile u, analizzando di fatto un'ulteriore generalizzazione basata sulla presenza di una particolare funzione del tipo $f(x, u)$. Il risultato ottenuto risulterà analogo a quello originariamente ricavato in (4.11), adattato ovviamente ala proprietà di δ-convessità.

5.27 Teorema. *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e strettamente convesso con $\partial\Omega \in C^1$, sia definita una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che soddisfi le seguenti condizioni:*

$$u_{|\Omega} > 0 \quad e \quad u_{|\partial\Omega} = 0.$$

Supponiamo inoltre che u sia soluzione in Ω della seguente PDE semilineare ellittica:

$$\Delta u + f(x) - u^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}} g(x) = 0. \tag{5.30}$$

Denotato con $m = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, siano dunque definite le funzioni $f, g \in C(\Omega, (0, +\infty))$ tali che esistano delle costanti $\gamma \in [1, +\infty]$, $\delta \geq 0$ e $c > 0$ per cui $\forall x \in \Omega$ si verifichino le seguenti condizioni:

$$(I) \quad f^\gamma(x) \text{ concava}, \qquad f(x) \geq c, \qquad f(x) \geq m^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}} g(x).$$

Supponiamo inoltre che si verifichi l'ulteriore condizione

$$(II) \quad \forall (x_1, x_3, \lambda) \in \Omega \times \Omega \times [0,1] \quad \mathcal{HC}_g(x_1, x_3, \lambda) \leq \delta.$$

Allora esistono una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ concava ed una costante $C := C(n, c, m, \gamma) > 0$ tali che

$$\left\| u^{\frac{\gamma}{1+2\gamma}} - v \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\delta.$$

Dimostrazione. Innanzitutto dall'ipotesi (I) sulla funzione f ricaviamo $\forall x \in \Omega$ la disuguaglianza

$$f(x) \geq m^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}} g(x) \geq u^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}} g(x),$$

che combinata con l'equazione (5.30) implica il seguente risultato:

$$\Delta u = \underbrace{u^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}} g(x) - f(x)}_{\leq 0} \leq 0.$$

Applicando pertanto il *Lemma di Hopf* (1.9) deduciamo che deve essere $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} > 0$ dove ν indica il versore normale interno a Ω. Consideriamo ora la trasformazione della funzione u data dall'espressione

$$w := -u^{\frac{\gamma}{1+2\gamma}}$$

in modo da poter applicare il Corollario (5.20) alla funzione $w = -u^\alpha$ con $\alpha = \frac{\gamma}{1+2\gamma} \in (0, 1)$ ed ottenere che la funzione di concavità $\mathcal{C}_w$ non può raggiungere il suo massimo assoluto strettamente positivo[23] in un punto appartenente al bordo di Ω, ovvero che esiste $(x_1, x_3\lambda) \in \Omega \times \Omega \times [0, 1]$ tale che

$$\max_{\Omega\times\Omega\times[0,1]} \mathcal{C}_w = \mathcal{C}_w(x_1, x_3, \lambda).$$

Verifichiamo ora che la funziome w soddisfa l'equazione

$$\Delta w - b(x, w, \nabla w) = 0, \tag{5.31}$$

dove risuta definita la funzione $b : \Omega \times [-m^{\frac{\gamma}{1+2\gamma}}, 0) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$b(x, s, z) := \underbrace{\frac{(1+\gamma)\|z\|^2}{\gamma} \frac{1}{(-s)} + \frac{\gamma}{1+2\gamma}(-s)^{-\frac{1+\gamma}{\gamma}} f(x)}_{\tilde{b}(x,s,z)} - \frac{\gamma}{1+2\gamma} g(x).$$

[23] Di fatto, se tale massimo non fosse positivo, otterremmo $\mathcal{C}_w \leq 0$ ed avremmo dimostrato la concavità della funzione $-w = u^{\frac{\gamma}{1+2\gamma}}$, concludendo banalmente la dimostrazione.

Per dimostrare questo fatto è sufficiente eseguire calcoli espliciti delle seguenti quantità:

$$\begin{aligned}
\Delta w =&\partial^2_{ii} w = \partial_i \left(\partial_i (- u^{\frac{\gamma}{1+2\gamma}}) \right) = \partial_i \left(- \frac{\gamma}{1+2\gamma} u^{-\frac{\gamma+1}{1+2\gamma}} \partial_i u \right) = \\
=& \frac{\gamma(1+\gamma)}{(1+2\gamma)^2} u^{-\frac{3\gamma+2}{1+2\gamma}} (\partial_i u)^2 - \frac{\gamma}{1+2\gamma} u^{-\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}} \partial^2_{ii} u = \\
=& \frac{\gamma(1+\gamma)}{(1+2\gamma)^2} \frac{u^{-\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}}}{u} \|\nabla u\|^2 - \frac{\gamma}{1+2\gamma} u^{-\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}} \Delta u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(x, w, \nabla w) =& \frac{(1+\gamma)\|\nabla w\|^2}{\gamma} \frac{1}{(-w)} + \frac{\gamma}{1+2\gamma} (-w)^{-\frac{1+\gamma}{\gamma}} f(x) - \frac{\gamma}{1+2\gamma} g(x) = \\
=& \frac{\gamma(1+\gamma) u^{-\frac{2(1+\gamma)}{1+2\gamma}} \|\nabla u\|^2}{(1+2\gamma)^2} u^{-\frac{\gamma}{1+2\gamma}} + \frac{\gamma}{1+2\gamma} u^{-\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}} f(x) - \frac{\gamma}{1+2\gamma} g(x) = \\
=& \frac{\gamma(1+\gamma)}{(1+2\gamma)^2} \frac{u^{-\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}}}{u} \|\nabla u\|^2 + \frac{\gamma}{1+2\gamma} u^{-\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}} f(x) - \frac{\gamma}{1+2\gamma} g(x),
\end{aligned}$$

ed inserirle nell'equazione (5.31) al fine di ottenere nuovamente l'equazione (5.30) originaria. Dall'ipotesi (I) deduciamo inoltre la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned}
\partial_w b(x, w, \nabla w) =& \frac{(1+\gamma)\|\nabla w\|^2}{\gamma} \frac{1}{w^2} + \frac{1+\gamma}{1+2\gamma} (-w)^{-\frac{1+2\gamma}{\gamma}} f(x) \geq \\
\geq& \frac{1+\gamma}{1+2\gamma} \frac{f(x)}{u} \geq \frac{c(1+\gamma}{m(1+2\gamma)} > 0.
\end{aligned}$$

Fissato $z \in \mathbb{R}^n$ ed esplicitando la dipendenza dalle variabili (x, s), riscriviamo ora la funzione $\tilde{b}$ precedentemente introdotta nel seguente modo:

$$\tilde{b}_z(x, s) = \frac{1}{(-s)^2} \left(\frac{(1+\gamma)\|z\|^2}{\gamma} (-s) + \frac{\gamma}{1+2\gamma} (-s)^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} f(x) \right) = \frac{1}{(-s)^2} h_z(x, s).$$

Considerando che per l'ipotesi (I) la funzione f è γ-concava nella variabile x e che la funzione

$$\left\{ s \mapsto (-s)^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right\}$$

è evidentemente $\frac{\gamma}{\gamma-1}$-concava nella variabile s, dalla Proprietà (7) della Proposizione (4.5) deduciamo che il termine $f(x)(-s)^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ risulta essere una funzione concava congiuntamente nelle variabili (x, s) in quanto η-concava con

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \eta = 1.$$

Da questo fatto ricaviamo immediatamente che la funzione $h_z(x, s)$ è concava in quanto somma di funzioni a loro volta concave. Utilizzando ora la Proposizione (5.9) deduciamo che la funzione $\tilde{b}_z(x, s)$ è convessa, da cui applicando invece la Proposizione (5.10) giungiamo alla conclusione che la funzione $\tilde{b}(x, s)$ deve necessariamente essere armonicamente concava congiuntamente nelle variabili (x, s), pertanto per caratterizzazione

$$\forall (x_1, x_3, \lambda) \in \Omega \times \Omega \times [0, 1] \quad \mathcal{HC}_{\tilde{b}}(x_1, x_3, \lambda) \geq 0.$$

Combinando la definizione della funzione b, l'ipotesi (II) e la Proposizione (5.8) ricaviamo inoltre che

$$\mathcal{HC}_b(x_1, x_3, \lambda) \geq \underbrace{\mathcal{HC}_{\tilde{b}}(x_1, x_3, \lambda)}_{\geq 0} - \frac{\gamma}{1 + 2\gamma} \mathcal{HC}_g(x_1, x_3, \lambda) \geq -\frac{\gamma}{1 + 2\gamma} \delta.$$

Possiamo applicare infine il *principio II di δ-convessità (PCA II)* (5.17) ed ottenere che esistono una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ concava ed una costante $k_n > 0$ tali che

$$\|w - (-v)\|_{L^\infty(\Omega)} = \left\| u^{\frac{\gamma}{1+2\gamma}} - v \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\delta,$$

con $C = C(n, c, m, \gamma) = \dfrac{k_n m \gamma}{c(1 + \gamma)} > 0$. Quest'ultimo risultato conclude la dimostrazione del teorema. $\square$

Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto il mio relatore, Prof. Marco Squassina, per aver creduto nelle mie potenzialità e per avermi saputo magistralmente guidare nella produzione di questo elaborato. Senza la sua inequivocabile professionalità e competenza tutto questo non sarebbe stato possibile.

Ringrazio inoltre la Dott.ssa Claudia Bucur, rivelatasi un'ottima collaboratrice, per aver contribuito alla stesura di questa tesi.

Ringrazio i miei genitori e la mia famiglia, i cui sacrifici ed il cui appoggio hanno permesso il conseguimento di questo mio fondamentale traguardo.

Ringrazio immensamente Alberto, per me punto di riferimento fondamentale, per il costante spirito di sopportazione nei miei confronti. Non potrei desiderare persona migliore al mio fianco.

Ringrazio infine, dal primo all'ultimo indistintamente, tutti i miei amici, per me motivo d'orgoglio, la cui presenza quotidiana nella mia vita reputo un onore.

Bibliografia

[1] L.G. Makar-Limanov, *Solution of Dirichlet's problem for the equation* $\Delta u = -1$ *in a convex region*, Matematicheskie Zametki, **Vol. 9**, No. 1, (1971), p. 89-92.

[2] H.J. Brascamp, E.H. Lieb, *On extensions of the Brunn-Minkowsky and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation*, Journal of Functional Analysis, **Vol. 22**, No. 4, (1976), p. 366-389.

[3] N.J. Korevaar, *Convex solutions to nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana University Mathematics Journal, **Vol. 32**, No. 4, (1983), p. 603-614.

[4] A.U. Kennington, *Power concavity and boundary value problems*, Indiana University Mathematics Journal, **Vol. 34**, No. 3, (1985), p. 687-704.

[5] C. Bucur, M. Squassina, *Approximate convexity principles and applications to PDEs in convex domains*, (2019).

[6] G. Keady, A. McNabb, *The elastic torsion problem: solutions in convex domains*, New Zealand Journal of Mathematics, **Vol. 22**, (1993), p. 43-64.

[7] S.D. Peckham, *Monkey, Starfish and Octopus Saddles*, Geomorphometry 2011 Conference, Boulder, Colorado USA, (2011).

[8] R.J. Gadner, *The Brunn-Minkowsky inequality*, Bulletin of the American Mathematical Society, **Vol. 39**, No. 3, (2002), p. 355-405.

[9] J.B. Anderson, *Diffusion and Green's Function Quantum Monte Carlo Methods*, Quantum Simulations of Complex Many-Body Systems: From Theory to Algorithms, Lecture Notes, John von Neumann Institute for Computing, Jülich, NIC Series, **Vol. 10**, (2002), p. 25-50.

[10] A. Colesanti, *Interactions between elliptic PDE's and convex geometry*, The Cologne Conference on Nonlinear Differential Equations, Cologne, (2013).

[11] D.H. Hyers, S.M. Ulam, *Approximately convex functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, **Vol. 3**, (1952), p. 821-828.

[12] L.A. Caffarelli, J. Spruck, *Convexity properties of solutions to some classical variational problems*, Communications in Partial Differential Equations, **Vol. 7**, (1982), p. 1337-1379.

[13] L.A. Caffarelli, A. Friedman, *Convexity of solutions of semilinear elliptic equations*, Duke Mathematical Journal, **Vol. 52**, (1985), p. 431-456.

[14] A. Colesanti, P. Salani, *Quasi-concave envelope of a function and convexity of level sets of solutions to elliptic equations*, Mathematische Nachrichten, **Vol. 258**, (2003), p. 3-15.

[15] P. Cuoghi, P. Salani, *Convexity of level sets for solutions to nonlinear elliptic problems in convex rings*, Electronic Journal of Differential Equations, **Vol. 124**, (2006), p. 1-12.

[16] B. Kawohl, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Lecture Notes in Mathematics, **Vol. 1150**, (1985), IV+136 p.

[17] N.J. Korevaar, *Capillary surface convexity above convex domains*, Indiana University Mathematics Journal, **Vol. 32**, (1983), p. 73-81.

[18] S. Sakaguchi, *Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, **Vol. 14**, (1987), p. 403-421.

[19] M. Morse, *Topological Methods in the Theory of Functions of a Complex Variable*, Annals of Mathematics Studies, **Vol. 15**, (1948), p. 50.

[20] P.S. Alexandrov, *Lectures in Analytic Geometry*, Moscow, (1968), p. 406.