

La Congettura di Poincaré e il Flusso di Ricci

Riccardo Benedetti *

Carlo Mantegazza †

10 aprile 2018

Sommario

Si intende presentare, almeno in parte, l'imponente intreccio di idee, tecniche e acquisizioni concettuali che si è sviluppato intorno alla *congettura di Poincaré*, dalla sua formulazione agli inizi del secolo scorso fino alla soluzione data da Grisha Perelman agli inizi del nuovo millennio, portando a compimento il programma basato sullo studio del *flusso di Ricci* di metriche riemanniane su una data 3-varietà, delineato e sviluppato da Richard Hamilton dagli anni '80. Pur nei limiti e nelle possibilità di un articolo di rassegna, si è voluto presentare in modo matematicamente compiuto almeno alcune delle nozioni ed idee cruciali, a partire dalla formulazione stessa della congettura, disponendo soltanto di nozioni di base di algebra lineare, geometria e calcolo differenziale negli spazi euclidei \mathbb{R}^n , che si suppongono familiari al lettore. Ne risulterà probabilmente una lettura "impegnativa", non necessariamente "ricreativa", che però, almeno nelle intenzioni degli autori, dovrebbe ripagare il lettore con un'immagine piuttosto fedele di questi formidabili processi intellettuali, individuali e collettivi, che compongono una delle pagine più belle e profonde della storia della matematica.

Our aim is to present, at least partially, the great twine of ideas, techniques and concepts developed around the *Poincaré conjecture*, from its formulation at the beginning of last century to its solution due to Grisha Perelman at the beginning of the new millennium, completing the program based on the *Ricci flow* of Riemannian metrics on a 3-manifold, outlined and developed by Richard Hamilton since the '80s. In the limits and possibilities of a review paper, we wanted to present in a mathematically satisfactory way at least some of the crucial notions and ideas, starting from the precise formulation of the conjecture, using only basic concepts of linear algebra, geometry and differential calculus in the Euclidean space \mathbb{R}^n , that should be familiar to the reader. The result is possibly a "demanding" reading, not necessarily "recreational", but which, in our intentions, should reward the reader with a quite faithful image of these extraordinary intellectual achievements, individual and collective, composing one of the greatest and deepest pages of the history of mathematics.

1 Introduzione

La congettura di Poincaré, formulata nel 1904 e risolta agli inizi del nuovo millennio da Grisha Perelman portando a compimento il programma basato sullo studio del *flusso di Ricci* di metriche riemanniane su una data 3-varietà, delineato e sviluppato da Richard Hamilton dagli anni '80, è stata forse lo specifico problema aperto più importante e celebre in topologia. Inserita nella lista dei sette "Millennium problems" dell'istituto Clay che aveva messo in palio un milione di dollari per la sua soluzione, per questo e soprattutto per peculiari aspetti della personalità di Perelman, ha attirato anche l'attenzione della stampa non specialistica e del grande pubblico. L'importanza della congettura di Poincaré e della sua spettacolare soluzione risiede anche nel fatto che queste si collocano all'interno di un imponente intreccio di idee, tecniche, acquisizioni

*Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Largo Bruno Pontecorvo 5, 56127 Pisa, Italy

†Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli Federico II, Via Cintia, Monte S. Angelo 80126 Napoli, Italy

concettuali, diramazioni e generalizzazioni che si è sviluppato durante tutto un secolo. Pur nei limiti e nelle possibilità di un articolo di rassegna, lo scopo di questo testo è quello di presentare almeno in parte questo intreccio senza presupporre conoscenze specialistiche in geometria o in topologia, fornendo tuttavia enunciati matematicamente compiuti, insieme a qualche indicazione concreta, non troppo vaga, sulle dimostrazioni.

La complessità dell'intreccio si riflette necessariamente un po' anche nel nostro tentativo di presentazione. Per aiutare il lettore ad orientarsi, descriviamo qui il contenuto dei vari capitoli. Daremo poi una breve guida a possibili percorsi di lettura.

Detto in modo informale, la sfera unitaria in \mathbb{R}^4 è la più semplice delle *varietà* 3-dimensionali compatte e senza bordo; la congettura di Poincaré afferma che, a meno di *isomorfismo* di varietà, essa è completamente caratterizzata da una proprietà topologica di base che dipende dal comportamento dei *lacci* tracciati nella varietà considerati a meno di *deformazioni continue* e che si riassume dicendo che la sfera è *semplicemente connessa*. Nel Capitolo 2 diamo una formulazione compiuta della congettura fornendo in particolare un significato ai termini in corsivo usati qui sopra. Tenendo anche conto degli strumenti geometrici/analitici con cui la congettura è stata alla fine dimostrata, introduciamo una categoria di "varietà" di natura topologico/differenziale (di dimensione arbitraria), basandoci solamente su nozioni di base di algebra lineare, geometria e calcolo differenziale negli spazi euclidei \mathbb{R}^n , che si suppongono familiari al lettore. La lettura di questo capitolo è necessaria in ogni caso; complementi importanti alla formulazione della congettura sono contenuti nella Sezione 3.3 la cui lettura è fortemente consigliata in ogni caso.

Nel Capitolo 3 discutiamo un po' della storia e dell'impatto scientifico della congettura di Poincaré nel contesto della topologia geometrica classica, rimandando cioè ai capitoli successivi la sua collocazione all'interno della generale *congettura di geometrizzazione delle 3-varietà* ed infine l'approccio mediante il flusso di Ricci. Nella Sezione 3.1 discutiamo un aspetto concettuale profondo, inizialmente non colto dallo stesso Poincaré e che si è andato progressivamente chiarendo nel corso di molti decenni. Si tratta dell'esistenza di diverse *categorie di varietà*: quella delle varietà *differenziali* che abbiamo introdotto come nostra categoria favorita nel Capitolo 2, quella delle varietà *meramente topologiche*, quella delle varietà *poliedrali*, dette anche *lineari a pezzi*. Si enunciano in modo preciso alcuni problemi che mettono in relazione queste diverse categorie di varietà e si precisa in che senso due tali categorie siano o no "equivalenti" tra loro. È un fatto notevole, non banale e stabilito diversi decenni dopo la formulazione della congettura di Poincaré, che le tre categorie 3-dimensionali sono effettivamente equivalenti tra loro. La cosa non è più vera in generale per varietà di dimensione superiore. Questo fenomeno si manifesta segnatamente nella discussione sulle *congetture di Poincaré generalizzate* che affrontiamo nella Sezione 3.2. Queste generalizzazioni vertono sia sulla dimensione arbitraria che sulla categoria di varietà considerata. Forniamo un quadro aggiornato dei risultati noti e dei problemi ancora aperti su queste congetture generalizzate. La Sezione 3.4 è dedicata alla topologia geometrica classica in 3 dimensioni. Ricordiamo alcuni dei risultati più profondi di questa disciplina sulla struttura delle 3-varietà in generale (tra cui la cosiddetta *decomposizione canonica*), spiegando perché, se pur profondi, questi risultati risultino essere immateriali ai fini della congettura di Poincaré. Questo, insieme ad alcuni tentativi falliti ma significativi di dimostrazione che vengono richiamati, fornisce una misura della difficoltà del problema e di come questo fosse elusivo.

A partire dalla fine degli anni '70 del '900, la *congettura di geometrizzazione* di Thurston e i suoi fondamentali *teoremi di iperbolizzazione* che la corroboravano, hanno rivoluzionato lo studio delle 3-varietà, fornendo una visione unificante di tutte le 3-varietà, incorporando la stessa congettura di Poincaré. E' facile vedere che ogni varietà (differenziale di dimensione arbitraria) ammette *metriche riemanniane*. Un esempio classico e ideale di geometrizzazione riguarda le superficie (cioè le 2-varietà). Ogni superficie (compatta connessa e senza bordo) ammette metriche riemanniane *localmente isotrope*, cioè di curvatura costante (che può essere normalizzata ad essere 0 o ± 1). Inoltre il segno della curvatura è determinato in modo esclusivo dalle caratteristiche topologiche della superficie. Per le 3-varietà la situazione è certamente più complicata: intanto bisogna considerare anche geometrie localmente omogenee ma non isotrope (cioè a curvatura sezionale costante) – in tutto sono otto geometrie; inoltre esistono delle ostruzioni 'evidenti' ed effettive di natura topologica a geometrizzare in generale una data 3-varietà. Apparentemente queste ostru-

zioni svaniscono se consideriamo i singoli “pezzi” della decomposizione canonica (a condizione di considerare anche varietà non compatte munite di metriche complete e di volume finito). Detto in modo grossolano, la congettura di geometrizzazione delle 3-varietà predice che tali pezzi possono effettivamente essere geometrizzati. Nel Capitolo 4 si considera soprattutto la specializzazione della congettura di geometrizzazione al caso delle 3-varietà compatte semplicemente connesse (sezione 4.3), mostrando come questa implichi la congettura di Poincaré. In questo caso la decomposizione canonica si riduce ad un solo pezzo (la varietà stessa) e la congettura predice che essa ammetta una metrica isotropa di curvatura sezionale costante positiva. Una discussione completa della congettura di geometrizzazione è al di là delle possibilità di questo testo e ci limitiamo ad alcune indicazioni.

Infine nel Capitolo 5, dopo avere propriamente definito e brevemente inquadrato il flusso di Ricci di metriche riemanniane nel quadro più generale dei cosiddetti *flussi geometrici*, descriviamo il programma di Richard Hamilton per la dimostrazione della congettura di geometrizzazione delle 3-varietà compatte semplicemente connesse mediante lo studio del flusso di Ricci in 3 dimensioni. Questo approccio combina questioni profonde di geometria riemanniana e sulle equazioni di evoluzione a derivate parziali. Discutiamo le difficoltà analitiche e geometriche da lui incontrate per portare a termine il programma ed infine come queste siano state superate da Perelman.

Veniamo ora ai promessi *percorsi di lettura*. Il preferito dagli autori è naturalmente quello “dall’inizio alla fine”, perché rende in modo pieno il “respiro” di quel possente intreccio di cui stiamo discutendo. Esso richiede però un certo fiato, appunto, e soprattutto un lettore meno esperto può rischiare di disperdersi o di arrivare senza forze al cruciale capitolo finale. Ci sono allora dei percorsi abbreviati che conservano tuttavia un loro carattere compiuto. Il più diretto è il seguente:

Capitolo 2, Sezione 3.3, Capitolo 4, Capitolo 5.

Un lettore che abbia già un po’ di familiarità con il fibrato tangente e le metriche riemanniane può anche omettere le Sezioni 4.1 e 4.2. Mancando alcune nozioni trattate nel Capitolo 3, alcuni passaggi sulla congettura generale di geometrizzazione potranno risultare oscuri, ma il percorso è autocontenuto se il lettore si limiterà alla specializzazione della congettura al caso semplicemente connesso.

Un percorso intermedio ma molto vicino a quello completo consiste nell’integrare quello precedente inserendo, nell’ordine, la Sezione 3.4. Allora il resto del Capitolo 3, segnatamente la Sezione 3.2, potrà essere considerato un complemento da eventualmente affrontare in seconda lettura.

2 La formulazione della congettura di Poincaré

Ammettendo di conoscere il significato dell’affermazione:

La sfera unitaria \mathbb{S}^3 in \mathbb{R}^4 è una 3-varietà compatta e semplicemente connessa

e sapendo cosa vuol dire che due varietà sono tra loro “isomorfe”, allora la congettura di Poincaré può essere formulata come segue:

Congettura di Poincaré: *Ogni 3-varietà compatta e semplicemente connessa è isomorfa alla sfera \mathbb{S}^3 .*

Lo scopo di questa prima parte della nota è di dare un senso compiuto e non solamente “allusivo” all’affermazione iniziale e quindi all’enunciato della congettura. Tenendo anche conto dei metodi analitico-geometrici con i quali la congettura è stata alla fine dimostrata e che saranno illustrati nell’ultima parte, è conveniente introdurre come nozione base di varietà una definizione di natura *differenziale*. Nello spirito del celebre libretto di Milnor [36], adotteremo una presentazione per cui ogni varietà sarà, in particolare, un sottoinsieme di qualche spazio \mathbb{R}^n . Questa definizione è equivalente a quella corrente più astratta grazie un teorema di “immersione” che ci limitiamo a

menzionare. D'altra parte ha il vantaggio di arrivare rapidamente ad una descrizione compiuta della classe di varietà con cui lavorare, disponendo soltanto di nozioni di base di algebra lineare, geometria e calcolo differenziale negli spazi euclidei \mathbb{R}^n che supponiamo familiari al lettore. Richiamiamo comunque alcuni fatti.

Per ogni $n \geq 0$, lo spazio \mathbb{R}^n può essere munito di una molteplicità di strutture che, di volta in volta, entrano nel discorso.

\mathbb{R}^n può essere considerato come lo spazio vettoriale dei "vettori colonna" (con n righe).

\mathbb{R}^n è munito della struttura di spazio metrico (\mathbb{R}^n, d_n) per mezzo della distanza euclidea

$$d_n(x, y) := \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}$$

che può essere interpretata come la misura della lunghezza del segmento in \mathbb{R}^n che unisce i punti x e y ; inoltre $\|x\| := d_n(x, 0_n)$ definisce una norma sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^n .

La formula

$$(x, y) := \sum_i x_i y_i$$

definisce il prodotto scalare euclideo standard su \mathbb{R}^n . Si osserva che:

- $d^2(x, y) = (x - y, x - y)$,
- le rette generate da due vettori x, y sono tra loro ortogonali se e solo se $(x, y) = 0$; più in generale la nota formula

$$(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cos \theta$$

permette di ricavare la misura dell'angolo formato da due vettori non nulli x e y ,

quindi gli oggetti di base della geometria euclidea elementare possono essere espressi analiticamente per mezzo del prodotto scalare.

\mathbb{R}^n è uno spazio topologico essendo munito della topologia euclidea τ_n indotta dalla distanza d_n : per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, le palle aperte di centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r \in \mathbb{R}$, con $r > 0$,

$$B_r^n(x) = \{y \in \mathbb{R}^n ; d(x, y) < r\}$$

costituiscono un sistema fondamentale di intorni (aperti) di x , mentre l'unione di queste palle al variare di x costituiscono una base di insiemi aperti di τ_n (ogni aperto è unione di palle aperte). Per semplicità, nel seguito con B_r^n denoteremo la palla aperta di raggio r e centro l'origine di \mathbb{R}^n e con B^n la palla B_1^n .

$$\mathbb{S}^{n-1}(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n ; d(x, y) = r\}$$

è il bordo $\partial B_r^n(x)$ di $B_r^n(x)$ ed è detta la sfera di centro x e raggio r . La sfera unitaria di \mathbb{R}^n è per definizione

$$\mathbb{S}^{n-1} := \partial B^n .$$

Dato un sottoinsieme X di \mathbb{R}^n , la famiglia di sottoinsiemi di X

$$\tau_n|_X := \{A \cap X ; A \text{ aperto di } (\mathbb{R}^n, \tau_n)\}$$

è per definizione la famiglia degli aperti della topologia che rende X un sottospazio topologico di \mathbb{R}^n . Le intersezioni di X con le palle aperte di \mathbb{R}^n formano una base di $\tau_n|_X$.

Dati due sottospazi topologici X, Y di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m rispettivamente (non necessariamente $n = m$), un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice continua se la controimmagine

$$f^{-1}(A) := \{x \in X ; f(x) \in A\}$$

di ogni aperto A di Y è un aperto di X . L'applicazione f è un "isomorfismo di spazi topologici" (si dice allora che è un omeomorfismo) se f è continua, bigettiva (quindi esiste l'applicazione inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$) ed anche f^{-1} è continua.

Sia U un sottoinsieme aperto non vuoto di \mathbb{R}^n . Un'applicazione

$$f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

si dice (di classe) C^∞ se è continua e in ogni punto $x \in U$ esistono tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial^r f_j}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}(x)$$

di qualsiasi ordine $r \in \mathbb{N}$ e queste sono funzioni continue. In particolare le derivate parziali del primo ordine in ogni punto $x \in U$ possono essere organizzate in una matrice $m \times n$ ("m righe per n colonne")

$$df_x = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right)_{j=1, \dots, m, i=1, \dots, n}$$

detta il *differenziale* di f in x . Questa matrice si identifica con l'applicazione lineare

$$df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

(via l'usuale "prodotto righe per colonna" $h \rightarrow df_x \cdot h$) che meglio approssima ("linearizza") la funzione $g(h) := f(x+h) - f(x)$ in un intorno di $h = 0$.

È quindi definita l'*applicazione differenziale*

$$df : U \rightarrow M_{m,n} \quad \text{definita da } x \mapsto df_x,$$

che è a sua volta C^∞ avendo identificato in modo naturale lo spazio delle matrici reali $M_{m,n}$ con $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Siano ora $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ come sopra. Un'applicazione continua

$$f : X \rightarrow Y$$

è C^∞ se per ogni $x \in X$ esistono un aperto U di \mathbb{R}^n e un'applicazione $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^∞ tali che:

1. Il punto x appartiene all'aperto U .
2. Per ogni $y \in U \cap X$, si ha che $f(y) = g(y)$.

Possiamo dire che g è una *estensione locale* C^∞ di f su un intorno di x in \mathbb{R}^n . Dunque richiediamo che presso ogni punto di X esista una tale estensione locale.

L'applicazione f è un "isomorfismo C^∞ " (diremo allora che f è un *diffeomorfismo*) se f è un omeomorfismo, è C^∞ e anche l'applicazione inversa f^{-1} è C^∞ . Si può notare che per definire la nozione di "diffeomorfismo" non abbiamo fatto alcuna ipotesi sugli spazi X e Y . La composizione di applicazioni C^∞ è una applicazione C^∞ così come la composizione di diffeomorfismi è un diffeomorfismo.

Usando questa nozione molto generale di diffeomorfismo, siamo ora in grado di definire cosa sia una *n-varietà* M (l'intero n sarà detto la sua *dimensione*): si tratta di un sottospazio topologico di \mathbb{R}^m , per qualche $m \geq n \geq 0$ (non ci sono altre restrizioni su m), tale che per ogni $p \in M$ esistono:

- un aperto U di M che contiene il punto p ;
- un aperto W di \mathbb{R}^n ;
- un diffeomorfismo $\phi : U \rightarrow W$.

Ogni tale (U, ϕ) è detta una *carta locale* di M , mentre posto $\psi = \phi^{-1}$, la coppia (W, ψ) si dice una *parametrizzazione locale* di M intorno al punto p . L'insieme $\mathcal{A}(M)$ delle carte locali di M è detto l'*atlante* di M . Stiamo quindi richiedendo che le carte locali che formano l'atlante ricoprano tutto M . Se (U, ϕ) e (U', ϕ') sono due carte locali di M e $U \cap U' \neq \emptyset$, allora la restrizione di $\phi' \circ \psi$ su $\phi(U \cap U') \subset W$ a valori in $\phi'(U \cap U') \subset W'$ è un diffeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^n detto *cambiamento di carta* (o di *parametrizzazione*) locale.

Possiamo riassumere tutto questo dicendo che $M \subset \mathbb{R}^m$ è una n -varietà se è *localmente diffeomorfa a \mathbb{R}^n* .

Due n -varietà $M \subset \mathbb{R}^m$ e $N \subset \mathbb{R}^k$ sono "isomorfe" (*diffeomorfe*) se esiste un diffeomorfismo $f : M \rightarrow N$ secondo la definizione generale data prima.

Esempi. (1) Ogni aperto non vuoto U di \mathbb{R}^n è una n -varietà. Se $i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è l'applicazione di inclusione, allora (U, i) è una carta locale intorno ad ogni suo punto.

(2) Sia U un aperto di \mathbb{R}^n e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ una applicazione C^∞ . Allora il grafico di f

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{n+k}; x \in U, y = f(x)\}$$

è una n -varietà. Infatti $U' = U \times \mathbb{R}^k$ è un aperto di \mathbb{R}^{n+k} e $G(f) \cap U' = G(f)$. Se ϕ è la restrizione a $G(f)$ della proiezione $\pi : U' \rightarrow U$, $\pi(x, y) = x$, allora $(G(f), \phi)$ è una carta locale intorno ad ogni punto del grafico. La parametrizzazione locale inversa è $\psi : U \rightarrow G(f)$, $\psi(x) = (x, f(x))$.

(3) U e $G(f)$ come nel punto precedente sono n -varietà diffeomorfe e ψ è un diffeomorfismo.

(4) Tutte le palle aperte di \mathbb{R}^n di raggio positivo e le rispettive sfere di bordo sono tra loro diffeomorfe; un diffeomorfismo si può ottenere componendo una traslazione e una omotetia.

(5) Se $M \subset \mathbb{R}^m$ e $N \subset \mathbb{R}^k$ sono varietà di dimensione n e r rispettivamente, allora $M \times N \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ è una $(n+r)$ -varietà.

Mostriamo ora che la sfera unitaria \mathbb{S}^{n-1} di \mathbb{R}^n è una $(n-1)$ -varietà. Se $n=1$, $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ consiste di due punti e la cosa è evidente. Supponiamo $n > 1$. Sia $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, per cui $\|x\| := \sqrt{(x, x)} = 1$. Poniamo

$$x^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n; (x, y) = 0\}$$

cioè "l'iperpiano" di \mathbb{R}^n passante per l'origine O_n formato dai vettori che sono ortogonali ad x . Fissiamo $x_+ = (0, \dots, 0, 1)$ cioè il *polo nord* di \mathbb{S}^{n-1} . Allora x_+^\perp coincide con la "copia" di \mathbb{R}^{n-1} contenuta in \mathbb{R}^n , definita dall'equazione $x_n = 0$. Consideriamo l'aperto di \mathbb{R}^n , $U_+ = \mathbb{R}^n \setminus \{x_n = 1\}$. La *proiezione stereografica su x_+^\perp di centro x_+*

$$\pi_+ : U_+ \rightarrow x_+^\perp$$

è definita geometricamente ponendo $\pi_+(x) = r(x, x_+) \cap x_+^\perp$, dove $r(x, x_+)$ è la retta passante per i due punti x_+ e x . Analiticamente si calcola che

$$\pi_+(x) = \frac{1}{1-x_n}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

che è manifestamente C^∞ . La restrizione ϕ_+ a $\mathbb{S}^{n-1} \cap U_+ = \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{x_+\}$ ha come immagine tutto $x_+^\perp = \mathbb{R}^{n-1}$ ed è invertibile con parametrizzazione inversa data geometricamente ponendo per ogni $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\psi_+(y)$ uguale all'unico punto diverso da x_+ in cui la retta $r(y, x_+)$ interseca la sfera \mathbb{S}^{n-1} . Analiticamente calcoliamo

$$\psi_+(y) = \left(\frac{2y}{1+\|y\|^2}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} \right)$$

che ancora una volta è manifestamente C^∞ . Abbiamo quindi verificato che $(\mathbb{S}^{n-1} \cap U_+, \phi_+)$ definisce una carta locale intorno ad ogni punto della sfera diverso da x_+ . Ripetendo la stessa costruzione usando invece il *polo sud* della sfera, $x_- = (0, \dots, 0, -1)$, troviamo una carta locale $(\mathbb{S}^{n-1} \cap U_-, \phi_-)$ che funziona anche per il polo nord. Dunque \mathbb{S}^{n-1} è una $(n-1)$ -varietà. In

particolare \mathbb{S}^3 è una 3-varietà. Si osserva che i due “poli” non hanno in effetti niente di speciale ed è possibile definire una carta sulla base della proiezione stereografica su x^\perp di centro un arbitrario punto x della sfera. Può essere utile dare una descrizione qualitativa per esempio della carta $(\mathbb{S}^{n-1} \cap U_+, \phi_+)$ e della parametrizzazione locale associata $(\mathbb{R}^{n-1}, \psi_+)$. Considerazioni del tutto analoghe varranno usando invece un arbitrario punto x della sfera. L’origine O_{n-1} di \mathbb{R}^{n-1} corrisponde al polo sud: $\phi_+(x_-) = O_{n-1}$. Se consideriamo le palle chiuse $\overline{B}_r^{n-1}(O_{n-1})$ e facciamo tendere $r \rightarrow +\infty$, queste palle concentriche diventano sempre più grandi e invadono tutto \mathbb{R}^{n-1} ; d’altra parte se consideriamo gli aperti di \mathbb{R}^{n-1} complementari a queste palle

$$U_r := \mathbb{R}^{n-1} \setminus \overline{B}_r^{n-1}(O_{n-1}),$$

la restrizione di ψ_+ su U_r è un diffeomorfismo tra U_r e W_r dove quest’ultimo è della forma

$$W_r = (\mathbb{S}^{n-1} \cap B_R^n(x_+)) \setminus \{x_+\}$$

e l’espressione esplicita del raggio $R = R(r)$ in funzione di r è lasciata al lettore. Risulta che R varia nell’intervallo aperto $(0, 2)$ e $R \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow +\infty$. Possiamo quindi dire che x_+ è il punto di \mathbb{S}^{n-1} all’infinito di \mathbb{R}^{n-1} , tanto che a volte si scrive $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$. Bisogna però maneggiare questa espressione suggestiva con cautela perché può indurre a fraintendimenti. Apparentemente il modo di “andare all’infinito” su \mathbb{R}^{n-1} è stato misurato per mezzo della distanza euclidea d_{n-1} su \mathbb{R}^{n-1} . Però questa struttura geometrica non ha alcun significato intrinseco rispetto al diffeomorfismo che stiamo analizzando: in nessun senso ragionevole essa è preservata dal diffeomorfismo. D’altra parte c’è un modo puramente topologico di pensare “l’andare all’infinito”: si possono considerare famiglie di sottoinsiemi “compatti” di \mathbb{R}^n (vedi sotto per la definizione di questa nozione) sempre più grandi (nel senso dell’inclusione di sottoinsiemi) che invadono tutto lo spazio e studiare come si comporta la successione degli spazi complementari (come abbiamo fatto usando le palle chiuse $\overline{B}_r^{n-1}(O_{n-1})$). Una lezione importante che possiamo trarre da questa discussione è che:

I diffeomorfismi sono oggetti molto “flessibili”, non tanto quanto gli omeomorfismi ma molto di più di trasformazioni “rigide” che preservino qualche tipo di struttura geometrica assegnata.

Un modo alternativo per convincersi che \mathbb{S}^{n-1} è una varietà usa il teorema della funzione implicita. Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_i x_i^2$. Si verifica con calcolo diretto che per ogni $x \in \mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(1)$, la matrice df_x è diversa da zero e quindi di rango massimo, per cui 1 è un valore regolare di f e il teorema della funzione implicita ci dice che la sfera è “localmente” il grafico di una funzione C^∞ in un intorno di ogni suo punto. Un esempio di questi grafici locali è il grafico $G(f)$ della funzione $f: B^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}.$$

Si possono allora usare questi grafici locali per costruire un sistema di carte locali che ricoprono la sfera.

La compattezza e la connessione sono proprietà topologiche (invarianti a meno di omeomorfismi, a maggior ragione a meno di diffeomorfismi) che possono essere definite per tutti i sottospazi topologici di \mathbb{R}^n (non necessariamente varietà). Un sottospazio X di \mathbb{R}^n è (sequenzialmente) compatto se è possibile estrarre da ogni successione di punti di X una sottosuccessione convergente ad un punto di X . Una generalizzazione diretta del teorema di Bolzano–Weierstrass per gli intervalli della retta, probabilmente noto al lettore, mostra che X è compatto se e solo se è chiuso (cioè il suo complementare in \mathbb{R}^n è aperto) e limitato (cioè esiste una palla B_r^n che lo contiene). Allora è facile verificare che la sfera \mathbb{S}^{n-1} è compatta.

Dato un sottospazio topologico X di \mathbb{R}^n , un arco in X che unisce x_0 e x_1 è un’applicazione continua γ definita su un intervallo $[a_0, a_1]$ a valori in X tale che $\gamma(a_0) = x_0$, $\gamma(a_1) = x_1$. Diciamo

che X è *connesso per archi* (in seguito ometteremo a volte di dire “per archi”) se per ogni coppia di punti di X esiste un arco in X che li unisce. A meno di riparametrizzazioni possiamo supporre che ogni arco sia definito su $\overline{B}^1 = [-1, 1]$, per cui in modo equivalente possiamo dire che X è connesso se ogni applicazione (necessariamente continua) $f : \mathbb{S}^0 \rightarrow X$ si estende in modo continuo ad una applicazione definita su tutto l’intervallo \overline{B}^1 di cui $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ è il bordo. Mostriamo ora che se $n \geq 2$, allora \mathbb{S}^{n-1} è connessa (per archi). Siano x_0 e x_1 due punti distinti sulla sfera. Si consideri il 2–piano P di \mathbb{R}^n passante per i tre punti O_n, x_0, x_1 . Allora $\mathbb{S}^{n-1} \cap P$ è il *cerchio massimo* tracciato sulla sfera passante per i due punti x_0 e x_1 . Questi dividono il cerchio in due archi che uniscono entrambi i due punti. In particolare la sfera \mathbb{S}^3 è una 3–varietà connessa.

Un sottospazio connesso per archi X di \mathbb{R}^n è *semplicemente connesso* se ogni applicazione continua $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ (detta anche un *laccio* in X) si estende ad una applicazione continua $\hat{\sigma} : \overline{B}^2 \rightarrow X$ definita su tutto il 2–disco unitario chiuso \overline{B}^2 di cui \mathbb{S}^1 è il bordo. Si osserva allora che ponendo per ogni $x \in \mathbb{S}^1$ e per ogni $t \in [0, 1]$, $\sigma_t(x) = \hat{\sigma}(tx)$, si ottiene una famiglia ad un parametro (una *omotopia*) di lacci in X che ci fa passare in modo continuo dal laccio $\sigma_1 = \sigma$ al laccio *costante* $\sigma_0(t) = \hat{\sigma}(O_2)$. In altre parole possiamo dire che se X è semplicemente connesso, ogni laccio in X può essere “retrato” in modo continuo fino a diventare un punto di X , cioè è per definizione *omotopicamente banale*. Se X è una varietà non è restrittivo ed è conveniente specializzare la definizione richiedendo che i lacci siano C^∞ (questo è possibile grazie ad un “teorema di approssimazione” delle applicazioni continue mediante applicazioni C^∞ , che ci limitiamo a menzionare). Ammettendo questo fatto, mostriamo che se $n \geq 3$, allora \mathbb{S}^{n-1} è semplicemente connessa (in Figura 1 questo è illustrato per $n = 3$). Se il laccio $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ è C^∞ , poiché $1 < n - 1$, un caso semplice del *teorema di Morse–Sard* (che nella sua formulazione più generale è un teorema profondo di analisi matematica) ci assicura che l’immagine di σ non copre tutta la sfera \mathbb{S}^{n-1} (di più: il complementare dell’immagine è un aperto *denso* di \mathbb{S}^{n-1}). A meno di comporre σ con una rotazione della sfera non è restrittivo supporre che il polo nord x_+ non appartenga all’immagine e sia $(\mathbb{S}^{n-1} \cap U_+, \phi_+)$ la carta locale costruita in precedenza. Allora $\gamma = \phi_+ \circ \sigma$ è un laccio in \mathbb{R}^{n-1} . Basta dimostrare che γ si estende ad una applicazione continua $\hat{\gamma}$ definita sul disco unitario chiuso \overline{B}^2 . Per ogni $t \in [0, 1]$, si consideri l’applicazione

$$r_t : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, r_t(x) = tx, .$$

Allora per ogni $x \in \overline{B}^2, x \neq O_2$ poniamo

$$\hat{\gamma}(x) = r_{\|x\|}(\gamma(\frac{x}{\|x\|}))$$

ed infine poniamo $\hat{\gamma}(O_2) = O_{n-1}$.

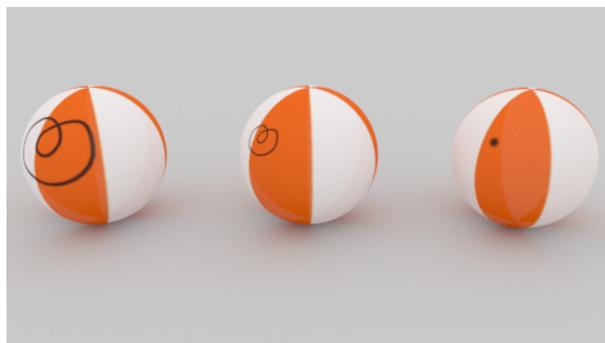


Figura 1: Deformazione di un laccio sulla sfera ad un punto.

È intuitivo, ma non così immediato da dimostrare, che \mathbb{S}^1 *non* è semplicemente connesso; in particolare il laccio “identità” di \mathbb{S}^1 non può essere retratto ad un punto. Generalizzando, si

realizza che ogni n -toro $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ non è semplicemente connesso, quindi per ogni $n > 1$, non è omeomorfo (a maggior ragione, diffeomorfo) alla sfera \mathbb{S}^n . La stessa conclusione vale per ogni n -varietà prodotto $M = \mathbb{S}^1 \times M'$. Nella Figura 2 si mostra un laccio “longitudinale” su un toro \mathbb{T}^2 (realizzato a meno di diffeomorfismi in \mathbb{R}^3) che non è omotopicamente banale.



Figura 2: Un laccio sul toro non deformabile ad un punto.

Lo stesso argomento usato in precedenza per dimostrare che ogni sfera \mathbb{S}^n è semplicemente connessa ci permette di dimostrare la seguente generalizzazione: diciamo che una n -varietà M è k -connessa se, per ogni $0 \leq r \leq k$, ogni applicazione $f : \mathbb{S}^r \rightarrow M$ (di classe C^∞) si estende in modo continuo ad una applicazione definita su tutta la $(r + 1)$ -palla unitaria chiusa $\hat{f} : \bar{B}^{r+1} \rightarrow M$. Quindi “connessa” è sinonimo di 0-connessa, “semplicemente connessa” è sinonimo di 1-connessa. Allora abbiamo che:

Teorema 2.1 *Per ogni $n > 1$, la sfera \mathbb{S}^n è $(n - 1)$ -connessa.*

Ad esempio, si può verificare che la 4-varietà prodotto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ è 1-connessa ma non 2-connessa, quindi non è omeomorfa (diffeomorfa) alla sfera \mathbb{S}^4 . D'altra parte, generalizzando quanto detto per \mathbb{S}^1 , si può dimostrare che \mathbb{S}^n non è n -connessa, in particolare, non esiste alcuna mappa continua $\ell : \bar{B}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n$ tale che $\ell(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{S}^n$.

Quanto visto ci dice in particolare che \mathbb{S}^3 è 2-connessa, non solo 1-connessa, mentre non è 3-connessa. Queste ulteriori informazioni però non hanno effetti sulla congettura di Poincaré; infatti, con strumenti un po' più sofisticati di topologia algebrica, è possibile mostrare che:

Ogni 3-varietà compatta 1-connessa è automaticamente 2-connessa mentre non è 3-connessa.

Finalmente abbiamo dato un senso compiuto all'affermazione iniziale e all'enunciato della congettura di Poincaré. Vale la pena di notare che nonostante \mathbb{S}^3 sia realizzata in \mathbb{R}^4 , non facciamo questa richiesta per le 3-varietà compatte 1-connesse (quindi 2-connesse) congetturalmente diffeomorfe a \mathbb{S}^3 . Questa “libertà” è parte della difficoltà del problema.

3 Cenni sulla storia e sull’impatto scientifico della congettura di Poincaré



Jules Henri Poincaré
1854 – 1912

L’omonima congettura fu formulata da Henri Poincaré nel 1904 nel quinto e ultimo “complemento” alla sua opera *Analysis Situs* del 1895, in un modo che *con il senno di poi* è equivalente all’enunciato dato all’inizio di questa nota. Diciamo questo perché la congettura si colloca all’interno di un complesso processo intellettuale in cui l’autore (insieme ad altri) letteralmente fonda, scopre, “inventa” nuove discipline che poi si chiameranno *topologia algebrica*, *topologia differenziale*... e che vedrà poderosi sviluppi soprattutto nel corso di tutto il secolo successivo. Lo stesso concetto di “varietà” è parte di questo processo e troverà la sua forma definitiva solo molti anni dopo l’opera di Poincaré. Ammettendo comunque che Poincaré pensasse le varietà nel “modo giusto”, un altro punto delicato è che “confondeva” diverse *categorie* di varietà, considerandole sostanzialmente equivalenti tra loro. Vale la pena di chiarire questo punto.

3.1 Categorie di varietà

La nozione di varietà (e di “isomorfismo” tra varietà) che abbiamo adottato si basa in ultima analisi sulle applicazioni C^∞ definite sugli aperti di qualche \mathbb{R}^n . Diciamo allora che abbiamo individuato la *categoria delle varietà* DIFF (alludendo all’esistenza delle applicazioni differenziali). Se nella nostra definizione di varietà sostituiamo ovunque “diffeomorfismo” con “omeomorfismo” otteniamo la *categoria delle varietà* TOP (“topologiche”). La *topologia differenziale* studia le varietà DIFF a meno di *diffeomorfismi* e le applicazioni C^∞ tra varietà DIFF. Nella categoria TOP si studiano le varietà topologiche a meno di *omeomorfismi* e le applicazioni *continue* tra varietà topologiche. È bene rendersi conto che lavorando all’interno della categoria TOP invece che DIFF si perdono molte strutture di grande importanza quali il fibrato tangente e il calcolo tensoriale che discuteremo più avanti e che rappresentano la globalizzazione sulle varietà DIFF del familiare calcolo differenziale su aperti di qualche \mathbb{R}^n . Inoltre le funzioni continue possono avere comportamenti molto “anti-intuitivi” (rispetto ad una ordinaria “intuizione geometrica”). Citiamo uno per tutti il fenomeno delle *curve di Peano*: applicazioni continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la cui immagine ricopre tutto il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$. Questo rende la teoria TOP molto più riposta rendendo difficile la dimostrazione di fatti intuitivamente plausibili (per esempio *l’invarianza della dimensione* delle varietà TOP a meno di omeomorfismi), oppure dando luogo a inattesi fenomeni “selvaggi”. D’altra parte, per lo stesso caso semplice del teorema di Morse–Sard che abbiamo già usato, il fenomeno delle curve di Peano non si presenta nel contesto DIFF e *l’invarianza della dimensione* delle varietà DIFF a meno di diffeomorfismi si dimostra facilmente riconducendola all’invarianza a meno di isomorfismi lineari, passando dal diffeomorfismo al suo differenziale in un punto arbitrario. Come esempio di comportamento TOP selvaggio (in opposizione ad un comportamento DIFF “tranquillo”): si può dimostrare che ogni varietà DIFF M in \mathbb{R}^3 diffeomorfa alla sfera \mathbb{S}^2 divide \mathbb{R}^3 in due pezzi, uno solo, chiamiamolo D , è limitato e si verifica che $D \cup M$ è diffeomorfo alla 3–palla unitaria chiusa \bar{B}^3 . In altre parole, a meno di diffeomorfismi ogni 2–sfera DIFF in \mathbb{R}^3 si comporta come la sfera unitaria \mathbb{S}^2 . La cosa non è più vera nella categoria TOP come mostrano le cosiddette *sfere cornute* di Alexander e di Antoine, dovute entrambe a J. W. Alexander, 1924 [1]: anche per queste 2–sfere TOP in \mathbb{R}^3 c’è una sola componente connessa limitata D di $\mathbb{R}^3 \setminus M$, ma

$D \cup M$ non è semplicemente connessa.

Poiché le applicazioni C^∞ sono in particolare continue, la categoria delle varietà DIFF può essere ricondotta a quella della varietà TOP semplicemente “dimenticando” parte della struttura, nel senso che ogni varietà DIFF può essere considerata semplicemente come una varietà TOP, se due varietà DIFF sono diffeomorfe, allora sono tra loro omeomorfe in quanto varietà TOP. Il processo inverso (cioè una qualche transizione da TOP verso DIFF) è molto meno evidente. Possiamo formulare con precisione il tipo di questioni che emergono.

Questioni DIFF/TOP:

1. Sia M una n -varietà TOP compatta. Esiste sempre una n -varietà DIFF M' omeomorfa a M ?
2. Siano M e M' due n -varietà DIFF compatte omeomorfe. Sono allora diffeomorfe?

È una conseguenza dello sviluppo delle suddette teorie (posteriore all’opera di Poincaré), il fatto che la risposta dipende dalla dimensione n . Torneremo in seguito su questo punto. In ogni caso la stessa congettura di Poincaré in dimensione 3 ammette due formulazioni *a priori* non equivalenti tra loro, quella DIFF, che noi abbiamo adottato fin dall’inizio, e l’analoga formulazione TOP. C’è inoltre un’altra categoria di varietà, considerata anche da Poincaré, detta PL (*piecewise linear* – “lineare a pezzi”) o anche *poliedrale*. Senza entrare troppo nei dettagli tecnici di questa nozione, limitiamoci a qualche indicazione. Un n -simplexso $\Delta = \Delta(x_0, \dots, x_n)$ in \mathbb{R}^m è l’inviluppo convesso di $n + 1$ punti $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^m$ che non giacciono in alcun r -piano di \mathbb{R}^m con $r < n$. Per $n = 1$, Δ è un segmento chiuso e limitato, per $n = 2$ è un triangolo (parte interna inclusa), per $n = 3$ è un tetraedro e così via. Il bordo $\partial\Delta$ è fatto dall’unione degli $(n - 1)$ -simplessi $\Delta(i) = \Delta(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$, per $i = 0, \dots, n$, dove “ \hat{x}_i ” significa che quel vertice è stato rimosso. Questi sono detti le $(n - 1)$ -facce di Δ . Iterando la costruzione definiamo le k -facce per $0 \leq k \leq n$, dove le 0-facce sono i “vertici” x_0, \dots, x_n , e l’unica n -faccia è lo stesso Δ . Un sottoinsieme P di \mathbb{R}^m ammette una triangolazione T se può essere ottenuto come unione localmente finita di simplessi, $P = \cup_j \Delta_j$, che possono incontrarsi solo lungo una faccia iterata in comune; per esempio due triangoli possono intersecarsi lungo un lato o in un vertice comune. “Localmente finita” vuol dire che per ogni punto x di P esiste una palla $B_r^n(x)$ che incontra solo un numero finito di simplessi di T . Dato un aperto U di \mathbb{R}^n , una applicazione $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare a pezzi o poliedrale se esistono $P \subset \mathbb{R}^n$ munito di una triangolazione T ed una applicazione continua $\tilde{f} : P \rightarrow \mathbb{R}^m$ tali che:

1. $U \subset P$ ed f è la restrizione di \tilde{f} su U ;
2. la restrizione di \tilde{f} ad ogni n -simplexso Δ_j della triangolazione T è uguale alla restrizione di un’applicazione $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ che sia affine cioè la composizione di una applicazione lineare con una traslazione.

Si possono allora sviluppare le nozioni di “isomorfismo” e di varietà PL, seguendo lo stesso schema già applicato per DIFF o TOP.

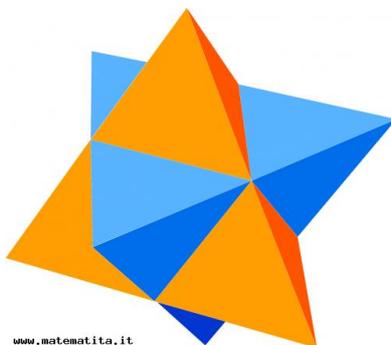


Figura 3: Una 2-sfera poliedrale.

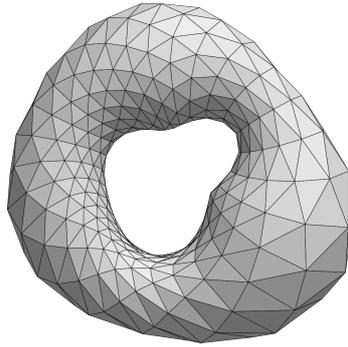


Figura 4: Un 2-toro poliedrale.

Si noti che nel contesto PL fenomeni quali le curve di Peano non si hanno per ragioni elementari che si riconducono all'algebra lineare, così come una dimostrazione facile dell'invarianza della dimensione a meno di isomorfismi poliedrali. D'altra parte, anche per le varietà PL non sono definiti il fibrato tangente e il calcolo tensoriale. Si ha la naturale versione **PL/TOP** delle questioni **DIFF/TOP** enunciate qui sopra. Inoltre si hanno questioni **PL/DIFF** (sulla esistenza e unicità – a meno di diffeomorfismi – di “allisciamenti” delle varietà poliedrali) e **DIFF/PL** (sulla esistenza e unicità – a meno di isomorfismi poliedrali – di “triangolazioni” delle varietà DIFF). È facile vedere che il bordo $\partial\Delta^n$ di un n -simplexso in \mathbb{R}^n è omeomorfo alla sfera S^{n-1} e che è una varietà PL. Prendendo allora $\partial\Delta^n$ come modello standard per la $(n-1)$ -sfera poliedrale, abbiamo anche la *versione* PL della congettura di Poincaré 3-dimensionale che a priori non è equivalente alle altre due.

È un risultato notevole (piuttosto delicato per $n = 3$) e ben posteriore all'opera di Poincaré (E. E. Moise, 1950, vedi [37]) che:

Teorema 3.1 Per $n = 0, 1, 2, 3$, le questioni **DIFF/TOP** e **PL/TOP** (quindi le questioni **PL/DIFF** e **DIFF/PL**) hanno tutte risposta positiva.

Rendendo allora giustizia all'intuizione 3-dimensionale di Poincaré, questo implica in particolare che le tre formulazioni della congettura sono tra loro davvero equivalenti e che, in pratica, per affrontarla possiamo usare liberamente gli strumenti sia della topologia differenziale che della geometria poliedrale, secondo la convenienza.

Non è più così in dimensione maggiore di 3. Per illustrare questa affermazione, nella successiva sezione, considereremo alcune importanti *generalizzazioni* della congettura di Poincaré.

3.2 Generalizzazioni della congettura di Poincaré

Diamo la formulazione di queste congetture di Poincaré generalizzate.

CP(n, DIFF): Ogni n -varietà DIFF compatta e $(n-1)$ -connessa è diffeomorfa alla sfera S^n .

CP(n, TOP): Ogni n -varietà TOP compatta e $(n-1)$ -connessa è omeomorfa alla sfera S^n .

CP(n, PL): Ogni n -varietà poliedrale compatta e $(n-1)$ -connessa è PL isomorfa a $\partial\Delta^{n+1}$.

Vediamo lo stato di queste congetture di Poincaré generalizzate circa 110 anni dopo il 1904.

- La congettura **CP(n, TOP)** è vera per ogni n .
- La congettura **CP(n, PL)** è vera per ogni $n \neq 4$. È ancora una *questione aperta* per $n = 4$.
- La congettura **CP(n, DIFF)** è vera per $n \leq 3$, $n = 5, 6$; è generalmente *falsa* per $n \geq 7$ (le celebri 7-sfere esotiche di J. W. Milnor, 1957 [33]); per $n = 4$ è ancora una *questione aperta*.

Diamo qualche cenno sulla storia delle dimostrazioni. Per $n \leq 2$ è un risultato relativamente “elementare” e noto a Poincaré (si ricordi che in queste dimensioni le tre congetture sono tra loro equivalenti).

Come conseguenza del suo celebre *teorema di h -cobordismo* nella categoria DIFF (con qualche difficoltà addizionale per $n = 5, 6$ e contributi di Kervaire–Milnor [27]), S. Smale dimostra tra il 1960 e il 1962 [51], [52] che per $n \geq 7$, ogni n -varietà DIFF che verifica le ipotesi di **CP(n, DIFF)** è omeomorfa (non necessariamente diffeomorfa) a \mathbb{S}^n , mentre **CP(n, DIFF)** è vera per $n = 5, 6$. La dimostrazione si basa sulla teoria delle “decomposizioni in manici” delle varietà DIFF compatte che è una riformulazione della teoria delle funzioni di Morse (per un trattamento tutto in termini di funzioni di Morse vedi [35]). Il vantaggio di questa formulazione è che la teoria delle decomposizioni in manici funziona anche nella categoria PL (si veda per esempio [49]) per cui, essenzialmente con la stessa dimostrazione, si ha la versione PL del teorema di h -cobordismo e come corollario la dimostrazione di **CP(n, PL)** per $n \geq 5$. Qualche indicazione sulle decomposizioni in manici sarà data nella Sezione 3.4. Esiste un’altra dimostrazione di **CP(n, PL)** per $n \geq 5$, indipendente e sostanzialmente contemporanea, basata sulla nozione di “engulfing” (J. Stallings per $n \geq 7$ [53], E. C. Zeeman per $n = 5, 6$ [63]). Estendendo la teoria dell’engulfing alla categoria TOP, nel 1966 M. H. A. Newman [44] dimostra **CP(n, TOP)** per $n \geq 5$. **CP(4, TOP)** è un caso particolare della classificazione delle 4-varietà topologiche compatte 1-connesse (M. H. Freedman, 1982 [12]). Per $n = 4$ le questioni **PL/DIFF** e **DIFF/PL** hanno risposte positive. Ne segue che le congetture **CP(4, PL)** e **CP(4, DIFF)** sono tra loro equivalenti e giustamente sono aperte entrambe. Si tenga però conto che in dimensione 4, contrariamente alla dimensione 3, le questioni **DIFF/TOP** (equivalentemente **PL/TOP**) hanno sorprendentemente risposte *radicalmente negative*: sono state costruite famiglie infinite di 4-varietà DIFF compatte e 1-connesse tutte omeomorfe tra loro ma due a due *non diffeomorfe*, così come famiglie infinite di 4-varietà TOP compatte e 1-connesse che non sono omeomorfe ad alcuna 4-varietà DIFF. Questo si ottiene combinando gli straordinari risultati di M. H. Freedman sulle 4-varietà TOP (1982) e di S. K. Donaldson sulla “forma di intersezione” delle 4-varietà DIFF compatte (1983) [9] che organizza in modo aritmetico come le 2-varietà contenute in una 4-varietà si intersecano; risultati che ampliano quelli di V. A. Rokhlin (1952) (si veda per esempio [19]), e saranno poi sviluppati con la teoria degli *invarianti di Seiberg–Witten* (1994) (vedi [38]).

Il caso $n = 3$ (per cui, come già detto, le tre congetture sono tra loro equivalenti) è la dimostrazione della congettura di Poincaré originale di cui stiamo discutendo in questa nota, ottenuta all’inizio del nuovo millennio (e universalmente accettata intorno al 2006).

Concludiamo questa sezione con un altro paio di osservazioni.

Per $n \geq 7$ c’è una evidente discrepanza tra lo stato di **CP(n, DIFF)** rispetto a **CP(n, TOP)** e **CP(n, PL)**. In ultima analisi la ragione è la seguente: se $\phi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ è un omeomorfismo c’è un modo molto semplice (detto “trucco di Alexander”) di estenderlo ad un omeomorfismo $\hat{\phi} : \overline{B}^n \rightarrow \overline{B}^n$: basta mandare il centro della palla in se stesso ed ogni raggio di estremo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ linearmente sul raggio di estremo $\phi(x)$. Se partiamo da un isomorfismo poliedrale $\phi : \partial\Delta^n \rightarrow \partial\Delta^n$, l’analoga estensione “radiale” $\hat{\phi}$ definita su Δ^n è un isomorfismo poliedrale. Se invece partiamo da un diffeomorfismo ϕ non è in generale possibile estenderlo ad un diffeomorfismo di tutta la palla chiusa. Si considerino ora due copie disgiunte B_1 e B_2 della palla chiusa \overline{B}^n . Si consideri $\phi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, come sopra, definito su ∂B_1 a valori in ∂B_2 . Possiamo allora costruire lo spazio topologico M ottenuto “incollando” B_1 e B_2 lungo i bordi per mezzo di ϕ (identifichiamo cioè ogni $x \in \partial B_1$ con $\phi(x) \in \partial B_2$). Usando quanto osservato prima sulle estensioni di ϕ non è troppo difficile mostrare che M è in ogni caso una n -varietà TOP omeomorfa a \mathbb{S}^n . Se ϕ è un isomorfismo PL, allora M è di più una n -sfera poliedrale (a meno di isomorfismi poliedrali). Se ϕ è un diffeomorfismo, allora M è una n -varietà DIFF omeomorfa ma in generale *non* diffeomorfa alla n -sfera. I corollari dei teoremi di h -cobordismo DIFF (PL) che abbiamo menzionato prima dicono che se rimuoviamo una n -palla DIFF (PL) B_1 contenuta in una carta locale da una varietà M che verifichi le ipotesi di **CP(n, DIFF)** (**CP(n, PL)**), allora la chiusura B_2

del complementare è a sua volta DIFF (PL) isomorfa ad una n -palla chiusa, quindi M si ottiene implementando la costruzione che abbiamo descritto.

Osservazione 3.2 La varietà M qui sopra è un primo esempio di varietà ottenuta per mezzo di una procedura di “taglia e incolla” (possiamo pensare B_1 e B_2 come ottenute tagliando \mathbb{S}^n lungo una \mathbb{S}^{n-1} equatoriale e M ottenuta incollandole di nuovo per mezzo di ϕ invece che l’identità). Ne vedremo altre in seguito. Il fatto che gli oggetti ottenuti siano proprio varietà non è del tutto immediato, anche perché la nostra definizione di varietà richiede che esse siano realizzate in qualche \mathbb{R}^m , mentre le descrizioni via taglia e incolla sono abbastanza astratte. Non potendo sviluppare tutti i dettagli, confidiamo che il lettore si possa fare almeno un’idea di queste costruzioni.

La discussione sulle congetture generalizzate mostra anche che, almeno per una volta, l’intuizione di Poincaré o forse il senso comune dell’epoca, avevano fallito. Sulla base di quanto accaduto fino ad $n = 2$, ci si aspettava che le difficoltà crescessero con la dimensione, per cui il caso 3-dimensionale appariva come quello naturale da affrontare in ordine di complessità dopo le superfici. Si è invece compreso in seguito che le dimensioni “alte” (maggiori o uguali a 5) sono sostanzialmente più facili ed ammettono un *trattamento unificato* (segnatamente per $n \geq 7$). La ragione ultima è che in dimensione abbastanza alta c’è “spazio” per realizzare (nelle ipotesi delle **CP**) certe desiderabili semplificazioni delle decomposizioni in manici DIFF o PL applicando il cosiddetto “trucco di Whitney”; semplificazioni che invece sono in generale impossibili nelle categorie DIFF o PL in dimensione $n = 4$, per specifici fenomeni di “annodamento” o “allacciamento” dei nodi nelle 3-varietà. D’altra parte la dimostrazione di **CP(4, TOP)** si basa sul compimento di una teoria delle decomposizioni in manici “flessibili” (in effetti “selvaggi”) nella categoria TOP in 4 dimensioni (originariamente delineata da A. Casson, 1973–76, si veda [19]) che non presenta quelle ostruzioni esistenti nelle categorie DIFF e PL. Infine osserviamo che i metodi e le strutture fondamentali che governano le 3-varietà sono piuttosto diversi da quelli che governano le 4-varietà.

3.3 Omotopia vs omologia

Tornando alla congettura in 3 dimensioni, è interessante ricordare come la sua stessa formulazione finale sia il risultato di un processo non banale. La classificazione delle 0-varietà compatte e connesse è ovvia: consistono tutte di un solo punto. Per le 1-varietà è in definitiva quella suggerita dalla intuizione immediata: sono tutte diffeomorfe a \mathbb{S}^1 . La classificazione delle 2-varietà compatte e connesse (dette anche *superfici*) è più elaborata ma sostanzialmente “elementare” e nota a Poincaré. Risulta che, a meno di diffeomorfismi, una superficie S è completamente determinata da due caratteristiche invarianti che dipendono dal comportamento dei lacci C^∞ in S . La prima caratteristica è l’*orientabilità*. Indichiamo con $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ il *nastro standard*; $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ è l’*anima* di \mathcal{N} . Indichiamo con \mathcal{M} il *nastro di Möbius* ottenuto da $[-1, 1] \times [-1, 1]$ identificando ogni punto $(-1, x)$ con il punto $(1, -x)$; $[-1, 1] \times \{0\}$ produce una “copia” di \mathbb{S}^1 in \mathcal{M} detta l’*anima* di \mathcal{M} ; i due segmenti $[-1, 1] \times \{-1\}$ e $[-1, 1] \times \{1\}$ si fondono in \mathcal{M} dando luogo al “bordo” $\partial\mathcal{M}$ che è diffeomorfo a \mathbb{S}^1 . Il lettore può facilmente costruire modelli di \mathcal{N} e \mathcal{M} usando striscioline di carta. Un laccio $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ è *semplice* se σ è un diffeomorfismo con la sua immagine $C = \sigma(\mathbb{S}^1)$ che quindi è una 1-varietà (una “curva semplice”) tracciata su S ; allora S è *orientabile* se ogni tale curva semplice C su S ha un “intorno a nastro” in S diffeomorfo al nastro standard \mathcal{N} , in modo tale che C sia identificata con l’anima del nastro. Se S non è orientabile, allora si mostra che esiste necessariamente una curva semplice C tracciata su S che ha un “intorno a nastro” diffeomorfo al nastro di Möbius \mathcal{M} , essendo ancora una volta C identificata con l’anima del nastro.

Osservazione 3.3 La nozione di orientabilità si estende in dimensione arbitraria: una n -varietà M è orientabile se ogni curva semplice C tracciata in M ammette un *intorno a tubo* diffeomorfo al tubo standard $\mathbb{S}^1 \times \overline{B}^{n-1}$.

L’altra caratteristica è un carattere numerico $\kappa(S) \in \mathbb{N}$ che conta quanti sono i lacci “indipendenti” una volta che questi sono considerati a meno di una relazione di equivalenza detta *omologia*.

Ai fini della nostra discussione sarà sufficiente definire cosa vuol dire che $\kappa(S) = 0$, cioè che tutti i lacci in S sono *omologicamente banali*. Per dare un'idea in generale:

- \mathbb{S}^2 è orientabile e $\kappa(\mathbb{S}^2) = 0$;
- il 2-toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ è orientabile e $\kappa(\mathbb{T}^2) = 2$; per qualsiasi punto θ di \mathbb{S}^1 due lacci (semplici) indipendenti su \mathbb{T}^2 sono $\mathbb{S}^1 \times \{\theta\}$ e $\{\theta\} \times \mathbb{S}^1$ che si incontrano “trasversalmente” solo nel punto $(\theta, \theta) \in \mathbb{T}^2$;
- indichiamo con \mathbb{P}^2 la superficie ottenuta da \mathcal{M} e da \overline{B}^2 “incollandoli” lungo $\partial\mathcal{M}$ e $\partial\overline{B}^2$ entrambi diffeomorfi a \mathbb{S}^1 . Allora \mathbb{P}^2 non è orientabile e $\kappa(\mathbb{P}^2) = 1$ (l'anima di \mathcal{M} è un laccio omologicamente non banale);
- è parte della classificazione che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esista una superficie S tale che $\kappa(S) = k$; se $k > 0$ è pari, allora c'è sia un modello orientabile sia uno non orientabile; se k è dispari, allora S è necessariamente non orientabile. In particolare, questo implica che esiste un'infinità numerabile di modelli di superficie distinti.

Nel caso orientabile $g(S) := \kappa(S)/2$ è detto il *genere* della superficie e intuitivamente “conta” i “buchi” di S . Nella seguente Figura 5 mostriamo i modelli orientabili per $0 \leq g \leq 3$. La figura suggerisce anche il fatto che tutti i modelli orientabili sono realizzabili in \mathbb{R}^3 , in modo tale che una sola componente connessa del complementare è limitata e la sua chiusura è un cosiddetto *corpo con manici di genere g* ben definito a meno di diffeomorfismi.

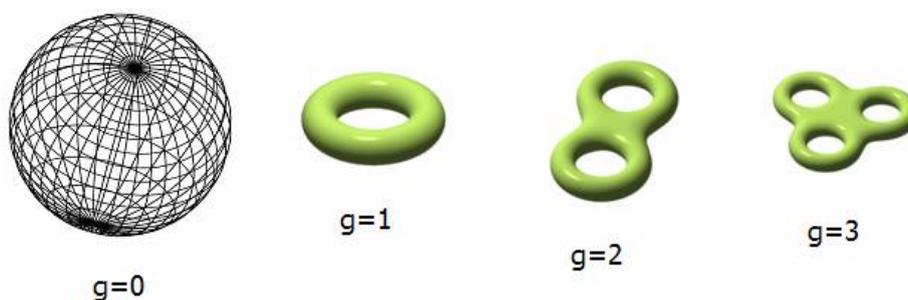


Figura 5: Genere topologico di alcune superfici orientabili.

Precisiamo ora cosa vuol dire che un laccio $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ è omologicamente banale. Il disco unitario chiuso $(\overline{B}^2, \mathbb{S}^1)$ è l'esempio base di *superficie compatta orientabile con bordo connesso*. A meno di diffeomorfismi, il disco può essere visto come la chiusura di uno dei due pezzi che si ottengono tagliando la sfera \mathbb{S}^2 lungo un \mathbb{S}^1 equatoriale. In generale consideriamo superfici compatte N con bordo connesso ∂N chiusura di uno dei pezzi ottenuti tagliando una superficie compatta connessa orientabile Σ lungo una curva semplice C tracciata su Σ che appunto la divide in due pezzi. Allora un laccio $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ è *omologicamente banale* se esistono $(N, \partial N)$ come sopra, un diffeomorfismo $\phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial N$ ed una applicazione continua $\widehat{\sigma} : N \rightarrow S$ tali che $\widehat{\sigma} \circ \phi = \sigma$ (cioè, avendo identificato ∂N con \mathbb{S}^1 , $\widehat{\sigma}$ estende σ a tutta la superficie con bordo N). È chiaro che se un laccio è omotopicamente banale allora è anche omologicamente banale. Il viceversa è *falso*.

Tornando alla classificazione delle superfici a meno di diffeomorfismi, è facile rendersi conto che se $\kappa(S) = 0$ allora la superficie è necessariamente orientabile e alla fine la 2-sfera \mathbb{S}^2 è caratterizzata dalla proprietà $\kappa(\mathbb{S}^2) = 0$.

Affrontando il problema per le 3-varietà compatte e connesse, Poincaré si rende conto rapidamente che una classificazione “elementare” ed esaustiva sul modello delle superfici è senza speranza; si accontenterebbe allora di caratterizzare in modo elementare (a meno di diffeomorfismi) la più semplice delle 3-varietà compatte, la 3-sfera. Per una prima formulazione della congettura si limita a “copiare” quanto accade per \mathbb{S}^2 . Intanto si osserva che la definizione di “laccio

omologicamente banale” si estende direttamente se al posto di una superficie S consideriamo una qualsiasi n -varietà M , per cui avrà sempre senso dire che $\kappa(M) = 0$. Per cui congettura:

Ogni 3-varietà M compatta connessa orientabile con $\kappa(M) = 0$ è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 .

Lo scopo principale del suo lungo “quinto complemento” del 1904 è quello di fornire un *controesempio* a questa prima congettura esibendo quella che è oggi nota come la *sfera di Poincaré* \mathcal{P} : tale 3-varietà soddisfa $\kappa(\mathcal{P}) = 0$ ma *non* è semplicemente connessa. Infine corregge la formulazione della congettura, ottenendo quella che ha resistito per un secolo.

3.4 La topologia geometrica classica

Intendiamo per *topologia geometrica* in 3 dimensioni l’insieme delle tecniche sia di topologia differenziale che di geometria poliedrale messe in opera nel corso del tempo per studiare le 3-varietà DIFF o, equivalentemente, le 3-varietà PL. La congettura di Poincaré è stata in un certo senso la grande sfida perduta da questa disciplina. Nel corso dei decenni, praticamente lungo tutto il secolo scorso, matematici di sicuro prestigio hanno proposto attacchi a volte anche molto sottili e profondi alla congettura, che però si sono rivelati alla fine affetti da qualche falla più o meno riposta (spesso una affermazione non dimostrata perché “evidente” e che invece era in ultima analisi falsa oppure non più evidente della congettura stessa). Nei casi migliori si è trattato di “errori fecondi” perché mettevano in luce fenomeni inattesi e di grande interesse autonomo. Una per tutte, il caso della della “falsa dimostrazione” di J. H. C. Whitehead (1934) [61]. Essa funzionava assumendo come “evidentemente” vera la seguente affermazione.

Ogni 3-varietà M (non compatta) connessa “contraibile” è omeomorfa a \mathbb{R}^3 .

Ricordiamo che una varietà M è contraibile se esistono $p_0 \in M$ ed una applicazione continua $r : M \times [0, 1] \rightarrow M$ tale che per ogni $p \in M$, $r(p, 0) = p$, $r(p, 1) = p_0$ (intuitivamente si ha una deformazione continua, una contrazione, di tutta M su un suo punto). È facile verificare che ogni \mathbb{R}^n è contraibile: l’applicazione $r(p, t) = (1 - t)p$ è una contrazione di \mathbb{R}^n sull’origine. In seguito Whitehead stesso costruisce un controesempio esibendo quella che è ora nota come la *varietà di Whitehead* \mathcal{W} [60]; essa si distingue da \mathbb{R}^3 per il suo comportamento “selvaggio” all’infinito, cioè, come sappiamo, di $\mathcal{W} \setminus K_n$ dove K_n è una successione di sottoinsiemi compatti di \mathcal{W} sempre più grandi la cui unione “invade” tutta \mathcal{W} . La varietà \mathcal{W} ha molte riposte proprietà; per esempio, nonostante non sia diffeomorfa a \mathbb{R}^3 , il prodotto $\mathcal{W} \times \mathbb{R}$ è diffeomorfo allo spazio euclideo standard \mathbb{R}^4 (risultato dovuto a M. Brown); più di recente Gabai ha dimostrato che \mathcal{W} è unione di due aperti omeomorfi ad \mathbb{R}^3 che si intersecano lungo un’altra copia di \mathbb{R}^3 .

Sono state anche prodotte dimostrazioni corrette e non banali di versioni più deboli (cioè sotto ipotesi più forti) della congettura di Poincaré. Queste aiutano anche ad apprezzare la delicatezza della questione. Ricordiamo per esempio il seguente teorema di R. H. Bing (1958). Usando le proiezioni stereografiche con centro un punto arbitrario di \mathbb{S}^3 , è facile vedere che \mathbb{S}^3 verifica la seguente “proprietà di Bing”:

Ogni curva semplice C tracciata in \mathbb{S}^3 (a volte detta anche un nodo in \mathbb{S}^3) è tutta contenuta in una carta locale di \mathbb{S}^3 diffeomorfa a \mathbb{R}^3 .

Il teorema afferma allora:

Teorema 3.4 *Ogni 3-varietà compatta connessa M che verifica la proprietà di Bing è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 .*

Anche se sembra intuitivamente plausibile, non è invece affatto evidente che una 3-varietà compatta e semplicemente connessa verifichi la proprietà di Bing.

Il fallimento rispetto alla congettura di Poincaré non vuol però dire che questa disciplina non abbia prodotto contributi notevoli alla comprensione delle 3-varietà *nel loro complesso*. Il punto è che molti dei suoi risultati più profondi sono in qualche senso “immateriali” rispetto alla congettura di Poincaré. Spieghiamo brevemente questa affermazione. Molti risultati tra i più profondi della topologia geometrica classica 3-dimensionale riguardano il comportamento delle superfici compatte contenute in una data 3-varietà, in particolare come queste interagiscono con il comportamento dei lacci (considerati a meno di omotopia); tra questi il fondamentale *lemma del laccio* (e della sfera) (C. Papakyriakopoulos, 1956). Da queste analisi sottili emerge progressivamente la

decomposizione canonica di ogni 3-varietà compatta connessa e orientabile M . Questa si realizza in due passi. Per definizione una *sfera essenziale* in M è una sottovarietà di M diffeomorfa a \mathbb{S}^2 che *non* è il bordo di alcun sottospazio di M diffeomorfo a una 3-palla chiusa. Una prima decomposizione si ottiene tagliando M lungo una opportuna famiglia finita (che può anche essere vuota) di sfere essenziali, due a due disgiunte, e tappando i bordi sferici così ottenuti con 3-palle (H. Kneser, ... J. W. Milnor, 1962 [34]). Si realizza così una famiglia finita di 3-varietà compatte connesse (le componenti di M secondo questa prima decomposizione) tale che ciascuna componente M' o è diffeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, oppure è *irriducibile*, cioè non contiene sfere essenziali. Per ogni M la famiglia delle sue componenti è univocamente determinata a meno di diffeomorfismi. Il secondo passo consiste nel decomporre ulteriormente ogni componente irriducibile di M . Per definizione una superficie compatta orientabile S contenuta in una 3-varietà è *incomprimibile* se S non è diffeomorfa a \mathbb{S}^2 e ogni laccio su S che sia omotopicamente banale nella 3-varietà lo è già nella superficie. Allora ogni componente irriducibile M' di M viene tagliata lungo una opportuna famiglia finita (che può anche essere vuota) di 2-tori incomprimibili, due a due disgiunti. Ne risulta alla fine un certo numero di varietà connesse (non necessariamente compatte se la famiglia di tori non è vuota) che formano la decomposizione canonica di M , chiamata anche *JSJ*-decomposizione (W. Jaco – P. Shalen [25], K. Johannson [26], 1976, vedi anche [43]). Questa è invariante per diffeomorfismi e la teoria prescrive in modo stringente il possibile comportamento dei lacci (a meno di omotopia) sulle varie componenti.

Un altro contributo è l'individuazione di una classe importante di 3-varietà chiamate di *Haken*. Detto in modo leggermente impreciso, queste sono caratterizzate dalle proprietà di essere irriducibili e di contenere una superficie S incomprimibile. Queste varietà di Haken possono essere "destrutturate" in modo sistematico e costruttivo per mezzo di una gerarchia *finita* di tagli successivi lungo superfici compatte (che dopo il primo passo sono in generale superfici con bordo), fino ad ottenere un numero finito di 3-palle. Questo consente spesso di dimostrare per induzione sulla lunghezza di tale gerarchia proprietà profonde della 3-varietà. Lo strumento principale è la teoria delle superfici "in posizione normale" rispetto ad una data triangolazione della 3-varietà (H. Kneser – W. Haken, F. Waldhausen [57]).

Tornando alla congettura di Poincaré, si verifica che \mathbb{S}^3 è irriducibile, la sua decomposizione canonica è banale (cioè coincide con la sfera stessa) e non è di Haken. Se M è una 3-varietà compatta semplicemente connessa, non sapendo se la congettura di Poincaré sia vera o falsa, non possiamo escludere a priori che la sua prima decomposizione ottenuta tagliando lungo sfere essenziali sia non banale; si verifica però abbastanza facilmente che ogni componente è a sua volta semplicemente connessa, quindi non può essere diffeomorfa a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, per cui è irriducibile, la sua decomposizione canonica è banale e non è di Haken. Se dimostriamo che ogni tale M' è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 , possiamo concludere *a posteriori* che anche la varietà M di partenza è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 . In altre parole:

Nell'affrontare la congettura di Poincaré non è restrittivo assumere che la 3-varietà semplicemente connessa M sia anche irriducibile.

Questo è il massimo che possiamo trarre dalla teoria della decomposizione canonica e da quella delle varietà di Haken rispetto alla congettura di Poincaré. Non è molto.

Altri risultati importanti di topologia geometrica sono stati ottenuti studiando le *foliazioni* delle 3-varietà compatte (D. Gabai in una serie di lavori tra il 1983 e il 1987, vedi [13]). Grossolanamente, una foliazione è una "partizione" della 3-varietà per mezzo di una famiglia di 2-varietà (non necessariamente compatte), dette "foglie", in essa contenute che la ricoprono senza intersecarsi tra loro; il modello locale base è \mathbb{R}^3 "foliato" da una famiglia di iperpiani paralleli. Sfortunatamente, anche questi risultati hanno un impatto trascurabile sulla congettura di Poincaré.

Un altro filone in topologia geometrica è costituito dalle cosiddette "realizzazioni combinatorie" delle 3-varietà. Per ogni implementazione, vengono individuati oggetti di natura prevalentemente combinatoria (chiamati genericamente "diagrammi") che funzionano da "codice genetico" delle 3-varietà: una effettiva procedura di decodifica trasforma ogni diagramma in

una 3-varietà (compatta, connessa, eventualmente orientabile) univocamente determinata a meno di isomorfismi; inoltre *tutte* le varietà si ottengono in questo modo. Viene poi individuato uno specifico insieme di modifiche elementari (spesso dette “mosse”) da effettuare sui diagrammi, in modo tale che due diagrammi codificano la stessa 3-varietà se e solo se sono collegati tra loro per mezzo di una successione *finita* di mosse elementari. Queste realizzazioni combinatorie hanno dato luogo ad altri tentativi (falliti) di dimostrazione della congettura di Poincaré. Tipicamente in questi tentativi si individua una classe speciale di diagrammi che sicuramente codificano \mathbb{S}^3 ; partendo poi da un diagramma arbitrario di una 3-varietà compatta e 1-connessa (se conviene, anche irriducibile), si cerca di “semplificarlo” mediante una catena finita di mosse in modo da ottenere alla fine del processo uno dei diagrammi speciali. Il problema con questi tentativi è che le semplificazioni non possono essere fatte in modo “monotono” (rispetto ad una qualche misura della “distanza” di un diagramma da essere speciale); per semplificare una porzione del diagramma può essere necessario complicarne un’altra, disfacendo magari una semplificazione locale già ottenuta in precedenza. Sarebbe allora necessario un *controllo su larga scala* del processo per garantire la convergenza ad una configurazione speciale; tipicamente è questo controllo globale che risulta fallace. Un approccio di questo tipo alla sua congettura è suggerito dallo stesso Poincaré nel già citato “quinto complemento” del 1904 ed è basato sui cosiddetti *diagrammi di Heegaard*. Un diagramma di Heegaard di genere $g \geq 0$ è dato da una terna (S, C^+, C^-) dove S è una superficie compatta connessa orientabile di genere g e C^\pm è una famiglia di g curve semplici tracciate su S , due a due disgiunte, la cui unione non sconnette S . La stessa sfera di Poincaré \mathcal{P} è presentata per mezzo di un diagramma di genere 2. Non potendo descrivere qui l’intera realizzazione combinatoria basata su questi diagrammi di Heegaard, limitiamoci a suggerire la decodifica. Ispessiamo S considerando il “cilindro solido” di base S , definito come $\mathcal{C} = S \times [-1, 1]$; conveniamo che le curve di C^\pm siano tracciate su $S^\pm := S \times \{\pm 1\}$ rispettivamente. Selezioniamo su S^\pm un sistema di intorno a nastro due a due disgiunti delle curve di C^\pm . Consideriamo due famiglie \mathcal{P}^\pm formate ciascuna da g copie disgiunte della “pasticca” $P := \overline{B}^2 \times [-1, 1]$. Mettiamo in corrispondenza biunivoca le pasticche di \mathcal{P}^\pm con le curve di C^\pm . Incolliamo ogni pasticca P di \mathcal{P}^\pm al cilindro \mathcal{C} lungo S^\pm in modo da identificare il nastro $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1] \subset P$ con l’intorno a nastro della curva di C^\pm corrispondente a P . Otteniamo così una 3-varietà con bordo formato da due componenti sferiche. Infine otteniamo una 3-varietà (senza bordo) M tappando le due sfere con due 3-palle. Questa costruzione si presta ad essere descritta in termini di decomposizioni in manici. Ricordiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda \leq n$, $\overline{B}^\lambda \times \overline{B}^{n-\lambda}$ è il λ -manico *standard* n -dimensionale; $\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \overline{B}^{n-\lambda}$ contenuto nel suo bordo è detto il *tubo di attaccamento*. Possiamo allora pensare la 3-varietà M come l’unione della chiusura dei due pezzi ottenuti tagliandola lungo la superficie $S \times \{0\}$. Uno dei due pezzi è ottenuto attaccando a $S \times [0, 1]$ lungo S^+ prima g 2-manici 3-dimensionali due a due disgiunti, ed infine attaccando un 3-manico, che tappa la componente di bordo sferica. Un’analoga descrizione vale per l’altro pezzo. Si può verificare che ciascuno di questi pezzi è un corpo con manici di genere g (vedi il commento alla Figura 5), presentato per mezzo di questa specifica decomposizione in manici (relativa a $S \times \{0\}$). Per esempio, consideriamo il diagramma di genere 1 tale che entrambi C^\pm consistono della longitudine mostrata in Figura 2; oppure l’altro diagramma tale che C^+ consiste di quella longitudine, mentre C^- consiste di un “meridiano” che borda un 2-disco nella regione limitata di \mathbb{R}^3 che ha per bordo il toro. Il lettore può provare a convincersi che il primo diagramma codifica $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, mentre il secondo codifica \mathbb{S}^3 .

Un’altra realizzazione combinatoria importante è quella per mezzo di *diagrammi di chirurgia* (detta “di Dehn”, lungo nodi allacciati in \mathbb{S}^3 – A. H. Wallace 1960 [58], W. B. R. Lickorish, 1962 [31]), considerati a meno delle mosse del *calcolo di Kirby* (R. Kirby, 1978 [28]). Essa incorpora il fatto strutturalmente rilevante che ogni 3-varietà compatta connessa orientabile M può essere realizzata come bordo di una 4-varietà compatta orientabile W (nello stesso senso in cui \mathbb{S}^3 è bordo di una 4-palla chiusa). Si può notare che ci sono voluti circa 15 anni per completare questa realizzazione tutt’altro che banale. Anche in questo caso limitiamoci a suggerire la decodifica. Un diagramma di chirurgia codifica in prima istanza una famiglia finita di $k \in \mathbb{N}$ nodi in \mathbb{S}^3 , due a due disgiunti (ma possibilmente “allacciati”), ciascuno etichettato per mezzo di un numero intero. Selezioniamo un sistema di intorno a tubo, due a due disgiunti, di questi

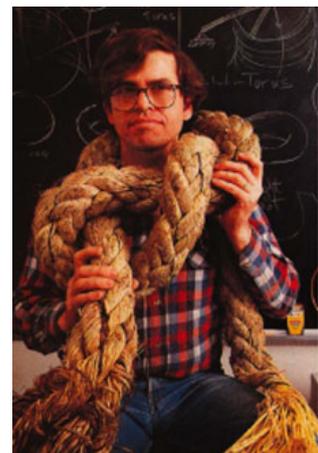
nodi in \mathbb{S}^3 . Il bordo di ogni tubo è diffeomorfo al 2-toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Fissiamo su ogni toro di bordo un meridiano m che borda un 2-disco all'interno del tubo. L'etichetta intera r è usata per codificare (a meno di omotopia) una longitudine $l(r)$ sul toro, cioè una curva semplice che interseca trasversalmente il meridiano m esattamente in un punto. Rimuoviamo da \mathbb{S}^3 la parte interna dei tubi, ottenendo una 3-varietà N con un numero finito di tori di bordo. Infine incolliamo di nuovo ogni tubo lungo la corrispondente componente di bordo di N facendo in modo che il meridiano m sia ora identificato con la longitudine $l(r)$. Otteniamo così la 3-varietà M (senza bordo) codificata dal diagramma. In effetti questa realizzazione di M è la traccia di una costruzione 4-dimensionale. M risulta essere il bordo di una 4-varietà compatta orientabile W munita di una decomposizione in manici formata da un solo 0-manico 4-dimensionale, e da k copie del 2-manico 4-dimensionale, in corrispondenza biunivoca con i nodi codificati dal diagramma, incollate al bordo \mathbb{S}^3 dello 0-manico in modo tale che ogni tubo di attaccamento sia identificato con il tubo in \mathbb{S}^3 intorno al nodo corrispondente. Il calcolo di Kirby riguarda appunto le modifiche che si possono apportare alla 4-varietà W e alle decomposizioni in manici di questo tipo senza modificare il bordo M di W . C'è una generalizzazione di questa realizzazione, puramente 3-dimensionale, dovuta a D. Rolfsen, che considera anche *chirurgie razionali*: le etichette r sono numeri razionali e codificano curve semplici $\gamma(r)$ sui tori di bordo che non sono in generale longitudini. Per il resto la decodifica rimane invariata.

Ricordiamo infine che esiste anche un approccio topologico geometrico 4-dimensionale, nel senso che la congettura di Poincaré risulta essere implicata dalla eventuale soluzione di certi problemi di topologia poliedrale in 4-dimensioni; ad esempio menzioniamo la *congettura di Zeeman*. Il primo esempio di "ponte" tra questioni di questa stessa natura in dimensione 3 e 4 è dato dal risultato già citato per cui $\mathcal{W} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^4$, dove \mathcal{W} è la varietà di Whitehead non diffeomorfa a \mathbb{R}^3 . Questa linea è stata portata avanti, lungo decenni, specialmente da V. Poenaru in una serie di lavori, di considerevole mole, che si concludono (2006) con l'affermazione di avere ottenuto infine la dimostrazione voluta. Il programma è sicuramente "serio" ed alcuni risultati parziali di interesse autonomo prodotti dalle tecniche messe in opera sono stati confermati e accettati. Non sembra esserci però un pronunciamento significativo della comunità scientifica a favore di questa dimostrazione alternativa della congettura di Poincaré. Alcune possibili ragioni: la mole, la componente tecnica piuttosto complessa, il carattere un po' autoreferenziale, il fatto che precedenti dichiarate "conclusioni" del programma si erano rivelate incomplete (anche se l'autore afferma di avere risolto infine tutte le difficoltà precedentemente emerse), l'esistenza stessa di una dimostrazione già pienamente accettata, hanno probabilmente demotivato verso un lavoro di verifica che in ogni caso risulterebbe molto impegnativo e forse fine a se stesso.

Per la sua elusività e la secolare resistenza, nel 2000 la congettura di Poincaré fu inserita tra i sette "problemi matematici del millennio"; per la prima soluzione di ciascuno il Clay Mathematics Institute offriva un premio di un milione di dollari.

4 Geometrizzazione

A partire dalla fine degli anni '70 del '900, la *congettura di geometrizzazione* di Thurston e i fondamentali *teoremi di iperbolizzazione per le varietà di Haken* (e poi degli "orbifold") e di *chirurgia di Dehn iperbolica* hanno rivoluzionato lo studio delle 3-varietà. Queste ricerche, direttamente ispirate dalle idee di Thurston, spesso divulgate in corsi e seminari e note "in progress" (si vedano in particolare [56], [55]) hanno coinvolto un'ampia comunità di matematici e dominato lo studio delle 3-varietà negli ultimi tre decenni. La congettura di geometrizzazione individuava tra l'altro il significato ultimo della decomposizione canonica ricordata prima e collocava la stessa congettura di Poincaré all'interno di una *nuova visione unificata delle 3-*



William Paul Thurston
1946–2012

varietà nel loro complesso. Infatti, alla fine della storia, il programma basato sul *flusso di Ricci con chirurgia* impostato da Richard Hamilton e portato a compimento da Grisha Perelman fornirà una soluzione completa di tutta la congettura di geometrizzazione. Un po' paradossalmente la congettura di Poincaré (che tanto aveva resistito agli sforzi della topologia geometrica) risulterà essere in un certo senso il caso più "semplice" della realizzazione di questo programma. Va oltre gli scopi della presente nota una illustrazione, anche solo concisa, dell'intera congettura di geometrizzazione. Ci limiteremo ad indicarne gli aspetti più rilevanti nel caso delle varietà semplicemente connesse e daremo qualche ulteriore informazione generale alla fine del capitolo.

Da ora in poi lavoreremo sempre nella categoria delle varietà DIFF.

Uno dei problemi con la topologia geometrica è che essa è "troppo" topologica e "poco" geometrica. Nel senso comune e come del resto suggerisce il nome stesso, facendo "geometria" ci si aspetta di avere a che fare con la misura di grandezze quali lunghezze, angoli, aree, volumi... Il lettore avrà sicuramente esperienza di queste cose nell'ambito della geometria euclidea. Nella topologia geometrica questo non accade e una ragione è quella "flessibilità" dei diffeomorfismi di cui abbiamo già discusso. Per "irrigidire" la classe di diffeomorfismi con cui lavorare, bisogna imporre che questi preservino appunto qualche struttura geometrica addizionale. Le strutture addizionali che permettono di fare geometria sulle varietà in questo senso più stretto sono le *metriche riemanniane* (dal nome del grande matematico G. F. B. Riemann che ne iniziò lo studio nel 1854). Prima di introdurre questo concetto conviene dire qualcosa sul fibrato tangente di una varietà. Un buon riferimento per la parte che segue è il libro di Gallot, Hulin e Lafontaine [17].

4.1 Il fibrato tangente

Sia $\psi : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ una parametrizzazione locale intorno al punto $p = \psi(x) \in M$ della n -varietà $M \subset \mathbb{R}^m$. Allora il differenziale $d\psi_x$, che come sappiamo è un'applicazione lineare da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m , manda lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n nel sottospazio vettoriale $T_p M$ di \mathbb{R}^m . Segue dalla definizione di varietà che $d\psi_x$ è iniettiva, quindi $T_p M$ è un n -piano di \mathbb{R}^m passante per l'origine detto *spazio tangente ad M nel punto p* . Si verifica infatti che $T_p M$ non dipende dalla scelta della parametrizzazione locale.

Esempi. (1) Se U è un aperto non vuoto di \mathbb{R}^n , allora per ogni $x \in U$, $T_x U = \mathbb{R}^n$ dove quest'ultimo è considerato ora come spazio vettoriale.

(2) Se $G(f)$ è il grafico di $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ applicazione C^∞ , allora per ogni $(x, f(x))$ in $G(f) \subset \mathbb{R}^{n+k}$, si ha

$$T_{(x, f(x))} G(f) = G(df_x)$$

cioè lo spazio tangente ad un punto $(x, f(x))$ del grafico è uguale al grafico del differenziale di f in x .

Sia M come sopra, poniamo allora

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

cioè l'unione di tutti gli spazi tangenti ad M al variare del punto $p \in M$. Ogni punto di TM è individuato da una coppia (p, v) dove $p \in M$ e v è un vettore appartenente allo spazio tangente $T_p M$. Poiché $M \subset \mathbb{R}^m$ e ogni $T_p M$ è un n -sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^m , allora TM è contenuto in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2m}$:

$$TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m ; p \in M, v \in T_p M\}.$$

Se U è un aperto non vuoto di \mathbb{R}^n , allora $TU = U \times \mathbb{R}^n$ ed è immediato vedere in questo caso che TU è una $2n$ -varietà. Anche nel caso di un grafico $G(f)$ non è difficile provare lo stesso fatto. In effetti si può verificare in generale che $TM \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ è una $2n$ -varietà. In questo senso possiamo dire che *gli spazi tangenti $T_p M$ variano in modo C^∞ al variare del punto p di M* . Si osserva anche che la proiezione naturale

$$\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \pi(x, v) = x$$

si restringe alla proiezione C^∞

$$\pi_M : TM \rightarrow M$$

tale che per ogni $p \in M$ la “fibra” di TM sopra p , cioè la controimmagine $\pi_M^{-1}(p)$, coincide con T_pM e TM è l’unione di queste fibre. La coppia (TM, π_M) è detta il *fibrato tangente* di M e gioca un ruolo fondamentale nello studio delle varietà.

Esempio. Il lettore può verificare per esercizio che per ogni punto x della sfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, lo spazio tangente $T_x\mathbb{S}^{n-1}$ coincide proprio con x^\perp , per cui

$$T\mathbb{S}^{n-1} = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ; x \in \mathbb{S}^{n-1}, (x, v) = 0\},$$

cioè analiticamente è dato dalle soluzioni del sistema di equazioni polinomiali quadratiche

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^n x_i v_i = 0.$$

Per verificare che $T\mathbb{S}^{n-1}$ è una varietà si possono usare queste equazioni e il *teorema della funzione implicita* applicato al valore regolare $(1, 0)$ dell’applicazione

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(x, v) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2, \sum_{i=1}^n x_i v_i \right).$$

Se $M \subset \mathbb{R}^m$ e $N \subset \mathbb{R}^k$ sono varietà (non necessariamente della stessa dimensione) e $f : M \rightarrow N$ è un’applicazione C^∞ ; allora per ogni $p \in M$, per ogni estensione locale $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ di f in un intorno di p , possiamo definire df_p uguale alla restrizione a T_pM del differenziale dg_p ; si verifica infatti che il risultato non dipende dalla scelta dell’estensione locale g e che inoltre l’immagine di df_p è un sottospazio vettoriale di $T_{f(p)}N$. Quindi per ogni $p \in M$, è definita l’applicazione lineare

$$df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N.$$

Al variare del punto p di M , tutte queste applicazioni possono essere “impacchettate” in un’unica applicazione C^∞

$$Df : TM \rightarrow TN$$

tale che $\pi_N \circ Df = f \circ \pi_M$. In altre parole, Df manda fibre di TM in fibre di TN , fibra per fibra in modo lineare. La mappa Df è detta *applicazione tangente* di f . Per esempio, se $M = U$ è un aperto di \mathbb{R}^n e $N = \mathbb{R}^k$, per cui $TU = U \times \mathbb{R}^n$, $T\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ allora $Df(x, v) = (f(x), df_x(v))$. È immediato che se $\text{Id}_M : M \rightarrow M$ è l’applicazione identità di M , allora

$$D\text{Id}_M = \text{Id}_{TM}.$$

Inoltre le applicazioni tangenti verificano la seguente notevole proprietà di “covarianza” che generalizza il noto comportamento della derivata rispetto alla composizione di funzioni: siano $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow S$ applicazioni C^∞ tra varietà. Allora

$$D(g \circ f) = Dg \circ Df.$$

Ne segue che se $f : M \rightarrow N$ è un *diffeomorfismo*, allora anche Df lo è.

Campi di vettori.

Per definizione un campo di vettori (tangenti) su una n -varietà M è una *sezione* X del fibrato tangente, cioè una applicazione $X : M \rightarrow TM$ di classe C^∞ , tale che $\pi_M \circ X = \text{Id}_M$. Quindi un campo di vettori “seleziona” un vettore in ogni spazio tangente T_pM e questo vettore varia in modo regolare al variare del punto p di M .

Se $f : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo tra varietà, X un campo di vettori su M , allora

$$f_*(X) := Df \circ X$$

è un campo di vettori su N : l'applicazione tangente di f trasporta campi di vettori su M in campi di vettori su N .

Se la varietà M è un aperto U di \mathbb{R}^n , allora X è della forma

$$X(x) = (x, v(x)) = \left(x, \sum_i^n a_i(x)e_i\right)$$

dove i coefficienti $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni C^∞ , e_i denota il campo costante che seleziona in ogni $T_x U = \mathbb{R}^n$ lo i -esimo vettore $(0, \dots, 1, \dots, 0)^t$ della base canonica di \mathbb{R}^n .

Se $f : U \rightarrow W$ è un diffeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^n e X è un campo di vettori su U , allora

$$f_*(X)(y) = Df \circ X(x) = \left(y, \sum_i^n b_i(y)e_i\right)$$

dove

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad b_i(y) = df_x(a_1(x), \dots, a_n(x))^t.$$

Se $\phi : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ è una carta dell'atlante di una n -varietà M e X un campo di vettori su M , allora il campo $\phi_*(X)$ su W (essendo sottintesa la restrizione di X su U) è una *rappresentazione in coordinate locali* del campo X su M . La regola di trasformazione di queste rappresentazioni locali si ottiene applicando quanto detto sopra ai diffeomorfismi tra aperti di \mathbb{R}^n che esprimono i cambiamenti di carta locale di M .

4.2 Metriche riemanniane

Sia M una n -varietà. In modo qualitativo diciamo che una *metrica riemanniana* g su M è un *campo di prodotti scalari definiti positivi*

$$\{g(p)\}_{p \in M}$$

uno su ogni spazio tangente $T_p M$ e che variano in modo C^∞ al variare del punto p di M . Per precisarne il senso, cominciamo con il caso base di un aperto U di \mathbb{R}^n , per cui ogni $T_x U = \mathbb{R}^n$. Un prodotto scalare su \mathbb{R}^n è univocamente individuato da una matrice $n \times n$, $A = (a_{ij})$, *simmetrica* (cioè tale che $a_{ij} = a_{ji}$), mediante la formula

$$(v, w)_A := v^t A w = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i w_j.$$

Se $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t, e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^t, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)^t$ è la base canonica di \mathbb{R}^n , risulta che

$$a_{ij} = (e_i, e_j)_A = (e_j, e_i)_A = a_{ji}.$$

La matrice A e il prodotto scalare associato sono *definiti positivi* se per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, si ha $(v, v)_A \geq 0$ ed è uguale a 0 se e solo se $v = 0$. Il prodotto scalare euclideo "standard" (\cdot, \cdot) già incontrato nella prima sezione coincide con $(\cdot, \cdot)_I$, dove I è la matrice identità. Allora una metrica riemanniana su U è data da una applicazione C^∞

$$g : U \rightarrow M_{n,n}$$

tale che per ogni $x \in U$, $g(x) = (g_{ij}(x))$ è simmetrica e definita positiva. La *metrica riemanniana standard* g_0 su U corrisponde all'applicazione costantemente uguale alla matrice identità I .

Se $f : U \rightarrow W$ è un diffeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^n , g una metrica riemanniana su W , allora ponendo per ogni $x \in U$ e per ogni $(v, w) \in (T_x U)^2 = (\mathbb{R}^n)^2$,

$$f^*(g)(x)(v, w) = g(f(x))(df_x(v), df_x(w))$$



Georg Bernhard Riemann
1826–1866

definiamo una metrica riemanniana su U ; lasciamo al lettore l'esercizio di esplicitare l'applicazione $U \rightarrow M_{n,n}$ associata.

Sia ora $M \subset \mathbb{R}^m$ una n -varietà e supponiamo di avere una famiglia $\{g(p)\}$ di prodotti scalari definiti su ogni spazio tangente $T_p M$ al variare di p in M . Questo definisce una metrica riemanniana g su M se per ogni parametrizzazione locale $\psi : W \rightarrow M$ di M , la forma bilineare $\psi^*(g)$ definita formalmente come sopra è una metrica riemanniana sull'aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, nel senso che abbiamo prima specificato. Tale $\psi^*(g)$ è una *rappresentazione in coordinate locali* della metrica riemanniana g definita su M . La regola di trasformazione di queste rappresentazioni locali si ottiene applicando quanto detto sopra ai diffeomorfismi tra aperti di \mathbb{R}^n che esprimono i cambiamenti di carta locale di M .

La regolarità di una metrica riemanniana g sulla varietà M si riconosce dal fatto che per ogni coppia X e Y di campi di vettori su M , ponendo per ogni $p \in M$

$$p \mapsto g(p)(X(p), Y(p)) \in \mathbb{R},$$

si definisce una funzione C^∞ su M .

È facile convincersi che *ogni varietà ammette metriche riemanniane*. Infatti se $M \subset \mathbb{R}^m$ e g è una metrica riemanniana su \mathbb{R}^m (per esempio quella standard), allora la restrizione di $g(p)$ su $T_p M$ al variare di p in M , definisce una metrica riemanniana g_M su M . In effetti non è strettamente necessario che g sia definita positiva, basta che lo siano i prodotti scalari $g(p)$ ristretti su ogni spazio tangente $T_p M$.

Date due n -varietà riemanniane (M, g) e (N, h) , allora un diffeomorfismo $f : M \rightarrow N$ è una *isometria* se $g = f^*(h)$. Le isometrie di (M, g) con se stesso formano il *gruppo* $\text{Isom}(M, g)$ *delle trasformazioni isometriche di* (M, g) .

Vediamo ora alcuni oggetti geometrici che possiamo definire su una varietà riemanniana (M, g) . Tutti i riferimenti allusivi alla "curvatura" saranno precisati nel prossimo capitolo.

Se $\alpha : [0, r] \rightarrow M$ è un arco C^∞ , possiamo definire la (*misura della*) *sua lunghezza* rispetto a g nel modo seguente: per ogni $t \in [0, 1]$, $v_t = d\alpha_t(1) \in T_{\alpha(t)} M$ è il *vettore velocità* lungo l'arco all'istante t . Possiamo allora calcolare la sua "ampiezza" rispetto a g : $\|v_t\|_g = \sqrt{g(\alpha(t))(v_t, v_t)}$. La lunghezza dell'arco α è allora data da:

$$\ell(\alpha) = \int_0^r \|v_t\|_g dt$$

dove l'integrazione è quella elementare "secondo Riemann" (lo stesso Riemann già citato). Una semplice applicazione della regola di cambiamento di variabile negli integrali mostra che la lunghezza così definita è *invariante per riparametrizzazioni* (dell'intervallo di definizione). La cosa si può estendere agli archi C^∞ "a tratti".

Se M è connessa, gli estremi inferiori delle lunghezze degli archi C^∞ a tratti che uniscono due arbitrari punti di M definiscono allora una *distanza* d_g su M che risulta *compatibile con la topologia* $\tau|_M$, nel senso che le palle aperte rispetto a d_g ne formano una base. Ad esempio, è facile vedere che la distanza euclidea della prima sezione coincide con la distanza associata alla metrica riemanniana standard su \mathbb{R}^n . Ogni arco semplice α (cioè tale che α sia un diffeomorfismo) può essere (ri)-parametrizzato in modo unico "per lunghezza d'arco", cioè mediante $\beta : [0, \bar{r}] \rightarrow M$ tale che

1. β e α hanno la stessa immagine in M ;
2. per ogni $s \in [0, \ell(\alpha)]$ si ha $\ell(\beta|_{[0, s]}) = s$, da cui in particolare $\bar{r} = \ell(\alpha) = \ell(\beta)$.

Un arco semplice parametrizzato per lunghezza d'arco è detto *geodetico* in (M, g) se per ogni $s_0, s_1 \in [0, l]$ con $s_0 < s_1$, si ha

$$\ell(\beta|_{[s_0, s_1]}) = d_g(\beta(s_0), \beta(s_1)).$$

Nel caso euclideo gli archi geodetici sono segmenti di retta.

Se la distanza d_g è *completa* (come lo è la distanza euclidea e come si verifica sempre se M è compatta), si realizza che dati due punti di M esiste (almeno) un arco geodetico che li unisce così che la sua lunghezza coincida con la distanza tra i due punti.

Ogni $p \in (M, g)$ ammette intorno in M che si comportano bene rispetto agli archi geodetici; infatti si può mostrare che:

1. Per ogni $p \in (M, g)$ esiste una carta U di M intorno a p che è diffeomorfa ad una palla euclidea aperta ed è *geodeticamente convessa*, cioè due punti arbitrari di U sono uniti da un unico arco geodetico tutto contenuto in U .
2. Per ogni $p \in (M, g)$, per ogni $r > 0$ indichiamo con $B_r^g(p)$ la “palla aperta” di centro p e raggio r rispetto alla distanza d_g . In generale essa non è diffeomorfa ad una palla euclidea; per esempio se M è compatta e r è abbastanza grande, allora $B_r^g(p) = M$. Questo non succede se r è abbastanza piccolo. Più precisamente, per ogni $p \in M$, per ogni $r > 0$ indichiamo con $B_r^{\text{eucl}}(O_p)$ la palla di raggio r e centro l’origine O_p in $T_p M$ rispetto al prodotto scalare euclideo $g(p)$ su $T_p M$. Allora vale il seguente fatto:

Per ogni $p \in (M, g)$, esistono $r > 0$ e un diffeomorfismo $e_{p,r} : B_r^{\text{eucl}}(O_p) \rightarrow B_r^g(p)$ tale che $e_{p,r}(O_p) = p$ e la restrizione di $e_{p,r}$ ad ogni raggio di $B_r^{\text{eucl}}(O_p)$ è la parametrizzazione per “lunghezza d’arco” di un arco geodetico di (M, g) .

Tale applicazione $e_{p,r}$ è detta *applicazione esponenziale di centro p* . L’estremo superiore r_p dei raggi r per cui la mappa $e_{p,r}$ è definita è detto *raggio di iniettività* di (M, g) nel punto p . L’estremo inferiore r_{inj} dei valori r_p al variare di p in M è detto *raggio di iniettività* della varietà (M, g) .

Per ogni sottospazio k -dimensionale E di T_M , $k \leq n$, la restrizione di $e_{p,r}$ a $E \cap B_r^{\text{eucl}}(O_p)$ determina in modo univoco un “germe” di k -varietà contenuta in M e passante per il punto p .

Come nel caso euclideo, per ogni $p \in M$, il prodotto scalare $g(p)$ determina una nozione di *ortogonalità* e una *misura degli angoli* nello spazio tangente $T_p M$. Se d_g è completa, tre punti distinti di M sono vertici di (almeno) un “triangolo” con lati geodetici; quanto la somma delle misure degli angoli interni di questi triangoli differisce da π , cioè dal valore standard del caso euclideo, fornisce molte informazioni sul modo in cui (M, g) è intrinsecamente “curvata” rispetto al caso “piatto” euclideo.

Ad ogni metrica riemanniana g è anche associata una *misura canonica di volume* $d\mu_g$; se per esempio M è compatta, l’integrale $\int_M d\mu_g \in \mathbb{R}$ definisce appunto il volume della varietà riemanniana (M, g) e di conseguenza possiamo definire il volume delle palle $B_r^g(p)$.

Ogni isometria preserva la lunghezza degli archi, la distanza tra i punti, l’ortogonalità e la misura degli angoli, il volume. Le isometrie sono dunque senz’altro un tipo di diffeomorfismo più “rigido”. Sorgono però nuovi problemi che in definitiva sono un’altra manifestazione in questo nuovo contesto più geometrico della solita “flessibilità” dei diffeomorfismi. Le isometrie possono essere “troppo rigide”: in effetti per una metrica riemanniana “generica” su M , il suo gruppo delle isometrie $\text{Isom}(M, g)$ è ridotto alla sola applicazione identità di M . Al contrario, per esempio in geometria euclidea, tutte le traslazioni sono isometrie ed è importante che per mezzo di esse ci si possa “trasferire liberamente” da un punto all’altro. D’altra parte, consideriamo proprio \mathbb{R}^n munito della metrica standard g_0 e sia $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arbitrario diffeomorfismo. Allora $\psi^*(g_0)$ è un’altra metrica riemanniana su \mathbb{R}^n e ψ è “in modo tautologico” una isometria tra $\psi^*(g_0)$ e g_0 . Dunque le due metriche riemanniane determinano “la stessa” geometria intrinseca (per esempio ψ manda archi geodetici in archi geodetici della stessa lunghezza), ma il campo di matrici simmetriche che esplicita $\psi^*(g_0)$ è ben diverso in generale dal campo costante di g_0 . Immaginiamo ora che $\psi^*(g_0)$ o qualsiasi altra metrica riemanniana g su \mathbb{R}^n ci sia fornita senza dirci niente a proposito del diffeomorfismo ψ . Ci possiamo dunque chiedere come riconoscere se sia o no isometrica alla metrica standard. Si capisce subito che il problema non è affatto banale e ci

porta a cercare caratteri intrinseci delle metriche riemanniane invarianti per isometrie. Possiamo riassumere il senso di queste considerazioni come segue:

Se considerando le isometrie rispetto a metriche riemanniane assegnate selezioniamo diffeomorfismi più rigidi, sono ora le metriche riemanniane stesse ad essere “troppo flessibili” e si pone il problema se, almeno in certi casi, non si possa selezionare e riconoscere in modo intrinseco una metrica privilegiata.

4.3 Sulla geometrizzazione delle 3-varietà semplicemente connesse

Consideriamo la sfera unitaria \mathbb{S}^3 in \mathbb{R}^4 munito della metrica riemanniana standard g_0 . Il gruppo ortogonale $O(4, \mathbb{R})$ è formato dalle trasformazioni lineari ortogonali di \mathbb{R}^4 , cioè date dalle matrici 4×4 tali che $R^{-1} = R^t$, equivalentemente $R^t R = Id$. È facile verificare che gli elementi di $O(4, \mathbb{R})$ sono automorfismi isometrici di (\mathbb{R}^4, g_0) . Inoltre ogni $R \in O(4, \mathbb{R})$ è tale che $R(\mathbb{S}^3) = \mathbb{S}^3$. Quindi la restrizione di R a \mathbb{S}^3 è una trasformazione isometrica di $(\mathbb{S}^3, g_{\text{can}})$, dove g_{can} è la metrica “canonica” su \mathbb{S}^3 ottenuta restringendo g_0 . È facile verificare anche che $O(4, \mathbb{R})$ (quindi a maggior ragione il gruppo di tutte le isometrie di $(\mathbb{S}^3, g_{\text{can}})$) è *transitivo sulle coppie* (x, v) dove $x \in \mathbb{S}^3$ e $v \in T_x \mathbb{S}^3 = x^\perp$, $g_{\text{can}}(x)(v, v) = 1$. Questo significa che per ogni coppia di tali coppie (x, v) e (x', v') , esiste $R \in O(4, \mathbb{R})$ tale che $R(x) = x'$ e $d_x R(v) = R(v) = v'$. Analogamente, $O(4, \mathbb{R})$ è transitivo sulle coppie (x, P) dove P è un 2-piano passante per l'origine di $T_x \mathbb{S}^3$. Possiamo riassumere queste osservazioni dicendo che $(\mathbb{S}^3, g_{\text{can}})$ è *isotropa* (“copernicana”), nel senso che in ogni punto e in ogni direzione su \mathbb{S}^3 vediamo la “stessa geometria”, cioè la varietà è “curvata” ovunque in modo uniforme. In generale diremo che una 3-varietà riemanniana (M, g) è isotropa se il suo gruppo di trasformazioni isometriche verifica analoghe proprietà di transitività. Una 3-varietà riemanniana (M, g) è *localmente sferica* se è localmente isometrica a $(\mathbb{S}^3, g_{\text{can}})$, in un intorno di ogni suo punto. I seguenti sono risultati importanti ma non difficilissimi da dimostrare di topologia e geometria differenziale:

Teorema 4.1 *Sia M una 3-varietà compatta 1-connessa.*

(1) *Se M è munita di una metrica riemanniana g isotropa, allora M è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 . In effetti (M, g) è isometrica a $(\mathbb{S}^3, \lambda g_{\text{can}})$ per una qualche costante $\lambda > 0$.*

(2) *Se M è munita di una metrica riemanniana g localmente sferica, allora M è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 . In effetti (M, g) è isometrica a $(\mathbb{S}^3, g_{\text{can}})$ (quindi in particolare è isotropa).*

Allora la congettura di Poincaré sarà dimostrata se saremo in grado di dimostrare il seguente fatto:

Ogni 3-varietà M compatta e 1-connessa può essere munita di una metrica riemanniana g localmente sferica (equivalentemente, isotropa).

Questa è in effetti una formulazione della congettura di geometrizzazione nel caso semplicemente connesso.

Il flusso di Ricci con chirurgia realizza questo fatto e quindi porta ad una dimostrazione *analitico-geometrica* della congettura di Poincaré. Nei limiti del possibile, questo sarà illustrato nell'ultimo capitolo.

4.4 Sulla congettura generale di geometrizzazione

Concludiamo con qualche ulteriore informazione sulla congettura generale di geometrizzazione delle 3-varietà. In ogni dimensione $n \geq 2$ esistono tre *modelli* di geometria isotropa; uno è $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$ costruita come prima restringendo sulla sfera la metrica standard g_0 di \mathbb{R}^{n+1} ; gli altri sono (\mathbb{R}^n, g_0) e $(\mathcal{I}^n, g_{\text{can}})$ ottenuto come segue (se veda per esempio [2]). Si consideri su \mathbb{R}^{n+1} il campo costante di prodotti scalari *non* definiti positivi, $g_{\mathcal{M}}(x) = J$, dove

$$u^t J w = \sum_{i=1}^n v_i w_i - v_{n+1} w_{n+1} .$$

Lo spazio $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\mathcal{M}})$ è l'esempio standard di *varietà lorentziana*. Per $n = 3$ è noto come *spazio di Minkowski* è fornisce un modello geometrico per la *relatività ristretta*. Consideriamo ora la

n -varietà \mathcal{I}^n in \mathbb{R}^{n+1} definita da

$$\mathcal{I}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; (x, x)_J = -1, x_n > 0\}.$$

\mathcal{I}^n è dunque la falda superiore di un iperboloido a due falde ed è il grafico della funzione

$$\mathfrak{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathfrak{h}(x) = \sqrt{\|x\|^2 + 1}.$$

Per ogni $x \in \mathcal{I}^n$, lo spazio tangente

$$T_x \mathcal{I}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1}; (x, v)_J = 0\}.$$

La restrizione di $g_{\mathcal{M}}$ a tutti gli spazi tangenti $T_x \mathcal{I}^n$ definisce una metrica riemanniana g_{can} per cui $(\mathcal{I}^n, g_{\text{can}})$ risulta essere isotropo. Infatti il gruppo $O^+(n, 1)$ delle trasformazioni lineari M di \mathbb{R}^{n+1} tali che $M^t J M = J$ e $M(\mathcal{I}^n) = \mathcal{I}^n$ si restringe ad un gruppo di trasformazioni isometriche di $(\mathcal{I}^n, g_{\text{can}})$ con proprietà di “transitività” analoghe a quelle del gruppo $O(n+1)$ operante su $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$. Nel caso euclideo (\mathbb{R}^n, g_0) un tale gruppo si ottiene componendo le trasformazioni appartenenti a $O(n)$ con le traslazioni. In ogni caso la distanza associata alla metrica riemanniana è completa.

Queste tre geometrie vengono dette rispettivamente *ellittica* (o sferica), *piatta* (o euclidea) e *iperbolica*. Ognuna ha un suo modo uniforme di “curvare” in ogni direzione e questo viene codificato da un carattere numerico reale K , detto *curvatura di Gauss* (o “sezionale”) che nei tre modelli risulta essere costante e uguale rispettivamente a 1, 0, -1 . Una n -varietà riemanniana (M, g) è detta *geometrica* se è localmente ellittica, piatta o iperbolica rispettivamente, cioè se è localmente isometrica al corrispondente modello ed inoltre viene richiesto che la distanza indotta d_g sia completa, come lo sono quelle dei tre modelli.

Ogni superficie S (compatta connessa e orientabile) può essere “geometrizzata”, inoltre il tipo di geometria dipende dalla topologia:

Teorema 4.2 (Geometrizzazione delle superfici) *Una superficie S ammette una metrica g ellittica ($K = 1$) se e solo se è diffeomorfa a \mathbb{S}^2 ($g(S) = 0$); ammette una metrica piatta ($K = 0$) se e solo se è diffeomorfa al toro \mathbb{T}^2 ($g(S) = 1$); ammette una metrica iperbolica ($K = -1$) se e solo se $g(S) > 1$.*

L’invariante topologico $\chi(S) := 2 - \kappa(S) = 2 - 2g(S)$ è detto *caratteristica di Eulero–Poincaré* della superficie S e si nota che ha segno coerente con quello della curvatura K (la cosa non sorprenderà un lettore che conosca il *teorema di Gauss–Bonnet* per le superfici). A volte questo enunciato di *geometrizzazione 2-dimensionale* viene presentato come un corollario del celebre *teorema di uniformizzazione per le superfici di Riemann*. Si tratta ancora una volta dello stesso Riemann già citato; qui però “superficie di Riemann” non vuol dire “munita di una metrica riemanniana”; significa munita di una struttura di *1-varietà complessa* (cioè localmente isomorfa a \mathbb{C} , con cambiamenti di carta che sono diffeomorfismi “olomorfi”, cioè analitici complessi). Una prima dimostrazione completa del teorema di uniformizzazione è dovuta allo stesso Poincaré (1907) ed usa argomenti di geometria olomorfa e di teoria del potenziale. Se ne può dare anche una versione (sostanzialmente equivalente) in termini di metriche riemanniane; questa *implica* la geometrizzazione in 2 dimensioni ma è in effetti *molto più forte*. In generale, due metriche riemanniane g e g' sulla varietà M si dicono *conformi* se esiste una funzione $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ , tale che per ogni $p \in M$, $g'(p) = e^{h(p)}g(p)$. In tal caso esse inducono la stessa misura degli angoli.

Allora il teorema di uniformizzazione afferma:

Teorema 4.3 *Ogni metrica riemanniana g su una superficie S è conforme ad un’unica metrica \tilde{g} che è “geometrica”, inoltre il tipo di geometria è determinato (come sopra) dalla topologia.*

D’altra parte, la geometrizzazione in 2-dimensioni può essere ottenuta direttamente in modo abbastanza elementare e costruttivo, usando la classificazione delle superfici a meno di diffeomorfismi e alcuni fatti semplici sui poligoni nei tre modelli di geometria, senza bisogno di passare per il teorema di uniformizzazione.

Avendo come modello ideale la geometrizzazione delle superfici, la congettura di *geometrizzazione per le 3-varietà* compatte e orientabili (a volte chiamata anche di “uniformizzazione”), è l’enunciato più forte compatibilmente con certe ostruzioni “evidenti” di natura topologica a causa delle quali non può valere un analogo in senso stretto. Per esempio si mostra facilmente che una 3-varietà “geometrica” è necessariamente irriducibile, quindi bisogna almeno tagliare lungo sfere essenziali realizzando il primo passo verso la decomposizione canonica. Nel caso delle superfici non è necessario alcun taglio preliminare. In soldoni e detto in modo non completamente corretto, la congettura in 3 dimensioni afferma appunto che ogni componente N (che come sappiamo può non essere compatta) della decomposizione canonica di una 3-varietà compatta connessa orientabile M può essere “geometrizzata”. Inoltre il tipo di geometria è prescritto dal comportamento dei lacci in N (considerati a meno di omotopia). A complicare le cose, c’è il fatto che le 3-geometrie isotrope 3-dimensionali non bastano e bisogna tenere conto di altri 5 modelli di geometria “omogenea” ma non isotropa (tra cui le due geometrie prodotto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathcal{I}^2 \times \mathbb{R}$).

Come nel caso delle superfici, la geometria iperbolica risulta essere quella “generica”. Per esempio, se definiamo “iperbolico” un nodo in \mathbb{S}^3 tale che il suo complementare può essere geometrizzato in modo iperbolico, allora i nodi *non* iperbolici sono stati completamente caratterizzati e ne segue che “genericamente” un nodo è iperbolico; inoltre il “teorema di chirurgia iperbolica” di Thurston (si veda per esempio [2]) mostra in particolare che per ogni nodo iperbolico K in \mathbb{S}^3 , a parte un insieme *finito* di casi, tutte le 3-varietà compatte ottenute per chirurgia razionale lungo K (vedi la Sezione 3.4) ammettono una geometrizzazione iperbolica.

La congettura di Poincaré si può riformulare dicendo che ogni 3-varietà compatta 1-connessa ammette una geometrizzazione ellittica.

I formidabili teoremi di “iperbolizzazione” già ricordati hanno corroborato in modo sostanziale la congettura di geometrizzazione (nel suo regime “generico”); questo insieme alla sua potente visione unificante ha motivato molti studiosi a cercarne una dimostrazione che avrebbe incluso quella della congettura di Poincaré. Va infatti ricordato che, anche a causa della frustrazione per i numerosi tentativi falliti, prima della congettura di geometrizzazione l’opinione degli studiosi sulla plausibilità stessa della congettura di Poincaré non era unanime. D’altra parte, i metodi elaborati da Thurston e da altri numerosi autori che hanno sviluppato le sue idee, si sono un po’ arenati, per esempio, nel trattamento delle varietà che in accordo con la congettura avrebbero dovuto essere iperboliche ma che non erano di Haken (si può dimostrare l’esistenza di varietà iperboliche non Haken applicando il “teorema di chirurgia iperbolica” a specifici nodi iperbolici); inoltre, ancora una volta, questi metodi e risultati sono un po’ “immateriali” riguardo alla congettura di Poincaré. Come già detto il flusso di Ricci con chirurgie risolve in modo unificato tutta la congettura di geometrizzazione. È anche interessante ricordare che il flusso di Ricci 2-dimensionale (senza bisogno di chirurgie!) fornisce una nuova dimostrazione dello stesso teorema di uniformizzazione delle superfici.

5 Il flusso di Ricci e la dimostrazione della congettura di Poincaré

L'idea di deformare oggetti geometrico-differenziali per mezzo di equazioni paraboliche alle derivate parziali per "migliorarli" e/o renderli più "simmetrici" (suggerita dal fatto che tale proprietà è goduta, ad esempio, dalle funzioni che soddisfano l'equazione del calore $u_t = \Delta u$), si può far risalire ad un lavoro del 1964 di Eells e Sampson [11], che hanno fatto evolvere mappe tra varietà riemanniane secondo il cosiddetto *harmonic map flow*, con l'obiettivo di ottenere punti critici del funzionale *energia*

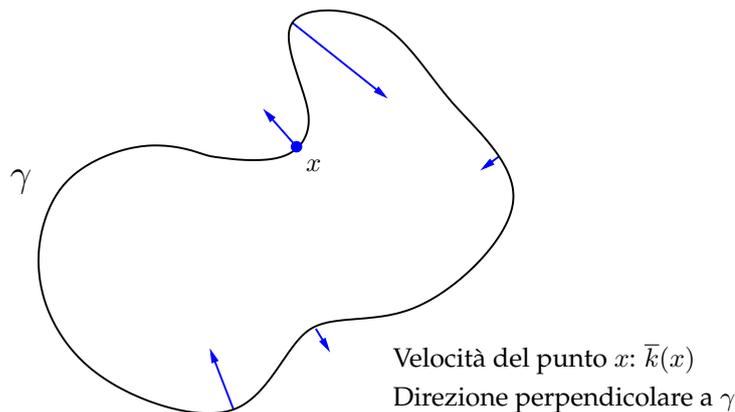
$$\mathcal{E}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_N \|d\varphi\|^2 d\mu_h$$

dove $\varphi : N \rightarrow M$ è una mappa C^∞ tra due varietà riemanniane (N, h) e (M, g) , l'integrando $\|d\varphi\|^2$ si esprime in coordinate locali come $g^{ij} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_j} h_{\alpha\beta}$ (dove g^{ij} è l'inversa della matrice della metrica g), infine $d\mu_h$ è la misura canonica di volume associata alla metrica h di N .

Questo tipo di evoluzioni hanno recentemente preso il nome generico di *flussi geometrici* e hanno generato negli scorsi anni un notevole interesse in sé, per le applicazioni a problemi geometrici e per la loro evidente importanza in ambito modellistico-applicativo. Rispetto alle tecniche topologiche di manipolazione delle varietà, di natura prevalentemente qualitativa, la forza dell'approccio mediante equazioni alle derivate parziali è dovuta alle *stime a priori* sulle soluzioni, che (possibilmente) permettono un'analisi quantitativa degli oggetti geometrici che evolvono e (possibilmente) la classificazione dei limiti di tali evoluzioni-deformazioni, allo scopo di ottenere informazioni geometrico-topologiche su tali oggetti e sulle varietà sottostanti.

Un esempio di flusso geometrico: il moto di curve per curvatura nel piano.

Data una curva regolare, semplice e chiusa $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ (cioè una 1-varietà in \mathbb{R}^2 diffeomorfa a \mathbb{S}^1), vogliamo che ad ogni istante ogni suo punto x si muova con velocità (normale) uguale alla curvatura $\bar{k}(x)$ della curva in tale punto. Un bell'esempio (interattivo) di simulazione di questo flusso può essere trovato all'indirizzo <http://a.carapetis.com/csf>.



Analiticamente, data una curva iniziale, regolare, semplice e chiusa $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, cerchiamo una famiglia di curve regolari $\gamma_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dipendente in modo C^∞ da un parametro temporale t , che varia in un certo intervallo $[0, T)$, tale che per ogni $\theta \in \mathbb{S}^1$ e $t \in [0, T)$, si abbia

$$\frac{\partial \gamma_t(\theta)}{\partial t} = \bar{k}(\theta, t)$$

dove $\bar{k}(\theta, t)$ è il vettore curvatura della curva γ_t nel punto $\gamma_t(\theta)$.

Poiché la curvatura di una curva γ è data da $\bar{k} = \nu \langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} | \nu \rangle / |\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}|^2$ dove ν è la normale interna alla curva (che è la rotazione di 90 gradi in senso antiorario del vettore tangente unitario

$\tau = \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} / \left| \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right|$, se la curva è percorsa in senso antiorario) si tratta di un sistema parabolico nonlineare di equazioni alle derivate parziali (più precisamente, quasilineare e degenera), che rientra dunque in un settore di studio su cui esiste un'ampia letteratura. In particolare, risultati (quasi) standard garantiscono l'esistenza di una soluzione regolare per un certo intervallo di tempo positivo. Il comportamento globale della curva che evolve è poi completamente descritto dal seguente teorema.

Teorema 5.1 (Gage–Hamilton [14–16], Grayson [18]) *Una qualunque curva regolare, semplice e chiusa nel piano evolve restando regolare, semplice e chiusa. Dopo un tempo finito diventa convessa, poi rimanendo convessa diventa “sempre più rotonda” e sempre in tempo finito “collassa” stringendosi ad un punto. Riscaldando la curva in modo da tenere la sua lunghezza costante, questa converge in modo C^∞ ad una circonferenza.*

Ne segue allora una dimostrazione del fatto che tutte le curve regolari, semplici e chiuse nel piano sono isotope ad una circonferenza. Si noti anche che se la curva iniziale è già una circonferenza, le curve del flusso sono circonferenze concentriche con raggio che tende a zero, mentre “riscaldando” si ha costantemente la circonferenza iniziale.

Questo teorema ci dice che il moto per curvatura di curve nel piano è una sorta di modello ideale di flusso geometrico “buono”: trasforma ogni elemento di una classe di oggetti geometrici (le curve piane regolari, semplici e chiuse) in un elemento “rappresentante” (la circonferenza unitaria – a meno di riscaldamento) geometricamente semplice che si conosce bene; inoltre il flusso “non sviluppa singolarità” prima del collasso finale in tempo finito: durante la deformazione gli oggetti stanno sempre “all’interno” della suddetta classe di curve. Vogliamo qui sottolineare che sebbene questo moto di curve sia uno dei più semplici tra i flussi geometrici, questo teorema è assolutamente *non banale* e la sua dimostrazione richiede vari argomenti ed idee sia dall’analisi che dalla geometria. In particolare, poiché l’arbitraria curva iniziale può presentare complicati “meandri” e “fiordi” non è affatto evidente che il flusso non possa sviluppare ad un certo istante singolarità dove per esempio due rami della curva potrebbero essere tangenti, oppure si formino punti angolosi.

Immaginiamo ora di volere applicare l’idea dei flussi geometrici “buoni” alla dimostrazione della congettura di Poincaré. Allora, a partire da una arbitraria metrica riemanniana g (come abbiamo visto essa esiste sempre) su una data 3-varietà compatta e 1-connessa M , dovremmo essere in grado di esibire un flusso regolare di metriche riemanniane $g(t)$ su M , con $g = g_0$, che (eventualmente a meno di qualche riscaldamento) converga in tempo finito ad una metrica localmente sferica (quindi isotropa). Purtroppo un buon flusso che soddisfi tali aspettative non è noto al momento, ma ammettendo anche certe operazioni di “chirurgia” in un numero finito di tempi dell’evoluzione, il flusso di Ricci permette di portare a termine questa linea dimostrativa.

Sono ormai molti i flussi geometrici analizzati nella letteratura matematica; tra i più conosciuti, oltre al flusso di Ricci, ci sono il flusso di Yamabe (vedi [5, 50, 62], per esempio), utile per cercare metriche a curvatura scalare costante in ogni classe conforme di metriche su una varietà, e il flusso per curvatura media di sottovarietà dello spazio euclideo (vedi [10, 32, 59], per esempio). Questi flussi deformano le metriche riemanniane su una varietà M secondo un operatore alle derivate parziali dipendente, in genere, dalla “curvatura”. Per avere qualche indicazione sulla natura di questi operatori, è dunque utile richiamare qualcosa sui diversi *tensori di curvatura* di una varietà riemanniana (M, g) . Per fare questo ci serve il concetto di connessione di Levi-Civita. Ancora, per la parte che segue ci si può riferire al libro [17].

La connessione di Levi-Civita

Sia M una n -varietà. Indichiamo con $\Gamma(M)$ lo spazio dei campi di vettori su M e con $C^\infty(M)$ lo spazio delle funzioni $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^∞ . Per ogni $X \in \Gamma(M)$ possiamo definire un operatore \mathbb{R} -lineare

$$L_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

ponendo per ogni funzione f e per ogni $p \in M$

$$L_X f(p) = df_p(X) .$$

Si mostra che per ogni coppia X, Y di campi di vettori su M esiste un unico campo $[X, Y]$ tale che

$$L_{[X, Y]} = L_X L_Y - L_Y L_X .$$

Supponiamo ora per un momento che M sia un aperto U di \mathbb{R}^n . Per ogni $x \in U$, riconosciamo in $L_X f(x)$ la definizione elementare di “derivata di f nella direzione $X(x)$ ”. In questo caso, agendo con L_X sui coefficienti di un altro campo Y , possiamo estendere la definizione di L_X ottenendo un operatore

$$D_X : \Gamma(U) \rightarrow \Gamma(U)$$

tale che se $Y(x) = \sum_i a_i(x) e_i$, allora

$$D_X Y(x) = \sum_i L_X a_i(x) e_i ,$$

dove $\{e_i\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^n .

Tutti questi operatori al variare di X possono essere organizzati in un’unica applicazione

$$\mathcal{D} : \Gamma(U) \times \Gamma(U) \rightarrow \Gamma(U), \quad (X, Y) \mapsto D_X Y .$$

Questo operatore verifica alcune interessanti proprietà, che si ricavano con calcoli diretti abbastanza semplici:

1. \mathcal{D} è \mathbb{R} -lineare rispetto all’argomento Y .
2. \mathcal{D} è C^∞ -lineare rispetto all’argomento X .
3. Verifica una specie di *identità di Leibniz*: per ogni coppia di campi di vettori X, Y e per ogni $f \in C^\infty(U)$, si ha

$$D_X (fY) = L_X fY + fD_X Y .$$

4. Per ogni coppia di coppia di campi di vettori X, Y , vale la formula

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y] .$$

Consideriamo ora su U la metrica riemanniana standard g_0 . Si verifica con calcoli diretti che \mathcal{D} è *compatibile con la metrica* nel senso che vale la seguente proprietà: per ogni terna X, Y e Z di campi di vettori su W si ha

$$L_X g_0(Y, Z) = g_0(D_X Y, Z) + g_0(Y, D_X Z) .$$

Torniamo ora ad una generica n -varietà M . Le quattro proprietà dell’operatore \mathcal{D} descritte sopra (trascurando cioè la compatibilità con la metrica g_0) hanno senso su qualsiasi varietà M e possono essere prese come la *definizione* di oggetti chiamati *connessioni* sul fibrato tangente TM . Se (M, g) è una varietà riemanniana, una connessione \mathcal{D} su TM è per definizione *compatibile con g* se è verificata anche l’ultima proprietà, sostituendo g_0 con g . Il teorema fondativo del calcolo differenziale sulle “varietà curve” afferma:

Teorema 5.2 *Per ogni varietà riemanniana (M, g) esiste ed è unica una connessione \mathcal{D}^g su TM compatibile con la metrica g .*

\mathcal{D}^g è detta *connessione* (o anche “derivata covariante”) di *Levi-Civita* della varietà riemanniana (M, g) . Essa è “invariante per isometrie”, nel senso che ogni isometria $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ trasforma in modo naturale \mathcal{D}^g in \mathcal{D}^h . \mathcal{D}^g ammette un’espressione esplicita in coordinate locali in funzione della corrispondente rappresentazione locale di g . Purtroppo questa espressione è piuttosto complicata così come lo sono tutti i calcoli in coordinate locali che la coinvolgono.

Esempio. Per avere un’idea più intuitiva della connessione di Levi-Civita si consideri il caso particolare in cui $M \subset \mathbb{R}^m$ e g è la restrizione su M della metrica standard g_0 su \mathbb{R}^m . Indichiamo

con \mathcal{D}^0 la connessione di Levi-Civita di g_0 . Per ogni $p \in M$ è data la proiezione ortogonale (rispetto a g_0) $\pi_p : T_p \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$, dove $T_p \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ munito del prodotto scalare standard. Siano X e Y due campi di vettori su M . Allora il campo $D_X^g Y$ si ottiene implementando la seguente procedura e il risultato non dipende dalle scelte arbitrarie fatte. Si estendano i campi X e Y a campi di vettori \tilde{X} e \tilde{Y} definiti su un intorno aperto U di M in \mathbb{R}^m (è sempre possibile farlo). Sia la metrica g_0 che la connessione \mathcal{D}^0 si restringono naturalmente a U . Allora, per ogni $p \in M$, si ha

$$D_X^g Y(p) = \pi_p(D_{\tilde{X}}^0(\tilde{Y})(p)).$$

Il tensore di curvatura di Riemann.

Sia (M, g) come sopra e poniamo $\mathcal{D} = \mathcal{D}^g$. Usando la connessione di Levi-Civita \mathcal{D} possiamo definire come segue l'operatore

$$\text{Rm} : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M).$$

Per ogni terna X, Y e Z di campi di vettori su M , poniamo

$$\text{Rm}(X, Y, Z) := D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X, Y]} Z.$$

Si verifica che Rm è $C^\infty(M)$ -lineare in ogni argomento. Si verifica inoltre che per ogni $p \in M$ $\text{Rm}(X, Y, Z)(p) \in T_p M$ dipende solo dai valori puntuali in p dei tre campi di vettori, cioè dalla terna di vettori $(u, v, z) := (X(p), Y(p), Z(p)) \in (T_p M)^3$. Invertendo il senso del discorso, partendo da terne (u, v, z) come sopra e usando arbitrarie estensioni a campi di vettori su M (ne esistono sempre), possiamo infine definire usando Rm un campo di operatori 3-lineari (che variano in modo regolare al variare del punto)

$$\{\text{Rm}_p : (T_p M)^3 \rightarrow T_p M\}_{p \in M}.$$

Questo campo è chiamato *tensore di curvatura di Riemann* o semplicemente *tensore di curvatura*. È un oggetto complesso, con un'espressione in coordinate locali piuttosto complicata che fa intervenire le derivate parziali fino al *secondo ordine* dei coefficienti di g . Anche il suo contenuto geometrico non è immediatamente leggibile, di fatto contiene tutte le informazioni rilevanti riguardo al modo in cui la varietà (M, g) è curvata rispetto al modello euclideo "piatto". È infatti la sorgente dei più importanti invarianti a meno di isometrie. Data la sua complicazione, è utile, operando opportune "contrazioni" degli argomenti, ricavare da Rm altri campi di operatori invarianti più "semplici". Tutti questi altri "tensori" cattureranno allora parte delle informazioni riguardanti la curvatura di (M, g) .

Il tensore di curvatura di Ricci.

Per ogni $p \in M$, fissiamo una coppia di vettori $(u, v) \in (T_p M)^2$ e consideriamo l'endomorfismo lineare

$$r_{u,v} : T_p M \rightarrow T_p M, \quad r_{u,v}(w) := \text{Rm}(u, v, w).$$

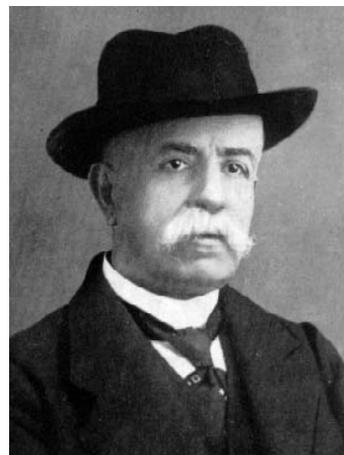
Poniamo allora

$$\text{Ric}(u, v) = \text{traccia}(r_{u,v}).$$

Come conseguenza delle proprietà di simmetria di \mathcal{D} e di Rm , si verifica che abbiamo definito un campo di operatori bilineari simmetrici

$$\{\text{Ric}_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}\}_{p \in M}.$$

In altre parole questo è un campo di prodotti scalari su TM (come la metrica g) che però al variare di $p \in M$ non sono in generale definiti positivi e neanche non-degeneri (per esempio Ric_p può anche essere identicamente nullo). Il campo Ric è chiamato



Gregorio Ricci Curbastro
1853 – 1925

tensore di curvatura di Ricci o semplicemente *tensore di Ricci*. Esso fu introdotto da Gregorio Ricci Curbastro all'inizio del '900 e gioca un ruolo fondamentale in relatività generale in quanto interviene nell'equazione di Einstein che descrive la curvatura dello spazio-tempo (vedi anche più sotto).

Prendendo la traccia di Ric_p al variare di $p \in M$, otteniamo una funzione C^∞

$$R : M \rightarrow \mathbb{R}$$

detta *curvatura scalare* di (M, g) .

Combinando il tensore Rm con la metrica g possiamo definire un altro utile campo di operatori multilineari

$$\{\text{Riem}_p : (T_p M)^4 \rightarrow \mathbb{R}\}_{p \in M}$$

ponendo

$$\text{Riem}_p(u, v, w, z) = g_p(\text{Rm}_p(u, v, w), z),$$

chiamato anch'esso *tensore di curvatura*.

Nel caso in cui volessimo ricordare la dipendenza da g , scriveremo $\text{Rm}_g, \text{Riem}_g, \text{Ric}_g, R_g$.

Diamo ora alcune indicazioni sul *contenuto geometrico* di questi tensori, con particolare riguardo al caso 3-dimensionale che più ci interessa. Per ogni sottospazio 2-dimensionale P di $T_p M$, fissiamo una base (u, v) di P e poniamo

$$K_p(u, v) = \frac{\text{Riem}_p(u, v, u, v)}{g_p(u, u)g_p(v, v) - [g_p(u, v)]^2}.$$

Si dimostra che lo scalare

$$K_p(P) := K_p(u, v) \in \mathbb{R}$$

è ben definito, cioè non dipende dalla scelta della base di P ed è chiamato *curvatura sezionale* di (M, g) in p rispetto al piano P .

Se M è una superficie S , allora esiste un unico 2-piano $P = T_p S$ per cui $K_p = K_p(P)$ dipende solo da p e abbiamo così definito la funzione *curvatura di Gauss*, di classe C^∞ ,

$$K : S \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si può dimostrare che per ogni (M, g) , l'insieme delle curvatures sezionali al variare del punto p e del piano P permette di ricostruire l'intero tensore di Riemann. Sappiamo che usando le applicazioni esponenziali, è possibile associare in modo canonico ad ogni coppia (p, P) come sopra un "germe" di superficie $S = S(p, P)$ contenuta in M e passante per p , su cui possiamo restringere la metrica g ottenendo la superficie riemanniana (S, g_S) . La curvatura sezionale $K_p(P)$ di (M, g) coincide allora con la curvatura di Gauss K_p di (S, g_S) in p . In buona misura allora il contenuto geometrico del tensore di Riemann è ricondotto a quello nel caso delle superfici.

Sia ora (S, g) una superficie riemanniana orientata. Dato un arco geodetico $\gamma : [0, r] \rightarrow S$ parametrizzato per "lunghezza d'arco", con $p = \gamma(0)$, sia $v(t)$ il vettore velocità lungo l'arco all'istante t che è necessariamente unitario rispetto a $g(\gamma(t))$. Ogni vettore $w \in T_p S$ può essere *trasportato in modo parallelo* lungo l'arco: per ogni istante t , $w(t)$ è l'unico vettore di $T_{\gamma(t)} S$ tale che

1. $g(\gamma(t))(w(t), w(t)) = g(p)(w, w)$



Johann Carl Friedrich Gauss
1777–1855

2. La coppia ordinata di vettori $(v(0), w)$ forma lo stesso angolo orientato (misurato relativamente a $g(p)$) della coppia $(v(t), w(t))$ (misurato rispetto a $g(\gamma(t))$).

Consideriamo ora un disco poligonale $D \subset S$ con bordo geodetico a tratti. Preso un punto p sul bordo ∂D e un vettore $w \in T_p S$ possiamo trasportarlo parallelamente lungo tutto il bordo (in modo coerente con l'orientazione di S) fino a trovare un altro vettore $w' \in T_p S$, una volta tornati al punto iniziale p . Si verifica facilmente che l'angolo orientato formato dalla coppia di vettori (w, w') non dipende dalla scelta di p e di w , per cui abbiamo un angolo $\alpha(D)$ che dipende solo dal disco poligonale. Sia $K : S \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione curvatura di Gauss di (S, g) . Vale allora l'identità

$$\alpha(D) = \int_D K d\mu_g.$$

In particolare, se D è un triangolo questo implica che se $K < 0$ (risp. $K > 0$) la somma degli angoli interni è strettamente minore (maggiore) di π . Si verifica anche che nel caso di una superficie (S, g)

$$R = 2K$$

quindi la funzione curvatura di Gauss e la funzione curvatura scalare contengono le stesse informazioni e sono sostanzialmente "l'unica curvatura" nel caso 2-dimensionale.

Per ogni n -varietà riemanniana (M, g) la curvatura scalare fornisce il seguente controllo asintotico del volume delle palle di raggio piccolo r : per ogni $p \in M$,

$$\text{Vol}_g(B_r^g(p)) = \text{Vol}^{\text{eucl}}(B_r^{\text{eucl}}) \left(1 - \frac{R(p)}{6(n+2)} r^2 + o(r^2) \right).$$

Benché più semplice del tensore di Riemann, anche una descrizione sintetica del tensore di Ricci non è banale, euristicamente possiamo dire che in ogni punto $p \in M$ misura la media "direzionale" delle curvatures sezionali; cioè per ogni vettore unitario $v \in T_p M$, misura la media delle curvatures sezionali relative ai 2-piani di $T_p M$ che contengono v .

La nozione di varietà isotropa è stata data nella Sezione 4. Il seguente fatto è di facile dimostrazione:

Se (M, g) è isotropa allora la curvatura sezionale è costante. Nel caso piatto essa è costantemente nulla, nel caso sferico $K = 1$, nel caso iperbolico $K = -1$.

Vale anche l'inverso:

Se (M, g) è completa, semplicemente connessa e con curvatura sezionale costante allora, a meno di un riscaldamento della metrica, (M, g) è isometrica a uno e uno solo dei modelli piatto, sferico e iperbolico (a seconda del segno della curvatura).

In particolare, pertinente alla congettura di Poincaré

Una 3-varietà compatta 1-connessa M è diffeomorfa a S^3 se e solo se ammette una metrica riemanniana di curvatura sezionale costante $K = 1$.

In dimensione 3 vale il fatto notevole che il tensore di Ricci determina completamente tutto il tensore di Riemann. In modo ideografico esprimiamo questa affermazione come segue: per ogni 3-varietà riemanniana (M, g)

$$\text{Riem} = \text{"Ric"}$$

In dimensione superiore questo non è vero; formalmente abbiamo

$$\text{Riem} = \text{"Ric"} + \text{Weyl}$$

dove l'ultimo tensore, detto *tensore di Weyl*, non è banale, ha molte proprietà interessanti, in particolare è invariante per diffeomorfismi conformi, non solo per le isometrie. Vediamo qualche conseguenza di questa caratteristica peculiare del caso 3-dimensionale che gioca anche un ruolo

importante nello studio del flusso di Ricci. In dimensione arbitraria una *varietà di Einstein con costante cosmologica* λ è una varietà riemanniana (M, g) tale che

$$\text{Ric}_g = \lambda g .$$

Nel caso 3–dimensionale vale il seguente fatto importante:

Una 3–varietà (M, g) è di Einstein se e solo se ha curvatura sezionale costante di segno che coincide con il segno della costante cosmologica λ .

In particolare:

Una 3–varietà compatta 1–connessa M è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 se e solo se ammette una metrica di Einstein di costante cosmologica positiva.

5.1 Il flusso di Ricci – Richard Hamilton



Richard Streit Hamilton

Apparentemente il flusso di Ricci non nasce con l'intento di provare la congettura di Poincaré, anche se l'idea di usarlo per deformare la metrica di una varietà ed ottenere conclusioni geometrico–topologiche è alla base della sua introduzione da parte di Richard Hamilton nel 1982. Vogliamo qui menzionare che una proposta di analisi di una famiglia di flussi di metriche tra cui c'è anche il flusso di Ricci viene suggerita da Jean–Pierre Bourguignon (*“Ricci curvature and Einstein metrics”*, Lecture Notes in Math 838, 1981).

Nel suo ormai famoso lavoro [20] sull'argomento, Hamilton definisce e studia per la prima volta il flusso di Ricci, cioè il sistema di equazioni (alle derivate parziali)

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\text{Ric}_{g(t)}$$

che descrive l'evoluzione nel tempo della metrica $g(t)$ su una data varietà compatta M di dimensione $n \geq 2$. In coordinate locali si hanno allora $n(n-1)/2$ equazioni per le componenti della metrica g . Analogamente al moto di curve nel piano visto precedentemente, la curvatura guida l'evoluzione della metrica. Più precisamente, si può vedere che il flusso deforma la geometria locale in maniera “direzionalmente selettiva”: in ogni punto contrae la varietà nelle direzioni per cui la forma quadratica associata al tensore di Ricci è positiva e la espande in quelle per cui è negativa.

Questo comportamento si manifesta chiaramente se applichiamo il flusso a partire da una metrica iniziale geometrica (nel senso della Sezione 4). Ad esempio, se partiamo da $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$, si verifica direttamente che lungo il flusso si ha $g(t) = r^2(t) g_{\text{can}}$, dove

$$r(t) = \sqrt{1 - 2(n-1)t} .$$

Cioè una sfera durante il flusso semplicemente contrae in suo raggio e si vede che in tempo finito $T_f = 1/2(n-1)$ tale raggio va a zero. Quindi il flusso *non* esiste indefinitamente e all'istante finale T_f si ha una *singolarità di estinzione globale istantanea* con la curvatura sezionale che va all'infinito per $t \rightarrow T_f$, simultaneamente in ogni punto.

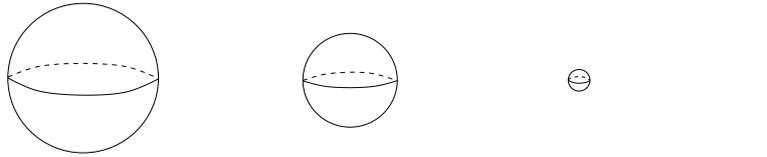


Figura 6: Evoluzione di una sfera.

All'estremo opposto c'è l'evoluzione di una n -varietà iperbolica compatta (M, g_0) , cioè con curvatura sezionale costante negativa uguale a -1 . Come nel caso della sfera, la metrica iniziale semplicemente riscalda secondo la legge di evoluzione

$$g(t) = [1 + 2(n - 1)t]g_0.$$

In questo caso il flusso esiste indefinitamente e, asintoticamente per $t \rightarrow +\infty$, il volume tende all'infinito mentre la curvatura tende uniformemente a zero in ogni punto.

Questi esempi suggeriscono anche che è utile considerare la versione "normalizzata" del flusso, riscaldando ad ogni istante la metrica $g(t)$, imponendo che il volume resti costante (analogamente al caso del flusso per curvatura delle curve piane). Si verifica immediatamente che in entrambi i casi precedenti la metrica normalizzata $\tilde{g}(t)$ è allora costante su $[0, T_f)$.

Richiamiamo ora alcune prime proprietà di base del flusso di Ricci, dimostrate da Hamilton.

Con una scelta appropriata di coordinate locali (armoniche) sulla varietà M , si realizza che il flusso ha localmente la forma

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \Delta g_{ij} + Q_{ij}(g, \partial g),$$

dove Δ è il laplaciano (l'operatore di Laplace-Beltrami) della varietà riemanniana che evolve (quindi varia nel tempo) e Q un termine quadratico in g e le sue derivate prime spaziali (quindi di ordine inferiore rispetto al laplaciano, termine leader dell'equazione).

Questa formula rende evidente la natura di sistema parabolico di equazioni alle derivate parziali del flusso di Ricci, rendendolo infatti "formalmente" simile ad un sistema di equazioni del calore (perturbate da termini di ordine minore). Ciò che precisamente si può mostrare è che il sistema che descrive il flusso di Ricci è un sistema parabolico quasilineare degenere di equazioni alle derivate parziali sulla varietà M , dove l'incognita è la metrica g . Malgrado alcune differenze che rendono l'analisi tecnicamente più complessa, essendo il sistema della stessa "famiglia" dell'equazione del calore, se la varietà M è compatta (come stiamo supponendo), qualunque metrica iniziale g possiede un'evoluzione regolare per il flusso di Ricci per un certo intervallo massimale positivo di tempo $[0, T_f)$. Inoltre le soluzioni verificano "teoremi di confronto" (basati sul principio del massimo) e stime a priori sulle derivate analoghi al caso delle equazioni paraboliche in domini di \mathbb{R}^n . Questo poiché i vari tensori di curvatura soddisfano durante il flusso equazioni di evoluzione (di tipo *reazione-diffusione*) simili a quella della metrica (in effetti persino migliori), per esempio

$$\frac{\partial \text{Riem}}{\partial t} = \Delta \text{Riem} + Q(\text{Riem}, g),$$

J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
17 (1982) 255-306

THREE-MANIFOLDS WITH POSITIVE RICCI CURVATURE

RICHARD S. HAMILTON

INDEX

1. Introduction	255
2. Notations and conventions	257
3. The evolution equation	259
4. Solution for a short time	260
5. Evolution equations with an integrability condition	262
6. Weakly parabolic linear systems	265
7. Evolution of the curvature	273
8. Curvature in dimension three	276
9. Preserving positive Ricci curvature	279
10. Pinching the eigenvalues	283
11. The gradient of the scalar curvature	286
12. Interpolation inequalities for tensors	291
13. Higher derivatives of the curvature	294
14. Long time existence	296
15. Controlling R_{\max}/R_{\min}	299
16. Estimating the normalized equation	300
17. Exponential convergence	301

1. Introduction

Our goal in this paper is to prove the following result.

1.1 Main Theorem. *Let X be a compact 3-manifold which admits a Riemannian metric with strictly positive Ricci curvature. Then X also admits a metric of constant positive curvature.*

All manifolds of constant curvature have been completely classified by Wolf [6]. For positive curvature in dimension three there is a pleasant variety of examples, of which the best known are the lens spaces $L_{p,q}$. Wolf gives five

Received December 21, 1981.

dove Q è un termine quadratico in Riem. Ci sono allora varie quantità analitico-geometriche a cui può essere applicato il principio del massimo per stimarne il comportamento. In particolare, vale l'equazione di evoluzione per la curvatura scalare

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2,$$

e l'applicazione del principio del massimo in questo caso implica che R_{\min} è non-decrescente nel tempo, quindi $R_{\min}(t) \geq R_{\min}(0)$ per ogni tempo $t \in [0, T_f]$.

Questi risultati (molti dei quali valgono in ogni dimensione) sono di natura prettamente analitica, seguono infatti da teoremi e metodi generali delle equazioni paraboliche che non sono strettamente correlati con l'origine geometrica del problema.

Sfortunatamente, è ben risaputo che le soluzioni esistono, in generale, solo per intervalli di tempo limitati (i.e. $T_f < +\infty$) in quanto si possono sviluppare in tempo finito "singolarità" sia per motivi analitici che geometrici. Gran parte della difficoltà nell'analisi consiste allora nel comprendere il comportamento asintotico delle metriche $g(t)$ per $t \rightarrow T_f$, segnatamente nel caso delle 3-varietà. Nel fare questo sono coinvolte la topologia e la geometria globale della 3-varietà che supporta il flusso e anche le peculiarità del tensore di Ricci in 3-dimensioni, ricordate nella sezione precedente. Nelle considerazioni che seguono ci retringeremo appunto al caso delle 3-varietà.

Facendoci guidare dall'analogia con l'equazione del calore $u_t = \Delta u$, dove l'effetto regolizzante dell'evoluzione associata si manifesta nel fatto che la distribuzione della temperatura tende in modo uniforme a diventare costante, nel caso del flusso di Ricci, le formule per l'evoluzione della curvatura lungo il flusso, mostrano che questo "tende" (in un senso che naturalmente andrebbe precisato) a "diffondere" tale curvatura omogeneizzandone la distribuzione. Queste considerazioni un po' vaghe si sostanziano se facciamo l'ipotesi che la metrica iniziale g abbia tensore di Ricci ovunque *definito positivo* (in simboli: $\text{Ric}_g > 0$). Si può innanzitutto mostrare che tale proprietà di positività del tensore di Ricci è conservata da tutte le metriche $g(t)$ del flusso per $t \in [0, T_f]$. Il seguente risultato fondamentale, oggetto del primo lavoro di Hamilton (e ottenuto prima di quelli sulle curve nel piano), descrive allora completamente questa situazione. La conclusione è analoga al moto per curvatura delle curve piane, in cui se la curva iniziale è convessa, anche tutte le curve del flusso lo sono e, una volta normalizzate, tendono a convergere verso una circonferenza (Teorema 5.1).

Teorema 5.3 (Hamilton [20], 1982) *Sia (M, g) una 3-varietà riemanniana compatta, semplicemente connessa tale che $\text{Ric}_g > 0$. Allora per il corrispondente flusso di Ricci su M di metrica iniziale g , il tempo di esistenza massimale T_f è finito e per $t \rightarrow T_f$ si realizza una singolarità di estinzione globale istantanea (cioè con le stesse proprietà qualitative descritte nel caso dell'evoluzione su $(\mathbb{S}^3, g_{\text{can}})$). Inoltre le metriche normalizzate $\tilde{g}(t)$ tendono ad una metrica di curvatura sezionale costante positiva su M . Ne segue in particolare che M è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 .*

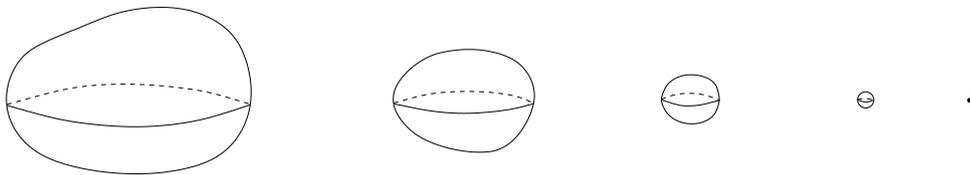
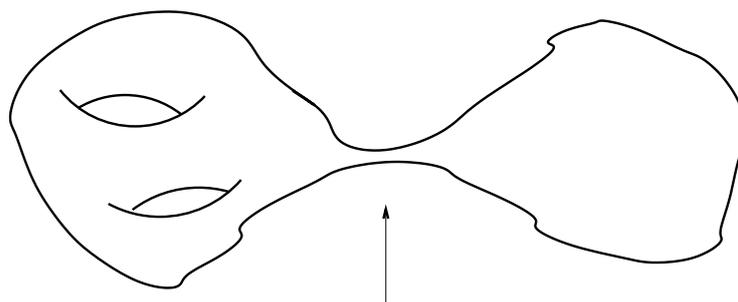


Figura 7: Evoluzione di una varietà con tensore di Ricci positivo.

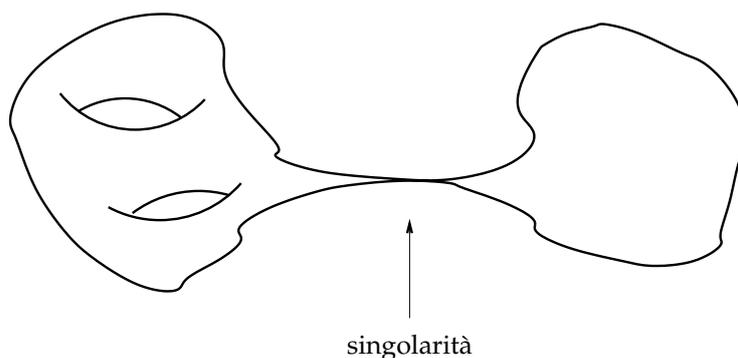
Questo importante risultato suggerisce immediatamente un possibile approccio alla congettura di Poincaré. *Basterebbe dimostrare che ogni 3-varietà M compatta e semplicemente connessa ammette una metrica riemanniana g con $\text{Ric}_g > 0$.* Sfortunatamente i tentativi di dimostrazione *diretta* di questo fatto non hanno avuto buon esito. Resta allora la possibilità di utilizzare il flusso di Ricci con una metrica iniziale su M *arbitraria*, pagando il prezzo di non potere evitare la formazione

e quindi l'analisi delle singolarità che si sviluppano quando $t \rightarrow T_f$. È folklore che sia stato S. T. Yau (Medaglia Fields 1982) a suggerire a Hamilton di proseguire lo studio del flusso di Ricci avendo come motivazione esplicita una dimostrazione della congettura di Poincaré per questa via.

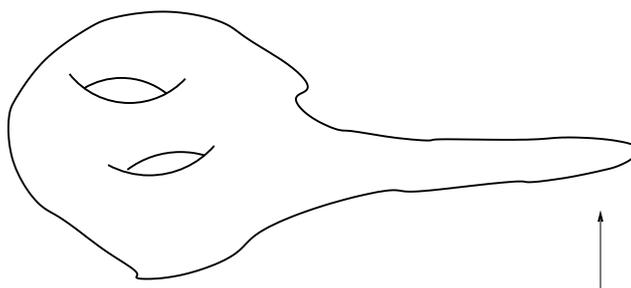
Preliminarmente, si tratterebbe appunto di "classificare" le singolarità che possono intervenire. Abbiamo già incontrato la singolarità "sferica" (quella data dall'estinzione globale istantanea, asintoticamente sferica, descritta nel teorema di Hamilton) ma non è difficile rendersi conto che ci possono essere altri fenomeni. Vediamo alcuni esempi descritti in modo qualitativo ma che possono essere formalizzati con precisione. Un primo esempio è detto "collo che si stringe" (*neckpinch*) ed è illustrato nella figura seguente:



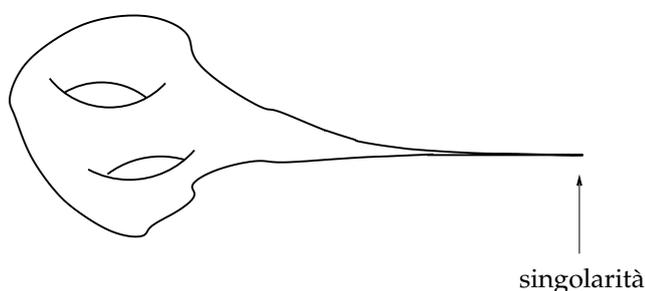
In questa figura alludiamo ad una 3-varietà riemanniana con due larghe zone (laterali) connesse da un "collo" sottile diffeomorfo a $\mathbb{S}^2 \times (-1, 1)$; le zone laterali hanno curvatura sezionale di modulo "piccolo" mentre vi è una curvatura di Ricci positiva molto grande lungo la parte centrale (indicata dalla freccia) del collo, nelle direzioni tangenti alla sfera \mathbb{S}^2 . Ci aspettiamo dunque che a partire da una tale metrica, durante il flusso di Ricci le zone laterali si muovano lentamente (restando regolari) nel tempo finito in cui invece il collo si restringe sempre di più fino a che collassa creando una singolarità:



Un'altra situazione in cui si può formare una singolarità è data da una varietà con una larga zona (a sinistra) di bassa curvatura (in modulo) e una "penisola" (diffeomorfa a una 3-palla aperta) con una forte curvatura positiva intorno alla sua punta (indicata dalla freccia):



Si può dimostrare che (in alcuni casi) durante il flusso, mentre la zona a sinistra si deforma lentamente (restando regolare), la parte finale della penisola si contrae e “collassa” formando una “cuspidè” in tempo finito:



5.2 Il programma per dimostrare la congettura di Poincaré

Il programma basato sul *flusso di Ricci con chirurgia* (Hamilton – 1986/95) si proponeva di dimostrare la congettura di Poincaré implementando/dimostrando i seguenti punti (un riferimento dettagliato per il materiale di questa e della seguente sezione è il survey [23]).

Partiamo da una 3-varietà compatta semplicemente connessa M , munita di una *arbitraria* metrica riemanniana iniziale g e consideriamo il corrispondente flusso di Ricci nell’intervallo di tempo massimale $[0, T_f)$. Abbiamo già osservato nella Sezione 3.4 che *non è restrittivo assumere anche che M sia irriducibile*. In queste ipotesi:

- T_f è finito.
- Si “classificano” le singolarità che possono generarsi. Se per $t \rightarrow T_f$ si realizza una singolarità “sferica”, allora valgono le stesse conclusioni enunciate nel Teorema 5.3, cioè M è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 .
- Usando la classificazione delle singolarità non sferiche, si può “operare” ad un tempo precedente (vicino) al tempo massimale T_f , “in prossimità” dei punti dove le singolarità si stanno formando, una “chirurgia quantitativa” del tipo seguente, che comporta sia manipolazioni di tipo topologico–differenziale che considerazioni di tipo geometrico quantitativo:

1) Si rimuovono da M un numero finito di copie diffeomorfe del cilindro $\mathbb{S}^2 \times (-1, 1)$ ottenendo una o più varietà N_i (in numero finito) ciascuna con dei “bordi” S_i^j diffeomorfi a \mathbb{S}^2 . Con una costruzione standard di topologia differenziale (già evocata quando abbiamo parlato della decomposizione in componenti irriducibili) è possibile allora costruire delle varietà compatte connesse (senza bordo) ottenute dalle N_i , rispettivamente “tappando” ogni bordo S_i^j con una 3-palla chiusa D_i^j incollata a N_i lungo tale bordo. È facile allora verificare che le nuove varietà $M_i = N_i \cup_j D_i^j$ ottenute sono semplicemente connesse,

inoltre l'assunzione di irriducibilità implica che, al massimo una di queste varietà *non* è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 , diciamo sia $M_{\bar{i}} = N_{\bar{i}} \cup_j S_{\bar{i}}^j$, nel caso sia presente.

2) Si "mettono da parte" tutte le varietà diffeomorfe a \mathbb{S}^3 e si "raccorda" ai bordi la metrica riemanniana sulla varietà $N_{\bar{i}}$ con una metrica riemanniana opportuna su ogni 3-palla D_i^j in modo da ottenere una varietà riemanniana $(M_{\bar{i}}, \bar{g})$ di cui disponiamo un "buon controllo quantitativo" sui caratteri geometrico-differenziali rilevanti.

- Si fa ripartire il flusso di Ricci e questa procedura sulla varietà $(M_{\bar{i}}, \bar{g})$.
- Dopo un numero finito di iterazioni della procedura flusso-chirurgia, si arriva ad un flusso che sviluppa una singolarità "sferica", oppure grazie alle proprietà geometriche della procedura di chirurgia si ottiene una famiglia di varietà tutte diffeomorfe a \mathbb{S}^3 . Ripercorrendo il processo all'indietro, possiamo ricostruire l'iniziale varietà M a partire da queste sfere finali ed è un risultato semplice di topologia differenziale che allora anche M è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 .

La Figura 8 fornisce un'idea pittorica di questo flusso con chirurgia.

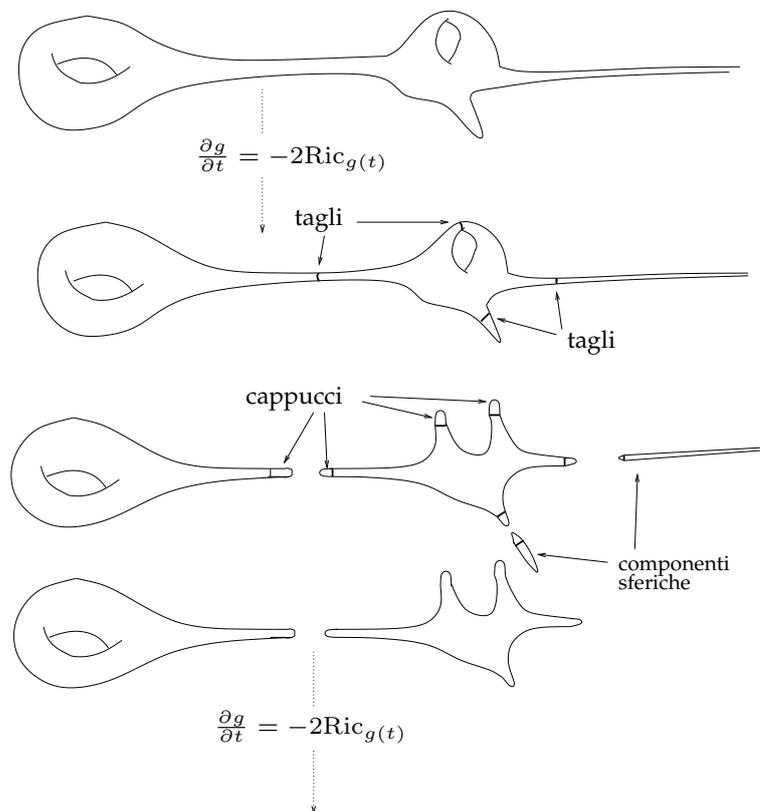


Figura 8: Il flusso di Ricci con chirurgia

5.3 Le difficoltà

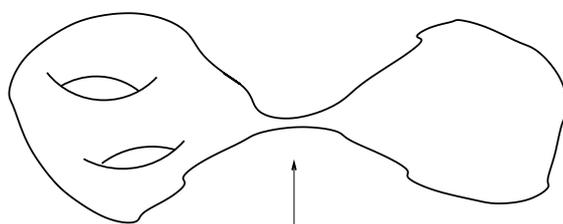
Il primo punto delicato del suddetto programma riguarda proprio la classificazione delle singolarità. La *congettura* naturale che emergeva dai successivi lavori di Hamilton era che nelle ipotesi considerate, esse fossero esattamente soltanto le tre già descritte: la singolarità "sferica" con estinzione istantanea del flusso, il "collo che si stringe" che asintoticamente diventa cilindrico e la "formazione di una cuspidè" asintoticamente rotazionalmente simmetrica. Malgrado vari

risultati di Hamilton che la corroboravano, una dimostrazione mancava. Un'importante difficoltà consisteva nell'escludere, nelle specifiche ipotesi in cui il programma intendeva applicarsi, la formazione di singolarità di struttura geometrica particolarmente "cattiva" su cui non sarebbe stato possibile fare una buona chirurgia topologica.

Anche assumendo la validità di tale classificazione delle singolarità, per sviluppare la necessaria procedura di "chirurgia quantitativa", era comunque necessario avere delle stime quantitative sul comportamento della varietà all'avvicinarsi al tempo massimale T_f in cui le singolarità si stavano formando. Andava inoltre affrontata la possibilità che allo stesso tempo si sviluppassero singolarità di tipo diverso in differenti zone della varietà, magari con velocità di formazione differenti, e che tali zone "singolari" potessero anche sovrapporsi fra loro.

Qualitativamente si intuivano i requisiti che la chirurgia doveva soddisfare per servire allo scopo. Questi sono (grossolanamente) descritti nelle seguenti Figure 9 e 10, nei casi (di singolarità "isolate") di un "collo che si stringe" e di "formazione di una cuspidè".

Prima:



Dopo:

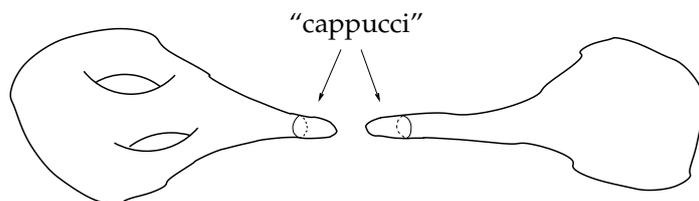
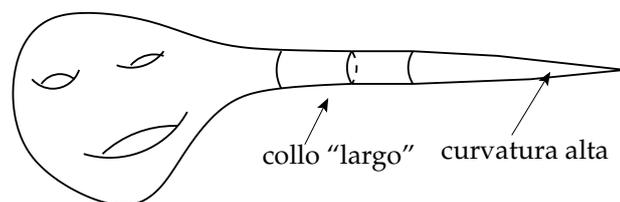


Figura 9: Chirurgia – Collo

Prima:



Dopo:

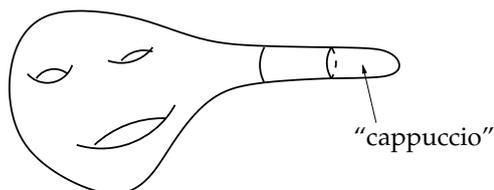


Figura 10: Chirurgia – Cuspide

Il primo risultato importante di Hamilton sulle singolarità è che tutte le volte che si sta formando una singolarità del flusso, cioè $t \rightarrow T_f$, il massimo del modulo della curvatura sezionale sulla varietà diverge a $+\infty$. Di conseguenza, l'attacco alla classificazione delle singolarità del flusso segue in modo naturale una tecnica ben conosciuta nello studio delle soluzioni delle equazioni differenziali, detta "blow-up", che consiste nel riscaldare le soluzioni (in questo caso il flusso di metriche) vicino ai punti di formazione delle singolarità (individuati dal modulo della curvatura sezionale non limitato) di un fattore positivo (grande) in modo che le varietà dei flussi riscaldati abbiano curvatura equicontrollata (la curvatura riscalda in modo inversamente proporzionale alla metrica). In parole povere, si fanno degli "zoom" (ingrandimenti) locali nelle zone dove la varietà sta diventando singolare. Se poi questa successione di flussi riscaldati "tende" ad un flusso limite di varietà (la nozione tecnica per questa convergenza è quella nel senso di Cheeger–Gromov, si veda [48] per esempio), si cerca di classificare questi flussi limite (che ci si aspetta possiedano speciali proprietà, per esempio di simmetria) e di stimare quantitativamente la differenza tra questi e la successione riscaldata convergente, ottenendo infine informazioni sul flusso originario. Per portare avanti questa linea è necessario avere un *teorema di compattezza* che permetta appunto di "passare al limite"; la sua validità è legata all'esistenza di una stima a priori sulla curvatura (che segue automaticamente dal riscaldamento appropriato) e di una stima dal basso per il raggio di iniettività delle varietà di tali flussi. Quest'ultima stima mancava per il flusso di Ricci.

Assumendo tale teorema di compattezza, Hamilton aveva sviluppato vari strumenti e ottenuto risultati parziali, come la fondamentale *stima di Hamilton–Ivey* e un'importante disuguaglianza di tipo *Harnack* che impongono forti restrizioni sulla classe dei flussi limite, queste implicano infatti che ogni varietà di tali flussi ha curvatura sezionale positiva e vanno nella direzione di provare che essi siano descritti per mezzo dei cosiddetti "solitoni di Ricci" (*shrinking* o *steady*) che sono speciali flussi di Ricci "autosimili", cioè la cui metrica evolve semplicemente sotto l'azione di un diffeomorfismo e per moltiplicazione per un fattore reale minore di uno (in altre parole, le varietà mantengono la propria "forma", eventualmente "stringendosi", durante il flusso). Più precisamente, si può mostrare che le varietà (M, g) che "generano" tali flussi di Ricci autosimili soddisfano la relazione

$$\text{Ric} + \nabla^2 f = \lambda g$$

per una funzione regolare $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e una costante reale $\lambda \geq 0$. La loro classificazione era dunque un altro ingrediente del programma, anche questo soltanto parzialmente risolto da Hamilton.

Un'altra conseguenza di questi due risultati, che sarà fondamentale nel successivo lavoro di Perelman, è che i punti/zone di singolarità sono individuati dal fatto che non solo il massimo del modulo della curvatura sezionale ma anche la curvatura *scalare* va a $+\infty$ (a priori, per quanto detto finora, quest'ultima avrebbe potuto anche restare limitata). Questo rende l'analisi più facile in quanto si tratta di una funzione invece di un tensore complicato come Ric o Riem e suggerisce inoltre che la formazione delle singolarità sia essenzialmente un fenomeno di "concentrazione di curvatura positiva".

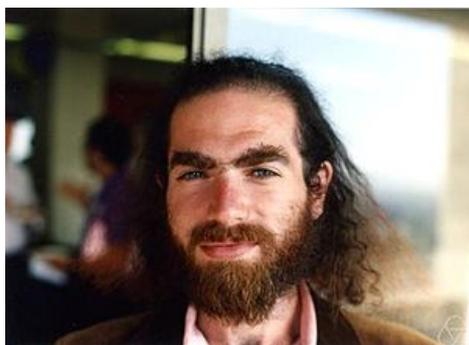
Malgrado tutto ciò, Hamilton non aveva comunque un argomento definitivo che gli permettesse di portare a termine la classificazione dei flussi limite (o anche soltanto dei solitoni di Ricci) e quindi una descrizione delle singolarità sufficientemente accurata e funzionale al programma. In particolare non era in grado di escludere la presenza tra i possibili flussi limite di un particolare solitone di Ricci con struttura "anomala" che non avrebbe permesso alcuna procedura di chirurgia.

La classificazione delle possibili singolarità restava quindi solo congetturale e così di conseguenza il comportamento della varietà durante il flusso all'avvicinarsi al tempo massimale T_f .

Anche per quanto riguarda la procedura di chirurgia quantitativa sviluppata da Hamilton (assumendo valida la classificazione delle singolarità), c'erano dei punti non del tutto chiari e mancava un argomento che assicurasse che il processo terminava in un numero *finito* di passi. Dunque, nonostante il suo grande fascino, il programma rimaneva non realizzato. Va comunque sottolineato il gran numero di risultati e tecniche (si veda il survey [23]), oltre a quelli già menzio-

nati, dimostrati e introdotti da Hamilton (alcuni validi non soltanto in dimensione tre) che sono stati la base per il lavoro di Perelman, ma anche dell'applicazione del flusso di Ricci allo studio delle 4-varietà con (forme di) curvatura positiva [21,24] o l'uso in dimensione due per riottenere il teorema di uniformizzazione [7,22], per esempio.

5.4 Il lavoro di Grisha Perelman



Grigori (Grisha) Yakovlevich Perelman

Circa dalla metà degli anni '90 il lavoro di Hamilton sul flusso di Ricci era bloccato a causa delle difficoltà che abbiamo discusso nella sezione precedente, tanto che la comunità matematica cominciava a sospettare che anche questo potesse essere un (buon) tentativo fallito di attacco alla congettura di Poincaré. Erano anche apparse nuove proposte di differenti linee dimostrative, sempre basate su tecniche analitiche. Ci fu dunque una certa sorpresa quando nel Novembre 2002 Grisha Perelman (che non aveva mai scritto nulla sul flusso di Ricci, né si sapeva che ci stesse lavorando) pubblicò sul preprint server ArXiv il primo di una serie di tre lavori (i due successivi furono pubblicati sempre su ArXiv nel Marzo e nel Luglio 2003):

- *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.*
- *Ricci flow with surgery on three-manifolds.*
- *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds.*

Questi lavori attirarono immediatamente l'attenzione della comunità matematica. Perelman, infatti, era già molto conosciuto e stimato per aver risolto alcuni importanti problemi aperti in geometria riemanniana e considerato, in particolare, uno dei massimi esperti degli *spazi di Alexandrov* (spazi metrici con una nozione generalizzata di curvatura sezionale limitata dal basso).

Il suo primo risultato contenuto nel lavoro [45], eccezionale nella sua semplicità ma apparentemente sfuggito a Hamilton e a chiunque avesse precedentemente lavorato sul flusso di Ricci, fu quello di esibire un funzionale sulle varietà riemanniane di cui il flusso di Ricci è una sorta di *flusso gradiente*. A differenza del flusso di Ricci, che nella sua definizione da parte di Hamilton apparentemente non godeva di tale proprietà, alcuni flussi geometrici "nascono" proprio come flusso gradiente di un funzionale, in quanto spesso introdotti proprio per cercarne i punti critici; è il caso ad esempio del flusso di Yamabe [5, 50, 62] e del moto per curvatura media [10, 32, 59]. Il vantaggio, in tal caso, è che oltre a poter usare le tecniche delle equazioni alle derivate parziali, si possono utilizzare anche metodi *variazionali*, in quanto c'è una *energia* che decresce durante il flusso e che generalmente permette di avere più stime a priori a causa della sua limitatezza dall'alto dal valore del dato iniziale.

Perelman introduce poi un'altra nuova più sofisticata quantità monotona *non-decrescente* durante il flusso di Ricci, chiamata "entropia", che quindi è uniformemente maggiore nel tempo

arXiv:math/0211159v1 [math.DG] 11 Nov 2002

The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications

Grisha Perelman*

February 1, 2008

Introduction

1. The Ricci flow equation, introduced by Richard Hamilton [H 1], is the evolution equation $\frac{d}{dt}g_t(t) = -2R_t$ for a Riemannian metric $g_t(t)$. In his seminal paper, Hamilton proved that this equation has a unique solution for a short time for an arbitrary (smooth) metric on a closed manifold. The evolution equation for the metric tensor implies the evolution equation for the curvature tensor of the form $R_{tm} = \Delta R_{tm} + Q$, where Q is a certain quadratic expression of the curvatures. In particular, the scalar curvature R satisfies $R_t = \Delta R + 2|Ric|^2$, so by the maximum principle its minimum is non-decreasing along the flow. By developing a maximum principle for tensors, Hamilton [H 2] proved that Ricci flow preserves the positivity of the Ricci tensor in dimension three and of the curvature operator in all dimensions; moreover, the eigenvalues of the Ricci tensor in dimension three and of the curvature operator in dimension four are getting pinched pointwise as the curvature is getting large. This observation allowed him to prove the convergence results: the evolving metrics (on a closed manifold) of positive Ricci curvature in dimension three, or positive curvature operator

*St. Petersburg branch of Steklov Mathematical Institute, Fontanka 27, St. Petersburg 191011, Russia. Email: perelman@pdmi.ras.ru or perelman@math.sunysb.edu. I was partially supported by personal savings accumulated during my visits to the Courant Institute in the Fall of 1992, to the SUNY at Stony Brook in the Spring of 1993, and to the UC at Berkeley as a Miller Fellow in 1993-96. I'd like to thank everyone who worked to make those opportunities available to me.

del valore relativo alla varietà iniziale. L'entropia è in grado di controllare dal basso il rapporto $\text{Vol}(B_r^g(p))/r^n$. Segue quindi che tale rapporto, che misura la diversità tra i volumi delle palle nelle varietà durante il flusso, comparati ai volumi delle palle euclidee con lo stesso raggio, è uniformemente positivamente limitato dal basso durante il flusso; in un certo senso questo significa che "una palla di raggio r non può "collassare". Essendo tale rapporto invariante per dilatazione, la stessa conclusione vale allora anche per tutte le varietà riscalate durante il procedimento di "blow-up" dei flussi descritto nella sezione precedente e anche per tutte le varietà degli eventuali flussi limite che si dicono appunto "non-collassati".

È ben noto che in presenza di curvatura limitata (come accade per tutte le varietà dei flussi riscalati), tale "non-collasso" implica una stima uniforme dal basso sul raggio di iniettività, di conseguenza è possibile avere l'auspicato teorema di compattezza per ottenere un flusso limite da analizzare. Inoltre, si verifica che il possibile solitone "cattivo" che Hamilton non sapeva escludere e che avrebbe impedito le operazioni di chirurgia, è in realtà "collassato" quindi non si può ottenere come flusso limite dalla procedura di "blow-up".

Vogliamo qui sottolineare che la suddetta stima sul raggio di iniettività (quindi la validità di un teorema di compattezza) e l'esclusione del solitone "cattivo", erano forse i due punti mancanti più rilevanti e apparentemente più ostici da ottenere nel programma di Hamilton.

Malgrado una certa concisione e carenza di dettagli, nonché la difficoltà tecnica di alcuni argomenti, fu dunque immediatamente chiara alla comunità la rilevanza delle conclusioni di Perelman in questo primo lavoro, in cui inoltre annunciava che in quelli successivi avrebbe presentato una sua versione della procedura di chirurgia quantitativa. Sebbene non scrivesse esplicitamente che questi suoi risultati avrebbero fornito una dimostrazione completa della congettura di Poincaré o addirittura dell'intera congettura di geometrizzazione, in un passaggio dell'introduzione possiamo leggere "... by our earlier (partly unpublished) work this is enough for topological conclusions". La stima matematica goduta da Perelman chiaramente creò una certa aspettativa tra esperti di flussi geometrici e topologi. Vitali Kapovitch ebbe il seguente scambio di email con Perelman:

```
Date: Wed, 20 Nov 2002 11:46:49 +0300 (MSK)
From: Grigory Perelman <perelman@euclid.pdmi.ras.ru>
Reply-To: Grigory Perelman <perelman@euclid.pdmi.ras.ru>
Subject: Re: geometrization
To: Vitali Kapovitch <vitali@math.ucsb.edu>
```

That's correct.
Grisha

On Tue, 19 Nov 2002, Vitali Kapovitch wrote:

```
> Hi Grisha,
> Sorry to bother you but a lot of people are asking me
> about your preprint "The entropy formula for the Ricci...".
> Do I understand it correctly that while you can not yet
> do all the steps in the Hamilton program you can do enough
> so that using some collapsing results you can prove
> geometrization?
>
> Vitali
```

Si evinse dunque che Perelman aveva chiara la linea per una dimostrazione completa della geometrizzazione delle 3-varietà, il che accrebbe ancora di più l'interesse in questo e nei successivi lavori.

Andiamo a descrivere la linea dimostrativa della congettura di Poincaré secondo Perelman, premettendo che una discussione precisa ed esauriente è oltre gli scopi (e le possibilità) di questo articolo. Il lettore interessato e disponibile ad addentrarsi maggiormente nelle complicazioni tecniche può consultare il survey di Laurent Bessières [3] o quello ancora più dettagliato di Terence Tao [54]).

Gli argomenti di Perelman si applicano più in generale al flusso di Ricci di 3-varietà compatte non necessariamente semplicemente connesse con risultati e casistiche più complessi. Noi ci limiteremo a descrivere i risultati specializzati nelle nostre ipotesi.

Consideriamo allora il flusso di Ricci nell'intervallo di tempo massimale $[0, T_f)$ di una 3-varietà riemanniana iniziale compatta, semplicemente connessa e irriducibile (M, g_0) (l'ipotesi di irriducibilità, che come sappiamo non è restrittiva, semplificherà alcuni degli argomenti che seguono).

- Oltre a dare una formulazione variazionale al flusso di Ricci e introdurre il funzionale "entropia" sopra discusso, Perelman scopre anche un'altra nuova quantità geometrica monotona durante il flusso: il cosiddetto "volume ridotto". Per mezzo di queste quantità monotone, non solo dimostra la stima sul raggio di iniettività con le conseguenze che abbiamo già discusso, ma riesce a descrivere i possibili flussi limite ottenuti via "blow-up" vicino a tutti i punti dove la curvatura non è limitata (senza alcuna ipotesi di crescita della stessa), quindi la struttura asintotica delle singolarità. Nelle nostre ipotesi, prova che ogni flusso limite è necessariamente dato dall'evoluzione di una varietà sferica, cioè omeomorfa a \mathbb{S}^3 , con una metrica a curvatura sezionale positiva o del cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (solitone di Ricci) oppure da un flusso "non-collassato" di \mathbb{R}^3 con una metrica a curvatura sezionale positiva dappertutto (non necessariamente un solitone di Ricci rotazionalmente simmetrico). Si ha dunque l'esclusione dai possibili flussi limite del solitone di Ricci "anomalo" di Hamilton, di ostacolo alle operazioni di chirurgia.

Sebbene questa possa apparire come una versione "grezza" della classificazione dei flussi limite, è comunque sufficiente a Perelman (con delle nuove stime analitico-geometriche molto raffinate) per descrivere il comportamento locale delle varietà in un intorno dei punti dove si stanno formando delle singolarità (cioè dove la curvatura scalare non è limitata) e per sviluppare un'efficiente procedura di chirurgia quantitativa (anche questa tecnicamente un po' diversa da quella del programma di Hamilton, sebbene qualitativamente simile, vedi la Sezione 5.3)).

- Perelman mostra che, fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, esiste una certa soglia $R_0 = R_0(M, g_0, \varepsilon)$ che dipende solo dalla varietà riemanniana iniziale (M, g_0) e da ε , tale che ogni punto p di una varietà del flusso $(M, g(t))$ dove la curvatura scalare $R_{g(t)}(p)$ supera R_0 , ha un intorno (detto *canonico*) che può solo essere uno dei seguenti:

1. una 3-varietà compatta con curvatura sezionale positiva, quindi diffeomorfa a \mathbb{S}^3 , per il Teorema 5.3;
2. un ε -cilindro, cioè un aperto diffeomorfo e con una metrica uniformemente "vicina" (in C^∞) all'ordine ε al cilindro $\mathbb{S}^2 \times (-1/\varepsilon, 1/\varepsilon)$ con la metrica standard, riscalato per il fattore positivo $\sqrt{2/R_{g(t)}(p)}$;
3. una ε -penisola, cioè una "penisola" formata da un ε -cilindro come sopra, "chiuso" da un lato da un "cappuccio" con curvatura sezionale positiva.

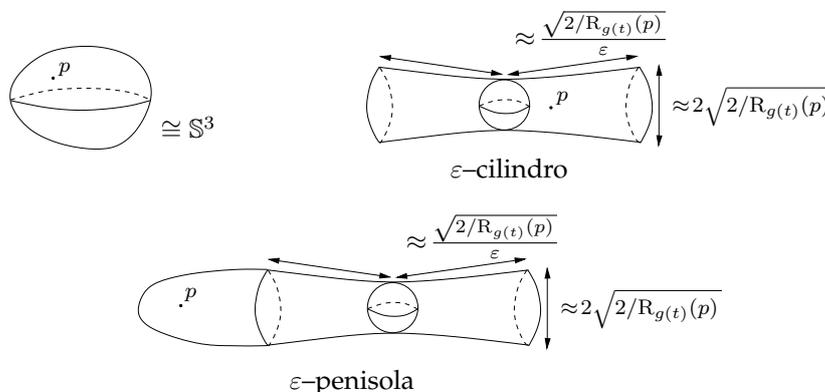


Figura 11: I possibili interni canonici di un punto $p \in M$.

Questo risultato, detto *teorema dell'intorno canonico* è quello tecnicamente più complesso tra i contributi di Perelman, ma forse è la scoperta delle quantità monotone durante il flusso (entropia e volume ridotto) il reale punto di svolta e di sblocco nell'attuazione (di una versione modificata) del programma di Hamilton. D'altra parte è nel teorema dell'intorno canonico e nella conseguente procedura di chirurgia quantitativa che si manifesta pienamente la forza delle stime legate al sistema di equazioni alle derivate parziali che definisce il flusso di Ricci.

- Descriviamo ora per sommi capi la procedura di chirurgia di Perelman, che differisce da quella proposta da Hamilton in quanto viene effettuata, come vedremo, *al tempo di singolarità* T_f , invece che ad un tempo vicino precedente.

Fissato $\varepsilon > 0$ e un valore ρ maggiore della soglia R_0 del punto precedente relativa a ε , indichiamo con $\Gamma \subset M$ l'insieme dei punti p dove la curvatura scalare non è limitata (dunque $R_{g(t)}(p)$ supera la soglia R_0 per $t \rightarrow T_f$). Le stime di Perelman (sull'oscillazione di $R_{g(t)}$) implicano allora che in realtà questa va a $+\infty$ nei punti di Γ e che quest'ultimo è un sottoinsieme chiuso e non vuoto di M (ricordiamo che il massimo di $R_{g(t)}$ diverge per $t \rightarrow T_f$). Segue dal teorema dell'intorno canonico, considerando t sufficientemente vicino a T_f , che un intorno di Γ è una varietà con componenti connesse che o sono varietà compatte con curvatura sezionale positiva oppure sono ricoperte da ε -cilindri e ε -penisole.

Se l'aperto $\Omega = M \setminus \Gamma$ è vuoto, allora la stessa alternativa vale per l'intera M che è connessa. In tal caso Nel primo caso si applica al solito il Teorema 5.3 e si conclude in particolare che M è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 . Nel secondo caso, usando il fatto che M è semplicemente connessa, si dimostra che gli ε -cilindri e le ε -penisole sono forzati ad assemblarsi in modo da produrre una varietà che è comunque diffeomorfa a \mathbb{S}^3 .

Se Ω non è vuoto, lo muniamo della metrica $g(T_f)$ limite delle metriche $g(t)$, per $t \rightarrow T_f$. Tale metrica limite esiste (ed è regolare) per via delle stime sul flusso e della curvatura scalare localmente limitata in Ω . Otteniamo così una varietà riemanniana $(\Omega, g(T_f))$ (non completa) per cui il teorema dell'intorno canonico continua a valere e tale che la curvatura scalare tende a $+\infty$ all'avvicinarsi al suo "bordo", che non può essere vuoto non essendo vuoto l'insieme Γ . Possiamo allora separare Ω nella parte Ω_ρ dove la curvatura scalare di $(\Omega, g(T_f))$ è minore di ρ e i rimanenti punti, appartenenti all'insieme chiuso $\Omega' = \Omega \setminus \Omega_\rho$, non vuoto per quanto detto sopra. Usando ancora il teorema dell'intorno canonico e la semplice connessione di M , si conclude che se Ω_ρ è vuoto $\Gamma \cup \Omega' = M$ è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 , altrimenti Ω_ρ non è vuoto e ogni componente connessa di $\Gamma \cup \Omega'$ ha la topologia della 3-palla chiusa \bar{B}^3 , oppure è diffeomorfa al cilindro $\mathbb{S}^2 \times [-1, 1]$. Segue allora che il bordo di $\Gamma \cup \Omega'$ (che coincide col bordo di Ω_ρ) è un'unione finita di 2-sfere, per la compattezza di $\Gamma \cup \Omega'$.

Lo stesso teorema dell'intorno canonico permette di classificare le possibili componenti connesse di Ω' come sopra (sono sempre cilindri o 3-palle) anche in presenza di bordi dove la curvatura scalare tende a $+\infty$. Le uniche possibilità sono descritte nella Figura 12. Si noti che il fatto che né Ω_ρ né Γ siano vuoti implica che c'è sempre almeno un ε -corno, inoltre solo gli ε -cilindri, le ε -penisole o gli ε -corni possono avere bordo in comune con Ω_ρ (e dunque sono finiti), mentre gli ε -doppi corni o le ε -isole cornute sono ben separati da Ω_ρ (ci potrebbero essere infiniti ε -doppi corni).

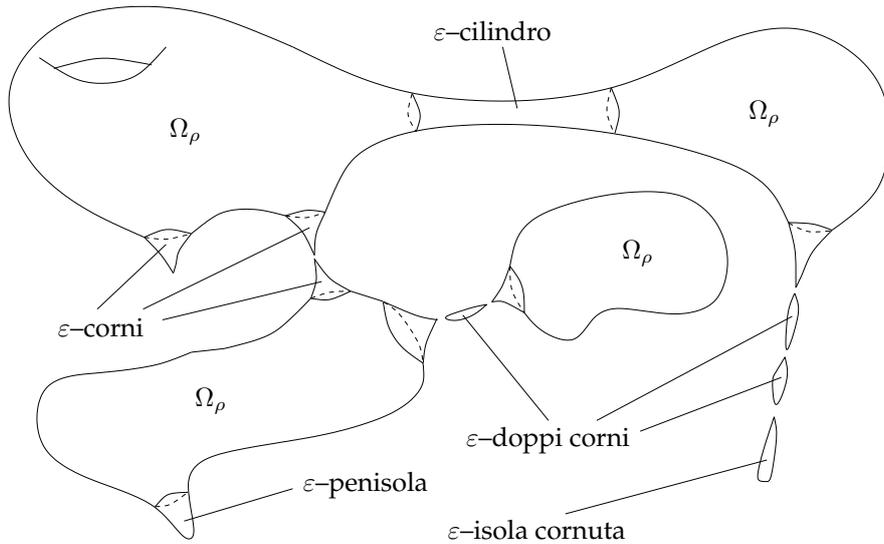


Figura 12: La varietà $\Omega = M \setminus \Gamma$ con la metrica limite $g(T_f)$.

A questo punto si “butta via” $\Gamma \cup \Omega'$ e si “tappa” ogni 2-sfera di bordo con dei “cappucci” (3-palle chiuse), modificando la metrica nell’intorno dei bordi in modo da avere una metrica riemanniana liscia \tilde{g} sulla varietà risultante.

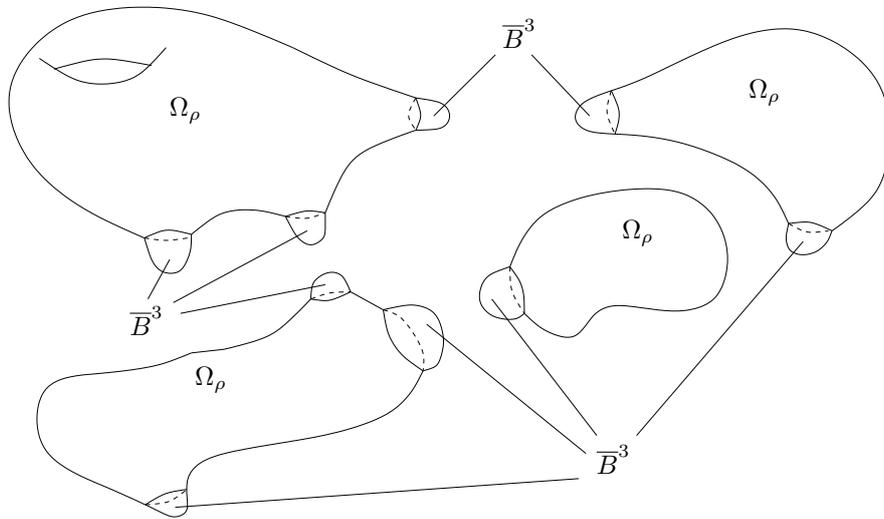


Figura 13: L’operazione di chirurgia.

Non è difficile verificare che la varietà così ottenuta ha un numero finito di componenti connesse di cui esattamente solo una \tilde{M} è diffeomorfa alla varietà M e tutte le altre sono diffeomorfe a \mathbb{S}^3 . Infatti, se una componente connessa di $\Gamma \cup \Omega'$ era diffeomorfa ad una 3-palla chiusa, la topologia non cambia nel rimpiazzarla con un cappuccio, mentre se tale componente era un cilindro, per il fatto che abbiamo assunto M irriducibile, l’operazione di chirurgia produce due varietà, una diffeomorfa a M e l’altra diffeomorfa a \mathbb{S}^3 .

Per le considerazioni dei prossimi punti è rilevante entrare un po’ più nel dettaglio su come la chirurgia viene effettuata su un ε -corno e sul comportamento del volume della varietà

prima e dopo l'operazione. Ricordiamo che c'è sempre almeno un ε -corno da "operare" in Ω' .

È un altro risultato di Perelman che esistono $\delta \in (0, 1)$ (molto) più piccolo di ε e, ponendo $\rho = R_0/\delta$, un valore $\rho' > \rho$, dipendenti solo da ε e dalla varietà iniziale, tali che un qualunque ε -corno contiene un δ -cilindro con curvatura scalare limitata dall'alto da ρ' . Segue allora che tale δ -cilindro ha volume maggiore di una definita quantità positiva e se si effettua la procedura di chirurgia rimuovendolo insieme alla parte restante dell' ε -corno "più lontana" da Ω_ρ , poi "tappando" la 2-sfera di bordo che si ottiene con una 3-palla chiusa come in Figura 14, si vede che il volume della varietà diminuisce (quando δ è molto piccolo, un δ -cilindro è molto "allungato") almeno di una quantità positiva fissata $\lambda = \lambda(\varepsilon, M, g_0)$, dipendente anch'essa solo da ε e dalla varietà iniziale.

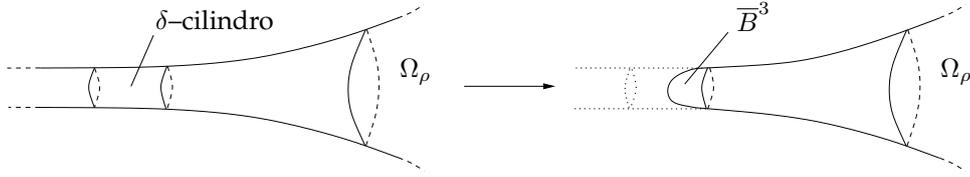


Figura 14: La chirurgia su un ε -corno.

Per quanto riguarda le altre chirurgie, si vede facilmente che se il parametro ε è scelto abbastanza piccolo, ogni operazione di rimpiazzare una ε -penisola o un ε -cilindro di Ω' (se presenti) con rispettivamente una o due 3-palle chiuse, si può sempre effettuare facendo calare il volume (come sopra, quando ε è molto piccolo, un ε -cilindro è molto "allungato"). Inoltre, vengono "buttati" tutti gli ε -doppi corni e tutte le ε -isole cornute, se presenti in Ω' . Data la presenza di almeno un ε -corno in Ω , concludiamo allora che nel passare da $(M, g(t))$, per t molto vicino a T_f (o considerando il limite di $\text{Vol}_{g(t)}(M)$ quando $t \rightarrow T_f$), a $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, il volume diminuisce almeno della quantità positiva λ , dipendente solo da ε e dalla varietà iniziale.

Tutta questa procedura è delicata (e quantitativa), in quanto nell'effettuarla (in vista della sua iterazione) è necessario mantenere inalterati i parametri R_0 , δ e ρ' nella loro dipendenza da ε , ma anche dalla potenziale nuova varietà iniziale $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$. Una conseguenza è allora che la "perdita" di volume rimane sempre la stessa anche per tutte le eventuali chirurgie successive.

La possibilità di realizzare tutto ciò è il risultato principale del secondo lavoro di Perelman [47].

Riassumendo, ci sono due alternative:

1. si conclude che la varietà è diffeomorfa a \mathbb{S}^3 ;
2. la procedura descritta produce una nuova varietà riemanniana $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ diffeomorfa a (M, g_0) tale che

$$\text{Vol}_{\widetilde{g}}(\widetilde{M}) < \lim_{t \rightarrow T_f} \text{Vol}_{g(t)}(M) - \lambda$$

per un valore positivo λ (che rimane invariato nelle eventuali chirurgie successive).

Nel secondo caso, si fa ripartire il flusso di Ricci con dato iniziale $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ e così via iterativamente.

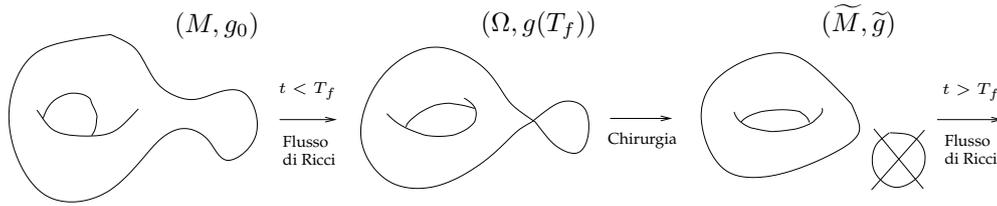


Figura 15: La “deformazione” da (M, g_0) a (\tilde{M}, \tilde{g}) .

- Negli intervalli di tempo dove il flusso di Ricci è regolare (tra due successive chirurgie) il volume di $(M, g(t))$ evolve secondo la legge

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}_{g(t)}(M) = -\frac{1}{2} \int_M R d\mu_{g(t)} \leq -\frac{R_{\min}(t)}{2} \text{Vol}_{g(t)}(M) \leq -\frac{R_{\min}(0)}{2} \text{Vol}_{g(t)}(M),$$

dove nell’ultima disuguaglianza abbiamo usato il fatto che $R_{\min}(t) \geq R_{\min}(0)$, per ogni tempo $t \geq 0$, visto nella Sezione 5.1.

Si può inoltre dimostrare che nell’operazione di chirurgia, il minimo della curvatura scalare non può diminuire, quindi la disuguaglianza sopra vale per ogni tempo $t \geq 0$ anche se ci sono stati dei tempi singolari in precedenza. Integrando, si ottiene allora

$$\text{Vol}_{g(t)}(M) \leq \text{Vol}_{g(0)}(M) e^{-tR_{\min}(0)/2},$$

cioè il volume durante il flusso (con chirurgie) può crescere (se $R_{\min}(0) < 0$), ma in maniera controllata nel tempo, in dipendenza solo della varietà riemanniana iniziale (M, g_0) . Una facile conseguenza di questa conclusione e del fatto (visto al punto precedente) che ad ogni chirurgia il volume scende di almeno $\lambda > 0$ è che non ci può essere accumulazione dei tempi di singolarità/chirurgia. Infatti, combinando le due disuguaglianze precedenti, si ottiene che la derivata del volume della varietà è a priori uniformemente limitata dall’alto in ogni intervallo di tempo finito (anche se contiene dei momenti di chirurgia), di conseguenza se i tempi di chirurgia si accumulassero si avrebbe un assurdo in quanto l’eventuale crescita del volume non potrebbe comunque “compensare” il fatto che per ogni chirurgia lo stesso volume diminuisce ogni volta almeno del valore positivo costante λ .

- Il punto finale della dimostrazione consiste nel provare che se la varietà iniziale è compatta e semplicemente connessa, il flusso di Ricci con chirurgie “termina” in tempo finito, cioè ad un certo tempo (possibilmente dopo varie iterazioni), la varietà risultante dall’operazione di chirurgia è vuota (ciò significa che ad un qualche passo della procedura descritta sopra si è concluso che la varietà è un insieme finito di 3-sfere). Si noti che la stima al punto precedente implica che allora si sono eseguite un numero finito di chirurgie.

Questo punto viene dimostrato da Perelman nel suo terzo lavoro [46]. Descriviamo (sempre a grandi linee) qui, per maggior semplicità, una dimostrazione dovuta a T. Colding e W. P. Minicozzi [8], con un argomento simile a quello originale di Perelman.

A causa del fatto che M non è 3-connessa, scelto un punto $p \in M$, è facile vedere che esiste una “curva” C^∞ di 2-sfere in M data da $\gamma : [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \rightarrow M$, con $\gamma(0, \mathbb{S}^2) = \gamma(1, \mathbb{S}^2) = p \in M$, non contraibile omotopicamente alla mappa “costante” $(t, x) \mapsto i_p(x) = p$ che manda tutto $[0, 1] \times \mathbb{S}^2$ nel punto p . Tale curva, che chiamiamo anch’essa γ è quindi un laccio non omotopicamente banale nello spazio H delle mappe $f : (\mathbb{S}^2, g_{\text{can}}) \rightarrow (M, g)$ continue e di *energia finita*, cioè tali che il seguente integrale ha senso ed è finito (vedi l’inizio della Sezione 5)

$$\mathcal{E}(f) = \int_{\mathbb{S}^2} \|df\|^2 d\mu_{\mathbb{S}^2}.$$

Tenuta allora fissata la classe di omotopia non banale $[\gamma]$ della curva suddetta, presa una qualunque altra curva $\beta \in [\gamma]$ consideriamo l’energia massima tra le mappe $\beta(t)$, per $t \in$

$[0, 1]$ e poi minimizziamo tale massimo tra tutte le curve β della classe $[\gamma]$, in formule

$$W([\gamma], g) = \inf_{\beta \in [\gamma]} \sup_{t \in [0, 1]} \mathcal{E}(\beta(t)).$$

Per un teorema di J. Jost si sa che tale quantità $W([\gamma], g)$, detta “larghezza” di (M, g) è sempre positiva, mentre Colding e Minicozzi mostrano che durante un flusso di Ricci $g(t)$ essa evolve secondo la formula

$$\frac{d}{dt} W([\gamma], g(t)) \leq -4\pi + \frac{3}{4(t+C)} W([\gamma], g(t))$$

per una costante non negativa $C \in \mathbb{R}$ dipendente solo dalla varietà iniziale. Inoltre provano che tale disuguaglianza differenziale è inalterata dalla procedura di chirurgia.

Riscrivendola come

$$\frac{d}{dt} (W([\gamma], g(t)) (t+C)^{-3/4}) \leq -4\pi (t+C)^{-3/4}$$

e integrando, si ottiene

$$(t+C)^{-3/4} W([\gamma], g(t)) \leq C^{-3/4} W([\gamma], g(0)) - 16\pi [(t+C)^{1/4} - C^{1/4}].$$

Dato che $W([\gamma], g(t))$ è positivo e il membro destro di questa disuguaglianza sarà invece negativo per $t > 0$ abbastanza grande, concludiamo per assurdo che il tempo di estinzione del flusso di Ricci con chirurgia deve essere finito. Di conseguenza, combinando questo risultato con quello del punto precedente, i tempi/operazioni di chirurgia sono in numero finito.

Questo risultato conclude la dimostrazione della congettura di Poincaré.

5.5 Un po' di cronaca sulla dimostrazione della congettura di Poincaré

I lavori di Perelman sono in realtà estremamente condensati e tecnici, inoltre necessitano di competenze sia di analisi che di geometria per seguirne gli argomenti. Malgrado la grande profondità delle idee, mancavano (almeno formalmente) numerosi dettagli nelle dimostrazioni, apparentemente colmabili con un lavoro sistematico.

Bruce Kleiner e John Lott, riconoscendone immediatamente il valore, rendono disponibili in rete già pochi mesi dopo, delle note esplicative [29,30] ai lavori di Perelman, aggiungendo svariati dettagli tecnici mancanti ed espandendo le parti meno chiare.

Nel Giugno 2006 l'Asian Journal of Mathematics pubblica (su carta) un lavoro [6] di Zhu Xi-Ping e Huai-Dong Cao contenente una dimostrazione completa della congettura di Poincaré (e di geometrizzazione), usando il flusso di Ricci. Il lavoro viene successivamente rivisto varie volte anche a seguito di numerose polemiche su questioni di priorità e di merito.

Nel Luglio 2006 John Morgan e Gang Tian pubblicano online su ArXiv (ora un libro su carta [40]) il lavoro “Ricci Flow and the Poincaré Conjecture” [39] contenente una versione completa e dettagliata della dimostrazione di Perelman. Questo lavoro e la successiva assegnazione durante l'International Congress of Mathematicians a Madrid, nell'agosto dello stesso anno, della medaglia Fields a Perelman (che la rifiuterà, né si presenterà a tale evento), segnano l'accettazione formale e sostanziale da parte della comunità matematica della sua dimostrazione della congettura di Poincaré.

Nel 2010 il Clay Mathematics Institute ha conferito a Perelman un “Millennium Prize” di un milione di dollari per la dimostrazione della congettura di Poincaré. Anche questo riconoscimento è stato rifiutato con la motivazione che sarebbe dovuto essere diviso equamente con Richard Hamilton.

Perelman si è dimesso dalla sua posizione allo Steklov Institute di Saint Petersburg e ha dichiarato la sua intenzione di abbandonare la matematica. Ha rilasciato varie dichiarazioni critiche

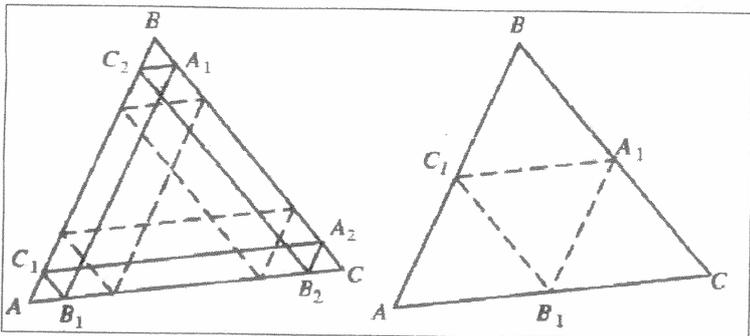
sull'assegnazione di premi per risultati matematici (ne aveva rifiutati altri in passato, prima della medaglia Fields) e sull'etica della comunità matematica.

I suoi tre fondamentali lavori non sono mai stati pubblicati su una rivista cartacea, ma rimangono a disposizione sul preprint server ArXiv, all'indirizzo <http://arxiv.org>.

Per un certo periodo Perelman raggiunse una notorietà presso il grande pubblico paragonabile a quanto accadde a Andrew Wiles quando dimostrò l'ultimo teorema di Fermat, anche a causa del suo carattere peculiare e dei rifiuti dei riconoscimenti scientifici e del milione di dollari di premio, che colpirono l'immaginario collettivo. Vi furono sul flusso di Ricci, ma in particolar modo su di lui in persona, articoli sui giornali, approfondimenti televisivi e video amatoriali (talvolta sarcastici) su YouTube, nonché una certa indulgenza verso pettegolezzi (spesso inventati) sulla sua vita privata. Qui sotto mostriamo l'edizione di "CityRoma" del 9/1/2004 (si tratta di un giornale-foglio che si può trovare liberamente nella metro di Roma). Indipendentemente dal contenuto (molto povero) dell'articolo, ci dà un'idea della diffusione del "fenomeno" Perelman-Poincaré in quel momento.

CityRoma venerdì 9 gennaio 2004 I FATTI DELLA VITA

Un russo risolve la Congettura di Poincaré Il mistero matematico durava da 100 anni

Lo studioso francese Jules-Henri Poincaré (1854-1912) e la rappresentazione grafica della sua Congettura, risalente al 1904. (foto AP)

SAN FRANCISCO (California, Usa) - Il mondo matematico è in fermento: il mistero della Congettura di Poincaré sullo studio degli spazi tridimensionali è stato forse risolto 100 anni dopo la sua prima formulazione. Manca ancora l'ufficialità, ma gli studi del russo Grigori "Grisha" Perelman stanno via via guadagnando credito da quando, nel novembre 2002, ne è iniziata la verifica da parte delle massime autorità matematiche.

Il caso non è semplice perché la congettura non è mai stata dimostrata neanche dal suo ideatore, lo studioso francese Jules-Henri Poincaré, il quale nel 1904 arrivò ad elaborare un metodo per applicare facilmente le regole di calcolo per le misurazioni bidimensionali (altezza-larghezza) a quelle tridimensionali (al-

tezza-larghezza-profondità). Il metodo funziona ma resta astratto, non essendo dimostrato matematicamente, per cui solo la sua applicazione ai problemi più complessi della materia può dire se è esatto o meno. Più volte, in passato, soluzioni proposte da insigni studiosi sono tramontate alla prova dei fatti. La teoria di

Perelman si rifà alle *correnti di Ricci* e alla geometria differenziale: "Sono studi molto complicati, con molte parti variabili. Ci vuole tempo ed è facile perdere il filo", ammette John Morgan, docente della Columbia University.

A complicare le cose c'è il carattere riservato dello studioso russo, che solo un anno fa è uscito dalla semi-reclusione nella quale si era rinchiuso da otto anni e ha esposto le sue scoperte ad alcuni college statunitensi. Perelman, matematico dell'Istituto Steklav dell'Accademia russa del-

le scienze, ha anche rifiutato finora il milione di dollari messo in palio dal *Clay Mathematics Institute* di Cambridge, Massachusetts, per la soluzione di ognuno dei sette più grandi misteri matematici. La condizione per il premio Fields, una sorta di Nobel matematico, è infatti che la soluzione sia pubblicata su un giornale scientifico, cosa finora evitata da Perelman.

La soluzione della Congettura di Poincaré sarebbe utile soprattutto nello studio dell'universo, ma non avrebbe applicazioni nella vita di tutti i giorni. (AP)

5.6 La congettura di geometrizzazione

Come già detto il flusso di Ricci con chirurgie permette una dimostrazione dell'intera congettura di geometrizzazione di Thurston (si veda la Sezione 4). Per fare ciò è necessario in primo luogo analizzare la struttura delle singolarità che si possono formare senza l'ipotesi di semplice con-

nessione e estendere a tali situazioni la procedura di chirurgia. Tale estensione non comporta troppe difficoltà; invece una sostanziale differenza rispetto al caso semplicemente connesso è che in generale il flusso con chirurgie non termina in tempo finito. Si tratta allora di studiare il suo comportamento asintotico per $t \rightarrow +\infty$. Questo richiede un'ulteriore analisi, assolutamente non banale e parzialmente basata su precedenti risultati sia di Hamilton che di Perelman. Essa viene sinteticamente sviluppata nel terzo articolo di Perelman. Ci sono almeno due opere indipendenti in cui viene presentata una dimostrazione completa e dettagliata della congettura di geometrizzazione, entrambe basate sugli argomenti di Perelman ma anche con modifiche, semplificazioni o approcci alternativi ad alcuni risultati intermedi:

- Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot e Joan Porti, *Geometrisation of 3-Manifolds*, circa nel 2007 [4].
- John Morgan e Gang Tian, *Completion of the Proof of the Geometrization Conjecture*, nel 2008 [41, 42].

In particolare nella prima opera citata i già noti teoremi di iperbolizzazione di Thurston vengono usati come strumento della dimostrazione, invece che essere riottenuti a posteriori come caso particolare della geometrizzazione.

Ad oggi non sono stati trovati errori o falle nelle argomentazioni e l'esistenza stessa di varianti dovute a gruppi differenti di studiosi testimonia la robustezza di questa dimostrazione che conclude una delle imprese più profonde e spettacolari della storia della matematica.

Ringraziamenti. Vorremmo ringraziare Laurent Bessières, Gérard Besson e Zindine Djadli per molte delle immagini e per il prezioso aiuto alla preparazione di questo lavoro, nonché Siloia Benvenuti, Daniele Castorina e Carlo Sinestrari per vari suggerimenti stilistici e matematici.

Riferimenti bibliografici

- [1] J. W. Alexander, *An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **10** (1924), no. 1, 8–10.
- [2] R. Benedetti and C. Petronio, *Lectures on hyperbolic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [3] L. Bessières, *Conjecture de Poincaré: la preuve de R. Hamilton et G. Perelman*, Gazette des Mathématiciens **106** (2005), 7–35.
- [4] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot, and J. Porti, *Geometrisation of 3-manifolds*, EMS Tracts in Mathematics, vol. 13, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2010.
- [5] S. Brendle, *Convergence of the Yamabe flow for arbitrary initial energy*, J. Diff. Geom. **69** (2005), no. 2, 217–278.
- [6] H.-D. Cao and X.-P. Zhu, *A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures – application of the Hamilton–Perelman theory of the Ricci flow*, Asian J. Math. **10** (2006), no. 2, 165–492.
- [7] X. Chen, P. Lu, and G. Tian, *A note on uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), no. 11, 3391–3393 (electronic).
- [8] T. H. Colding and W. P. Minicozzi II, *Width and finite extinction time of Ricci flow*, Geom. Topol. **12** (2008), no. 5, 2537–2586.
- [9] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 2, 279–315.

- [10] K. Ecker, *Regularity theory for mean curvature flow*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 57, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004.
- [11] J. Eells Jr. and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.
- [12] M. H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 3, 357–453.
- [13] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **8** (1983), no. 1, 77–80.
- [14] M. Gage, *An isoperimetric inequality with applications to curve shortening*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 4, 1225–1229.
- [15] ———, *Curve shortening makes convex curves circular*, Invent. Math. **76** (1984), 357–364.
- [16] M. Gage and R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Diff. Geom. **23** (1986), 69–95.
- [17] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer-Verlag, 1990.
- [18] M. A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Diff. Geom. **26** (1987), 285–314.
- [19] L. Guillou and A. Marin (eds.), *À la recherche de la topologie perdue*, Progress in Mathematics, vol. 62, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1986, I. Du côté de chez Rohlin. II. Le côté de Casson. [I. Rokhlin’s way. II. Casson’s way].
- [20] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. **17** (1982), no. 2, 255–306.
- [21] ———, *Four-manifolds with positive curvature operator*, J. Diff. Geom. **24** (1986), no. 2, 153–179.
- [22] ———, *The Ricci flow on surfaces*, Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986), Contemp. Math., vol. 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, pp. 237–262.
- [23] ———, *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993), Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 7–136.
- [24] ———, *Four-manifolds with positive isotropic curvature*, Comm. Anal. Geom. **5** (1997), no. 1, 1–92.
- [25] W. Jaco, *Lectures on three-manifold topology*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 43, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.
- [26] K. Johannson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 761, Springer, Berlin, 1979.
- [27] M. A. Kervaire and J. W. Milnor, *Groups of homotopy spheres. I*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 504–537.
- [28] R. Kirby, *A calculus for framed links in S^3* , Invent. Math. **45** (1978), no. 1, 35–56.
- [29] B. Kleiner and J. Lott, *Notes on Perelman’s papers*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2006.
- [30] ———, *Notes on Perelman’s papers*, Geom. Topol. **12** (2008), no. 5, 2587–2855.
- [31] W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math. (2) **76** (1962), 531–540.

- [32] C. Mantegazza, *Lecture notes on mean curvature flow*, Progress in Mathematics, vol. 290, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
- [33] J. W. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7–sphere*, Ann. of Math. (2) **64** (1956), 399–405.
- [34] ———, *A unique decomposition theorem for 3–manifolds*, Amer. J. Math. **84** (1962), 1–7.
- [35] ———, *Lectures on the h–cobordism theorem*, Notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.
- [36] ———, *Topology from the differentiable viewpoint*, Based on notes by David W. Weaver, The University Press of Virginia, Charlottesville, Va., 1965.
- [37] E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Springer–Verlag, New York–Heidelberg, 1977, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 47.
- [38] J. Morgan, *The Seiberg–Witten equations and applications to the topology of smooth four–manifolds*, Mathematical Notes, vol. 44, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [39] J. Morgan and G. Tian, *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2006.
- [40] ———, *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, Clay Mathematics Monographs, vol. 3, American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2007.
- [41] ———, *Completion of the proof of the geometrization conjecture*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2008.
- [42] ———, *The geometrization conjecture*, Clay Mathematics Monographs, vol. 5, American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2014.
- [43] W. D. Neumann and G. A. Swarup, *Canonical decompositions of 3–manifolds*, Geom. Topol. **1** (1997), 21–40 (electronic).
- [44] M. H. A. Newman, *The engulfing theorem for topological manifolds*, Ann. of Math. (2) **84** (1966), 555–571.
- [45] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2002.
- [46] ———, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three–manifolds*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2003.
- [47] ———, *Ricci flow with surgery on three–manifolds*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2003.
- [48] P. Petersen, *Riemannian geometry*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer, New York, 2006.
- [49] C. P. Rourke and B. J. Sanderson, *Introduction to piecewise–linear topology*, Springer–Verlag, New York–Heidelberg, 1972, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 69.
- [50] H. Schwetlick and M. Struwe, *Convergence of the Yamabe flow for “large” energies*, J. Reine Angew. Math. **562** (2003), 59–100.
- [51] S. Smale, *Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four*, Ann. of Math. (2) **74** (1961), 391–406.
- [52] ———, *On the structure of manifolds*, Amer. J. Math. **84** (1962), 387–399.

- [53] J. R. Stallings, *Polyhedral homotopy–spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 485–488.
- [54] T. Tao, *Perelman’s proof of the Poincaré conjecture: a nonlinear PDE perspective*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2006.
- [55] W. P. Thurston, *Three–dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **6** (1982), no. 3, 357–381.
- [56] ———, *Three–dimensional geometry and topology. Vol. 1*, Princeton Mathematical Series, vol. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Edited by Silvio Levy.
- [57] F. Waldhausen, *On irreducible 3–manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 56–88.
- [58] A. H. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math. **12** (1960), 503–528.
- [59] B. White, *Evolution of curves and surfaces by mean curvature*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), 2002, pp. 525–538.
- [60] J. H. C. Whitehead, *A certain open manifold whose group is unity*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **6** (1939), 268–279.
- [61] ———, *Certain theorems about three–dimensional manifolds (I)*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **5** (1939), 308–320.
- [62] R. Ye, *Global existence and convergence of Yamabe flow*, J. Diff. Geom. **39** (1994), no. 1, 35–50.
- [63] E. C. Zeeman, *The Poincaré conjecture for $n \geq 5$* , Topology of 3–manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962, pp. 198–204.