Quaderno n. 63

ISBN 978-88-7431-860-5

Il presente volume è stato pubblicato grazie al contributo di
COINOR Università "Federico II",

COINOR
Centro di Ateneo per la Comunicazione e l'Innovazione Organizzativa

del MIUR,

Ministero dell'Università e della Ricerca

Ministero dei beni e delle attività culturali e del turismo

MiBACT
Ministero dei beni e delle attività culturali e del turismo

dell'Istituto Banco di Napoli - Fondazione,

della Regione Campania,

REGIONE CAMPANIA

Ennio De Giorgi

Corso di Analisi Matematica

Scuola Normale Superiore di Pisa

A.A. 1991/92

Appunti redatti da Vincenzo Maria Tortorelli

a cura di Carlo Mantegazza e Vincenzo Maria Tortorelli

con un'appendice di Luigi Ambrosio

ACCADEMIA PONTANIANA 2016

Indice

Presentazione

In questo volumetto, accolto nella collana dei *Quaderni dell'Accademia Pontaniana*, di cui Ennio De Giorgi fu Socio dal 1988, sono presentati per la prima volta gli appunti delle lezioni del suo *Corso di Analisi Matematica* (tenuto alla Scuola Normale Superiore di Pisa nell'Anno Accademico 1991/92), presi di persona da Vincenzo Maria Tortorelli.

L'argomento principale è l'introduzione di un concetto generale di movimento geometrico di insiemi secondo la variazione (il *Quaderno* inoltre contiene un'appendice di Luigi Ambrosio sui vari approcci allora noti ai movimenti secondo la curvatura, suggerita a suo tempo dallo stesso De Giorgi).

Il lavoro di elaborazione e redazione è stato curato da Vincenzo Maria Tortorelli e Carlo Mantegazza, principalmente concentrato sulla presentazione delle idee e delle definizioni proposte da De Giorgi di concetti anche molto classici, ma rivisti alla luce della sua visione quanto mai generale e sempre innovativa.

Utili per l'omogeneità della presentazione dei capitoli iniziali sono state alcune note manoscritte di Giuseppe Buttazzo e il *Quaderno dell'Accademia Pontaniana* N.58, contenente gli appunti di un corso di teoria della misura tenuto da De Giorgi nel 1973/74 all'Università di Firenze a cura di Stefano Campi e Giuseppe Chiti.

Con questa pubblicazione si vuol rendere omaggio all'illustre e compianto consocio che aveva un forte legame scientifico con i colleghi matematici dell'Università di Napoli da lui frequentata nei primi anni cinquanta, in occasione dei suoi primi incontri con Renato Caccioppoli e poi dalla metà degli anni settanta fino alla sua scomparsa avvenuta il 25 ottobre 1996.

Alla base del *Quaderno* si colloca l'originale e profonda impostazione di De Giorgi della teoria degli "insiemi di perimetro finito" (che più tardi, dopo la tragica fine di Caccioppoli, egli avrebbe denominato "insiemi di Caccioppoli") che partiva dal problema dell'estensione ad un ambito il più generale possibile della validità della formula di Gauss–Green, e che ha condotto a risultati fondamentali di teoria geometrica della misura. In un lavoro sugli *Annali di Matematica* del 1954, De Giorgi introdusse la sua generalissima nozione di perimetro di un insieme misurabile dello spazio euclideo e dimostrò che tale perimetro è finito se e solo se vale una formula di tipo Gauss–Green, inoltre, che in tal caso esso coincide con la misura della frontiera orientata dell'insieme, secondo Caccioppoli. Tali risultati lo portarono nel 1958 alla dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica pubblicata su una *Memoria Lincea*.

La relazione su tale nota fu fatta dallo stesso Caccioppoli ed è un prezioso documento:
"Il Dott. Ennio De Giorgi ha esposto in precedenti lavori ricerche approfondite intorno a una nozione generalissima, originariamente introdotta da Caccioppoli, di misura per la frontiera orientata di un insieme in uno spazio euclideo; misura chiamata dall'autore "perimetro dell'insieme". Queste ricerche ricevono nella presente Memoria una brillante applicazione alla proprietà isoperimetrica della ipersfera, che si riconosce sussistere entro la classe degli insiemi di perimetro finito. La dimostrazione è essenzialmente fondata su un notevole criterio di com-

pattezza, e su un teorema alquanto riposto relativo al confronto tra i perimetri di un insieme generico e di altro ottenuto mediante un procedimento di normalizzazione e simmetrizzazione rispetto ad un iperpiano. Il risultato è importante; ma soprattutto interessante è l'impostazione originale di questa ricerca, che inizia lo studio di un nuovo tipo di problemi variazionali isoperimetrici. La Commissione (costituita da Mauro Picone e Renato Caccioppoli) ritiene pertanto il lavoro del Dott. De Giorgi ben degno di essere accolto fra le Memorie dell'Accademia."

De Giorgi aveva già ottenuto nel 1956 quello che forse è stato il suo risultato più importante e cioè il teorema di continuità delle soluzioni di equazioni ellittiche a coefficienti discontinui. Per dare ancora un'idea della notevole considerazione che giovanissimo egli aveva nell'ambiente napoletano riportiamo i giudizi delle commissioni nazionali che gli conferirono due premi dell'Unione Matematica Italiana: il Premio Pomini (1956),
"La Commissione per il Premio Pomini, composta dai Proff. Mauro Picone, Giovanni Sansone e Renato Caccioppoli, ha preso in esame i lavori presentati dall'unico concorrente Ennio De Giorgi. Questi lavori (due dei quali note preventive) sono in numero di tredici. Nei primi due, del 1950 (Rend. Acc. Lincei, s. VIII, vol. VII) sono studiate alcune questioni di compattezza: la costruzione di un elemento di accumulazione per una famiglia compatta di insiemi di uno spazio metrico, e la formulazione di un criterio di compattezza nello spazio delle successioni sotto condizioni molto generali per la metrica.
Due altri concernono il Calcolo delle Variazioni: il primo (Rend. Acc. di Napoli, s. IV, vol. XIX, 1952) contiene un'accurata analisi di un problema di minimo, con estremi variabili, per un integrale quadratico nella derivata di una funzione di una variabile; nel secondo (Rend. Acc. Lincei, s. VIII, vol. XII, 1952) viene considerato l'analogo problema, nel caso di estremi fissi per un vettore, cioè per un sistema di funzioni.
Una Nota (Rend. Acc. Lincei, s. VIII, vol. XIX, 1952) è dedicata ad una osservazione sulla teoria dell'integrazione nella trattazione di Picone.
Una Nota sulle serie di polinomi omogenei (Atti Acc. Torino, vol. 87, 1953) contiene un'elegante dimostrazione dell'analiticità nel campo reale della somma di una simile serie uniformemente convergente.
In due lavori sul problema di Cauchy per equazioni lineari paraboliche a derivate parziali, nel caso non analitico (Rend. di Matematica, s. V, vol. XIV, 1953; Annali di Matematica, s. VI, tomo XL, 1955), è dapprima costruito un esempio estremamente ingegnoso di un problema per il quale viene a mancare l'unicità della soluzione; ed è dimostrato poi un teorema di unicità di cui l'esempio predetto mette in evidenza la larga generalità.
In una nota sul problema misto per le equazioni ellittiche (Ricerche di Matematica, vol. II, 1953) viene fornito con mezzi semplicissimi un esempio di mancata unicità, sotto condizioni abbastanza restrittive.
Di grande interesse, e contenenti alcuni risultati importanti, sono due Memorie (Annali di Mat., s. IV, tomo XXXVI, 1954; Ricerche di Mat., vol. IV, 1955) su una nuova teoria sulla misura degli insiemi $(r-1)$–dimensionalmente orientati in uno spazio ad r dimensioni. L'idea originalissima che ne è alla base è quella di partire dalla formula di Gauss–Green come istanza a priori, per giungere ad una definizione analitica della misura vettoriale, funzione additiva d'insieme: questa fornisce la misura assoluta con la propria variazione totale. Con tale procedimento si stabiliscono proprietà fondamentali, alquanto riposte, della misura; sono poi studiate le proprietà locali (asintotiche) degli insiemi di misura finita, e viene data una nuova definizione della misura come estremo superiore delle misure di insiemi contenuti nel dato ed aventi una certa regolarità (contingente iperpiano continuo). Questi risultati sono suscettibili di ulteriori larghi sviluppi e di interessanti applicazioni a nuovi problemi di tipo isoperimetrico.
La commissione è unanime nel giudicare il De Giorgi un ricercatore singolarmente dotato, ricco d'inventiva e che rivela già un notevole spirito costruttivo; lo ritiene pertanto pienamente

meritevole del Premio Pomini 1956."
ed il Premio Caccioppoli (1960),
"La Commissione per il Premio Caccioppoli composta da: Alessandro Terracini, Beniamino Segre, Giuseppe Scorza Dragoni, Carlo Miranda e Gianfranco Cimmino rileva che il Prof. De Giorgi ha svolto un'attività scientifica di altissimo pregio, conseguendo nel 1958 una cattedra universitaria.
In ordine di tempo sono particolarmente da ricordare i suoi lavori sul problema di Cauchy in cui una tecnica nuova ed assai ingegnosa viene applicata sia per conseguire un teorema di esistenza che per dare degli esempi di non esistenza delle soluzioni.
Di eccezionale interesse sono poi i lavori sulla nozione di perimetro sulla frontiera di un dominio, in cui il De Giorgi ha ripreso, con procedimenti profondamente originali, alcuni precedenti studi del Caccioppoli, pervenendo a nuovi risultati che gli hanno permesso di dimostrare la proprietà isoperimetrica dell'ipersfera nella classe dei domini di perimetro finito.
Infine una sua profonda memoria sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli, rivolta allo studio di un problema da anni insoluto, è stata giustamente apprezzata in campo internazionale fornendo a numerosi autori il punto di partenza per una nuova serie di ricerche sulle equazioni ellittiche.
I risultati ottenuti dal Prof. De Giorgi dimostrano che egli è un analista di grande talento e lo pongono in primo piano fra i giovani matematici italiani.
Per queste ragioni la Commissione è stata unanime nel decidere di conferire il Premio Renato Caccioppoli per il 1960 al Prof. Ennio De Giorgi."

Venendo al contenuto del *Quaderno*, le lezioni dalla I alla IV riguardano nozioni e risultati fondamentali della teoria geometrica della misura e del calcolo delle variazioni: le proprietà della misura di Hausdorff (che ha un ruolo centrale in tutta la trattazione), la formulazione debole di problemi di frontiera libera (con peso) con relativi teoremi di esistenza basati sulla teoria degli insiemi di perimetro finiti e delle funzioni BV (discusse con le loro proprietà fini), i concetti di semicontinuità, rilassamento, convergenza debole e rappresentazione di funzionali integrali. Le lezioni dalla V alla VII contengono cenni di teoria della misura astratta e una pregevole estensione/generalizzazione del teorema di Radon–Nikodym. Infine, le lezioni dalla VIII alla X considerano congetture e risultati sull'unicità dei problemi di minimo e sull'evoluzione di frontiere libere, giungendo all'importante nozione di variazione (con particolare attenzione verso la variazione secondo la curvatura media). L'Appendice consiste di un contributo di grande interesse, dovuto a Luigi Ambrosio, e contiene numerose indicazioni bibliografiche che rendono ancora più prezioso il *Quaderno* per gli studiosi che vorranno avvicinarsi alle teorie di De Giorgi, estremamente apprezzate da innumerevoli ricercatori italiani e stranieri che ancora oggi ne portano avanti i molteplici sviluppi.

Carlo Sbordone

Napoli, 29 novembre 2016

Introduzione

Tra i problemi del Calcolo delle Variazioni più “naturali”, uno dei più classici è il seguente problema isoperimetrico:

Problema. *Tra tutte le regioni dello spazio euclideo tridimensionale, determinare, se esistono, quelle che a parità di volume hanno frontiera di area minima.*

Gli sforzi per formulare e risolvere matematicamente, con grande generalità, in maniera moderna e rigorosa, molti problemi di questo tipo hanno portato ad analizzare e raffinare diversi concetti matematici riuniti sotto il nome di *Teoria Geometrica della Misura*.
Per tali argomenti il riferimento principale resta il profondo e difficile testo *Geometric Measure Theory* di Herbert Federer [19], mentre un'avvincente introduzione si può trovare in [37], ove vi sono cenni bibliografici per una letteratura intermedia, o in [30].

Lo svolgimento del corso seguirà il seguente schema: introdurremo in un primo tempo le definizioni strettamente necessarie per “formulare” i problemi più interessanti, quindi parleremo dei metodi per risolverli.

Notazioni e Convenzioni

- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; i limiti e gli estremi superiori ed inferiori di funzioni reali sono considerati in $\overline{\mathbb{R}}$;
- $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$;
- $\mathscr{L}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, è l'usuale misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$;
- l'integrazione rispetto a $\mathscr{L}^n$ viene denotata con $\int \, dx$;
- il prodotto scalare euclideo tra due elementi $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$, $\sum_i x_i y_i$, verrà indicato con $(x \cdot y)$;
- la norma di un elemento x, $\sqrt{(x \cdot x)}$, verrà indicata con $|x|$;
- una famiglia di sottoinsiemi di un insieme si dice σ–algebra se tutto l'insieme è un suo elemento e se è chiusa per unione numerabile e per complemento relativo;
- se $S = (T, \tau)$ è uno spazio topologico, indicheremo la σ–algebra dei boreliani (la minima σ–algebra che contiene gli insiemi aperti) con $\mathcal{B}(\tau)$, $\mathcal{B}(S)$, $\mathcal{B}$;
- se $S = (M, \delta)$ è uno spazio metrico, per $E \subseteq M$ con $\mathrm{diam}_S E$, $\mathrm{diam}_\delta E$, $\mathrm{diam}\, E$ si indica il diametro di E rispetto a δ, definito come il $\sup_{x,y \in E} \delta(x, y)$;

- se $S = (M, \delta)$ è uno spazio metrico, per $x \in M$ e $\rho \in \mathbb{R}^+$ con $B_\rho^S(x)$, $B_\rho^\delta(x)$, $B_\rho(x)$, si indica l'insieme degli elementi di M che hanno distanza da x minore strettamente di ρ;
- se $M = \mathbb{R}^n$ e la distanza è quella euclidea, allora $B_\rho^S(x)$ verrà indicata con $B_\rho^n(x)$ oppure $B_\rho(x)$;
- con α_n Ci indica la misura di Lebesgue di $B_1^n(0)$;
- se r è un numero reale positivo si estende α con
$$\alpha_r = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} \quad \text{ove} \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt;$$
- se B è un sottoinsieme di un insieme ambiente A, con $\mathbb{1}_B$ si indica la funzione caratteristica di B in A, che assume il valore 1 nei punti di B e il valore 0 nei punti di $A \setminus B$;
- le famiglie degli aperti e dei compatti di uno spazio topologico S si indicano con $\mathcal{A}(S)$ e $\mathcal{K}(S)$, nel caso di $\mathbb{R}^n$ con l'usuale topologia euclidea si useranno le notazioni $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$;
- se $B \subseteq A$ sono sottoinsiemi di uno spazio topologico con $B \Subset A$ si intende che la chiusura di B è contenuta in A ed è compatta;
- se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$, con $C^\omega(A)$ si indica lo spazio delle funzioni analitiche in A;
- se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $\alpha \in \mathbb{R}^+$, con $C^\alpha(A)$ si indica l'insieme delle funzioni definite su A differenziabili con continuità sino all'ordine della parte intera di α e con derivate di ordine massimo (localmente) hölderiane di esponente pari alla parte decimale di α;
- se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$, con $C^\infty(A)$ si indica lo spazio delle funzioni definite in A ed ivi infinitamente differenziabili;
- se B è un sottoinsieme di uno spazio topologico con ∂B si indica l'insieme dei punti di frontiera di B e con $\overline{B}$ la chiusura di B ovvero $B \cup \partial B$;
- si denota con $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ la σ–algebra dei sottinsiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili secondo Lebesgue, che coincidono con gli insiemi misurabili per $\mathcal{H}^n$;
- se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $\alpha \in \mathbb{R}^+$, con $C_0^\alpha(A)$ si indica lo spazio delle funzioni $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto contenuto in A;
- con $\|\cdot\|_{L^\infty(A)}$ si indica la norma definita da $\|u\|_{L^\infty(A)} = \mathrm{supess}_A |u|$;
- con $\mathbb{S}^{n-1}$ si indica $\partial B_1^n(0)$;
- se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, con $\overline{C}_0^\alpha(A)$ ovvero $C_0^\alpha(\overline{A})$, si denota il completamento di $C_0^\alpha(A)$ rispetto alla convergenza uniforme di tutte le derivate fino all'ordine massimo;
- se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$, con $\mathcal{D}^*(A)$ si indica lo spazio delle distribuzioni, duale dello spazio vettoriale topologico localmente convesso completo $C_0^\infty(A)$ munito della topologia più fine che renda continue le immersioni $C_0^\infty(\overline{B}) \hookrightarrow C_0^\infty(A)$, con $B \Subset A$ aperto.
  Risulta che i funzionali di $\mathcal{D}^*(A)$ vengono a coincidere con i funzionali lineari su $C_0^\infty(A)$ che sono sequenzialmente continui rispetto alla convergenza per successioni di funzioni $C_0^\infty(A)$ aventi tutte supporti contenuti nello stesso $B \Subset A$ e convergenti uniformemente in $\overline{B}$ con tutte le loro derivate.

- se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$, si dice che una funzione di insieme μ, definita sui sottoinsiemi boreliani di A, è una misura di Radon se esistono due misure di Borel su A, μ_1 e μ_2, positive, finite sui compatti, tali che per ogni $B \subseteq A$ boreliano a chiusura compatta in A, si abbia $\mu(B) = \mu_1(B) - \mu_2(B)$. Si dirà misura vettoriale di Radon su A una funzione di insieme a valori in $\mathbb{R}^k$ le cui componenti siano misure di Radon su A. In particolare ogni misura di Radon con segno è una misura vettoriale di Radon. Si dirà variazione totale di una misura vettoriale di Radon su A, μ, la misura di Borel indicata con $|\mu|$, che sia la minima misura di Borel tale che $\forall B \subseteq A$ si abbia $|\mu(B)| \leq \nu(B)$;

- se $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, $C_0^0(A)$ munito della topologia localmente convessa più fine che renda continue le immersioni $C_0^0(\overline{B}) \hookrightarrow C_0^0(A)$, con $B \Subset A$ aperto, è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso completo, il cui duale è rappresentato dallo spazio delle misure di Radon in A con segno, aventi cioè variazione totale finita sui sottoinsiemi compatti di A;

- se f è una funzione definita su $\mathbb{R}^n$, e g è una funzione definita su $A \subseteq \mathbb{R}^n$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ per cui esiste finito $\int_A |f(x-y)||g(y)|\,dy$, con $f * g(x)$ si indica il valore $\int_A f(x-y)g(y)\,dy$;

- se $(f_i)_{i\in I}$ è una famiglia di funzioni a valori reali con $\bigvee_{i\in I} f_i$ si indica la funzione $\sup_{i\in I} f_i$;

- se $I = \{i_1 \ldots i_k\}$ è un insieme finito si userà anche la notazione $f_{i_1} \vee \cdots \vee f_{i_k}$;

- se $B \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mathrm{co}(B)$ si indica il convessificato dell'insieme B, ovvero l'insieme dei punti x di $\mathbb{R}^n$ esprimibili come combinazione convessa di elementi di B:
$$\mathrm{co}(B) = \left\{ x = \lambda_1 \cdot b_1 + \cdots + \lambda_k \cdot b_k, \text{ con } b_i \in B \text{ e } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0 \right\},$$
con $\overline{\mathrm{co}}(B)$ si indica la chiusura di $\mathrm{co}(B)$;

- se $\alpha \in \{-\infty, +\infty\}$ si porrà $\alpha \cdot 0 = 0$;

- se L è un ordinamento totale con massimo e minimo si porrà $L - \inf \emptyset = \max L$ e $L - \emptyset = \min L$. In particolare, considerando il vuoto come sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ si ha $\inf \emptyset = +\infty$;

- se φ è una funzione a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ si dicono parte positiva di φ e parte negativa di φ e si denotano rispettivamente con φ^+ e φ^-, le funzioni $\varphi \vee 0$ e $(-\varphi) \vee 0$;

- sia $\mathcal{D}$ un insieme, si definisce $\bigcup_{\mathcal{D}} = \bigcup_{A\in\mathcal{D}} A = \{x \,:\, \exists A \in \mathcal{D} \text{ tale che } x \in A\}$;

- se α è una funzione di insieme di dominio $\mathcal{D}$, quando non sorgano ambiguità, si userà indifferentemente la notazione $\alpha \llcorner S$ per indicare le seguenti due funzioni di insieme: se $S \subseteq \bigcup_{\mathcal{D}}$ la funzione β definita da $\beta(A) = \alpha(A \cap S)$, detta *traccia* di α su S, qualora $A \cap S \in \mathcal{D}$; la funzione di insieme *restrizione* di α a $S \cap \mathcal{D}$, se $S \subseteq \mathscr{P}(\bigcup_{\mathcal{D}})$;

- si dice che una funzione di insieme positiva α è *assolutamente continua* rispetto ad una funzione di insieme positiva β se negli insiemi ove β assume valore nullo anche α si annulla;

- una funzione di insieme positiva α si dice *singolare* rispetto ad una funzione crescente di insieme positiva β su un insieme X appartenente ai loro domini, se: esiste un insieme $A \subseteq X$ tale che $\alpha(A) = \alpha(X)$ e $\beta(A) = 0$;

- due funzioni crescenti di insieme positive α e β si dicono *mutuamente singolari* su di un insieme X appartenente ai loro domini se: esiste una partizione di X in due sottoinsiemi A e B tali che $\alpha(A) = \alpha(X)$, $\beta(B) = \beta(X)$, $\alpha(B) = \beta(A) = 0$;

- una funzione di insieme positiva α si dice *dispersa* rispetto ad una funzione crescente di insieme positiva β su X, se per ogni $A \subseteq X$, appartenente ai loro domini, si ha $\alpha(A) = 0$ o $\beta(A) = +\infty$. Se $\alpha = \beta$ si dirà semplicemente *dispersa su* X;

- una funzione di insieme positiva α di dominio $\mathcal{D}$ si dice σ–*finita* su un insieme X se esiste una successione $\{A_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{D}$ tali che $\alpha(A_h) < +\infty$ e $X \subseteq \bigcup A_h$. Se $X = \bigcup_{\mathcal{D}}$ ed α è σ–finita su X, si dirà semplicemente che α è σ–finita;

- si indica con $\mathcal{P}er_n(2\pi)$ lo spazio delle funzioni definite in $\mathbb{R}^n$, continue, periodiche di periodo 2π in ogni variabile: ovvero le funzioni f continue tali che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $h \in \mathbb{Z}^n$ si abbia $f(x) = f(x + 2\pi h)$;

- se $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n)$ si indica con $\mathcal{O}(A)$ lo spazio delle funzioni olomorfe su A, ovvero differenziabili in senso complesso;

- con Id_n, o semplicemente con Id, si indica la funzione identica di $\mathbb{R}^n$;

- se φ è una funzione definita su uno spazio topologico a valori in $\mathbb{R}^n$, con $\operatorname{supp}\varphi$ si denota la chiusura dell'insieme $\{x : \varphi(x) \neq 0\}$;

- se v è una funzione con $\operatorname{dom} v$ se ne indica il dominio e con $\operatorname{cod} v$ il codominio, ossia l'insieme dei valori assunti da v; con $v|_E$ si indica la restrizione di v all'insieme E, ovvero la funzione di dominio $E \cap \operatorname{dom} v$ con valore in ogni punto uguale a v;

- se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ con A° si indica l'insieme dei punti interni di A;

- se Ω è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ si scrive $A \Subset \Omega$ se la chiusura di A in $\mathbb{R}^n$ è un insieme compatto contenuto in Ω;

- se $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathcal{FB}(E)$ si indica lo spazio delle funzioni misurabili per $\mathcal{B}(E)$, con $\mathcal{MB}(E)$ si indica l'insieme delle misure non negative definite su $\mathcal{B}(E)$;

- se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ con δ_{x_0} si indica la misura di massa unitaria concentrata nel punto x_0: $\delta_{x_0}(B) = 1$ se $x_0 \in B$, 0 altrimenti;

- se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\rho > 0$ con A_ρ si indica l'intorno tubolare aperto di raggio ρ dell'insieme A:
$$\{x : \ \operatorname{dist}(x, A) < \rho\};$$

- se A è aperto e $\lambda < 0$ con A_λ si indica l'insieme $A \cap (\partial A)_{-\lambda}$;

- se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ si indica lo spazio delle misure boreliane positive finite sui compatti con $\mathcal{MB}(\Omega)$;

- se γ è una funzione continua da $[a, b]$ nello spazio topologico X, con $[\gamma] \subseteq X$ si indica la sua immagine, ovvero la curva sostegno della parametrizzazione γ;

- se M è una matrice $n \times k$, con M_i, $1 \leq i \leq n$, si indica la i–esima riga e con M^j, $1 \leq j \leq k$, la j–esima colonna di M;

- se $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$ con $a \otimes b$ si indica la matrice di componenti $a_i \cdot b_j$;

- se $E \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ per $t \in \mathbb{R}$ si indica con E_t l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : \ (x, t) \in E\}$.

Lezione I

1.1 Misure di Hausdorff

Un concetto fondamentale in teoria geometrica della misura è quello di misura di Hausdorff.

Definizione 1.1.1. *Sia $h > 0$ un numero reale, $S = (M, \delta)$ uno spazio metrico, $E \subseteq M$. Si definisce h–misura di Hausdorff di E il limite*

$$\mathcal{H}^h_\delta(E) = \mathcal{H}^h_S(E) = \mathcal{H}^h(E) = 2^{-h}\alpha_h \lim_{\rho \to 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \big(\operatorname{diam} E_i\big)^h \,:\, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ \operatorname{diam} E_i < \rho \right\},$$

ove si intende il limite in $\overline{\mathbb{R}}^+$.
Se $h = 0$ ed E è un insieme finito, $\mathcal{H}^0(E)$ è, per definizione, il numero di elementi di E, altrimenti si impone $\mathcal{H}^0(E) = +\infty$.

Osservazione 1.1.2. Una misura di Hausdorff è una funzione crescente rispetto all'inclusione di insiemi e l'insieme vuoto ha sempre misura di Hausdorff nulla.

Esercizio 1.1.3.
Se $\mathcal{H}^h(E) < +\infty$ allora per $k > h$ si ha $\mathcal{H}^k(E) = 0$.
Se $\mathcal{H}^h(E) > 0$ allora per $k < h$ si ha $\mathcal{H}^k(E) = +\infty$.

Osservazione 1.1.4. Il testo [19] è completo e ricco di informazioni sulle misure di Hausdorff e il loro uso nei principali problemi di teoria geometrica della misura; un riferimento classico per gli aspetti più teorici delle misure di Hausdorff è [41]; una presentazione abbastanza elementare e finalizzata ai problemi qui considerati si trova, per esempio, in [37] e in [17].

Le misure di Hausdorff intervengono in svariate aree della matematica. Alcuni esempi possono essere i seguenti: danno senso allo studio di problemi di regolarità parziale per soluzioni di equazioni differenziali, ovvero "soluzioni deboli" di una data equazione alle derivate parziali, per le quali si cerca di dimostrare la regolarità C^k al di fuori di insiemi di misura di Hausdorff nulla. In particolare per le equazioni di Navier–Stokes [9] e per i problemi a "frontiera libera". Un secondo settore è quello della teoria del potenziale [1], ove le misure di Hausdorff insieme al concetto di capacità giocano un ruolo fondamentale. Inoltre le misure di Hausdorff forniscono in maniera abbastanza diretta un primo concetto di dimensione frazionaria, appunto la dimensione di Hausdorff, che negli ultimi decenni è stato analizzato e specializzato in diverse direzioni sia teoriche che applicative come nella teoria dei sistemi dinamici e in teoria della complessità [18, 31]. Per finire questo breve cenno non va dimenticato che tale strumento matematico è anche classicamente usato in teoria dei numeri [41].

Esercizio 1.1.5. Se $h > 0$ ed $n > 0$ sono due numeri interi allora non si può ricoprire $\mathbb{R}^{n+h}$ con una famiglia numerabile di insiemi ognuno con misura $\mathcal{H}^h$ finita.

Definizione 1.1.6. *Si definisce dimensione di Hausdorff di E il numero reale*

$$\mathcal{H}\text{–}\dim(E) = \inf\{t > 0 \,:\, \mathcal{H}^t(E) = 0\}.$$

Osservazione 1.1.7. Dall'Esercizio 1.1.3 si può ricavare che se s è strettamente minore di $\mathcal{H}\text{–}\dim(E)$ allora $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$, mentre se è strettamente maggiore si ha $\mathcal{H}^s(E) = 0$.

Diamo ora alcune proprietà delle misure di Hausdorff, sulla cui dimostrazione torneremo in seguito.

Proprietà H.1 (Numerabile subadditività). *Se* $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ *allora*

$$\mathcal{H}^h(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^h(E_i).$$

Osservazione 1.1.8. Dall'Osservazione 1.1.2 e dalla proprietà H.1 si ha che una misura di Hausdorff è, come usualmente definita (vedi [25] e la Definizione 5.2.31), una misura esterna.

Proprietà H.2 (Misurabilità secondo Caratheodory dei boreliani). *Se* $B \in \mathcal{B}(M)$ *e* $E \subseteq M$ *allora*

$$\mathcal{H}^h(E \cap B) + \mathcal{H}^h(E \setminus B) = \mathcal{H}^h(E).$$

Osservazione 1.1.9. Dall'Osservazione 1.1.2 e dalle proprietà H.1 e H.2 si deduce che le misure di Hausdorff ristrette alle famiglie dei boreliani sono numerabilmente additive.

Proprietà H.3. *Se* φ *è una funzione* λ*–lipschitziana da* E*, sottoinsieme di uno spazio metrico* $S = (M, \delta)$*, in un altro spazio metrico* $S' = (M', \delta')$*, i.e.* $\delta'(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda\delta(x, y)$ *per ogni* $x, y \in E$*, allora*

$$\mathcal{H}^h_S(\varphi(E)) \leq \lambda^h \mathcal{H}^h_{S'}(E).$$

Esercizio 1.1.10. Le misure di Hausdorff su $\mathbb{R}^n$ sono invarianti per traslazione.
Se φ è un'omotetia di autovalore λ su $\mathbb{R}^n$ allora per ogni $h \geq 0$ e per ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ si ha $\mathcal{H}^h(\varphi(E)) = |\lambda|^h \mathcal{H}^h(E)$.

Proprietà H.4.

$$\mathcal{H}^h([0, 1]^h) = 1.$$

Utilizzando le proprietà H.1, H.2, H.4 e il precedente esercizio si dimostra il seguente fatto:

Esercizio 1.1.11. Se $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ allora $\mathcal{H}^n(B) = \mathscr{L}^n(B)$.

Proprietà H.5 (Regolarità esterna). *Per ogni sottoinsieme* E *esiste una successione di aperti* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *ognuno contenente* E *tale che*

$$\mathcal{H}^h(E) = \mathcal{H}^h\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big).$$

Esercizio 1.1.12. Se E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathcal{H}^n(E) = \mathscr{L}^{*n}(E)$.
Si ricorda che $\mathscr{L}^{*n}(E)$ è la misura esterna di Lebesgue di E, che è definita come estremo inferiore delle serie degli ipervolumi dei plurirettangoli che siano un ricoprimento numerabile di E.

Proprietà H.6 (Formula dell'area). *Siano* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^h)$*,* φ *una funzione lipschitziana da* B *in* $\mathbb{R}^n$*,* $G(x)$ *la matrice* $h \times h$ *di componenti* $\big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\big)$ *e* $\nu(y) = \mathcal{H}^0(\varphi^{-1}(\{y\}))$*.*

Si ha allora

$$\int_B \sqrt{\det G(x)}\, d\mathcal{H}^h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \nu(y)\, d\mathcal{H}^h(y).$$

Osservazione 1.1.13. In particolare se $h > n$, allora $\det G$ è $\mathcal{H}^h$–quasi ovunque nullo. Se φ è un'applicazione lineare iniettiva, $h \leq n$ e $B = \varphi^{-1}(B_1^n(0))$ si ha $\nu \equiv 1$ sull'immagine di φ e B è l'ellissoide generato da G:

$$B = \varphi^{-1}\big(\{y \in \mathbb{R}^n \,:\, |y| \leq 1\}\big) = \left\{x \in \mathbb{R}^h \,:\, \sum_{i,j=1}^{h} G_{ij}x_i x_j \leq 1\right\}.$$

In questo caso la proprietà H.6 si ridurrebbe a

$$\sqrt{|\det G|}\mathcal{H}^h(B) = \mathcal{H}^h(B_1^h(0)),$$

e si ritroverebbe quindi la classica formula del volume degli ellissoidi.

Per dimostrare la formula dell'area sono richieste diverse proprietà di differenziabilità delle funzioni lipschitziane. I fatti principali sono elencati nei seguenti enunciati.

Teorema 1.1.14. *Se $E \subseteq \mathbb{R}^h$ e φ è una funzione λ–lipschitziana definita su E a valori in $\mathbb{R}^n$ allora può essere estesa a tutto $\mathbb{R}^h$ con una funzione lipschitziana a valori in $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 1.1.15. *Se φ è una funzione lipschitziana da $\mathbb{R}^h$ in $\mathbb{R}^n$ allora è differenziabile in $\mathscr{L}^h$–quasi ogni punto. (Teorema di Rademacher [48, Teorema 2.2.1]).*

Teorema 1.1.16. *Se φ e ψ sono funzioni lipschitziane che coincidono su un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^h$ allora per $\mathcal{H}^h$–quasi ogni $x \in E$ si ha l'uguaglianza dei loro differenziali:*

$$d\varphi(x) = d\psi(x).$$

Quest'ultimo enunciato può essere precisato e rafforzato come segue.

Definizione 1.1.17. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^h$, $x \in \mathbb{R}^h$ e $\sigma \in [0,1]$. Si dice che E ha densità σ in x, rispetto alla misura di Lebesgue, se*

$$\exists \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\mathscr{L}^h(B_\rho(x) \cap E)}{\mathscr{L}^h(B_\rho(x))} = \sigma.$$

L'insieme dei punti in cui E ha densità σ si denota con E_σ.

Teorema 1.1.18. *Se φ e ψ sono funzioni lipschitziane che coincidono su un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^h$, per ogni $x \in E_1$ si ha*

$$\exists\, d\varphi(x) \text{ se e solo se } \exists\, d\psi(x),$$

inoltre se i due differenziali esistono sono uguali.

Osservazione 1.1.19. Per ottenere la tesi del Teorema 1.1.18, alla condizione che E abbia densità 1 in $x \in E$, si può sostituire la condizione più debole

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho} \sup_{z \in B_\rho(x)} \operatorname{dist}(z, E) = 0. \tag{1.1.1}$$

Osservazione 1.1.20. Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^h$, $x \in E$ e $\varphi(y) \equiv \operatorname{dist}(y, E)$, la condizione (1.1.1) è equivalente alla differenziabilità di φ in x e alla condizione $d\varphi(x) = 0$. Infatti, in questo caso, ponendo $\psi \equiv 0$ si riotterrebbe la tesi del Teorema 1.1.18.

Avendo introdotto la misura di Hausdorff possiamo enunciare i due teoremi che risolvono il problema isoperimetrico in questo quadro teorico.

Teorema 1.1.21. *Fissati $n \in \mathbb{N}^*$ e $c \in \mathbb{R}^+$ allora esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che realizza il*

$$\min\big\{\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) \,:\, E \subseteq \mathbb{R}^n,\ \mathcal{H}^n(E) = c\big\}. \tag{1.1.2}$$

Teorema 1.1.22. *Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ realizza il minimo* (1.1.2) *se e solo se esiste una sfera B di $\mathbb{R}^n$ tale che*

$$\mathcal{H}^n(E \triangle B) = 0,\ \ \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \triangle \partial B) = 0.$$

Osservazione 1.1.23. Sono state enunciate e dimostrate diverse proprietà isoperimetriche per la sfera e la ipersfera in differenti contesti. Come accennato preliminarmente, quella presentata sembra una delle ambientazioni più generali.

Lezione II

2.1 Una Classe di Problemi di Frontiera Libera

Diversi sono i problemi correttamente formulabili grazie alla misura di Hausdorff e più sofisticati dei problemi isoperimetrici. Nel seguito ci occuperemo di una particolare classe di questi problemi, interessanti per la loro interpretazione geometrica (cfr. [33,34]), che sono risolti grazie al seguente teorema:

Teorema 2.1.1. *Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ di misura n–dimensionale finita e $f \in L^n(A)$. Allora esiste un sottoinsieme di A che realizza:*

$$\min\left\{\int_E f(x)\,dx + \mathcal{H}^{n-1}(A \cap \partial E) \ : \ E \subseteq A\right\}. \tag{2.1.1}$$

Osservazione 2.1.2. Il problema si rivela interessante quando la funzione f non sia di segno costante sull'aperto A.

In effetti se $f \geq 0$ su A allora la grandezza da minimizzare è non negativa e quindi $E = \emptyset$ dà una soluzione al problema. D'altra parte se $f \leq 0$ su A il primo addendo ed il secondo addendo assumono entrambi il valore minimo quando $E = A$.

Se invece la funzione f cambia segno in A e ha variazione abbastanza grande tra valori positivi e valori negativi, c'è da aspettarsi che se E fosse soluzione l'insieme $A \cap \partial E$ "regolarizzi" l'interfaccia ove f cambia segno: effettivamente il termine integrale se minimizzato forza l'insieme E ad occupare tutta e sola la zona ove la funzione f è negativa, "spaccando" così A, d'altronde il termine $\mathcal{H}^{n-1}(A \cap \partial E)$ penalizza la possibilità che $A \cap \partial E$ aderisca ad un andamento possibilmente frastagliato della zona di cambiamento di segno di f.

Osservazione 2.1.3. Sempre a questo proposito va osservato che se $f(x) = \lambda g(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e la funzione g si annulla al più su di un insieme di misura n–dimensionale nulla, per λ tendente all'infinito l'insieme minimizzante E_λ tenderebbe all'insieme di punti di A ove la funzione g è strettamente negativa.

La dimostrazione del Teorema 2.1.1 segue un percorso relativamente lungo. Tale iter strutturerà gran parte del corso. Gli ingredienti principali riguardano la *teoria degli insiemi di perimetro finito* e la *teoria delle funzioni a variazione limitata*; via via si introdurranno le tecniche necessarie, rimandando per alcuni fatti dimostrativi alla bibliografia.

La strategia per la dimostrazione sarà del seguente tipo: grazie al concetto di insieme di perimetro finito si passerà dal problema classico (2.1.1) ad un problema "debole"; quindi si dimostrerà l'esistenza di punti di minimo per il problema debole in grande generalità, infine rafforzando le ipotesi si otterrà da una soluzione debole una soluzione del problema iniziale.

I primi due punti di questa strategia dimostrativa si innestano nel filone del rilassamento di funzionali.

Definizione 2.1.4. *Siano $D \subseteq X$ e $F : D \to \overline{\mathbb{R}}$. Se su X è definita una topologia si definisce* rilassato *di F la massima funzione inferiormente semicontinua definita sulla chiusura di D e minore eguale ad F su D.*
Se su X interessa solo una nozione di convergenza sequenziale si definisce rilassato sequenziale *di F la massima funzione inferiormente sequenzialmente semicontinua definita sulla chiusura sequenziale di D e minore eguale ad F su D.*

Osservazione 2.1.5. Se per la topologia (nozione di convergenza sequenziale) scelta vi è compattezza (risp. compattezza sequenziale) si ottiene l'esistenza di minimi per il funzionale rilassato.

Nel presente contesto, in questo senso sono da intendersi le nozioni di soluzione debole e di formulazione debole di un problema di minimo.
L'ultimo punto di questa procedura di dimostrazione può essere inquadrato come teorema di regolarizzazione: i punti di minimo debole formano una classe entro la quale si trova un rappresentante che risolve il problema iniziale.

2.2 Perimetri e Formulazione Debole del Problema

In vista di quanto detto e avendo a disposizione la nozione di misura di Hausdorff una possibile definizione di perimetro è la seguente:

Definizione 2.2.1. *Sia A un qualsiasi aperto di $\mathbb{R}^n$, ed E un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, si definisce perimetro di E in A:*

$$\mathbf{P}(E, A) = \inf \Big\{ \liminf_{h\to\infty} \mathcal{H}^{n-1}(A \cap \partial E_h) \ : \ \forall K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n),\ K \subseteq A,\ \lim_{h\to\infty} \mathcal{H}^n(K \cap (E_h \triangle E)) = 0 \Big\}.$$

Osservazione 2.2.2. La condizione di convergenza degli insiemi, data nella definizione, è equivalente, nel caso di misurabilità, alla convergenza in $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ delle funzioni caratteristiche $\mathbb{1}_{E_h}$ alla funzione caratteristica $\mathbb{1}_E$. Si sottolinea che gli insiemi E_h sono del tutto arbitrari, in particolare né lisci, né poliedrali.

Osservazione 2.2.3. Il perimetro di E in A è il rilassato del funzionale $F(A) = \mathcal{H}^{n-1}(A \cap \partial E)$ rispetto alla convergenza $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ delle funzioni caratteristiche. In particolare, si ha che

$$\mathbf{P}(E, A) \leq \mathcal{H}^{n-1}(A \cap \partial E).$$

Si è ora in grado di enunciare il teorema che garantisce l'esistenza di soluzioni per una formulazione debole del problema (2.1.1), coinvolgendo piuttosto che la misura $(n-1)$–dimensionale dell'insieme ∂E, il perimetro di E. Tale teorema segue da un teorema di compattezza per la convergenza L^1_{loc}.

Teorema 2.2.4. *Sia A un qualsiasi sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $f \in L^1(A)$. Allora esiste un sottoinsieme di A che realizza:*

$$\min \Big\{ \int_E f(x)\,dx + \mathbf{P}(E, A) \ : \ E \subseteq A \Big\}. \tag{2.2.1}$$

Osservazione 2.2.5. Si osservi che gli insiemi minimizzanti sono definiti a meno di insiemi di misura n–dimensionale nulla.

Osservazione 2.2.6. L'ipotesi di regolarità sull'integranda f è più debole di quella richiesta per il Teorema 2.1.1, così come l'ipotesi sul dominio A; rafforzando le ipotesi su f si ha il

Teorema 2.2.7. *Se* $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$*, se* $f \in L^1(A) \cap L^n_{\mathrm{loc}}(A)$ *e se* E *risolve il problema di minimo debole* (2.2.1)*, allora il problema di minimo classico* (2.1.1) *è risolto dall'insieme dei punti di densità* 1 *di* E *in* A*:*

$$E_{1,A} = \left\{ x \ : \ \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^n\big((A \setminus E) \cap B_\rho(x)\big)}{\rho^n} = 0 \right\},$$

avendosi

$$\mathcal{H}^{n-1}(A \cap \partial E_{1,A}) = \mathbf{P}(E_{1,A}, A) = \mathbf{P}(E, A).$$

Osservazione 2.2.8. Vi è un parallelo tra le ipotesi via via più forti sull'integranda f e la maggior regolarità della frontiera topologica del rappresentante canonico degli insiemi minimizzanti. In [33, 34] la questione viene affrontata in dettaglio. Non si arriverà con questo corso a trattare completamente questo tipo di problemi. Enunciamo però il seguente teorema che descrive la situazione all'estremo della scala della regolarità:

Teorema 2.2.9. *Se* $f \in C^\infty(A)$ *(ovvero è analitica in* A*) ed* E *è minimizzante del problema* (2.2.1) *allora: se* $n < 8$ *l'insieme* $\partial E_{1,A}$ *è una varietà* C^∞ *(rispettivamente analitica) di dimensione* $n - 1$*; inoltre, se* $n \geq 8$ *l'insieme dei punti singolari di* $\partial E_{1,A}$*, come ipersuperficie* C^∞ *(rispettivamente analitica) ha dimensione di Hausdorff al più* $n - 8$*.*

Osservazione 2.2.10. Teoremi di questo tipo sono dimostrati in [19] e in [20], nel quadro di una teoria più ampia, non trattando solo regolarità di "ipersuperfici" ma anche problemi di regolarità per "varietà" di codimensione più alta. Dei riferimenti per la dimostrazione del Teorema 2.2.9 in un contesto più specifico possono essere [24, 33–35].

Osservazione 2.2.11. Si deve osservare che la teoria dell'esistenza del minimo per formulazioni deboli di problemi che coinvolgono oggetti di codimensione maggiore di 1 non risulta molto più complessa rispetto a quella per i perimetri. Comunque i teoremi di esistenza "debole", conseguiti con la teoria dei perimetri, possono in generale essere estesi al caso di codimensione maggiore di 1. Nei problemi di regolarizzazione la difficoltà cresce molto con l'aumentare della codimensione e della dimensione. In particolare, nello studio di problemi che coinvolgono oggetti di dimensione maggiore di 2 si viene a perdere la possibilità di usare metodi di parametrizzazione, molto utili per lo studio di curve e superfici, cfr. [21, 29, 40, 45, 47].

2.3 Una Nozione di Varietà Immersa e di Bordo Locale

Volendo enunciare problemi variazionali che coinvolgano codimensioni maggiori di 1, conviene introdurre alcune definizioni e notazioni che inquadrino la nozione di varietà immerse in spazi euclidei. Questo dovrebbe permettere in primo luogo una formulazione semplice di alcuni problemi variazionali, la cui trattazione potrà in seguito richiedere nozioni più complesse di teoria delle correnti o dei varifold [19, 21, 30, 37, 43, 44].

Iniziamo con il definire quando due insiemi qualunque, *immersi in diversi spazi euclidei* sono da considerarsi diffeomorfi.

Definizione 2.3.1. *Siano* $E \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $L \subseteq \mathbb{R}^m$*,* $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}^+ \cup \{\omega\}$*. Si definisce* $\mathcal{E}udiffC^\alpha(E, L)$ *l'insieme di coppie di funzioni* (φ, ψ) *per cui:*

$$\exists A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n),\ B \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^m) \ : \ \varphi \in \big[C^\alpha(A)\big]^m,\ \psi \in \big[C^\alpha(B)\big]^n,\ E \subseteq A,\ L \subseteq B$$

$$\&$$

$$\forall x \in E \ \varphi(x) \in L \,\&\, \psi(\varphi(x)) = x,$$
$$\forall y \in L \ \psi(y) \in E \,\&\, \varphi(\psi(y)) = y.$$

Nel caso si dirà che E ed L sono C^α–$\mathcal{E}udiffeomorfi$.

Osservazione 2.3.2. Si ha che $(\varphi|_E)^{-1} = \psi|_L$ e viceversa. Ma non è detto, nemmeno nel caso $n = m$, che ψ e φ coincidano una con l'inversa dell'altra su qualche aperto.

Esercizio 2.3.3. I sottoinsiemi di numeri reali $E = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$ ed $L = -E \cup E$ sono omeomorfi e C^0–eudiffeomorfi, non sono l'uno l'immagine dell'altro tramite un omeomorfismo tra due aperti che rispettivamente li contengano e non sono C^1–eudiffeomorfi.

Problema 2.3.4. *Se $n = m$, $\alpha \geq 1$ e $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}udiffC^\alpha(E, L)$, è vero che esistono due aperti A e B contenenti rispettivamente E ed L e un diffeomorfismo C^α tra A e B che trasformi E in L?*

Osservazione 2.3.5. Usualmente la nozione di diffeomorfismo viene formulata avendo gli enti in questione una propria struttura. Nella Definizione 2.3.1 si sottolinea invece il fatto che gli insiemi in oggetto siano immersi. Il termine $\mathcal{E}udiff$ è usato per ricordare che E ed L possono essere molto irregolari e risultino "diffeomorfi" solo in quanto parti di spazi $\mathcal{E}uclidei$!

La definizione ora data è preliminare alla seguente definizione di varietà immersa di dimensione h e regolarità α.

Definizione 2.3.6. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $h \geq 1$ un numero naturale ed $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}^+ \cup \{\omega\}$. Diremo che un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ è una varietà immersa, chiusa su Ω e ivi priva di bordo, di dimensione h e classe C^α e scriveremo $E \in V_hC^\alpha(\Omega)$, se:*

$$E \cap \Omega \supseteq \partial E \cap \Omega$$
$$\&$$
$$\forall x \in E \cap \Omega \quad \exists A \in \mathcal{A}(\Omega) \ \ \exists (\varphi, \psi) \ : \ x \in A, \ (\varphi, \psi) \in \mathcal{E}udiffC^\alpha(A \cap E, B_1^h(0)).$$

Definizione 2.3.7. *Si ha $E \in V_0C^\alpha(\Omega)$ se e solo se per ogni $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ l'insieme $E \cap K$ è finito.*

Osservazione 2.3.8. Si noti che se un sottoinsieme compatto E di $\mathbb{R}^n$ è in $V_hC^1(\mathbb{R}^n)$, localmente E è il luogo di zeri di una funzione a valori in $\mathbb{R}^{n-h}$ con gradiente di rango massimo, risultando così una varietà h–dimensionale di classe C^1 in senso classico.

Precisamente, per A come nella Definizione 2.3.6, se $(\varphi', \psi') \in \mathcal{E}udiffC^\alpha(E \cap A, B_1^h(0))$, con $\alpha \geq 1$, allora $\psi = \psi'$ è una funzione $\left[C^1(B_1^h(0))\right]^n$ con inversa $\varphi = \varphi'|_{E\cap A}$ localmente lipschitziana, per cui il differenziale di ψ deve essere iniettivo e quindi avere rango massimo. Fissato $x_0 \in E$, posto $y_0 = \varphi(x_0) \in B_1^h(0)$, siano $\nu_1, \ldots, \nu_{n-h}$ vettori di $\mathbb{R}^n$ in modo che $\frac{\partial\psi}{\partial y_1}(y_0), \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial y_h}(y_0), \nu_1, \ldots, \nu_{n-h}$ siano linearmente indipendenti.
Si definisce quindi la funzione localmente invertibile in $(y_0, z) \in B_1^h(0) \times \mathbb{R}^{n-h}$

$$\forall (y, z) \in B_1^h(0) \times \mathbb{R}^{n-h} \widetilde{\psi}(y, z) = \psi(y) + \sum_{i=1}^{n-h} z_i \nu_i.$$

Per qualche ρ la funzione $\widetilde{\psi}$ è invertibile in $A' = B_\rho(y_0) \times \mathbb{R}^{n-h}$, quindi $\Omega = \widetilde{\psi}\big(B_\rho(y_0) \times \mathbb{R}^{n-h}\big)$ è un intorno di x_0.
Chiamata $\widetilde{\varphi}$ l'inversa di $\widetilde{\psi}|_{A'}$, si ha $\widetilde{\varphi} \in \left[C^\alpha(\Omega)\right]^n$, $\widetilde{\varphi}_i = \varphi_i$ per $1 \leq i \leq h$ e

$$E \cap \Omega = \{x \in \Omega \ : \ \widetilde{\varphi}_{h+1} = 0 \ldots \widetilde{\varphi}_n = 0\}.$$

Una nozione strettamente collegata è quella del più grande aperto ove un dato sottoinsieme dello spazio euclideo è una varietà immersa nel senso della Definizione 2.3.6

Definizione 2.3.9. *Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce*

$$\mathcal{A}mbV_hC^\alpha(E) = \bigcup \big\{ A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \,:\, E \in V_hC^\alpha(A) \big\}.$$

Esercizio 2.3.10. Dato il carattere locale della Definizione 2.3.6 si provi che

$$E \in V_hC^\alpha\big(\mathcal{A}mbV_hC^\alpha(E)\big).$$

Definizione 2.3.11. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $h \geq 1$ un numero naturale, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}^+ \cup \{\omega\}$ e E ed L due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Si dice che E è una varietà immersa in Ω di dimensione h e classe C^α con bordo L, e che L è il bordo di dimensione $h-1$ e classe C^α di E nell'aperto Ω, se:*

$$E \cap \Omega \supseteq \partial E \cap \Omega,\; E \cap \Omega \supseteq L \cap \Omega$$

$$\&$$

$$\forall x \in E \cap \Omega\; \exists A \in \mathcal{A}(\Omega)\; \exists v \in \mathbb{R}^h\; \exists (\varphi, \psi) \textit{ tali che}$$

$$x \in A,\; (\varphi,\psi) \in \mathcal{E}udiffC^\alpha(A \cap E, B_1^h(0) \cap \overline{B}_1^h(v)),\; (\varphi,\psi) \in \mathcal{E}udiffC^\alpha(A \cap L, B_1^h(0) \cap \partial B_1^h(v)).$$

In tal caso si scriverà $(E, L) \in V_hB_{h-1}C^\alpha(\Omega)$.

Teorema 2.3.12. *Se $(E, L) \in V_hB_{h-1}C^\alpha(\Omega)$ allora $L \in V_{h-1}C^\alpha(\Omega)$.*

Osservazione 2.3.13.

$$E \in V_hC^\alpha(\Omega) \quad \text{se e solo se} \quad (E, \emptyset) \in V_hB_{h-1}C^\alpha(\Omega).$$

Introdurremo la seguente notazione

$$E \in V_hBC^\alpha(\Omega) \quad \text{se} \quad \exists L \;\; (E,L) \in V_hB_{h-1}C^\alpha(\Omega);$$

$$L \in VB_{h-1}C^\alpha(\Omega) \quad \text{se} \quad \exists E \;\; (E,L) \in V_hB_{h-1}C^\alpha(\Omega).$$

$$\mathcal{A}mb\,V_hB_{h-1}C^\alpha(E,L) = \bigcup \big\{ A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \,:\, (E,L) \in V_hB_{h-1}C^\alpha(A) \big\}.$$

Osservazione 2.3.14. Questioni più delicate richiedono maggiori ipotesi sull'aperto ambiente Ω. Per esempio sapere se ogni $L \in V_hC^\alpha(\Omega)$ appartiene a $VB_hC^\alpha(\Omega)$. Spesso questi problemi vengono collegati alla nozione di orientazione, vedi [21].

Lezione III

3.1 Frontiere Libere con Peso

Il Problema (2.1.1) presentato precedentemente può essere modificato come segue:

Teorema 3.1.1. *Siano g e f due funzioni definite su $\mathbb{R}^n$ tali che*

$$f \in L^n_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad g \in C^0(\mathbb{R}^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ g(x) \geq 1, \quad \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

allora esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che realizza

$$\min\left\{ \int_E f(x)\,dx + \int_{\partial E} g(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}(x) \ : \ E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \right\}. \tag{3.1.1}$$

Osservazione 3.1.2. Come per il Problema (2.1.1), il nuovo problema si rivela interessante quando la funzione f assume valori negativi: se f è non negativa l'insieme vuoto è sostanzialmente l'unica soluzione del problema.
In particolare, se $f(x) = \lambda\varphi(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, e la funzione φ è negativa in un insieme di misura n–dimensionale non nulla allora il teorema enunciato garantisce che per λ abbastanza grande il Problema (3.1.1) ha almeno una soluzione non banale.

Osservazione 3.1.3. Le ipotesi su f e g garantiscono sia la semicontinuità inferiore in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ del funzionale da minimizzare, sia la compattezza in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ dei suoi sottolivelli.

Osservazione 3.1.4. Il caso in cui la funzione f sia *continua* è di particolare interesse in quanto permette uno studio più approfondito della differenziabilità della frontiera degli insiemi minimizzanti.

Prima di affrontare tali argomenti illustriamo ulteriori proprietà dei perimetri e introduciamo le funzioni a variazione limitata.

3.2 Perimetri e Funzioni a Variazione Limitata

Definizione 3.2.1. *Sia E un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, si definisce perimetro di E:*

$$\mathbf{P}(E) = \inf\left\{ \liminf_{h\to\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_h) \ : \ \lim_{h\to\infty} \mathcal{H}^n(E_h \triangle E) = 0 \right\}.$$

Osservazione 3.2.2. La condizione di convergenza degli insiemi, data nella definizione, è equivalente, nel caso di insiemi misurabili, alla convergenza in $L^1(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni caratteristiche $\mathbb{1}_{E_h}$ alla funzione caratteristica $\mathbb{1}_E$.

Osservazione 3.2.3. Grazie a relazioni isoperimetriche si ottiene facilmente che (cfr. Definizione 2.2.1):

$$\mathbf{P}(E, \mathbb{R}^n) = \mathbf{P}(E).$$

Per un aperto generico è più difficile provare che il rilassato del funzionale

$$F(E) = \mathcal{H}^{n-1}(A \cap \partial E)$$

rispetto alla convergenza $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ delle funzioni caratteristiche coincide con il rilassato rispetto alla convergenza a 0 delle misure delle differenze simmetriche.

Osservazione 3.2.4. Come il Problema (2.1.1) aveva una formulazione debole in termini del perimetro relativo ad un aperto, così il Problema (3.1.1) ha una formulazione debole in termini del perimetro ora definito.

Invece di soffermarci sull'approccio debole al Problema (3.1.1), introduciamo una delle principali caratterizzazioni di perimetro, che in molte trattazioni viene proposta come definizione, vista la sua praticità in molte dimostrazioni e la sua stretta connessione con la teoria delle funzioni a variazione limitata.

Teorema 3.2.5 (Miranda [36]). *Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ un aperto, si ha:*

$$\mathbf{P}(E, A) = \sup \Big\{ \int_E \operatorname{div} \varphi(x)\, dx \ : \ \varphi \in \big[C^1_0(A)\big]^n,\ |\varphi(x)| \leq 1 \Big\}.$$

Definizione 3.2.6. *Sia f una qualsiasi funzione misurabile secondo Lebesgue, definita in $\mathbb{R}^n$ ed $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, si definisce variazione totale (essenziale) di f su A:*

$$\mathbf{V}(f, A) = \sup \Big\{ \int_A f(x) \operatorname{div} \varphi(x)\, dx \ : \ \varphi \in \big[C^1_0(A)\big]^n,\ |\varphi(x)| \leq 1 \Big\} =_{\mathrm{def}} \int_A |Df|.$$

Teorema 3.2.7. *Se $n = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ed f è una qualsiasi funzione misurabile secondo Lebesgue si ha*

$$\mathbf{V}\big(f, (a, b)\big) = \inf \Big\{ \varphi(b) - \varphi(a) + \psi(b) - \psi(a) \ : \ \varphi, \psi \text{ funzioni crescenti positive} \int_a^b |f - \varphi + \psi|\, dx = 0 \Big\};$$

in particolare, se $f \in BV(a, b)$ tale estremo inferiore è un minimo.

Osservazione 3.2.8. Se $f \in C^1(A)$ si ha

$$\mathbf{V}(f, A) = \int_A |\nabla f(x)|\, dx.$$

Questa identità motiva l'usuale notazione adottata per indicare la variazione totale, che sarà completamente giustificata grazie ai Teoremi 3.2.9, 3.2.16 e alle relazioni tra variazione e derivate distribuzionali in seguito esposte. In particolare, grazie al Teorema 3.2.5, si ha

$$\mathbf{P}(E, A) = \mathbf{V}(\mathbb{1}_E, A) = \int_A |D\mathbb{1}_E|.$$

Un altro fatto che collega la nozione di variazione totale a quella di derivata è il seguente teorema, cfr. [46].

Teorema 3.2.9. *Siano $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ ed $f \in L^1(A)$. Allora $f \in BV(A)$ se e solo se*

$$\exists K \quad \forall A' \Subset A \quad \forall v \in B_{\mathrm{dist}(A',\partial A)}(0) \qquad \int_{A'} \frac{|f(x+v)-f(x)|}{|v|}\,dx \le K.$$

Osservazione 3.2.10. Le Definizioni 2.2.1 e 3.2.1 non richiedono per definire il perimetro di un insieme che questo sia misurabile secondo Lebesgue. Infatti, se $\mathbf{P}(E,A) < +\infty$, direttamente dalla definizione di perimetro 3.2.1, si può ottenere una successione minimizzante $\{E_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ di insiemi misurabili per cui $\mathcal{H}^n\big(K \cap (E_h \triangle E)\big) \to 0$, per ogni K compatto in A, per cui si ha che $E \cap A$ è misurabile secondo Lebesgue. Questa condizione è quindi necessaria nell'enunciato del Teorema 3.2.5. Volendo introdurre i perimetri alla maniera di Miranda, bisognerà dunque porre per definizione $\mathbf{P}(E,A) = +\infty$ quando $E \cap A$ non è misurabile.

Definizione 3.2.11. *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una funzione $f \in L^1(A)$ (rispettivamente $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(A)$) si dice a variazione (localmente) limitata in A e si scrive $f \in BV(A)$ (rispettivamente $f \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$) se $\mathbf{V}(f,A) < +\infty$ (rispettivamente se $\mathbf{V}(f,B) < +\infty$ per ogni aperto $B \Subset A$).*

Osservazione 3.2.12. Se $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ si ha che $\mathcal{H}^n(E) < +\infty$ e $\mathbf{P}(E,A) < +\infty$ se e solo se $\mathbb{1}_E \in BV(A)$.

Teorema 3.2.13. *Se $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, allora la funzione che associa ad $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ il valore $\mathbf{V}(f,A)$ è la restrizione ad $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ di una misura esterna (nel senso della Definizione 5.2.31), σ–additiva sui boreliani e finita sugli insiemi compatti. La massima misura esterna α, che goda di tali proprietà è*

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}^n \qquad \alpha(E) = \inf\Big\{ \int_A |Df| \ :\ E \subseteq A,\ A \in \mathcal{A} \Big\}. \tag{3.2.1}$$

Osservazione 3.2.14. Se $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ tale estensione, avendo massa totale finita, è univocamente determinata sulla σ–algebra dei boreliani dalla formula (3.2.1).

L'identificazione tra teoria dei perimetri e teoria delle funzioni a variazione limitata è giustificata in primo luogo dai seguenti teoremi:

Teorema 3.2.15. *Sia $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ di misura n–dimensionale finita. Allora se f è definita in A ed è misurabile secondo Lebesgue, indicando con G^f il sottografico di f, $G^f = \{(x,y) \ :\ y \le f(x)\}$, si ha:*

$$f \in BV(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}(G^f, A\times\mathbb{R}) < +\infty \ \text{ e } \ f \in L^1(A).$$

Più in particolare si ha:

$$\int_A |Df| + \mathcal{H}^n(A) \ge \mathbf{P}(G^f, A\times\mathbb{R}) \ge \sqrt{\Big(\int_A |Df|\Big)^2 + \big(\mathcal{H}^n(A)\big)^2}.$$

Teorema 3.2.16 (Formula di Coarea)**.** *Se f è una funzione $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$, con $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$\int_A |Df| = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(\{x \ :\ f(x) > t\}, A)\,dt.$$

Osservazione 3.2.17. Se f è una funzione differenziabile con continuità in A, si ha la nota relazione:

$$\mathbf{P}(G^f, A \times \mathbb{R}) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}\, dx.$$

Osservazione 3.2.18. La formula di coarea può essere generalizzata in diverso modo, vedi l'Osservazione (3.3.6), e risulta essere un potente strumento nelle dimostrazioni. Se la funzione f è lipschitziana la formula di coarea si riduce a:

$$\int_A |\nabla f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}\big(\{x \in A \,:\, f(x) = t\}\big)\, dt.$$

In questo caso la formula di coarea è complementare alla formula dell'area introdotta nella prima lezione (cfr. [17, Sezione 3.4]). Infatti, usando notazioni simili a quelle dell'enunciato della proprietà H.6 delle misure di Hausdorff, si ha che se φ è una funzione lipschitziana definita in $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^h$, con $h \leq n$ e se $\Gamma(x)$ è la matrice $h \times h$ di componenti $\big(\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j\big)$, allora:

$$\int_A \sqrt{\det \Gamma(x)}\, d\mathcal{H}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^h} \mathcal{H}^{n-h}(A \cap \varphi^{-1}(y))\, d\mathcal{H}^h(y).$$

Prima di passare ai teoremi che descrivono la struttura "fine" degli insiemi con perimetro finito esporremo alcuni fatti riguardanti le funzioni a variazione limitata. Per prima cosa enunceremo un teorema che generalizza l'Osservazione 2.2.3 riguardante i perimetri e inquadra la definizione di variazione totale di una funzione nella teoria della semicontinuità e del rilassamento di funzionali, dando in un'ottica diversa una seconda giustificazione alla notazione correntemente usata per indicare la variazione totale. Quindi specificheremo le prime relazioni tra funzioni a variazione limitata dipendenti da una variabile e funzioni a variazione limitata in più variabili, mediante la tecnica di sezione, molto utile nel provare teoremi di semicontinuità inferiore in presenza di convessità, permettendo di ridursi al caso unidimensionale.

Teorema 3.2.19. *Sia $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$. Definito su $C^1(A)$ il funzionale*

$$F(u, A) = \int_A |\nabla u(x)|\, dx,$$

si hanno le seguenti tre proprietà, rispettivamente di semicontinuità inferiore, di rilassamento e compattezza rispetto a convergenze deboli:

$F(\cdot, A)$ è semicontinuo inferiormente per la convergenza di $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$;

$$\int_A |Dv| \text{ è il rilassato nello spazio } L^1_{\mathrm{loc}}(A) \text{ di } G(u,A) = \begin{cases} F(u, A) & \text{se } u \in C^1(A), \\ +\infty & \text{se } u \in L^1_{\mathrm{loc}}(A) \setminus C^1(A); \end{cases}$$

$$\left\{ v \in BV(A) \,:\, \int_A |v|\, dx + \int_A |Dv| \leq K \right\} \quad \text{è compatto per la convergenza in } L^1_{\mathrm{loc}}(A),$$

per ogni $K \in [0, \infty)$.

Osservazione 3.2.20. Se A è sufficientemente regolare si può ottenere la compattezza rispetto alla convergenza in $L^1(A)$.

Per enunciare correttamente i teoremi di sezione è utile premettere alcune definizioni.

Definizione 3.2.21. *Sia f una qualsiasi funzione misurabile secondo Lebesgue definita in $\mathbb{R}^n$ ed $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, si definisce variazione parziale (essenziale) di f su A nella direzione $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ come*

$$\int_A |D_\nu f| = \sup\Big\{\int_A f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(x)\,dx \ : \ \varphi \in C^1_0(A),\ \|\varphi\|_{L^\infty(A)} \le 1\Big\}.$$

Nel caso in cui ν è una direzione coordinata e_i, $1 \le i \le n$, si userà la notazione $\int_A |D_i f|$.

Definizione 3.2.22. *Siano f una qualsiasi funzione misurabile secondo Lebesgue definita in $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e sia $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$. Si definiscono rispettivamente l'iperpiano ortogonale alla direzione ν, le sezioni dell'aperto A nella direzione ν, la proiezione (lungo ν) dell'aperto A sul piano e la sezione della funzione f lungo la direzione ν in A:*

$$\begin{cases} \pi_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (x\cdot\nu) = 0\} & \\ A_x = \{t \in \mathbb{R} \ : \ x + t\nu \in A\} & x \in \pi_\nu \\ A_\nu = \{x \in \pi_\nu \ : \ A_x \neq \emptyset\} & \\ f_x(t) = f(x+t\nu) & x \in A_\nu. \end{cases}$$

Teorema 3.2.23. *Siano $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ ed $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ si ha:*

$$\forall i,\quad 1 \le i \le n \qquad \int_A |D_i f| \ \le \ \int_A |Df| \ \le \ \sum_{i=1}^n \int_A |D_i f|;$$

$$\int_A |D_\nu f| = \int_{A_\nu} d\mathcal{H}^{n-1}(y) \int_{A_y} |Df_y|;$$

in particolare se ν è la direzione coordinata i-esima si ha:

$$\int_A |D_i f| = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy_1 \dots dy_{i-1}\, dy_{i+1} \dots dy_n \int_{A_y} |Df_y|$$

(cfr. [5]).

Definizione 3.2.24. *Nel caso $\int_A |D_\nu f| < +\infty$, il funzionale lineare $\varphi \mapsto -\int_A f \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,dx$ su $C^1_0(A)$ si estende ad un funzionale lineare e continuo su $\big(C^0_0(A), \|\cdot\|_{L^\infty(A)}\big)$ a cui è associata una misura con segno che si indica con $D_\nu f$.*

3.3 Prime Proprietà di Struttura Fine

Teorema 3.3.1 (H. Federer, E. De Giorgi. Cfr. [19, Teoremi 4.5.6, 4.5.9], [13, Teoremi II, IV], [14, Teoremi III, V], [48, Teoremi 5.7.3, 5.8.2, Lemma 5.9.5], [17, Sezione 5.7.3])**.** *Siano $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{P}(E, A) < +\infty$, allora (cfr. Definizione 1.1.17, Teorema 2.2.7):*

(3.3.1) $$\mathcal{H}^{n-1}(A \setminus E_1 \cup E_0 \cup E_{\frac12}) = 0;$$

(3.3.2) $$\exists\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq V_{n-1}C^1(\mathbb{R}^n) \ : \ \mathcal{H}^{n-1}\Big(E_{\frac12} \cap A \ \setminus \bigcup_{i=1}^\infty X_i\Big) = 0;$$

$$\exists \nu_E \;:\; E_{\frac{1}{2}} \cap A \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \;\; \mathcal{H}^{n-1}\text{–}misurabile\;;$$

$$per\ \mathcal{H}^{n-1}\text{–}q.o.\ \ x \in E_{\frac{1}{2}} \cap A \cap X_i \ \ il\ vettore\ \nu_E(x)\ \ \grave{e}\ ortogonale\ in\ x\ \ a\ X_i;$$

$$\forall \varphi \in \left[C_0^1(A)\right]^n \quad \int_E \operatorname{div}\varphi(x)\, d\mathcal{H}^n(x) = \int_{E_{\frac{1}{2}}} \big(\nu_E(x)\cdot\varphi(x)\big)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x). \tag{3.3.3}$$

Osservazione 3.3.2. Se ∂E è regolare ν_E risulta essere definita ovunque e coincide con l'usuale normale esterna. In questo caso la formula (3.3.3) diventa l'usuale formula di Green. Proprietà di quasi–continuità della "normale" generalizzata ν_E ad un insieme di perimetro finito sono state anche recentemente dimostrate, cfr. [15]. La dimostrazione del Teorema 3.3.1 fa uso dei teoremi di Lusin, di Severini–Egoroff e del classico corollario al teorema di estensione di Whitney:

Teorema 3.3.3. *Siano $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e φ una funzione lipschitziana definita su A, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $\psi \in C^1(A)$ tale che:*

$$\mathscr{L}^n\Big(\big\{x \in A \;:\; \varphi(x) \neq \psi(x)\big\}\Big) \leq \varepsilon.$$

Definizione 3.3.4. *Un sottoinsieme F di $\mathbb{R}^n$ si dice numerabilmente $(\mathcal{H}^m, m)$–rettificabile se esiste una famiglia di sottoinsiemi limitati $\{K_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ di $\mathbb{R}^m$ e di mappe lipschitziane $\varphi_h : K_h \to \mathbb{R}^n$ per cui*

$$\mathcal{H}^m\Big(F \setminus \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \varphi_h(K_h)\Big) = 0.$$

Si mostra che una condizione equivalente a quella specificata dalla formula (3.3.2) è proprio la numerabile $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$-rettificabilità di $E_{\frac{1}{2}}$.

Teorema 3.3.5. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{P}(E) < +\infty$, allora $E_{\frac{1}{2}}$ è numerabilmente $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$–rettificabile. Equivalentemente:*

$$\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad \exists \varphi : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \ lipschitziana\ t.c.\ \ \mathcal{H}^{n-1}\big(E_{\frac{1}{2}} \triangle \varphi(B)\big) = 0.$$

La coincidenza della $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$–rettificabilità con la condizione enunciata nel teorema può esser provata per esempio grazie a [19, Lemma 3.2.18].

Osservazione 3.3.6. Grazie ai teoremi ora enunciati si possono generalizzare il Teorema 3.2.15 e la formula di coarea:

$$\int_{A\times\mathbb{R}} |D\mathbb{1}_{G^f}| = \mathcal{H}^n\big(G^f_{\frac{1}{2}} \cap\ A \times \mathbb{R}\big);$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, d|Df|(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\{z\,:\,f(z)\leq t\}_{\frac{1}{2}}} g(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Una proprietà la cui dimostrazione supera il livello di difficoltà di quelle relative alla parte ora esposta, è il seguente teorema dovuto a H. Federer, cfr. [19, Teorema 4.5.11].

Teorema 3.3.7 (H. Federer)**.** *Sia E un arbitrario sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ ed $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ allora*

$$\mathbf{P}(E, A) = \mathcal{H}^{n-1}\big(A \setminus E_1 \cup E_0\big).$$

Osservazione 3.3.8. Si noti che la finitezza di $\mathcal{H}^{n-1}\big(A \setminus E_1 \cup E_0\big)$ garantisce che l'insieme E sia di perimetro finito in A e quindi, in un certo senso, il Teorema 3.3.7 è l'inverso della conclusione (3.3.1) nel Teorema 3.3.1.

Lezione IV

4.1 Integrande Convesse Dipendenti dal Solo Gradiente

La definizione alla Miranda di perimetro e di variazione di una funzione localmente sommabile (Teorema 3.2.5, Definizione 3.2.6), si prestano ad una generalizzazione utile per studiare le estensioni mediante rilassamento di funzionali del tipo:

$$F(u) = \int_A \psi\big(\nabla u(x)\big)\,dx, \qquad A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n), \quad u \in C^1(A),$$

con ψ funzione convessa definita su $\mathbb{R}^n$ a valori reali positivi o nulli.

Definizione 4.1.1 (cfr. [16])**.** *Sia ϕ una funzione con dominio $\mathbb{R}^n$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Si definisce la funzione coniugata di ϕ:*

$$\forall z \in \mathbb{R}^n \qquad \phi^*(z) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big\{(z \cdot x) - \phi(x)\big\}.$$

Osservazione 4.1.2. Tale funzione è definita in $\mathbb{R}^n$ e a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Essa è una funzione inferiormente semicontinua in quanto estremo superiore di funzionali lineari continui ed essendo l'insieme ove essa assume valori reali un convesso, ivi ϕ^* è una funzione convessa. La funzione ϕ^* assume il valore $-\infty$ se e solo se è costantemente uguale a $-\infty$ e ciò avviene solo quando ϕ è costantemente uguale a $+\infty$. Inoltre $\phi^* \not\equiv +\infty$ se e solo se ϕ ha una funzione affine minorante. Se $\psi \geq \phi$ allora $\psi^* \leq \phi^*$.

Osservazione 4.1.3. Per ogni funzione ψ si ha $\psi^{***} = \psi^*$. Quindi se ψ è una funzione convessa semicontinua inferiormente e sempre diversa da $-\infty$, essendo estremo superiore di un insieme numerabile di funzioni affini (teoremi di Hahn–Banach e Lindelöf), si ha $\psi^{**} \equiv \psi$. In particolare, se ψ è una funzione convessa a valori reali, dovendo essere $\psi^*(x) \geq m|x| - \psi\big(m \cdot \frac{x}{|x|}\big)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, si ha $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{\psi^*(x)}{|x|} = +\infty$ e quindi,

$$\forall \rho > 0 \ \exists r > 0 \ \forall x \in \overline{B}_\rho(0), \qquad \psi(x) = \max_{z\in\overline{B}_r(0)} \big\{(z \cdot x) - \psi^*(z)\big\}.$$

Osservazione 4.1.4. Se $\psi(x) = |x|$, rispettivamente se $\psi(x) = (a \cdot x) + b$ è una funzione affine si ha che:

$$\psi^*(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } |z| \leq 1; \\ +\infty & \text{se } |z| > 1. \end{cases} \qquad\qquad \psi^*(z) = \begin{cases} -b & \text{se } z = a; \\ +\infty & \text{se } z \neq a. \end{cases}$$

Se $\psi(x) = |x|^2$ si ha $4\psi^*(z) = |z|^2$.
Se $\psi(x) = \max\{(a_1 \cdot x) + b_1,\, (a_2 \cdot x) + b_2\}$, è il massimo tra due funzioni affini, si ha:

$$\psi^*(z) = \begin{cases} -\gamma \cdot b_1 - (1-\gamma) \cdot b_2 & \text{se } z = \gamma \cdot a_1 + (1-\gamma) \cdot a_2 \text{ con } \gamma \in [0,1]; \\ +\infty & \text{se } z \notin [a_1, a_2]. \end{cases}$$

Più in generale se $p > 1$, $\psi(x) = \frac{|x|^p}{p}$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si ha $\psi^*(z) = \frac{|z|^q}{q}$.
Se $\psi(x)$ è il massimo di un insieme finito di funzioni affini, $f_i(x) = (a_i \cdot x) + b_i$ $(1 \leq i \leq m)$, allora $\psi^*(z)$ è massimo di funzioni affini nell'inviluppo convesso degli $a_1 \dots a_m$ e $+\infty$ al di fuori di esso. Più precisamente, quando ψ non sia massimo di un sottoinsieme proprio delle f_i, su tale inviluppo, ψ^* è la massima funzione convessa al cui grafico appartengano i punti $(a_1, -b_1) \dots (a_m, -b_m)$.

Definizione 4.1.5. *Sia ψ una funzione convessa, semicontinua inferiormente da $\mathbb{R}^n$ in $\overline{\mathbb{R}}$ a valori positivi o nulli. Dato $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ si definisce, assumendo l'usuale convenzione $0 \cdot \infty = 0$, la ψ–energia di u:*

$$\mathbf{E}_\psi(u, A) = \int_A \psi(Du) = \begin{cases} \sup \left\{ -\int_A \left[u(x) \operatorname{div} \varphi(x) + \psi^* \circ \varphi(x) \right] dx \ : \ \varphi \in \left[C_0^\infty(A) \right]^n \right\} \in \overline{\mathbb{R}} \\ \qquad \textit{se} \ \ \psi^*(0) \cdot \mathscr{L}^n(A) > -\infty; \\ \\ +\infty \quad \textit{se} \ \ \psi^*(0) \cdot \mathscr{L}^n(A) = -\infty. \end{cases}$$

Osservazione 4.1.6. La condizione $\psi^*(0) \cdot \mathscr{L}^n(A) = -\infty$ significa che $-\psi^*(0) = \inf \psi > 0$ e $\mathscr{L}^n(A) = +\infty$ o solo che $\psi \equiv +\infty = \inf \psi = -\psi^*(0)$: in questi casi per ogni funzione $u \in C^1(A)$ si ha $\int_A \psi(\nabla u(x))\, dx = +\infty$, coerentemente con la definizione e tutta la trattazione seguente si banalizza.
D'altra parte se $\psi^*(0) \cdot \mathscr{L}^n(A) > -\infty$ gli integrali $\int_A (\psi^* \circ \varphi)(x)\, dx$ sono ben definiti, eventualmente eguali a $+\infty$, per ogni $\varphi \in \left[C_0^\infty(A) \right]^n$.
Per l'Osservazione 4.1.4 segue facilmente che la Definizione 4.1.5 estende la Definizione 3.2.6 di variazione totale di una funzione, quando $\psi(x) = |x|$. Inoltre essendo $\psi \geq 0$, poiché $\psi^*(0) \leq 0$ si ha $\mathbf{E}_\psi(u, A) \geq 0$. Più in generale si ha, per l'Osservazione 4.1.2:

$$\psi \geq \phi \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{E}_\psi(u, A) \geq \mathbf{E}_\phi(u, A).$$

Infine nella Definizione 4.1.5 si può permettere che $u \in \mathcal{D}^*(A)$.

Osservazione 4.1.7. Se A^1 ed A^2 sono aperti disgiunti contenuti in A dalla definizione segue facilmente:

$$\int_{A^1} \psi(Du) + \int_{A^2} \psi(Du) \quad \leq \quad \int_A \psi(Du).$$

Inoltre se A e A' sono due aperti tali che $A' \subseteq A$, segue direttamente dalla definizione che

$$\mathbf{E}_\psi(u, A') \ \leq \ \mathbf{E}_\psi(u, A).$$

Infine, si ha

$$\mathbf{E}_\psi(u, A) = \sup_{A' \Subset A} \mathbf{E}_\psi(u, A').$$

Teorema 4.1.8. *Sia ψ una funzione definita su $\mathbb{R}^n$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$, $\psi \geq 0$ e $\psi = \psi^{**}$, cioè ψ è convessa, semicontinua inferiormente e non identicamente $-\infty$. Se $u \in C^1(A)$ si ha:*

$$\int_A \psi(Du) = \int_A \psi(\nabla u(x)) dx.$$

Dimostrazione. Come detto nell'Osservazione 4.1.6, per $\psi^*(0) \cdot \mathscr{L}^n(A) = -\infty$ l'uguaglianza è vera per definizione. Si assume quindi $\psi^*(0) \cdot \mathscr{L}^n(A) > -\infty$ e poiché

$$\int_A \psi(Du) = \sup \left\{ \int_A \left[(\nabla u(x) \cdot \varphi(x)) - \psi^* \circ \varphi(x) \right] dx \ : \ \varphi \in \left[C_0^1(A) \right]^n \right\},$$

dato che $\psi = \psi^{**}$, dalla definizione di funzione coniugata segue che:

$$\int_A \psi(Du) \ \leq \ \int_A \psi^{**}\big(\nabla u(x)\big)dx.$$

Per provare la seconda diseguaglianza conviene ricondursi al caso in cui ψ è uguale al massimo di un numero finito di funzioni affini, o comunque uguale ad una funzione a valori reali.
Vediamo come ridurci al caso in cui l'integranda ψ è massimo di un numero finito di funzioni affini.
Per l'Osservazione 4.1.3, essendo ψ convessa, semicontinua inferiormente e sempre diversa $-\infty$, si ha che è l'estremo superiore di un insieme numerabile di funzioni affini $\big(f_m\big)_{m\in\mathbb{N}}$.
Si ha che $\psi \geq 0$ è limite della successione crescente delle funzioni:

$$\psi_m = \max_{0\leq i\leq m} f_i.$$

Quindi per il teorema di Beppo Levi:

$$\int_A \psi\big(\nabla u(x)\big)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_A \psi_m\big(\nabla u(x)\big)\, dx$$

dimostrando la diseguaglianza per le integrande che siano massimo di un insieme finito di funzioni affini, per la monotonia crescente delle energie rispetto all'integranda (Osservazione 4.1.6), si concluderebbe la dimostrazione.
Sia quindi ψ il massimo di un insieme finito di funzioni affini $f_1 \dots f_m$, in particolare ψ è una funzione lipschitziana a valori reali:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \psi(x) = \max_{1\leq i\leq m} f_i(x), \ \ \forall i \ \ 1 \leq i \leq m \quad f_i(x) = \{(a_i \cdot x) + b_i\} \quad a_i \in \mathbb{R}^n \ \ b_i \in \mathbb{R}.$$

Possiamo altresì supporre che: $\mathbf{E}_\psi(u, A)$ sia finito, A limitato ed $u \in C^1(\overline{A})$.
Per ogni funzione $u \in C^1(\overline{A})$, grazie all'uniforme continuità, "quadrettando" $\mathbb{R}^n$ in maniera abbastanza fine, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $x_1 \dots x_k$ elementi di A e $A^1 \dots A^k$ sottoinsiemi aperti di A a due a due disgiunti tali che:

$$\forall j, \ \ 1 \leq j \leq k \qquad x_j \in A^j, \ \ \sup_{x\in A^j} |\nabla u(x) - \nabla u(x_j)| \leq \varepsilon, \ \ \mathscr{L}^n\Big(A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_j\Big) = 0.$$

Quindi, per l'Osservazione 4.1.3 e più in particolare l'Osservazione 4.1.4,

$$\forall j, \ \ 1 \leq j \leq k \quad \exists z_j \in \overline{\mathrm{co}}\big(\{a_1 \dots a_m\}\big) \qquad \psi\big(\nabla u(x_j)\big) = \big(z_j \cdot \nabla u(x_j)\big) - \psi^*(z_j);$$

detta $\lambda = \max_{1\leq i\leq m} |a_i|$ la costante di Lipschitz di ψ, segue che $\lambda = \max_{\overline{\mathrm{co}}(\{a_1\dots a_m\})} |z|$ e si ha:

$$\begin{aligned}
\int_A \psi\big(\nabla u(x)\big)\, dx &= \sum_{j=1}^{k} \int_{A^j} \psi\big(\nabla u(x)\big)\, dx \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{A^j} \psi\big(\nabla u(x_j)\big)\, dx + \varepsilon \cdot \lambda \mathscr{L}^n(A) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{A^j} \big[\big(z_j \cdot \nabla u(x_j)\big) - \psi^*(z_j)\big]\, dx \ + \varepsilon\lambda\mathscr{L}^n(A) \\
&\leq \ \sum_{j=1}^{k} \int_{A^j} \big[\big(z_j \cdot \nabla u(x)\big) - \psi^*(z_j)\big]\, dx \ + 2\lambda\varepsilon\mathscr{L}^n(A);
\end{aligned}$$

si considerino ora delle funzioni positive e minori di 1, $\big(g_j\big)_{1\le j\le k}$, tali che

$$g_j \in C_0^1(A^j), \quad \mathscr{L}^n\big(A^j \setminus \{g_j \neq 1\}\big) \ \le\ \varepsilon \mathscr{L}^n(A^j),$$

posto

$$C_\psi = \max_{1\le i\le m}\big(\psi^*(0) - \psi^*(z_j)\big)^+,$$

e considerando che se $\psi^*(z) \in \mathbb{R}$ allora per ogni $\gamma \in [0,1]$ anche $\psi^*(\gamma z) \in \mathbb{R}$, poiché $-\infty < \psi^*(0) \le 0$ essendo $\psi \in \mathbb{R}^+$, si ha:

$$\begin{aligned}
\int\limits_A \psi\big(\nabla u(x)\big)\,dx \ &\le\ \sum_{j=1}^k \int\limits_{A^j} \big[\big(g_j(x)z_j\cdot \nabla u(x)\big) - \psi^*(g_j(x)z_j)\big]\,dx \\
&\quad + \varepsilon\mathscr{L}^n(A)\big(2\lambda + \lambda \max_{\overline{A}}|\nabla u| + C_\psi\big) \\
&\le\ \sum_{j=1}^k \int\limits_{A^j} \psi\big(Du\big) + \varepsilon\cdot\mathscr{L}^n(A)\big(2\lambda + \lambda\max_{\overline{A}}|\nabla u| + C_\psi\big) \\
&\le\ \int\limits_A \psi\big(Du\big) + \varepsilon\cdot\mathscr{L}^n(A)\big(2\lambda + \lambda\max_{\overline{A}}|\nabla u| + C_\psi\big).
\end{aligned}$$

Per passare a funzioni $C^1(A)$, con A generico aperto, basta approssimare dal basso l'integrale del gradiente su A, con gli integrali su aperti a chiusura compatta in A che lo invadono. Q.E.D.

Osservazione 4.1.9. Fissato l'aperto A il funzionale

$$F(u,A) = \int\limits_A \psi\big(Du\big), \quad u \in \mathcal{D}^*(A),$$

è semicontinuo inferiormente e convesso. In particolare è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza in $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$.

Come per la variazione totale si possono dimostrare, per le ψ–energie, teoremi analoghi ai Teoremi 3.2.13 e 3.2.19. Ovvero: in primo luogo studiare le proprietà delle ψ–energie come funzioni del "dominio di integrazione", avendo fissata u e quindi studiare i legami, nel quadro della teoria della semicontinuità e del rilassamento, tra ψ–energie e funzionali integrali definiti su funzioni differenziabili puntualmente.
A tal fine conviene premettere una fondamentale proprietà di continuità delle ψ–energie.

Teorema 4.1.10. *Sia $\psi = \psi^{**} \ge 0$ una funzione definita su $\mathbb{R}^n$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora: per ogni $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(A)$*

$$\int\limits_A \psi\big(Du\big) = \sup_{A'\Subset A}\liminf_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{A'} \psi\big(\nabla(u*\eta_\varepsilon)(x)\big)\,dx = \sup_{A'\Subset A}\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{A'} \psi\big(\nabla(u*\eta_\varepsilon)(x)\big)\,dx;$$

ove $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sono nuclei di convoluzione simmetrici:

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\cdot\eta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \quad e \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,dx = 1.$$

Teorema 4.1.11. *Siano $\psi_1 = \psi_1^{**} \ge 0$ e $\psi_2 = \psi_2^{**} \ge 0$ due funzioni definite in $\mathbb{R}^n$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ ed $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

$$\forall u \in L^1_{\mathrm{loc}}(A) \qquad \mathbf{E}_{\psi_1+\psi_2}(u,A) = \mathbf{E}_{\psi_1}(u,A) + \mathbf{E}_{\psi_2}(u,A).$$

Osservazione 4.1.12. Il Teorema 4.1.11 giustifica la notazione adottata per indicare le ψ–energie. Garantisce tra l'altro la possibilità di estendere la definizione di ψ–energia per integrande non convesse. Se ψ è una funzione definita in $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}^*(A)$, comunque si decomponga ψ in differenza di due funzioni, ψ_1 e ψ_2, convesse e non negative, $\psi \equiv \psi_1 - \psi_2$, per cui o $\mathbf{E}_{\psi_1}(u, A)$ o $\mathbf{E}_{\psi_2}(u, A)$ sia finito, il valore

$$\mathbf{E}_\psi(u, A) = \int_A \psi(Du) =_{\text{def}} \int_A \psi_1(Du) - \int_A \psi_2(Du)$$

non dipende dalla decomposizione scelta di ψ.

Esercizio 4.1.13. Se Ω è un aperto convesso e limitato di $\mathbb{R}^n$ allora ogni $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ è esprimibile come differenza di due funzioni convesse positive.

Lemma 4.1.14. *Sia $\psi = \psi^{**} \geq 0$ definita su $\mathbb{R}^n$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, allora:*

$$\forall A_1,\ A_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \qquad \mathbf{E}_\psi\big(u, A_1 \cup A_2\big) \ \leq\ \mathbf{E}_\psi(u, A_1) + \mathbf{E}_\psi(u, A_2).$$

Teorema 4.1.15. *Sia $\psi = \psi^{**} \geq 0$ definita su $\mathbb{R}^n$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, la funzione che associa ad $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ il valore $\mathbf{E}_\psi(u, A)$ è la restrizione a $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ di una misura esterna, σ–additiva sui boreliani. La massima misura esterna α che goda di tali proprietà è:*

$$\forall E \in \mathbb{R}^n \qquad \alpha(E) = \inf\Big\{ \int_A \psi(Du) \ :\ E \subseteq A, \quad A \in \mathcal{A} \Big\}.$$

Osservazione 4.1.16. Si noti che al variare di ψ si ottengono diverse classi di funzioni interessanti imponendo come condizione che la ψ–energia sia finita. Per esempio se $\psi(x) = |x|$ le funzioni sommabili che abbiano ψ–energia finita sono tutte e sole le funzioni a variazione limitata. Se $\psi(x) = |x|^\alpha$, con $\alpha > 1$, le funzioni di L^α con ψ–energia finita sono tutte e sole le funzioni dei classici spazi di Sobolev $W^{1,\alpha}$.

Per quanto riguarda il problema di determinare su quali classi di funzioni la ψ–energia coincida con il rilassato, rispetto alla convergenza di distribuzioni o alla convergenza L^1_{loc}, del funzionale integrale classico, con integranda ψ, definito sullo spazio C^1 si può enunciare il seguente teorema.

Teorema 4.1.17. *Siano $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e ψ una funzione, definita su $\mathbb{R}^n$, convessa, a valori reali, non negativa, tale che:*

$$\exists K \ \forall v \in \mathbb{R}^n \qquad \psi(v) \ \leq\ K(1 + |v|).$$

Definito su $C^1(A)$ il funzionale:

$$F(u, A) = \int_A \psi\big(\nabla u(x)\big)\, dx,$$

si hanno le seguenti proprietà di semicontinuità inferiore e rilassamento:

$F(\cdot, A)$ *è semicontinuo inferiormente per la convergenza in* $\mathcal{D}^*(A)$*;*

$$\int_A \psi(Dv) \ \text{ è il rilassato sequenziale di } F(\cdot, A) \text{ nello spazio } \mathcal{D}^*(A).$$

Problema 4.1.18. *È vero per ogni integranda $\psi = \psi^{**} \geq 0$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$, che il rilassato del funzionale $F(u, A)$, rispetto alla convergenza L^1_{loc}, coincide con $\mathbf{E}_\psi(u, A)$ su tutto lo spazio $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$?*
Equivalentemente: è vero che per ogni integranda $\psi = \psi^{**} \geq 0$ a valori reali estesi:

$$\forall u \in L^1_{\mathrm{loc}}(A) \quad \exists \big(u_m\big)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq C^1(A) :$$

$$\forall B \Subset A \qquad \lim_{m \to \infty} \int_B |u_m(x) - u(x)| \, dx = 0 \quad \& \quad \lim_{m \to \infty} \mathbf{E}_\psi(u_m, A) = \mathbf{E}_\psi(u, A)?$$

Osservazione 4.1.19. La semicontinuità inferiore di $F(\cdot, A)$, segue direttamente dall'Osservazione 4.1.9 e dall'Osservazione 4.1.12 per ogni integranda $\psi = \psi^{**} \geq 0$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$.
In [42] vi è una delle prime presentazioni, nell'ambito generale delle integrande convesse, dell'approccio debole, mediante lo studio della sequenziale semicontinuità del funzionale F e del suo rilassato $\mathbf{E}_\psi$, ai problemi variazionali. Ciò viene fatto, in sostanza, rispetto alla convergenza delle distribuzioni. Le dimostrazioni si basano semplicemente sull'applicazione della diseguaglianza di Jensen ad approssimanti per convoluzione.
In [11] viene inoltre dimostrato che la convessità dell'integranda è una condizione necessaria per avere semicontinuità inferiore rispetto a convergenze deboli.

Esercizio 4.1.20. Sia $n = 1$ e φ una funzione continua non negativa definita in $\mathbb{R}$ a valori reali. Se il funzionale $F(u) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u'(t))dt$, $u \in C^1(\mathbb{R})$, è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza di L^1 allora φ è convessa.

Osservazione 4.1.21. Per molte integrande ψ vi sono criteri di relativa compattezza, rispetto alla convergenza L^1_{loc}, per gli insiemi di funzioni ove la ψ–energia è minore di una data costante. Il caso più classico è quello della compattezza debole negli spazi di Sobolev o nello spazio delle funzioni a variazione limitata: se $\psi(x) = |x|^\alpha$, con $\alpha > 1$, l'insieme delle funzioni con norma L^α e ψ–energia non maggiori di uno, ovvero la sfera unitaria di $W^{1,\alpha}$, è compatto per la convergenza L^1_{loc}. Per integrande ψ generiche non vi sono in generale criteri di compattezza in spazi di funzioni classici, per gli insiemi ove le energie sono limitate; ciò è sostanzialmente dovuto al fatto che ψ si possa annullare in ampie zone, cfr. [7].

Un'ulteriore problematica è quella della "rappresentazione" del funzionale rilassato. Dopo aver provato la semicontinuità inferiore e aver possibilmente caratterizzato, nel caso con le ψ–energie, il rilassato su uno spazio più grande, si cerca di stabilire se, in qualche spazio di funzioni noto, il rilassato sia eguale ad un funzionale integrale rispetto ad un'opportuna misura ed ad un'opportuna integranda: data ψ si cerca un'integranda φ ed un operatore T per cui

$$\forall u \; \exists \mu, \qquad \int \psi\big(Du\big) = \int \varphi\big(Tu(x)\big) \, d\mu(x).$$

Si enuncerà alla fine della prossima sezione un teorema di rappresentazione, nello spazio delle funzioni a variazione limitata, per energie con integranda a crescita lineare.

Osservazione 4.1.22. Le proprietà prese in esame in questa sezione possono essere provate anche nel caso in cui l'integranda $\psi = \psi^{**} \geq 0$ sia definita in $\mathbb{R}^{n \cdot k}$ e le funzioni u siano definite in $\mathbb{R}^n$ e a valori in $\mathbb{R}^k$, ovvero siano funzioni a valori vettoriali.

4.2 Le Principali Proprietà di Struttura Fine per Funzioni BV

In questa sezione si spiega in che senso sia possibile rappresentare con funzionali integrali, sullo spazio delle funzioni a variazione limitata, il funzionale variazione totale (ovvero la ψ–energia

con $\psi(x) = |x|$). Per poter enunciare il teorema principale, che come conseguenza permette di descrivere la struttura della derivata distribuzionale di una funzione a variazione limitata, è necessario introdurre le nozioni di valore di Lebesgue, di differenziabilità nel senso di Lebesgue e di cono tangente. In questa sezione vengono date solo le definizioni necessarie per poter enunciare i teoremi desiderati, rinviando alla prossima sezione alcune osservazioni ed esercizi, utili per familiarizzare con tali concetti.
In primo luogo si enuncia il teorema di decomposizione, rispetto alle misure di Hausdorff n–dimensionale ed $(n-1)$–dimensionale, della misura che prolunga la variazione totale di una funzione a variazione limitata, come funzione di insieme. Nelle sezioni successive inquadreremo tale teorema di decomposizione in una teoria generale della misura e dell'integrazione, dimostrando, in particolare, una versione generale dell'usuale teorema di Radon–Nikodym.

Teorema 4.2.1. *Siano $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in BV(A)$. Definite per ogni $A' \subseteq A$, $A' \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\alpha(A') = \int_{A'} |Du|$$

$$\alpha^1(A') = \inf\Big\{ \int_{A' \setminus K} |Du| \ : \ K = \overline{K}, \ \ \mathcal{H}^n(A' \cap K) = 0 \Big\}$$

$$\alpha^2(A') = \inf\Big\{ \int_{A' \setminus K} |Du| \ : \ K = \overline{K}, \ \ \mathcal{H}^{n-1}(A' \cap K) < +\infty \Big\}$$

si ha che le seguenti definiscono, per $E \subseteq A$, delle misure esterne su A (cfr. 3.2.13), σ–additive sui boreliani di A:

$$\int_E |Du| = \beta(E) = \inf\big\{\alpha(A') \ : \ E \subseteq A' \subseteq A, \ \ A' \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)\big\};$$

$$\beta_1(E) = \inf\big\{\alpha^1(A') \ : \ E \subseteq A' \subseteq A, \ \ A' \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)\big\};$$
$$\beta_2(E) = \inf\big\{\alpha^2(A') - \alpha^1(A') \ : \ E \subseteq A' \subseteq A, \ \ A' \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)\big\};$$
$$\beta_3(E) = \inf\big\{\alpha(A') - \alpha^2(A') \ : \ E \subseteq A' \subseteq A, \ \ A' \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)\big\}.$$

Inoltre β_1, β_2 e β_3 sono mutuamente singolari e la loro somma sugli insiemi boreliani è β. Infine si ha:

$$\mathcal{H}^n(B) = 0 \implies \beta_1(B) = 0; \qquad \mathcal{H}^{n-1}(B) = 0 \implies \beta(B) = 0;$$
$$\mathcal{H}^{n-1}(B) < +\infty \implies \beta_2(B) = 0; \qquad \exists L \quad \mathcal{H}^n(L) = 0 \ : \quad \forall B \quad \beta_2(B) = \beta_2\big(B \cap L\big);$$
$$\forall B \quad \beta_3(B) = \sup\big\{\beta_3\big(B \cap E\big) \ : \ \mathcal{H}^{n-1}(E) < +\infty\big\}.$$

Si dirà quindi che β_1 è la parte assolutamente continua della variazione totale di u, β_2 la parte cantoriana, β_3 la parte discontinua o di salto.

Osservazione 4.2.2. Nel caso in cui $n = 1$ ed $u \in BV(a,b)$ si riesce ad analizzare come le misure esterne β_1, β_2 e β_3 contribuiscano alla variazione totale di u nell'intervallo (a,b), illustrando il contenuto del teorema di struttura. Grazie al Teorema 3.2.7 si sa che esistono φ, ψ funzioni crescenti positive tali che:

$$\int_{(a,b)} |f - \varphi + \psi| \, dx = 0, \qquad \int_{(a,b)} |Du| = \varphi(b) - \varphi(a) + \psi(b) - \psi(a);$$

quindi per analizzare il comportamento di β_1, β_2 e β_3 per una funzione BV basta analizzarlo per funzioni ϕ monotone, crescenti, continue nei punti a e b, per le quali si sa che $\mathscr{L}^1$–quasi ovunque esiste la derivata prima, che vi sono al più un insieme numerabile di punti di discontinuità $\big(a_i\big)_{i\in\mathbb{N}}$, che ivi ϕ ha limite destro $\phi(a_i^+)$ e limite sinistro $\phi(a_i^-)$ e che la variazione totale è data da

$$\int\limits_{(a,b)} |D\phi| = \phi(b) - \phi(a) = \int\limits_{(a,b)} |\phi'(t)|\, dt + \beta_2\big(a,b\big) + \sum_{i\in\mathbb{N}} \phi(a_i^+) - \phi(a_i^-);$$

il resto cantoriano β_2 è concentrato su insiemi più che numerabili ma di misura 1–dimensionale nulla, i cui più tipici esempi sono gli insiemi perfetti, come l'insieme di Cantor. La funzione di Cantor–Vitali, il cui grafico è detto scala del diavolo, è il tipico esempio di una funzione a variazione limitata, continua, per cui il contributo alla variazione totale dato da β_3 è nullo, con derivata puntuale quasi ovunque nulla, per cui il contributo di β_1 è nullo, la variazione totale è interamente concentrata su β_2 che ha come supporto l'insieme di Cantor dei numeri reali la cui espressione decimale ternaria non contenga la cifra 2. Tale esempio ci ha indotti a chiamare β_2 parte cantoriana della variazione totale β.

Nel caso $n > 1$, mentre la misura β_2 è difficilmente descrivibile, le misure β_1 e β_3 possono essere rappresentate in maniera molto precisa e suggestiva usando opportune nozioni di punto di Lebesgue, differenziabilità di Lebesgue di una funzione in un punto e di cono tangente di una funzione in un punto.
Per quanto riguarda la parte assolutamente continua, β_1, della variazione totale basta introdurre le seguenti nozioni.

Definizione 4.2.3. *Sia u una funzione $\mathcal{H}^n$–misurabile definita in $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, a valori reali e sommabile in un intorno di $x \in A$. Si dice che z è il valore approssimato di Lebesgue di u in x e si scrive $z = \widehat{u}(x)$, se:*

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int\limits_{B_\rho(x)} |u(\xi) - z|\, d\mathcal{H}^n(\xi) = \lim_{\rho\to 0^+} \int\limits_{B_1(0)} |u(y\rho + x) - z|\, d\mathcal{H}^n(y) = 0.$$

Se esiste $\widehat{u}(x)$, allora il punto x si dice punto di Lebesgue per la funzione u.

Definizione 4.2.4. *Sia u una funzione $\mathcal{H}^n$–misurabile definita in $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, a valori reali e sommabile in un intorno di $x \in A$. Si dice che $\xi \in \mathbb{R}^n$ è il gradiente approssimato di Lebesgue di u in x e si scrive $\xi = \widehat{\nabla} u(x)$, se x è un punto di Lebesgue per u e*

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int\limits_{B_\rho(x)} \frac{|u(y) - \widehat{u}(x) - (\xi \cdot y - x)|}{|y - x|}\, dy = \ 0.$$

In altri termini la funzione

$$\varphi(y) = \frac{|u(y) - \widehat{u}(x) - (\xi \cdot y - x)|}{|y - x|}, \qquad y \neq x$$

ha 0 come valore di Lebesgue nel punto x.

Possiamo ora enunciare il primo teorema di struttura per le funzioni a variazione limitata, facendo riferimento alle notazioni introdotte nel Teorema 4.2.1. Tale teorema permette la descrizione della parte assolutamente continua della variazione totale di una funzione a variazione limitata.

Teorema 4.2.5. *Siano $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in BV(A)$. Si ha:*

$$\text{per } \mathcal{H}^n\text{–quasi ogni } x \in A \ \exists \widehat{u}(x);$$

$$\text{per } \mathcal{H}^n\text{–quasi ogni } x \in A \ \exists \widehat{\nabla} u(x) \in \mathbb{R}^n;$$

$$\widehat{\nabla} u \text{ è Lebesgue–misurabile e } \beta_1(E) = \int_E |\widehat{\nabla} u(x)|\, dx;$$

posto $\lambda_x(y) = \big(\widehat{\nabla} u(x) \cdot y\big)$:

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int_{B^n_\rho(x)} \big|Du - \widehat{\nabla} u(x)\mathcal{H}^n\big| = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int_{B^n_\rho(x)} \big|D(u - \lambda_x)\big| = 0.$$

Esercizio 4.2.6. Sia $\xi \in \mathbb{R}^n$ e sia $w_\xi(y) = (\xi \cdot y)$. Se

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho} \big|D(u - w_\xi)\big| = 0,$$

allora $\xi = \widehat{\nabla} u(0)$. Si suggerisce l'uso di una diseguaglianza isoperimetrica tipo Poincaré:

$$\min_\theta \int_{B_\rho} |u(y) - \theta|\, dy \le c_n \rho \int_{B_\rho} |Du|.$$

Per esaminare le prime proprietà della "parte di salto" β_3 della variazione totale conviene introdurre le nozioni di minimo e massimo valore limite nel senso di Lebesgue di una funzione in un punto.

Definizione 4.2.7. *Sia u una funzione $\mathcal{H}^n$–misurabile definita in $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e sommabile in un intorno di $x \in A$. Si definiscono il minimo ed il massimo valore limite nel senso di Lebesgue della funzione u nel punto x:*

$$u^-(x) = \sup\Big\{\lambda \ : \ \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho(x)} \big[u(y) - \lambda\big]^- \, d\mathcal{H}^n(y) = 0\Big\},$$

$$u^+(x) = \inf\Big\{\lambda \ : \ \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho(x)} \big[u(y) - \lambda\big]^+ \, d\mathcal{H}^n(y) = 0\Big\}.$$

Si ha che $u^+(x) \ge u^-(x)$ e se $u^+(x) = u^-(x) = z \in \mathbb{R}$ allora x è punto di Lebesgue e $z = \widehat{u}(x)$.

Definizione 4.2.8. *Sia u una funzione $\mathcal{H}^n$–misurabile definita in $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e localmente sommabile in A. Si definisce l'insieme di salto nel senso di Lebesgue:*

$$\mathrm{S}_u = \big\{x \in A \ : \ \ u^+(x) > u^-(x)\big\}.$$

Teorema 4.2.9. *Siano $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in BV(A)$. Si ha:*

$$\mathrm{S}_u \text{ è numerabilmente } (\mathcal{H}^{n-1}, n-1)\text{–rettificabile;}$$

$$\mathcal{H}^{n-1}\Big(\big\{x \in A \ : \ \ u^-(x) = -\infty \text{ o } u^+(x) = +\infty\big\}\Big) = 0;$$

$$u^-,\ u^+ \textit{ sono boreliane e } \beta_3(E) = \int_E |u^+(x) - u^-(x)|\, d\mathcal{H}^{n-1}(x);$$

per $\mathcal{H}^{n-1}$*–quasi ogni* $x \in \mathrm{S}_u$ *esiste*

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\alpha_{n-1}\rho^{n-1}} \int_{B_\rho(x)} |Du| = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\alpha_{n-1}\rho^{n-1}} \int_{B_\rho(x)} |u^+(y) - u^-(y)|\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = |u^+(x) - u^-(x)|;$$

esiste inoltre $\nu_u : \mathrm{S}_u \to \mathbb{S}^{n-1}$, $\mathcal{H}^{n-1}$*–misurabile e tale che per* $\mathcal{H}^{n-1}$*–quasi ogni* $x \in \mathrm{S}_u$*, posto:*

$$w_x(u)(y) = \begin{cases} u^+(x), & \textit{se } \big(\nu(x) \cdot y - x\big) > 0; \\ u^-(x), & \textit{se } \big(\nu(x) \cdot y - x\big) < 0; \end{cases}$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - w_x(y)|\, dy = 0;$$

$$\forall h,\quad 1 \le h \le n \qquad \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^{n-1}} \Big[\int_{B_\rho(x)} D_h u - \int_{B_\rho(x)} \big(u^+(y) - u^-(y)\big) \cdot \nu_h(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \Big] = 0.$$

Volendo analizzare più in dettaglio la struttura della parte di salto β_3 della variazione totale di una funzione a variazione limitata è necessario introdurre la definizione di cono tangente ad una funzione in punto. Questa è corrispondente ad una nozione "debole" di insieme dei valori limite in senso approssimato della funzione nel punto, che risulta utile soprattutto nel caso in cui si usino come misure di confronto quelle h–dimensionali in $\mathbb{R}^n$. Come già precisato alcune osservazioni utili ad esemplificare la nozione di cono tangente verranno presentate nella prossima sezione.

Definizione 4.2.10. *Sia* $h > 0$ *e sia* u *una funzione* $\mathcal{H}^h$*–misurabile definita in* $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ *e* $x \in A$*. Sia* w *una funzione* $\mathcal{H}^h$*–misurabile definita in* $\mathbb{R}^n$*,* 0*–positivamente omogenea di centro* x*, cioè: se* $\lambda > 0$ *allora* $w(x + \lambda \cdot y) = w(x + y)$*. Si dice che* w *è una funzione tangente nell'aperto* A*, relativamente alla misura* $\mathcal{H}^h$ *(*h*–tangente,* $\mathcal{H}^h$*–approssimata,* h*–approssimata o in* $\mathcal{H}^h$*–densità), alla funzione* u *nel punto* x *e si scriverà* $w \in \mathrm{FT}^h_x(u, A)$*, o semplicemente* $w \in \mathrm{FT}^h_x(u)$*, se:*

$$\text{(4.2.1)} \qquad \forall \varphi \in C^0_0(A) \quad \exists \lim_{\rho\to 0^+} \int_A \varphi(y) |u(y\rho + x)|\, d\mathcal{H}^h(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) |w(y + x)|\, d\mathcal{H}^h(y) \ \in \mathbb{R},$$

$$\text{(4.2.2)} \qquad \forall \varphi \in C^0_0(A) \quad \exists \lim_{\rho\to 0^+} \int_A \varphi(y) u(y\rho + x)\, d\mathcal{H}^h(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) w(y + x)\, d\mathcal{H}^h(y) \ \in \mathbb{R}$$

(cfr. Definizione 5.1.9).

Osservazione 4.2.11. Nel caso in cui $u = \mathbb{1}_E$, $w = \mathbb{1}_C \in \mathrm{FT}^h_x(u)$, con E e C sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{H}^h$–misurabili, si ha che C è un cono centrato in x (cioè: se $x + y \in C$ e $\lambda > 0$ allora $x + \lambda \cdot y \in C$), $\mathcal{H}^h$–misurabile e di misura h–dimensionale localmente finita. In tal caso le condizioni (4.2.2) e (4.2.1) si riducono a:

$$\forall \varphi \in C^0_0(\mathbb{R}^n) \ \ \exists \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^h} \int_E \varphi\Big(\frac{\xi - x}{\rho}\Big)\, d\mathcal{H}^h(\xi) = \lim_{\rho\to 0^+} \int_{\frac{E-x}{\rho}} \varphi(y)\, d\mathcal{H}^h(y) = \int_{C-x} \varphi(y)\, d\mathcal{H}^h(y) \ \in \mathbb{R}.$$

In questo caso si dirà che C è un *cono tangente, relativamente alla misura* $\mathcal{H}^h$*, all'insieme* E *nel punto* x e si userà la notazione $C \in \mathrm{CT}_x^h(E)$.
Si osservi che se $u = \mathbb{1}_E$ e $w \in \mathrm{FT}_x^h(u)$ non è detto che essa sia $\mathcal{H}^h$–equivalente ad una funzione caratteristica: ovvero può essere $\mathrm{FT}_x^h(\mathbb{1}_E) \neq \emptyset$ ma $\mathrm{CT}_x^h(E) = \emptyset$.

Possiamo ora enunciare, rifacendoci alle notazioni usate nei Teoremi 4.2.1, 4.2.5 e 4.2.9, il terzo teorema di struttura che descrive l'analisi della componente di salto della variazione.

Teorema 4.2.12. *Siano* $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u \in BV(A)$*. Si ha per* $\mathcal{H}^{n-1}$*–quasi ogni* $x \in \mathrm{S}_u$*:*

$$\big(u^+(x) - u^-(x)\big) \cdot \mathbb{1}_{\{y\,:\,(\nu(x)\cdot x - y)=0\}} \in \mathrm{FT}_x^{n-1}\big(u^+ - u^-\big);$$

per ogni intero h*, con* $1 \leq h \leq n$*,*

$$\big(u^+(x) - u^-(x)\big) \cdot \nu_h(x) \cdot \mathbb{1}_{\{y\,:\,(\nu(x)\cdot x - y)=0\}} \in \mathrm{FT}_x^{n-1}\Big(\big(u^+(x) - u^-(x)\big) \cdot \nu_h(x)\Big);$$

per ogni $\varepsilon > 0$*, posto* $\mathrm{S}_{u,\varepsilon} = \mathrm{S}_u \cap \{y \,:\, |u^+(y) - u^-(y)| > \varepsilon\}$ *si ha*

$$\{y \,:\, (\nu(x) \cdot x - y) = 0\} \in \mathrm{CT}_x^{n-1}\big(\mathrm{S}_{u,\varepsilon}\big).$$

Osservazione 4.2.13. Per quanto riguarda l'introduzione di $\mathrm{S}_{u,\varepsilon}$ essa è necessaria in quanto S_u può non essere localmente $\mathcal{H}^{n-1}$–finito e quindi potrebbe non avere cono tangente.

Osservazione 4.2.14. Considerando che se $u \in BV(A)$ la sua derivata distribuzionale è una misura di Radon vettoriale Du, il teorema ora enunciato garantisce la seguente decomposizione:

$$Du = \widetilde{\nabla} u \cdot \mathscr{L}^n + (u^+ - u^-) \cdot \nu_u \cdot \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathrm{S}_u + CDu,$$

ove CDu è una misura di Radon vettoriale assolutamente continua rispetto a β_2.

Osservazione 4.2.15. A questo proposito, come già osservato, il teorema di struttura non dà molte informazioni sulla "parte cantoriana", CDu, della derivata di una funzione a variazione limitata. Uno dei pochi risultati è il seguente: in [2] si dimostra che data $u \in \big[BV(A)\big]^k$, $k \geq 2$, la parte cantoriana del suo gradiente distribuzionale (una misura a valori matrici) ha densità rispetto alla sua variazione totale che è una matrice $n \times k$ di rango 1: esistono cioè due funzioni, definite CDu–quasi ovunque, $\widetilde{\nu} \in \mathbb{R}^n$ e $\xi \in \mathbb{R}^k$ tali che $\frac{d(CDu)}{d|CDu|} = \xi \otimes \widetilde{\nu}$, si ricorda che se ξ e $\widetilde{\nu}$ sono due vettori con $\xi \otimes \widetilde{\nu}$ si indica la matrice di componenti $\xi_i \cdot \widetilde{\nu}_j$. Ciò rende simili, per quanto riguarda le proprietà geometriche non topologiche, la parte cantoriana alla "parte di salto". Infatti, estendendo le notazioni usate nel teorema di struttura a funzioni a valori vettoriali, si può dimostrare in maniera abbastanza diretta che se $u \in \big[BV(A)\big]^k$ allora $Du \llcorner \mathrm{S}_u = (u^+ - u^-) \otimes \nu_u \cdot \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathrm{S}_u$, ove u^+ e u^- sono da intendersi nel senso della caratterizzazione data dalla Definizione 4.2.10, dall'Osservazione 4.2.11 e dal Teorema 4.2.12.

4.3 Le Nozioni di Densità: Coni Tangenti, Valori di Lebesgue e Valori Approssimati

Due nozioni fondamentali, alla base di quelle utili per enunciare i teoremi di struttura per funzioni a variazione limitata, sono quelle di densità, "sferica", tra due misure in un punto e di densità, "sferica", h–dimensionale di una misura in $\mathbb{R}^n$ Un caso particolare è la densità in un punto $x \in \mathbb{R}^n$ di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ rispetto alla misura di Lebesgue $\mathscr{L}^n$, Definizione 1.1.17.

Definizione 4.3.1. *Siano μ_1 una funzione di insieme positiva definita sulle parti di $\mathbb{R}^n$, μ_2 una funzione di insieme sulle parti di $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\sigma' \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che μ_2 ha densità (sferica) superiore σ' in x rispetto a μ_1 e si scrive $\Theta^*(\mu_1, \mu_2, x) = \sigma'$, se:*

$$\limsup_{\rho \to 0^+} \frac{\mu_2\big(B^n_\rho(x)\big)}{\mu_1\big(B^n_\rho(x)\big)} = \sigma'.$$

Analogamente se $\sigma'' \in \overline{\mathbb{R}}$, si dice che μ_2 ha densità (sferica) inferiore σ'' in x rispetto a μ_1 e si scrive $\Theta_*(\mu_1, \mu_2, x) = \sigma''$, se:

$$\liminf_{\rho \to 0^+} \frac{\mu_2\big(B^n_\rho(x)\big)}{\mu_1\big(B^n_\rho(x)\big)} = \sigma''.$$

Nel caso $\sigma = \Theta_*(\mu_1, \mu_2, x) = \Theta^*(\mu_1, \mu_2, x)$, σ si dirà densità (sferica) di μ_2 in x rispetto a μ_1, e si denoterà con $\Theta(\mu_1, \mu_2, x)$.

Definizione 4.3.2. *Siano $h \in \mathbb{N}$, μ una funzione di insieme definita sulle parti di $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\sigma' \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che μ ha densità (sferica) h–dimensionale superiore in x uguale a σ', $\Theta^*(h, \mu, x) = \sigma'$, se:*

$$\limsup_{\rho \to 0^+} \frac{\mu\big(B^n_\rho(x)\big)}{\alpha_h \rho^h} = \sigma'.$$

Analogamente se $\sigma'' \in \overline{\mathbb{R}}$, si dice che μ ha densità (sferica) h–dimensionale inferiore in x uguale a σ'', $\Theta_*(h, \mu, x) = \sigma''$, se:

$$\liminf_{\rho \to 0^+} \frac{\mu\big(B^n_\rho(x)\big)}{\alpha_h \rho^h} = \sigma''.$$

Nel caso $\sigma = \Theta_*(h, \mu, x) = \Theta^*(h, \mu, x)$, σ si dirà densità h–dimensionale di μ nel punto x e si denoterà con $\Theta(h, \mu, x)$.

Definizione 4.3.3. *Siano $h \in \mathbb{N}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \overline{\mathbb{R}}^n$ e $\sigma' \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che E ha densità (sferica) h–dimensionale superiore in x uguale a σ', $\Theta^*(h, E, x) = \sigma'$, se:*

$$\limsup_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^h\big(B^n_\rho(x) \cap E\big)}{\alpha_h \rho^h} = \sigma'.$$

Analogamente se $\sigma'' \in \overline{\mathbb{R}}$, si dice che E ha densità (sferica) h–dimensionale inferiore in x uguale a σ'', $\Theta_*(h, E, x) = \sigma''$, se:

$$\liminf_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^h\big(B^n_\rho(x) \cap E\big)}{\alpha_h \rho^h} = \sigma''.$$

Nel caso $\sigma = \Theta_*(h, E, x) = \Theta^*(h, E, x)$, σ si dirà densità h–dimensionale dell'insieme E nel punto x e si denoterà con $\Theta(h, E, x)$.

Osservazione 4.3.4. Nel caso in cui $\mu(B) = \mathcal{H}^h(B \cap E)$, con $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Theta_*(h, E, x) = \Theta_*(h, \mu, x)$ e $\Theta^*(h, E, x) = \Theta^*(h, \mu, x)$. Nel caso in cui $h = n$ e $\mu_1 = \mathcal{H}^n$ e $\mu_2(B) = \mathcal{H}^n(B \cap E)$, con $E \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha che $\Theta_*(n, E, x) = \Theta_*(\mu_1, \mu_2, x)$ e $\Theta^*(n, E, x) = \Theta^*(\mu_1, \mu_2, x)$.

Osservazione 4.3.5. Esempi elementari di densità sono i seguenti. Sia E l'unione di due dischi aperti nel piano, di raggio 1, centri $(0, 1)$ e $(0, -1)$ e quindi tangenti in $(0, 0)$. I punti interni ad uno dei due dischi hanno 2-densità 1, quelli esterni ad E 2-densità nulla, tutti i punti del bordo tranne $(0, 0)$ hanno densità $\frac{1}{2}$, $(0, 0)$ ha invece densità uguale ad 1. Una curva a spirale di centro $(0, 0)$ nel piano può avere come 1-densità in $(0, 0)$ un qualsiasi numero reale maggiore di $\frac{1}{2}$.

Esercizio 4.3.6. Trovare un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ con misura $\mathcal{H}^1$–finita tale che $\Theta^*(1, E, (0,0)) > 0$ ma $\Theta_*(1, E, (0,0)) = 0$.
È vero in generale che se $\Theta_*(h, E, x) > 0$ allora vi è un sottoinsieme $F \subseteq E$ tale che esista $\Theta(h, F, x)$ e sia positiva?

Un classico criterio di esistenza di densità, μ_1–quasi ovunque, è dato dai teoremi di Radon–Nikodym e Lebesgue, che verranno trattati nei prossimi capitoli.

Osservazione 4.3.7. La nozione di valore di Lebesgue di una funzione in un punto e quella di gradiente di Lebesgue in un punto, sono quindi casi particolari della nozione di densità. In particolare se una funzione u ha valore di Lebesgue in un punto x si ha che $\Theta(n, \mu_u, x) = \widehat{u}(x)$, ove μ_u è la misura ottenuta integrando per la funzione "densità" u: in effetti vale il seguente teorema:

Teorema 4.3.8 (cfr. [19, 2.9.8, 2.9.9])**.** *Sia u una funzione reale $\mathcal{H}^n$–misurabile definita su $\mathbb{R}^n$, e localmente sommabile. Allora per $\mathcal{H}^n$–quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $u(x)$ è il valore di Lebesgue della funzione u nel punto x.*

Grazie alla nozione di densità n–dimensionale si può introdurre una nozione più debole di quella di valore di Lebesgue: la nozione di valore approssimato di una funzione in un punto.

Definizione 4.3.9 (cfr. [37, 2.6], [19, 2.9.12])**.** *Siano u una qualsiasi funzione reale definita in un generico $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Si dirà che $z \in \mathbb{R}$ è il limite approssimato (relativamente ad A e rispetto alla misura $\mathcal{H}^n$) di u in x e si scriverà $z = \mathrm{ap} - \lim_x u$ o semplicemente $z = \widetilde{u}(x)$, se:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Theta(n, \{y \in A : |u(y) - z| < \varepsilon\}, x) = 1.$$

Osservazione 4.3.10. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e per ogni $\psi \in C^0_0(\mathbb{R})$ si ha che $\psi(z)$ è valore di Lebesgue di $\psi \circ u$ in x allora z è il limite approssimato di u in x. In particolare se esiste il valore di Lebesgue in un punto, $z = \widehat{u}(x)$, allora si ha che esiste il valore approssimato in quel punto e coincide con il primo: $\widetilde{u}(x) = z$. Il viceversa in generale non vale. In primo luogo il limite approssimato è definito anche per funzioni non misurabili, inoltre vi è il seguente controesempio: la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ che valga 0 nell'insieme degli (x, y) tali che $|y| \geq x^2$, e $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ altrimenti.
Se la funzione u è la funzione caratteristica di un insieme $\mathcal{H}^n$–misurabile E si ha che $\widehat{u}(x) = z$ se e solo se $\Theta(n, E, x) = z$ e $z = 1$ o $z = 0$.

Esercizio 4.3.11. Si dimostri che se $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ allora se ha limite approssimato in un punto questo è il valore di Lebesgue.

Teorema 4.3.12 (cfr. [19, 2.9.13])**.** *Sia u una funzione $\mathcal{H}^n$–misurabile definita in $\mathbb{R}^n$ a valori reali, allora si ha:*

$$\mathcal{H}^n\Big(\big\{x \ : \ \textit{non esiste } \widetilde{u}(x)\big\}\Big) = 0;$$

$$\mathcal{H}^n\Big(\big\{x \ : \ u(x) \neq \widetilde{u}(x)\big\}\Big) = 0. \tag{4.3.1}$$

Viceversa se vale (4.3.1) *allora u è Lebesgue–misurabile.*

Teorema 4.3.13 (cfr. [37, pag. 13])**.** *Una funzione reale u definita in un qualsiasi sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ ha limite approssimato $z \in \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}^n$ se e solo se esiste un insieme $B \subseteq A$ tale che:*

$$\Theta(n, \mathbb{R}^n \setminus B, x) = 0, \qquad \lim_{y \in B, y \to x} u(y) = z.$$

Analogamente si può indebolire la nozione di differenziabilità nel senso di Lebesgue.

Definizione 4.3.14 (cfr. [37, pag. 14])**.** *Siano u una funzione reale definita in $\mathbb{R}^n$ ed $x \in \mathbb{R}^n$. Si dice che $z \in \mathbb{R}^n$ è il gradiente in senso approssimato di u in x, $z = \text{ap} - \nabla u(x) = \widetilde{\nabla} u(x)$, se:*

$$\text{ap} - \lim_{x} \frac{|u(y) - \widetilde{u}(x) - (z \cdot y - x)|}{|y - x|} = 0.$$

Osservazione 4.3.15. Se esiste il gradiente di u nel senso di Lebesgue, questo è uguale al gradiente di u in senso approssimato, in tal caso inoltre il limite approssimato è anche valore di Lebesgue.

Va osservato che l'esistenza quasi ovunque del differenziale approssimato non comporta l'esistenza quasi ovunque del differenziale puntuale classico.
Si ricorda che se $n = 1$, ogni funzione a variazione limitata ha un rappresentante canonico che è differenza di funzioni monotone, pertanto risulta essere derivabile in quasi ogni punto. Inoltre va menzionato il fatto che la differenziabilità, puntuale in senso classico, in quasi ogni punto di una funzione lipschitziana può essere dimostrata prima provando la differenziabilità nel senso di Lebesgue in quasi ogni punto e quindi provando che per una funzione lipschitziana la differenziabiltà in senso approssimato in un punto comporta la differenziabilità classica in tale punto (cfr. [37, pag. 22]).
Per ulteriori informazioni sulle proprietà di differenziabilità puntuali di funzioni in spazi di Sobolev si può fare riferimento in primo luogo ai già citati [17, Cap. 6] e [48].

Problema 4.3.16. *Quali sono le più grandi classi di funzioni localmente sommabili in $\mathbb{R}^n$ per cui esista quasi ovunque il differenziale puntuale e coincida con il differenziale approssimato ovvero con il differenziale di Lebesgue?*

Prima di mostrare alcune relazioni tra la nozione di funzione e di cono tangente (Definizione 4.2.10, Osservazione 4.2.11) e quella di densità, conviene mostrare qualche esempio elementare di funzione tangente e discutere brevemente tale definizione.

Osservazione 4.3.17. Le condizioni (4.2.1) e (4.2.2) della Definizione 4.2.10 sono equivalenti alla convergenza debole–$*$ delle misure di Radon $u^+(y\rho{+}x)\cdot\mathcal{H}^h(y)$, $u^-(y\rho{+}x)\cdot\mathcal{H}^h(y)$, $|u(y\rho{+}x)|\cdot\mathcal{H}^h(y)$ rispettivamente alle misure di Radon $w^+(y{+}x)\cdot\mathcal{H}^h(y)$, $w^-(y{+}x)\cdot\mathcal{H}^h(y)$, $|w(y{+}x)|\cdot\mathcal{H}^h(y)$. Entrambe le condizioni sono necessarie: per esempio una funzione u che valga 1 in $\mathcal{H}^1$–quasi ogni punto di una circonferenza, -1 in quasi ogni punto di una seconda circonferenza tangente alla prima in un solo punto x e valga 0 altrove, ha $\text{FT}^1_x(u) = \emptyset$, mentre la condizione (4.2.2) è verificata dalla funzione w identicamente nulla.

Esercizio 4.3.18. Se $h = n$, è vero che le condizioni (4.2.1) e (4.2.2) implicano la convergenza debole in L^1_{loc} delle funzioni $u(y\rho + x)$ a w?

Osservazione 4.3.19. Se $w \in \text{FT}^h_x(u)$ allora w è univocamente determinata a meno di insiemi di misura $\mathcal{H}^h$ nulla: esiste il minimo supporto di w al variare di $w \in \text{FT}^h_x(u)$ ed è un cono chiuso centrato in x. Nel caso in cui vi sia cono tangente in x esso è quindi determinato a meno di insiemi $\mathcal{H}^h$–nulli e il minimo chiuso tra essi deve essere un cono chiuso centrato in x e σ–$\mathcal{H}^h$–finito.

Se esiste una funzione tangente h–approssimata ad u in x allora u è localmente sommabile rispetto ad $\mathcal{H}^h$ in un intorno di x e quindi il suo supporto in un intorno di x è σ–$\mathcal{H}^h$–finito.

Le condizioni (4.2.1), (4.2.2) sono equivalenti alla convergenza come distribuzioni di $u(y\rho + x)\cdot\mathcal{H}^h(y)$ e $|u(y\rho{+}x)|\cdot\mathcal{H}^h(y)$ rispettivamente a $w\cdot\mathcal{H}^h$ e $|w|\cdot\mathcal{H}^h$: è perciò indifferente considerare il limite di integrali per le sole $\varphi \in C^\infty_0(A)$ piuttosto che per tutte le $\varphi \in C^0_0(A)$.

Gli esempi e le osservazioni seguenti giustificano la scelta di indicare rispettivamente con $\mathrm{T}^h_x(u)$ e $\mathrm{T}^h_x(E)$ il generico elemento di $\mathrm{FT}^h_x(u)$ o di $\mathrm{CT}^h_x(E)$. Dati due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, con $E \cong F$ si intende che, per l'opportuno h, si ha $\mathcal{H}^h(E \triangle F) = 0$. Analoga notazione si adotta per due funzioni f e g per cui $\int |f-g|\,d\mathcal{H}^h = 0$.

Osservazione 4.3.20. Se $h=1$, $\mathrm{T}^1_x(E)$ è $\mathcal{H}^1$–equivalente ad un numero finito di semirette centrate in x.
Se $E \in V_hC^1(\mathbb{R}^n)$ e $x \in E$ allora $\mathrm{T}^h_x(E)$ è equivalente all'usuale spazio tangente di una varietà immersa, mentre se $x \notin E$ il cono tangente è equivalente all'insieme vuoto.

Il comportamento di un cono tangente nel caso di insiemi che localmente siano grafici di funzioni lipschitziane è il seguente: se f è una funzione lipschitziana definita in $\mathbb{R}^n$, indicando con Gr_g il grafico di una funzione g, si ha:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \left[\exists df(x), \quad |df(x)| = \mathrm{ap}-\lim{}_x |df| \implies \mathrm{T}^n_{(x,f(x))}(Gr_f) \;\cong\; Gr_{df(x)} + (x, f(x))\right],$$

ricordando la formula dell'area, la proprietà H.6. nella prima lezione, per la funzione lipschitziana $(y, f(y))$, le ipotesi fatte risultano sufficienti.

Nel caso in cui E fosse un aperto convesso di $\mathbb{R}^n$ si avrebbe che: $\mathrm{T}^n_x(E) \cong \emptyset$ se $x \notin \overline{E}$; $\mathrm{T}^n_x(E) \cong \mathbb{R}^n$ se $x \in E$; $\mathrm{T}^n_x(E)$ sarebbe equivalente all'usuale cono tangente al convesso E in x se $x \in \partial E$:

$$\mathrm{T}^n_x(E) \;= x + \bigcap_{\nu \in \mathbb{S}^{n-1}} \left\{\pi^+_\nu \;:\; E \subseteq \pi^+_\nu + x\right\},$$

ove π^+_ν è il semispazio "positivo" ortogonale alla direzione ν: $\{\xi : (\xi \cdot \nu) \geq 0\}$.

Nel caso $n=2$, $E = \{(t,s) : s \geq \sqrt{|t|}\}$, $x=(0,0)$, si ha $\mathrm{T}^2_x(E) \cong \emptyset$ mentre $\mathrm{CT}^1_x(E) = \emptyset$. Se $E = \{(t,s) : s = \sqrt{|t|}\}$, $x=(0,0)$, si ha $\emptyset \in \mathrm{CT}^2_x(E)$, mentre $\mathrm{CT}^1_x(E) = \emptyset$ pur essendo $2 \cdot \mathbb{1}_C \in \mathrm{FT}^1_x(\mathbb{1}_E)$, ove C è il cono $\{0\} \times \mathbb{R}^+$.

Esercizio 4.3.21. Provare che se $h=n$, $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e z è il valore di Lebesgue di u in x allora la funzione costante che assume il valore z è un elemento di $\mathrm{FT}^n_x(u)$.

Esercizio 4.3.22. Trovare invece esempi per cui se z è semplicemente il valore approssimato di u nel punto x non vi sia una funzione tangente in x ad u ed esempi per cui vi sia una funzione tangente in x ad u che assuma un solo valore z ma non esista il limite approssimato di u nel punto x.

È in generale vero che se esiste il valore approssimato $\widetilde{u}(x)$ ed esiste una funzione tangente in x a u che assuma un solo valore z allora $z = \widetilde{u}(x)$?

Esercizio 4.3.23. Dimostrare che se $h=n$ ed $u = \mathbb{1}_E$, $w = \mathbb{1}_C \in \mathrm{FT}^n_x(u)$ allora si ha

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - w(y)|\,dy = 0.$$

In particolare dimostrare che se $h=n$ e $u = \mathbb{1}_E$ è localmente sommabile, l'esistenza del valore approssimato in un punto x è equivalente al fatto che $\mathrm{CT}^n_x(E) \neq \emptyset$ e che o l'insieme vuoto o tutto lo spazio sia un cono tangente ad E in x. Ovvero dimostrare

$$z = \widetilde{u}(x) \iff z = \widehat{u}(x) \iff \left[\mathrm{FT}^n_x(u) \neq \emptyset \;\&\; \left(w \in \mathrm{FT}^n_x(u) \;\Rightarrow\; w \cong z \in \{0,1\}\right)\right].$$

È vero in generale che se $h=n$ ed $u = \mathbb{1}_E$, $w \in \mathrm{FT}^n_x(u)$ allora si ha

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - w(y)|\,dy = 0?$$

In [19, 3.1.16, 3.2.21], viene data una nozione diversa di minimo cono tangente chiuso $\mathcal{H}^h$–approssimato, ad un insieme E in un punto dello spazio x:

Definizione 4.3.24. *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Si definisce:*

$$\mathrm{Tan}^h(E,x) = \bigcap \Big\{ \mathrm{Tan}(F,x) \ : \ \Theta(h, E \setminus F, x) = 0 \Big\},$$

ove:

$$\mathrm{Tan}(F,x) = \mathbb{R}^+ \cdot \bigcap_{\eta>0} \overline{\Big\{ \nu \in \mathbb{S}^{n-1} \ : \ \exists \delta < \eta \qquad x + \delta \cdot \nu \in F \Big\}}.$$

Esercizio 4.3.25. È vero che se $\mathrm{CT}^h_x(E) \neq \emptyset$ ed esiste $\rho > 0$ tale che $\mathcal{H}^h\big(\mathrm{Tan}^h(E,x) \cap B_\rho(0)\big) < +\infty$ allora esiste $C \in \mathrm{CT}^h_x(E)$ tale che $\mathrm{Tan}^h(E,x) = \overline{C}$?
Che dire di $\mathrm{CT}^h_x(E)$ in caso contrario?

Esercizio 4.3.26. Sia $n = 2$, è possibile trovare un insieme E per cui $\mathrm{Tan}^h(E,(0,0))$ sia $\mathcal{H}^h$–finito in un intorno di $(0,0)$ ma $\mathrm{CT}^h_{(0,0)}(E) = \emptyset$? È possibile trovare un insieme E tale che $\mathrm{CT}^h_{(0,0)}(E) \neq \emptyset$ e per ogni $C \in \mathrm{CT}^h_{(0,0)}(E)$ si abbia $\overline{C} \neq \mathrm{Tan}^h(E,(0,0))$.

La nozione di cono tangente presentata con la Definizione 4.2.10, viene estesa anche a *varifold* e *correnti*, cfr. [26, Theorem 4.9, Theorem 5.4, Lemma 5.6].

Osservazione 4.3.27. La relazione tra valori approssimati delle funzioni caratteristiche di insiemi misurabili e le densità degli insiemi, Osservazione 4.3.7, Osservazione 4.3.10, Esercizio 4.3.11, può essere estesa ai coni tangenti. Vale infatti:

$$\mathrm{CT}^h_x(E) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \exists \Theta(h,E,x) = \Theta(h, \mathrm{T}^h_x(E), x).$$

Viceversa se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ha un h–cono tangente in x allora per qualche ρ: $\mathcal{H}^h\big(E \cap B_\rho(x)\big) < +\infty$ e in maniera diretta si ha che se $\Theta(h,E,x) = 0$ allora $\mathrm{CT}^h_x \neq \emptyset$ e $\mathrm{T}^h_x(E) \cong \emptyset$, mentre se $\mathrm{T}^h_x(E) \cong x + V$, con V sottospazio di dimensione h, allora $\Theta(h,E,x) = 1$.

Esercizio 4.3.28. Dimostrare che sempre se $\mathrm{T}^h_x(E) \cong x + V$, con V sottospazio di dimensione h, detta π la proiezione ortogonale su $\mathrm{T}^h_x(E)$ si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \Theta\Big(h, \big\{ y \in E \ : \ |y - \pi(y)| \geq \varepsilon |y - x| \big\}, x\Big) = 0.$$

Esercizio 4.3.29. Trovare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{H}^1$–misurabile, tale che $1 \leq \Theta(1,E,(0,0)) < +\infty$ ma sia $\mathrm{CT}^1_{(0,0)}(E) = \emptyset$.

Teorema 4.3.30 (cfr. [26, Theorem 2.5, Lemma 5.6])**.** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^h$–misurabile e localmente di misura $\mathcal{H}^h$–finita. Allora E è numerabilmente $(\mathcal{H}^h, h)$–rettificabile se e solo se ha cono tangente h–approssimato che sia un sottospazio affine per $\mathcal{H}^h$–quasi ogni suo punto.*

Osservazione 4.3.31. Sorprendentemente valgono proprietà molto più forti, per esempio se $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e per $\mathcal{H}^\alpha$–quasi ogni $x \in E$ si ha

$$0 < \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^\alpha(B^n_\rho(x) \cap E)}{\rho^\alpha} < +\infty,$$

allora $\alpha = h \in \mathbb{N}$ e E è numerabilmente $(\mathcal{H}^h, h)$–rettificabile, cfr. [39].

4.4 Un Teorema di Rappresentazione e un Teorema di Compattezza

I teoremi enunciati nella Sezione 4.2 e l'Osservazione 4.2.15 garantiscono una formula di rappresentazione integrale sullo spazio $BV(A)$ del funzionale variazione totale. Più in generale per integrande convessa a crescita lineare vale il seguente teorema di rappresentazione su $BV(A)$:

Teorema 4.4.1 (G. Dal Maso, cfr. [32])**.** *Siano $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e ψ una funzione convessa definita su $\mathbb{R}^n$ a valori positivi o nulli, avente crescita lineare:*

$$\exists K \ \forall v \in \mathbb{R}^n \quad \psi(v) \ \le \ K(1+|v|).$$

Definita la funzione di recessione di ψ, positivamente omogenea di grado 0*:*

$$\psi_\infty(v) = \sup_{t>0} \frac{\psi(t \cdot v) - \psi(0)}{t},$$

si ha la seguente formula di rappresentazione integrale della ψ–energia sullo spazio delle funzioni a variazione limitata su A:

$$\int_A \psi(Du) = \int_A \psi\big(\widetilde{\nabla} u(x)\big)\, dx + \int_{\mathrm{S}_u \cap A} \psi_\infty\big((u^+(x) - u^-(x)) \cdot \nu_u(x)\big)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) + \int_A \psi_\infty\Big(\frac{d(CDu)}{d\mu}(x)\Big)\, d\mu(x),$$

ove μ è una qualsiasi misura di Borel rispetto a cui CDu è assolutamente continua e la densità è quella sferica $\frac{d(CDu)}{d\mu}(x) = \Theta(\mu, CDu, x)$.

I teoremi di struttura per le funzioni BV, permettono, di individuare esplicitamente una sottoclasse di BV per la quale vi è compattezza dei sottolivelli per un'ampia famiglia di funzionali semicontinui e parzialmente rispondere al secondo interrogativo fatto nell'Osservazione 4.1.21.

Definizione 4.4.2. *Sia $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$. Si definisce la classe delle funzioni speciali a variazione limitata su A:*

$$SBV(A) = \big\{ u \in BV(A) \ : \ CDu \equiv 0 \big\}.$$

Teorema 4.4.3 (L. Ambrosio, cfr. [5])**.** *Sia $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e sia $\big(u_m\big)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni di $SBV(A)$. Se esistono delle costanti $\sigma \ge 0$, $\delta \ge 0$, $\lambda \ge 0$ e $p > 1$ tali che:*

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \|u_m\|_{L^\infty(A)} \le \lambda, \quad \mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{S}_{u_m}) \le \sigma, \quad \int_A |\widetilde{\nabla} u_m(x)|^p \, dx \le \delta,$$

allora esiste una sottosuccessione $\big(v_m\big)_{m \in \mathbb{N}}$ ed esiste $u \in SBV(A)$ tali che:

$$\big(v_m\big)_{m \in \mathbb{N}} \ \text{ converge quasi ovunque a } u;$$

$$\|u\|_{L^\infty(A)} \le \lambda, \quad \mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{S}_u) \le \sigma, \quad \int_A |\widetilde{\nabla} u(x)|^p \, dx \le \delta;$$

$$\forall B \Subset A \ \forall \varphi \in \big[L^\infty(B)\big]^n \quad \lim_{m \to \infty} \int_B \big(\varphi(x) \cdot \widetilde{\nabla} v_m(x)\big)\, dx = \int_B \big(\varphi(x) \cdot \widetilde{\nabla} u(x)\big)\, dx.$$

Lezione V

5.1 Cenni di Teoria Generale della Misura e Integrazione: L'Integrale di Choquet per Funzioni di Insieme Nulle sul Vuoto[1]

Sia in teoria geometrica della misura che nello studio del rilassamento di funzionali integrali, si è spesso indotti a trattare generiche funzioni d'insieme, o ad avere integrazioni rispetto a diverse misure esterne.
Volendo un approccio puramente insiemistico e finalizzato principalmente all'integrazione, sembra conveniente un'impostazione che generalizza quella alla Caratheodory e quella alla Lebesgue, e comprende le principali teorie dell'integrazione "assolute". Tale teoria quadro non comprende gli integrali di tipo "singolare" alla Cauchy e la definizione proposta di integrale, intesa, quando possibile, come metodo per estendere funzioni di insieme a misure esterne, si differenzia in modo essenziale dalla costruzione delle misure di Hausdorff, pur essendo molte proprietà di queste ben inserite in tale ambito più generale.

Il primo passo consiste nel definire il così detto "integrale archimedeo" per funzioni a valori reali estesi, di variabile reale, decrescenti e positive.

Definizione 5.1.1. *Sia φ una funzione definita su $[0, +\infty)$, a valori in $[0, +\infty]$ e decrescente. Si definisce l'integrale archimedeo di φ:*

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n^2} \varphi\Big(\frac{h}{n}\Big) \ \in \overline{\mathbb{R}}^{+}.$$

Teorema 5.1.2. *Siano φ, ψ, φ_n, $n \in \mathbb{N}$, funzioni definite su $[0, +\infty)$, a valori in $[0, +\infty]$ e decrescenti. Si ha:*

(5.1.1)

$$\varphi(b) = 0 \implies \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \sup\Big\{ \sum_{h=1}^{m} (b_h - b_{h-1})\varphi(b_h) \ : \ m \in \mathbb{N},\ 0 < b_0 < b_1 \dots < b_m < b \Big\};$$

$$\int_0^{+\infty} (\varphi + \psi)(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \psi(t)\, dt;$$

$$\forall \kappa \geq 0 \implies \int_0^{+\infty} (\kappa\varphi)(t)\, dt = \kappa \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt;$$

[1] Quanto segue è ispirato alle note manoscritte da Giuseppe Buttazzo per il corso tenuto da Ennio De Giorgi "Analisi Algebrica e Infinitesimale" presso la Scuola Normale Superiore di Pisa, negli anni '80.

$$\text{(5.1.2)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_{n+1} \geq \varphi_n \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt;$$

$$\text{(5.1.3)} \qquad \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \sup\bigl(\varphi^{-1}\bigl((x, +\infty]\bigr)\bigr)\, dx.$$

Osservazione 5.1.3. La proprietà (5.1.1) giustifica la notazione usata, che coincide con quella per l'integrale di Riemann e permette di definire l'integrale archimedeo su di un intervallo. La (5.1.2) può essere ulteriormente raffinata: per esempio richiedendo la convergenza nei soli punti di continuità di φ. La (5.1.3) è la proprietà fondamentale che permette di usare l'integrale archimedeo per una definizione generale di integrazione rispetto a funzioni di insieme positive e nulle nell'insieme vuoto.

Definizione 5.1.4. *Sia α una funzione definita su di una famiglia di insiemi $\mathcal{D}$ a valori in $[0, +\infty]$ tale che $\alpha(\emptyset) = 0$. Al variare dell'insieme A si definiscono le regolarizzate crescenti superiore ed inferiore di α, e si indicano rispettivamente con α^* ed α_*:*

$$\alpha^*(A) = \inf\bigl\{\alpha(T) : \ A \subseteq T, \ T \in \mathcal{D}\bigr\};$$
$$\alpha_*(A) = \sup\bigl\{\alpha(T) : \ T \subseteq A, \ T \in \mathcal{D}\bigr\}.$$

Osservazione 5.1.5. Le funzioni di insieme testé introdotte sono definite su ogni insieme A. In particolare, se $A \not\subseteq \mathcal{P}(\bigcup_{\mathcal{D}})$ si ha $\alpha^*(A) = +\infty$, mentre se $A \cap \mathcal{P}(\bigcup_{\mathcal{D}}) = \emptyset$ si ha $\alpha_*(A) = 0$. Sono crescenti rispetto all'inclusione tra insiemi e valgono 0 sull'insieme vuoto.

Definizione 5.1.6. *Sia α una funzione definita su di una famiglia di insiemi $\mathcal{D}$ a valori in $[0, +\infty]$ tale che $\alpha(\emptyset) = 0$. Siano E un insieme ed f una qualsiasi funzione a valori in $[0, +\infty]$. Si definiscono l'integrale superiore e l'integrale inferiore di f su E rispetto ad α, rispettivamente con:*

$$\int_E^* f\, d\alpha = \int_0^{+\infty} \alpha^*\Bigl(E \cap f^{-1}\bigl((x, +\infty]\bigr)\Bigr)\, dx;$$
$$\int_{*E} f\, d\alpha = \int_0^{+\infty} \alpha_*\Bigl(E \cap f^{-1}\bigl((x, +\infty]\bigr)\Bigr)\, dx.$$

Osservazione 5.1.7. Se α è crescente rispetto all'inclusione di insiemi in $\mathcal{D}$, ovvero se per ogni $T, \ S \in \mathcal{D}$ tali che $S \subseteq T$ si ha $\alpha(S) \leq \alpha(T)$, allora si ha che l'integrale inferiore è minore dell'integrale superiore, avendosi in questo caso $\alpha^* \geq \alpha_*$.

Definizione 5.1.8. *Sia α una funzione definita su di una famiglia di insiemi $\mathcal{D}$ a valori in $[0, +\infty]$ tale che $\alpha(\emptyset) = 0$. Siano E un insieme ed f una qualsiasi funzione a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Si definiscono l'integrale superiore e l'integrale inferiore di f su E rispetto ad α, rispettivamente con:*

$$\int_E^* f\, d\alpha = \int_E^* f^+\, d\alpha - \int_{*E} f^-\, d\alpha \qquad (+\infty - \infty = +\infty);$$
$$\int_{*E} f\, d\alpha = \int_{*E} f^+\, d\alpha - \int_E^* f^-\, d\alpha \qquad (+\infty - \infty = -\infty).$$

Definizione 5.1.9. *Sia α una funzione definita su di una famiglia di insiemi $\mathcal{D}$ a valori in $[0,+\infty]$ tale che $\alpha(\emptyset)=0$. Siano E un insieme ed f una qualsiasi funzione a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Se gli integrali superiore ed inferiore di f su E rispetto ad α coincidono il loro comune valore si dirà integrale di f su E rispetto ad α e sarà denotato da:*

$$\int\limits_E f\,d\alpha = \int\limits_E^{*} f\,d\alpha = \int\limits_{*E} f\,d\alpha.$$

Osservazione 5.1.10. Se $\mathcal{D}$ è la famiglia delle unioni finite di intervalli limitati, disgiunti e α dà la somma delle lunghezze degli intervalli di una tale unione, l'integrale definito viene a coincidere con quello di Riemann generalizzato. Se $\mathcal{D}$ è la famiglia delle unioni numerabili di intervalli disgiunti e α da la serie delle lunghezze degli intervalli di una tale unione, si ottiene l'integrale superiore di Lebesgue.

Osservazione 5.1.11. Si noti che se α è crescente e ha come dominio le parti di un insieme X allora per ogni funzione non negativa a valori reali estesi esiste l'integrale su X rispetto ad α, avendosi in questo caso $\alpha=\alpha^*\llcorner\mathscr{P}(X)=\alpha_*\llcorner\mathscr{P}(X)$.

Per poter avere le proprietà che permettano di usare questa nozione di integrazione in modo consueto bisognerà rafforzare quelle godute dalla funzione α. In primo luogo si hanno i seguenti teoremi:

Teorema 5.1.12 (Funzioni crescenti di insieme)**.** *Sia X un insieme. Se α è una funzione di insieme crescente rispetto all'inclusione, con dominio tutti i sottoinsiemi di X, a valori $[0,+\infty]$ e nulla sull'insieme vuoto, allora per $E\subseteq X$ si hanno le seguenti quattro proprietà:*

$$0\le f\le g \implies \int\limits_E f\,d\alpha \le \int\limits_E g\,d\alpha; \tag{5.1.4}$$

$$\kappa\ge 0,\quad f\ge 0 \implies \int\limits_E f\,d\alpha = \int\limits_E \big(f\wedge\kappa\big)\,d\alpha + \int\limits_E \big(f-\kappa\big)^+\,d\alpha;$$

$$f\ge 0 \implies \int\limits_E f\,d\alpha = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_E (f-\varepsilon)^+\wedge\frac{1}{\varepsilon}\,d\alpha;$$

$$\kappa\ge 0,\quad f\ge 0 \implies \int\limits_E (\kappa f)\,d\alpha = \kappa\int\limits_E f\,d\alpha. \tag{5.1.5}$$

Viceversa, se $\mathcal{I}$ è un qualsiasi funzionale definito sull'insieme delle funzioni definite in X e a valori in $[0,+\infty]$, che goda di (5.1.4)–(5.1.5), allora posto:

$$\forall A\subseteq X\quad \alpha(A)=\mathcal{I}(\mathbb{1}_A),$$

si ha che α è l'unica funzione di insieme, che sia nulla sull'insieme vuoto, crescente rispetto all'inclusione e con dominio $\mathcal{D}=\mathscr{P}(X)$ tale che:

$$\forall f: X\longrightarrow[0,+\infty]\quad \mathcal{I}(f)=\int\limits_X f\,d\alpha.$$

Corollario 5.1.13. *Siano X un insieme e α una funzione di insieme crescente rispetto all'inclusione, con dominio tutti i sottoinsiemi di X, a valori in $[0,+\infty]$ e nulla sull'insieme vuoto. Se f è una funzione definita in X a valori in $[0,\infty]$ e $\kappa \geq 0$ allora:*

$$\int_X (f+\kappa)\, d\alpha = \int_X f\, d\alpha + \kappa\alpha(X).$$

Teorema 5.1.14 (Lemma di Fatou)**.** *Siano X un insieme e α una funzione di insieme crescente rispetto all'inclusione, con dominio tutti i sottoinsiemi di X, a valori in $[0,+\infty]$ e nulla sull'insieme vuoto. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni non negative a valori reali estesi ed f è una funzione non negativa a valori reali estesi, tali che:*

$$\exists\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \ : \quad \lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0, \quad \sup_X\big(\arctan f - \arctan f_n\big) \leq \ \epsilon_n,$$

allora si ha:

$$\int_X f\, d\alpha \ \leq \ \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\, d\alpha.$$

Corollario 5.1.15 (Beppo Levi)**.** *Siano X un insieme e α una funzione di insieme crescente rispetto all'inclusione, con dominio tutti i sottoinsiemi di X, a valori in $[0,+\infty]$ e nulla sull'insieme vuoto. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di funzioni non negative a valori reali estesi ed f è una funzione non negativa a valori reali estesi , tali che:*

$$\exists\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \ : \quad \lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0, \quad \sup_X\big(\arctan f - \arctan f_n\big) \leq \ \epsilon_n;$$

$$\forall n\in\mathbb{N}, \ \ \forall x\in X \quad f_n(x) \ \leq \ f(x),$$

allora si ha:

$$\int_X f\, d\alpha = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\, d\alpha.$$

Teorema 5.1.16 (Lebesgue)**.** *Siano X un insieme e α una funzione di insieme crescente rispetto all'inclusione, con dominio tutti i sottoinsiemi di X, a valori in $[0,+\infty]$ e nulla sull'insieme vuoto. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni non negative a valori reali estesi ed f è una funzione non negativa a valori reali estesi , tali che:*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_X\big|\arctan f - \arctan f_n\big| = 0;$$

$$\exists g \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N} \ \ f_n \leq g, \quad \int_X g\, d\alpha \ < +\infty,$$

allora si ha:

$$\int_X f\, d\alpha = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\, d\alpha.$$

Teorema 5.1.17 (Funzioni crescenti continue dall'interno)**.** *Siano X un insieme e α una funzione di insieme crescente rispetto all'inclusione, con dominio tutti i sottoinsiemi di X e nulla sull'insieme vuoto. Se inoltre si ha:*

$$\forall\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \quad X_n \subseteq X_{n+1}, \quad X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\alpha(X_n) = \alpha(X),$$

allora per ogni successione crescente di funzioni non negative a valori reali estesi, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, convergente in ogni punto di* X *alla funzione* f*, si ha:*

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\alpha = \int_X f \, d\alpha.$$

Per ottenere ulteriori proprietà algebriche per questo tipo di integrazione, quali le proprietà di decomposizione del dominio di integrazione e quelle dell'integrale di una somma di funzioni, sarà necessario introdurre il concetto di misurabilità di un insieme rispetto ad una funzione di insieme, mentre per avere più significative proprietà di passaggio al limite sarà opportuno introdurre le così dette misure esterne. Ciò verrà esposto nella prossima sezione.

5.2 Cenni di Teoria Generale della Misura e Integrazione: Misurabilità secondo Caratheodory, Numerabile Subadditività[2,3]

Definizione 5.2.1. *Sia* α *una generica funzione di insiemi definita sulla famiglia di insiemi* $\mathcal{D}$ *a valori in* $\overline{\mathbb{R}}$*. Un insieme* M *si dice* α*–misurabile e si scriverà* $M \in \mathcal{M}(\alpha, \mathcal{D})$*, o semplicemente* $M \in \mathcal{M}(\alpha)$*, se:*

$$\forall A \quad A \in \mathcal{D} \iff A \setminus M \in \mathcal{D},\ A \cap M \in \mathcal{D};$$

$$\forall A \quad \alpha(A) = \alpha(A \setminus M) + \alpha(A \cap M).$$

Osservazione 5.2.2. Se $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}(\alpha)$ allora α è additiva per l'unione di due insiemi disgiunti elementi di $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}$ è chiuso per unioni, intersezioni finite e differenze di suoi elementi.

Osservazione 5.2.3. Data α definita su $\mathcal{D}$, se M è misurabile lo sono anche tutti gli insiemi che differiscono da M solo nel complementare di $\bigcup_{\mathcal{D}}$, inoltre se M è misurabile allora anche $\bigcup_{\mathcal{D}} \setminus M$ è misurabile.
Se $S \subseteq \mathcal{D}$, considerata $\alpha \llcorner S(A) = \alpha(A \cap S)$ definita su $\{A \subseteq \bigcup_{\mathcal{D}} \ : \ A \cap S \in \mathcal{D}\}$, si ha $\mathcal{M}(\alpha) \subseteq \mathcal{M}(\alpha \llcorner S)$. Analogamente, se $S \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{D})$, considerata $\alpha \llcorner S$ definita su $\mathcal{D} \cap S$, si ha $\mathcal{M}(\alpha) \subseteq \mathcal{M}(\alpha \llcorner S)$.

Osservazione 5.2.4. Se $\emptyset \in \mathcal{D}$ e $\alpha(\emptyset) = 0$ allora $\emptyset$ è α–misurabile, inoltre ogni insieme X contenente $\bigcup_{\mathcal{D}}$ è α–misurabile.
In generale i sottoinsiemi di $\bigcup_{\mathcal{D}}$ che siano α–misurabili possono non essere elementi di $\mathcal{D}$: per esempio se α fosse la misura di Hausdorff $\mathcal{H}^1$ ristretta agli insiemi $\mathcal{H}^1$–finiti.
Quindi data una funzione di insieme α di dominio $\mathcal{D}$, tali che $\alpha(\emptyset) = 0$, vi sono almeno due insiemi misurabili "canonici": $\emptyset$ e il così detto *ambiente* di α: $\bigcup_{\mathcal{D}}$.
Si è scelto di definire la misurabilità anche per insiemi non contenuti nell'ambiente della funzione di insieme, dovendo, in certi casi, discutere la misurabilità rispetto a funzioni di insieme con diversi domini.
Infine, la definizione di misurabilità rimane invariata se la funzione di insieme è a valori in un semigruppo abeliano.

Teorema 5.2.5. *Sia* α *una generica funzione di insieme definita in* $\mathcal{D}$ *a valori in* $\overline{\mathbb{R}}$*, allora:*

$$\forall M, N \in \mathcal{M}(\alpha) \implies M \cup N \in \mathcal{M}(\alpha), \quad M \cap N \in \mathcal{M}(\alpha), \quad M \setminus N \in \mathcal{M}(\alpha).$$

[2] Si veda la nota alla Sezione 5.1

[3] Quanto segue sviluppa gli argomenti trattati dallo stesso Ennio De Giorgi nel corso della Scuola di Perfezionamento presso l'allora Istituto di Matematica "Ulisse Dini" dell'Università di Firenze nell'A.A. 1973/74, pubblicato come *Quaderno dell'Accademia Pontaniana* n. 85 nel 2012: "Lezioni di Teoria della Misura".

Esercizio 5.2.6. Dimostrare il Teorema 5.2.5 (per l'Osservazione 5.2.2 basta provare la chiusura per unioni finite).

Teorema 5.2.7. *Sia α una generica funzione di insieme definita in $\mathcal{D}$ a valori in $[0,+\infty]$ e nulla sull'insieme vuoto. Si ha:*

$$\mathcal{M}(\alpha) \subseteq \mathcal{M}(\alpha^*) \cap \mathcal{M}(\alpha_*).$$

Teorema 5.2.8. *Sia α una generica funzione di insieme definita in $\mathcal{D}$ a valori in $[0,+\infty]$ e nulla sull'insieme vuoto. Se inoltre $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}(\alpha)$, allora si ha:*

$$\forall A \subseteq \bigcup\nolimits_{\mathcal{D}} \quad \alpha^*(A) = \alpha_*(A) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathcal{M}(\alpha^*) \cap \mathcal{M}(\alpha_*).$$

Esercizio 5.2.9. Dimostrare il Teorema 5.2.8.

Teorema 5.2.10 (Funzioni crescenti di insieme nulle sul vuoto)**.** *Siano X un insieme e α una funzione crescente di insieme, con dominio tutti i sottoinsiemi di un insieme X, a valori in $[0,+\infty]$ e nulla sull'insieme vuoto. Allora per ogni funzione f a valori in $[0,+\infty]$, e per ogni $M \in \mathcal{M}(\alpha)$ si ha:*

$$\exists \int\limits_X f\,d\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \int\limits_{X\cap M} f\,d\alpha, \;\; \exists \int\limits_{X\setminus M} f\,d\alpha;$$

$$\int\limits_X f\,d\alpha = \int\limits_{X\cap M} f\,d\alpha + \int\limits_{X\setminus M} f\,d\alpha.$$

Osservazione 5.2.11. Se non si assume che α sia definita su tutte le parti dell'insieme X il teorema è vero parzialmente. Solo un asserto non è più vero: che dall'esistenza dell'integrale su X si abbia l'esistenza degli integrali su $X \cap M$ e su $X \setminus M$; a meno che non si assuma che l'integrale su X sia finito.
In effetti se $X = \{x, y\}$, $\mathcal{D} = \{\emptyset, \{x\}\}$, $M = \{x\}$, $f = 1$ ed α vale 0 in $\emptyset$ e $+\infty$ in $\{x\}$, si ha che: α^* è nulla sul vuoto e assume altrimenti il valore $+\infty$, α_* è nulla sugli insiemi a cui non appartiene x e altrimenti $+\infty$, M è misurabile, esiste l'integrale su X di f ed è infinito, mentre non esiste l'integrale di f su $X \setminus M$, essendo l'integrale superiore infinito e quello inferiore nullo.

Osservazione 5.2.12. Si noti che nell'enunciato del Teorema 5.2.10 non viene fatta alcuna assunzione sulla misurabilità dei sottolivelli della funzione integranda. Tali ipotesi risultano invece essere necessarie per le proprietà di additività dell'integrazione, come illustrato qui di seguito.

Definizione 5.2.13. *Sia α una generica funzione di insieme definita in $\mathcal{D}$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Si dice che una funzione f a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ è α–misurabile e si scriverà $f \in \mathcal{FM}(\alpha)$, se:*

$$\forall t_2 > t_1 \;\; \exists M \in \mathcal{M}(\alpha) \;:\; f^{-1}\big((t_2, +\infty]\big) \subseteq M \subseteq f^{-1}\big((t_1, +\infty]\big).$$

Definizione 5.2.14. *Sia α una generica funzione di insieme definita in $\mathcal{D}$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Si dice che una funzione f è α–semplice, se è combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi α–misurabili, in tal caso si scriverà $f \in \mathcal{SM}(\alpha)$.*

Teorema 5.2.15. *Sia α una generica funzione di insieme definita in $\mathcal{D}$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ e sia f a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora $f \in \mathcal{FM}(\alpha)$ se e solo se:*

$$\exists \big\{f_n\big\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{SM}(\alpha) \;:\; f_{n+1} \geq f_n, \;\; \lim_{n\to\infty} \sup |\arctan f_n - \arctan f| = 0.$$

Teorema 5.2.16. *Sia α una generica funzione di insieme definita in $\mathcal{D}$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Se ψ è una funzione continua da $\overline{\mathbb{R}}^2$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ allora per ogni coppia di funzioni α–misurabili f, g, anche $\psi(f,g)$ è α–misurabile.*

Corollario 5.2.17. *Se f e g sono α–misurabili e inferiormente limitate allora anche $f+g$ è α–misurabile.*

Osservazione 5.2.18. Se una funzione è α–misurabile non è detto che gli insiemi $f^{-1}\big((t,+\infty]\big)$, $f^{-1}\big([t,+\infty]\big)$ siano α–misurabili: per esempio se α dà l'area delle unioni finite di rettangoli di tipo $[a,b)\times[c,d)$, si ha che la funzione $f(x,y)=x^2+y^2$ è α–misurabile ma i suoi sopralivelli di valore positivo sono i complementari dei cerchi centrati nell'origine e nessuno di essi è α–misurabile.

Osservazione 5.2.19. Il seguente esempio mostra che l'ipotesi di limitatezza inferiore nel Corollario 5.2.17 è necessaria e che un limite puntuale di funzioni semplici può non essere misurabile: sia α la funzione di insieme definita per $A\subseteq(0,+\infty)$ tale che $\alpha(A)=\delta_0(\overline{A})$: gli insiemi misurabili sono gli intorni destri di 0 ed i loro complementari, mentre le funzioni misurabili, definite su $(0,+\infty)$, sono quelle che ammettono limite destro in 0 appartenente a $\overline{\mathbb{R}}$, quindi le funzioni $f(x)=\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$ e $g(x)=-\frac{1}{x}$ sono α–misurabili, mentre la loro somma, $\sin\frac{1}{x}$, non lo è, pur essendo limite puntuale di funzioni α–semplici.

Teorema 5.2.20 (Funzioni crescenti di insieme nulle sul vuoto)**.** *Siano X un insieme e α una funzione di insieme crescente rispetto all'inclusione, definita su tutti i sottoinsiemi di X, a valori in $[0,+\infty]$ e nulla sull'insieme vuoto. Per ogni funzione f definita su X a valori in $[0,+\infty]$ e per ogni funzione $g\in\mathcal{FM}(\alpha)$ definita su X e a valori in $[0,+\infty]$ si ha:*

$$\int_X \big(f+g\big)\,d\alpha=\int_X f\,d\alpha+\int_X g\,d\alpha.$$

Osservazione 5.2.21. Il teorema si dimostra usando il Corollario 5.1.15 e il Teorema 5.2.15.

Osservazione 5.2.22. Almeno una delle due funzioni deve essere misurabile. Se $X=\{x,y\}$ ed α è nulla tranne che su X stesso le funzioni caratteristiche dei singoletti hanno integrali nulli mentre la loro somma ha integrale diverso da 0.

Per ottenere migliori proprietà di passaggio al limite per le funzioni di insieme e gli integrali è necessario introdurre la classica nozione di *numerabile subadditività*, che è la proprietà principale della misura esterna di Lebesgue:

Definizione 5.2.23. *Sia α una funzione definita su una famiglia di insiemi $\mathcal{D}$ a valori in $[0,+\infty]$ nulla sull'insieme vuoto. Si dice che α è numerabilmente subadditiva e si scrive $\alpha\in\mathcal{N}s(\mathcal{D})$, se:*

$$\forall\big\{A_h\big\}_{h\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{D},\quad E\in\mathcal{D},\quad E\subseteq\bigcup_{h\in\mathbb{N}}A_h\quad\Longrightarrow\quad\alpha(E)\ \le\ \sum_{h\in\mathbb{N}}\alpha(A_h).$$

Osservazione 5.2.24. Poiché $\alpha(\emptyset)=0$ dalla numerabile subadditività segue direttamente la monotonia crescente di α rispetto all'inclusione.
Se $A_h\neq\emptyset$ solo per un numero finito di indici h, α si dirà subadditiva.

Se X è un insieme, invece di $\mathcal{N}s(\mathscr{P}(X))$ si scriverà semplicemente $\mathcal{N}s(X)$.

La prima forte proprietà delle funzioni numerabilmente subadditive è la stabilità di tale classe di funzioni di insieme rispetto all'operazione di estremo superiore dei valori assunti dalle funzioni di insieme di una data famiglia:

Teorema 5.2.25. *Sia* $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ *una famiglia di funzioni di insieme numerabilmente subadditive su* $\mathcal{D}$*. Indicata con* α *la funzione di insieme definita su* $\mathcal{D}$ *tale che* $\alpha(A) = \sup_{i\in I} \alpha_i(A)$ *si ha anche* $\alpha \in \mathcal{N}s(\mathcal{D})$*.*

Grazie a tale teorema è ben data la seguente definizione:

Definizione 5.2.26. *Siano* X *un insieme ed* α *una generica funzione di insieme definita su* $\mathcal{D}$*, a valori in* $[0, +\infty]$ *e nulla sull'insieme vuoto. Si definisce la massima estensione numerabilmente subadditiva su* X *minore di* α *e si denota con* $\mathbf{ns}_X(\alpha)$*:*

$$\mathbf{ns}_X(\alpha) = \max\big\{\beta \ : \ \beta : \mathcal{D} \cup \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty], \ \beta \in \mathcal{N}s(X), \ \beta \llcorner \mathcal{D} \le \alpha\big\}.$$

Osservazione 5.2.27. Verrà sovente usata la notazione semplificata $\mathbf{ns}(\alpha)$, specialmente nel caso in cui $X = \bigcup_{\mathcal{D}}$.

Osservazione 5.2.28. Se $A \setminus \bigcup_{\mathcal{D}} \neq \emptyset$ si ha $\mathbf{ns}_X(\alpha)(A) = +\infty$, mentre se $A \in \mathcal{D} \setminus \mathscr{P}(X)$ si ha $\mathbf{ns}_X(\alpha)(A) = \alpha(A)$. Grazie al Teorema 5.2.30 si ha inoltre che se $\alpha \in \mathcal{N}s\big(\mathcal{D} \cap \mathscr{P}(X)\big)$ allora $\mathbf{ns}_X(\alpha)\llcorner \mathcal{D} = \alpha \llcorner \mathcal{D} \cap \mathscr{P}(X)$.

Osservazione 5.2.29. Il classico esempio di estensione numerabilmente subadditiva è appunto la misura esterna di Lebesgue definita su tutte le parti di $\mathbb{R}^n$ ottenuta estendendo la somma dei volumi dei plurintervalli di una unione disgiunta. La misura di Lebesgue si otterrà quindi restringendo la misura esterna di Lebesgue alla famiglia dei suoi insiemi misurabili. Le proprietà di σ–algebra dei misurabili della misura esterna di Lebesgue, così come la caratterizzazione puntuale della misura esterna rimangono valide in generale.

Teorema 5.2.30. *Siano* X *un insieme ed* α *una generica funzione di insieme definita su* $\mathcal{D}$*, a valori in* $[0, +\infty]$ *e nulla sull'insieme vuoto, si ha:*

$\forall A \in \mathcal{D} \cup \mathscr{P}(X)$

$$\mathbf{ns}_X(\alpha)(A) = \begin{cases} \alpha(A), & \textit{se } A \in \mathcal{D} \setminus \mathscr{P}(X), \\ \inf\Big\{ \sum\limits_{h\in\mathbb{N}} \alpha(B_h) \ : \ \{B_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D} \cap \mathscr{P}(X), \ A \subseteq \bigcup_{h\in\mathbb{N}} B_h \Big\}, & \textit{se } A \in \mathscr{P}(X). \end{cases}$$

Definizione 5.2.31. *Sia* X *un insieme. Una funzione di insieme* α *si dice misura esterna su* X *se* $\mathscr{P}(X) = \mathcal{D}$ *e* $\alpha \in \mathcal{N}s(X)$*.*

Teorema 5.2.32. *Sia* X *un insieme e sia* α *una misura esterna su* X*. Allora* $\forall \big\{M_h\big\}_{h\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\alpha) \cap \mathscr{P}(X)$*:*

$$M_h \cap M_k = \emptyset \textit{ se } h \neq k \quad \Longrightarrow \quad \alpha\Big(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} M_h\Big) = \sum_{h\in\mathbb{N}} \alpha(M_h),$$
$$M_h \subseteq M_{h+1} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{h\to\infty} \alpha(M_h) = \alpha\Big(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} M_h\Big).$$

Teorema 5.2.33. *Siano* X *un insieme ed* α *una misura esterna su* X*. Allora si ha che* $\mathcal{M}(\alpha) \cap \mathscr{P}(X)$ *è una* σ*–algebra, equivalentemente:*

$$\forall \{M_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\alpha) \cap \mathscr{P}(X) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{h\in\mathbb{N}} M_h \in \mathcal{M}(\alpha).$$

Teorema 5.2.34. *Sia* α *una generica funzione di insieme, a valori in* $[0, +\infty]$*, nulla sul vuoto, posto* $X = \bigcup_{\mathcal{D}}$*, si ha:*

$$\mathcal{M}(\alpha) \ \subseteq \ \mathcal{M}\big(\mathbf{ns}(\alpha)\big).$$

Teorema 5.2.35. *Sia* $\alpha \in \mathcal{N}s(\mathcal{D})$*. Se* $\mathcal{D}$ *è stabile per unione numerabile allora* ($X = \bigcup_{\mathcal{D}}$) *si ha* $\alpha^* = \mathbf{ns}(\alpha)$*. Equivalentemente* α^* *è* σ*–subadditiva.*

Osservazione 5.2.36. L'ipotesi è necessaria. Se $\mathcal{D}$ non fosse stabile per unione numerabile potrebbe accadere che su qualche insieme $\mathbf{ns}(\alpha) < \alpha^*$. Per esempio se $\mathcal{D}$ fosse la famiglia che ha come elementi $\mathbb{R}$ e i suoi sottoinsiemi finiti e α valesse 0 sugli insiemi finiti e $+\infty$ su $\mathbb{R}$, si avrebbe che α^* è sempre nulla sugli insiemi finiti, ma varrebbe $+\infty$ su tutti gli altri sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e in particolare su quelli numerabili, non risultando così σ–subadditiva.

Teorema 5.2.37. *Sia* X *un insieme e sia* α *una misura esterna su* X*. Allora, data una funzione* f *definita su* X *a valori in* $\overline{\mathbb{R}}$*, si ha che* $f \in \mathcal{FM}(\alpha)$ *se e solo se*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}\big((t,+\infty]\big) \in \mathcal{M}(\alpha).$$

Corollario 5.2.38. *Sia* X *un insieme e sia* α *una misura esterna su* X*. Allora data una successione di funzioni* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, definite su* X *e a valori in* $\overline{\mathbb{R}}$ *e* α*–misurabili, se essa converge puntualmente ad una funzione* f *allora anche* f *è* α*–misurabile.*

Corollario 5.2.39 (Beppo Levi)**.** *Sia* X *un insieme e sia* α *una misura esterna su* X*. Se* $\{f_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ *è una successione crescente di funzioni a valori* $[0,+\infty]$*,* α*–misurabili e convergente puntualmente a* f *allora si ha:*

$$\lim_{h\to\infty} \int_X f_h \, d\alpha = \int_X f \, d\alpha.$$

Corollario 5.2.40 (Fatou)**.** *Sia* X *un insieme e sia* α *una misura esterna su* X*. Se* $\{f_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ *è una successione di funzioni a valori* $[0,+\infty]$*,* α*–misurabili e* f *è minore del limite inferiore di tale successione, si ha:*

$$\liminf_{h\to\infty} \int_X f_h \, d\alpha \geq \int_X f \, d\alpha.$$

Corollario 5.2.41 (Lebesgue)**.** *Sia* X *un insieme e sia* α *una misura esterna su* X*. Se* $\{f_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ *è una successione di funzioni* α*–misurabili convergente puntualmente alla funzione* f*, tale che:*

$$\exists g \in \mathcal{FM}(\alpha): \quad \forall h \in \mathbb{N} \ \ |f_h| \leq g, \quad \int_X g \, d\alpha < +\infty,$$

allora si ha:

$$\lim_{h\to\infty} \int_X f_h \, d\alpha = \int_X f \, d\alpha.$$

Osservazione 5.2.42. Volendo eliminare le ipotesi di misurabilità nel Teorema 5.2.32 e nei Corollari 5.2.39–5.2.40, è necessario rafforzare quelle sulla misura esterna α. La seguente nozione garantisce la validità degli enunciati sopraddetti senza alcuna ipotesi di misurabilità sugli insiemi o sulle funzioni in questione:

Definizione 5.2.43. *Sia* X *un insieme. Una misura esterna* α *su* X *si dice regolare se e solo se:*

$$\forall A \subseteq X \ \ \exists M \in \mathcal{M}(\alpha) \ : \quad A \subseteq M, \quad \alpha(A) = \alpha(M).$$

Osservazione 5.2.44. Le ipotesi su α non garantiscono la validità della versione per misure esterne regolari, senza ipotesi di misurabilità, del Corollario 5.2.41. Se infatti α è la misura esterna regolare su $\mathbb{R}$ che è nulla sul vuoto e sull'insieme che ha come unico elemento lo 0 e vale 1 su ogni altro sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e f_h è la funzione caratteristica dell'intervallo $[-\frac{1}{h}, \frac{1}{h}]$, $h \in \mathbb{N}$, si ha che la successione così definita è dominata dalla funzione che vale costantemente 1 integrabile rispetto ad α, e converge alla funzione caratteristica dell'insieme con il solo elemento 0 che ha integrale nullo, mentre le f_h hanno tutte integrale eguale ad 1.

L'ipotesi, necessaria, per avere il teorema di Lebesgue è in effetti la σ–additività, che è garantita dalla seguente nozione:

Definizione 5.2.45. *Sia $\alpha \in \mathcal{N}s(\mathcal{D})$. α si dice misura (positiva) se $\mathcal{D}$ è un σ–anello ed α è σ–additiva, ovvero:*

$$\forall \big\{A_h\big\}_{h\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}, \quad \forall A, B \in \mathcal{D} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h \in \mathcal{D}\ , \quad \bigcup_{h\in\mathbb{N}} A_h \in \mathcal{D}, \quad A \setminus B \in \mathcal{D};$$

$$\forall \big\{A_h\big\}_{h\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}, \quad \forall h \neq k \quad A_h \cap A_k = \emptyset, \quad A = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} A_h \quad \Longrightarrow \quad \sum_{h\in\mathbb{N}} \alpha(A_h) = \alpha(A).$$

Osservazione 5.2.46. Se la funzione di insieme α è nulla sul vuoto, σ–additiva e definita su un σ–anello si dirà *misura con segno.*

Osservazione 5.2.47. È comune usare una nozione più restrittiva di misurabilità di funzioni nel caso di misure definite su σ–algebre, rendendo la nozione indipendente dai valori della funzione di insieme in questione e stabile per convergenza puntuale di successioni:

Definizione 5.2.48 (Cfr. Definizione 5.2.13)**.** *Sia X un insieme e sia $\mathcal{D}$ una σ–algebra di parti di X. Una funzione f definita su X, a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ si dice $\mathcal{D}$–misurabile e si scriverà $f \in \mathcal{FM}(\mathcal{D})$, se:*

$$\forall t_1 < t_2 \quad f^{-1}\big((t_1, t_2]\big) \in \mathcal{D}.$$

Teorema 5.2.49. *Sia α una funzione crescente di insieme, nulla sul vuoto definita su $\mathcal{D}$ chiuso per unioni finite. Allora $\alpha \in \mathcal{N}s(\mathcal{D})$ se*

$$\alpha \text{ è finitamente subadditiva su } \mathcal{D}$$
$$\&$$
$$\forall \big\{D_h\big\}_{h\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}, \quad D_h \subseteq D_{h+1}, , \ \forall E \subseteq \bigcup_{h\in\mathbb{N}}, \ E \in \mathcal{D} \quad \Longrightarrow \quad \alpha(E) \leq \lim_{h\to\infty} \alpha(D_h).$$

Teorema 5.2.50. *Sia $\mathcal{D}$ un σ–anello e $\alpha \in \mathcal{N}s(\mathcal{D})$. Allora α è una misura se e solo se è additiva, ovvero:*

$$\forall A, B \in \mathcal{D}, \quad A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \alpha(A \cup B) = \alpha(A) + \alpha(B).$$

Osservazione 5.2.51. In effetti la restrizione di una misura esterna ai propri insiemi misurabili è una misura.
Inoltre, se α è una misura allora α^* è una misura esterna, cfr. Teorema 5.2.35, regolare su $\bigcup_{\mathcal{D}}$, avendosi, cfr. Teorema 5.2.8, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}(\alpha) \subseteq \mathcal{M}(\alpha^*)$.

Si ha il seguente teorema che caratterizza le misure esterne regolari.

Teorema 5.2.52. *Sia X un insieme e sia α una misura esterna su X. Allora α è regolare se e solo se:*

$$\alpha = \big(\alpha \llcorner \mathcal{M}(\alpha)\big)^*.$$

Corollario 5.2.53. *Sia α una generica funzione crescente di insieme, nulla nel vuoto, definita in $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}(\alpha)$. Allora* $\mathbf{ns}(\alpha)$ *è una misura esterna regolare su $\bigcup_{\mathcal{D}}$.*

Prima di dare un breve cenno alle proprietà delle funzioni di insieme su spazi metrici vale la pena enunciare il seguente teorema che permette la stima dell'integrale della somma di due funzioni senza ipotesi di misurabilità:

Teorema 5.2.54. *Se α è una misura esterna regolare sull'insieme X, allora per due generiche funzioni non negative a valori reali estesi, f e g, si ha:*

$$\int_X (f+g)\, d\alpha \ \le \ \int_X f\, d\alpha + \int_X g\, d\alpha.$$

Per finire si enuncia il più importante teorema per misure esterne definite su spazi metrici:

Teorema 5.2.55. *Sia (X,δ) uno spazio metrico e sia α una misura esterna su X. Posto $\delta(A,B) = \inf\{\delta(x,y) : x \in A,\ y \in B\}$ per ogni $A, B \subseteq X$, se vale la seguente condizione:*

$$\forall A, B \subseteq X, \quad \delta(A,B) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha(A \cup B) = \alpha(A) + \alpha(B),$$

allora ogni aperto di (X,δ) è α–misurabile e quindi α ristretta alla σ–algebra generata dagli insiemi aperti, è una misura.

Teorema 5.2.56. *Sia (X,δ) uno spazio metrico e sia α una funzione di insieme, nulla sul vuoto, di dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Per ogni $\rho > 0$, posto $\mathcal{D}_\rho = \big\{D \in \mathcal{D} : \sup_{x,y\in D} \delta(x,y) < \rho\big\}$, si ha che $\sup_{\rho>0} \mathbf{ns}(\alpha \llcorner \mathcal{D}_\rho)$ è additiva sugli insiemi distanti.*

Lezione VI

6.1 Una Generalizzazione del Teorema di Radon–Nikodym/1[4]

Avendo introdotto gran parte dell'apparato generale di teoria della misura (utile tra l'altro per descrivere misure di Hausdorff, ψ–energie e alcuni rilassati di funzionali integrali), si può ora enunciare e dimostrare un teorema di decomposizione per misure che fornisce una quadro teorico a cui riferire enunciati quale il Teorema 4.2.1, di decomposizione per la variazione totale di una funzione a variazione limitata.

Riguardo alla notazione *ambivalente* $\alpha\llcorner S$, si veda il secondo punto di pagina iv dell'Introduzione. Per le nozioni di funzione di insieme *assolutamente continua, singolare, dispersa*, ci si riferisca ai punti terzo e seguenti nella stessa pagina.
Inoltre, se μ è una misura non negativa definita sulla σ–algebra $\mathcal{A}$ ed $f \in \mathcal{FM}(\mathcal{A})$, $f \geq 0$, si indicherà con $f \cdot \mu$ la misura definita su $\mathcal{A}$ da $(f \cdot \mu)(A) = \int_A f \, d\mu$ per $A \in \mathcal{A}$.

Definizione 6.1.1. *Siano X un insieme, $\mathcal{D}$ una σ–algebra di parti di X e siano α, β due misure positive definite su $\mathcal{D}$. Si definiscono, per $A \in \mathcal{D}$, le funzioni di insieme:*

$$\operatorname{sing}(\alpha,\beta)\big(A\big) = \sup\big\{\alpha(B) \ : \ B \in \mathcal{D}, \ \ B \subseteq A, \ \ \beta(B) = 0\big\},$$

detta parte singolare *di α rispetto a β;*

$$\operatorname{intg}(\alpha,\beta)\big(A\big) = \sup\Big\{\int\limits_A f \, d\beta \ : \ f \in \mathcal{FM}(\mathcal{D}), \ \ f \geq 0, \ \ \forall B \subseteq A, \ \ B \in \mathcal{D}, \ \ \int\limits_B f \, d\beta \leq \alpha(B)\Big\},$$

detta parte integrale *di α rispetto a β;*

$$\operatorname{disp}(\alpha,\beta)\big(A\big) = \sup\Big\{\alpha(B) \ : \ B \in \mathcal{D}, \ B \subseteq A, \ \forall C \subseteq B, \ C \in \mathcal{D}, \ \big[\alpha(C) > 0 \ \Rightarrow \ \beta(C) = +\infty\big]\Big\},$$

detta parte dispersa *di α rispetto a β.*

Osservazione 6.1.2. La principale motivazione di tali definizioni è il Teorema di decomposizione 4.2.1 per la variazione totale di una funzione a variazione limitata. In questa nota si esemplifica la relazione tra le misure ottenute nel Teorema 4.2.1, le loro rappresentazioni date nei Teoremi 4.2.5–4.2.12 e le nozioni di parte singolare, integrale e dispersa, ora introdotte.
Sia quindi u una funzione Lebesgue–misurabile, definita in $\mathbb{R}^n$ e a valori in $\mathbb{R}$. Cambiando notazione rispetto al Teorema 4.2.1, si definisce, per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\alpha(A) = \int\limits_A |Du| = \inf\Big\{\int\limits_B |Du| \ : \ A \subseteq B, \ \ B \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)\Big\}.$$

[4]Per questa Lezione e per la successiva si sono introdotte delle variazioni significative rispetto agli appunti originali. In particolare, oltre ad una riscrittura degli enunciati e ad una reimpostazione delle dimostrazioni, si è introdotta la Definizione 6.1.6. Cfr. anche [22, Chapter 1.1.4].

Dai citati teoremi si ha la seguente decomposizione di α:

$$\alpha(A) = \int_A |\widetilde{\nabla} u| d\mathcal{H}^n + \int_{A\cap S_u} |u^+ - u^-|\, d\mathcal{H}^{n-1} + |CDu|(A).$$

Ognuno dei tre addendi è mutuamente singolare con i rimanenti ed inoltre si ha:

$$\mathrm{sing}(\alpha, \mathcal{H}^{n-1}) = 0, \quad \mathrm{intg}(\alpha, \mathcal{H}^n) = |\widetilde{\nabla} u| \cdot \mathcal{H}^n;$$

$$\mathrm{intg}(\alpha, \mathcal{H}^{n-1}) = |u^+ - u^-| \cdot \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathrm{S}_u;$$

$$\alpha < +\infty \quad \Longrightarrow \quad |CDu| = \mathrm{disp}\big(\mathrm{sing}(\alpha, \mathcal{H}^n), \mathcal{H}^{n-1}\big) = \mathrm{sing}\big(\mathrm{disp}(\alpha, \mathcal{H}^{n-1}), \mathcal{H}^n\big);$$

$$\mathrm{sing}(\alpha, \mathcal{H}^n) = \mathrm{intg}(\alpha, \mathcal{H}^{n-1}) + |CDu|, \quad \mathrm{disp}(\alpha, \mathcal{H}^{n-1}) = \mathrm{intg}(\alpha, \mathcal{H}^n) + |CDu|.$$

Anche in questa ottica astratta la parte cantoriana si presenta più peculiare e di "struttura" meno semplice.

Osservazione 6.1.3.

- Le classi di insiemi e di funzioni ammissibili in gioco sono rispettivamente chiuse per unioni numerabili e per estremo superiore di successioni.
- Le funzioni di insieme definite nella Definizione 6.1.1 sono tutte minori di α e quindi assolutamente continue rispetto ad α.
- Essendo α e β misure, si ha che $\mathrm{sing}(\alpha, \beta)$ è singolare rispetto a β, cfr. Teorema 6.1.13, su *ogni* $A \in \mathcal{D}$, infatti vi sono $B_h \in \mathcal{D}$, $h \in \mathbb{N}$, $\beta(B_h) = 0$, $B_h \subseteq B_{h+1}$, per cui

  $$\mathrm{sing}(\alpha, \beta)(A) = \lim_{h\to\infty} \alpha(B_h) = \alpha\Bigg(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} B_h\Bigg), \quad \beta\Bigg(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} B_h\Bigg) = \beta(B_h) = 0.$$

  In generale, β non è singolare rispetto a $\mathrm{sing}(\alpha, \beta)$, cfr. Osservazione 6.1.11.
- Dalle definizioni si ha che $\mathrm{intg}(\alpha, \beta)$ e $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)$ sono assolutamente continue rispetto a β.
- In generale, dalla definizione, si ha che $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)$ è nulla sugli insiemi finiti per β, ovvero è dispersa rispetto a β.

Osservazione 6.1.4.

- Per quanto osservato in 6.1.3, se $A \in \mathcal{D}$, si ha che $\alpha(A) = \mathrm{sing}(\alpha, \beta)(A)$ se e solo se α è singolare rispetto a β su A, se e solo se

  $$\exists B \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}(A) \quad \text{tale che} \quad \alpha(B) = \alpha(A), \ \beta(B) = 0.$$

- Invece, $\alpha \llcorner A = \mathrm{sing}(\alpha, \beta) \llcorner A$ se e solo se α è singolare rispetto a β su ogni $B \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}(A)$.
- Dalla definizione, si ha che α è assolutamente continua rispetto a β se e solo se $\mathrm{sing}(\alpha, \beta) \equiv 0$.
- Essendo $\mathrm{sing}(\alpha, \beta)$ singolare rispetto a β su ogni $A \in \mathcal{D}$, dall'Osservazione 6.1.3 segue che è singolare anche rispetto a $\mathrm{intg}(\alpha, \beta)$ e $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)$ su ogni $A \in \mathcal{D}$.
- Anche $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)$ è sempre *singolare* con $\mathrm{sing}(\alpha, \beta)$ su ogni $A \in \mathcal{D}$, cfr. Teorema 6.1.13–(2).

- In generale, senza ipotesi di σ–finitezza, cfr. Teorema 6.1.16, $\mathrm{intg}(\alpha,\beta)$ non è singolare per $\mathrm{sing}(\alpha,\beta)$ su X, né, tantomeno, $\mathrm{sing}(\alpha,\beta)$ e $\mathrm{intg}(\alpha,\beta)$ sono *mutuamente singolari* su X, cfr. Osservazione 6.1.11. In generale, anche $\mathrm{disp}(\alpha,\beta)$ non è singolare rispetto a $\mathrm{intg}(\alpha,\beta)$, né vale la relazione inversa, cfr. Osservazione 6.1.10.

Osservazione 6.1.5. Se α fosse σ–finita, allora una funzione f che realizzasse il valore di $\mathrm{intg}(\alpha,\beta)$ come massimo, cfr. Teorema 6.1.16, sarebbe limite crescente di funzioni integrabili rispetto a β e quindi $\{f>0\}$ sarebbe σ–finito rispetto a β mentre $\{f=+\infty\}$ sarebbe β–nullo.

Definizione 6.1.6. *Siano X un insieme, $\mathcal{D}$ una σ–algebra di parti di X e siano α, β due misure positive definite su $\mathcal{D}$. Si definisce, per $A\in\mathcal{D}$, la funzione di insieme:*

$$\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)\big(A\big)=$$
$$\sup\Big\{\int\limits_A f\,d\beta : f\in\mathcal{FM}(\mathcal{D}),\ f\geq 0,\ \{f>0\}\ \sigma\text{–finito per }\beta,\ \forall B\in\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{D}\ \int\limits_B f\,d\beta\leq\alpha(B)\Big\}$$

detta parte integrale speciale *di α rispetto a β.*

Osservazione 6.1.7.

- Se $\mathrm{intg}(\alpha,\beta)(A)<+\infty$, allora $\mathrm{intg}(\alpha,\beta)\llcorner A=\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)\llcorner A$.
- $\mathrm{intg}(\alpha,\beta)(A)\geq\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)\big(A\big)$
$$=\sup\Big\{\int\limits_A f\,d\beta\ :\ f\in\mathcal{FM}(\mathcal{D}),\ f\geq 0,\ \int\limits_A f\,d\beta<+\infty,\ \forall B\subseteq A,\ B\in\mathcal{D}\ \int\limits_B f\,d\beta\leq\alpha(B)\Big\}.$$
- $\mathrm{disp}(\alpha,\beta)$ è singolare per $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)$ e $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)$ è singolare per $\mathrm{disp}(\alpha,\beta)$ su ogni $A\in\mathcal{D}$, cfr. Teorema 6.1.13-(2).

Osservazione 6.1.8. Se $g\in\mathcal{FM}(\mathcal{D})$, $g\geq 0$, $\int g\,d\beta<+\infty$, e $g\cdot\beta\leq\alpha$, si ha
$$\mathrm{intg}\big(\alpha-g\cdot\beta,\beta\big)=\mathrm{intg}(\alpha,\beta)-g\cdot\beta.$$

Osservazione 6.1.9. La funzione $\mathrm{disp}(\alpha,\beta)$ è dispersa rispetto a β, cioè nulla sugli insiemi finiti rispetto a β e chiaramente α è dispersa per β su $A\in\mathcal{D}$ se e solo se $\alpha\llcorner A=\mathrm{disp}(\alpha,\beta)\llcorner A$. Pertanto, utilizzando che α è una misura e che β è crescente si deduce che $\mathrm{disp}(\alpha,\beta)$ è nulla, in particolare, sugli insiemi σ–finiti per β.
Se $\beta=+\infty\cdot\alpha$ è la misura nulla sugli insiemi α–nulli e infinita altrimenti, si ha
$$\mathrm{sing}(\alpha,\beta)=\mathrm{intg}(\alpha,\beta)\equiv 0\quad\text{e}\quad\mathrm{disp}(\alpha,\beta)=\alpha.$$

Osservazione 6.1.10.

- Si ha $\mathrm{sing}(\beta,\beta)=0$, $\mathrm{intg}(\beta,\beta)=\beta$ e $\mathrm{disp}(\beta,\beta)$ che assume solo i valori 0 e $+\infty$, *annullandosi sugli insiemi senza sottoinsiemi su cui β è dispersa e non nulla.*
- In generale, $\mathrm{disp}(\alpha,\beta)$ non è assolutamente continua rispetto a $\mathrm{disp}(\beta,\beta)$: si consideri α la misura di Lebesgue sulla retta e β la misura che conta i punti.
- Se $\psi\in\mathcal{MF}(\mathcal{D})$, $\psi\geq 0$, si ha, cfr. Osservazione 6.1.7,
$$\mathrm{sing}(\psi\cdot\beta,\beta)=0,\quad\mathrm{disp}(\psi\cdot\beta,\beta)=\mathrm{disp}(\beta,\beta)\llcorner\{\psi>0\}\llcorner\mathcal{D},$$
$$\mathrm{intg}(\psi\cdot\beta,\beta)=\psi\cdot\beta=\mathrm{intg}^\sigma(\psi\cdot\beta,\beta)\ +\ \mathrm{disp}(\psi\cdot\beta,\beta),$$
$$\psi\equiv 1\implies\mathrm{intg}^\sigma(\beta,\beta)(A)=\sup\{\beta(B):B\subseteq A,\ \beta(B)<+\infty\},\quad\beta=\mathrm{intg}^\sigma(\beta,\beta)+\mathrm{disp}(\beta,\beta).$$

Osservazione 6.1.11. Se $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\begin{aligned} &\mathrm{sing}(\mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{B}, \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{B}) \equiv 0, && \mathrm{sing}(\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{B}, \mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{B}) \equiv \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{B}, \\ &\mathrm{intg}(\mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{B}, \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{B}) \equiv 0, && \mathrm{intg}(\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{B}, \mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{B}) = +\infty \cdot \mathcal{H}^n, \\ &\mathrm{disp}(\mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{B}, \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{B}) \equiv \mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{B}, && \mathrm{disp}(\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{B}, \mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{B}) \equiv 0. \end{aligned}$$

Osservazione 6.1.12. Se $A \in \mathcal{D}$, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{sing}(\alpha \llcorner A, \beta \llcorner A) &= \mathrm{sing}(\alpha, \beta) \llcorner A, \\ \mathrm{intg}(\alpha \llcorner A, \beta \llcorner A) &= \mathrm{intg}(\alpha, \beta) \llcorner A, \\ \mathrm{disp}(\alpha \llcorner A, \beta \llcorner A) &= \mathrm{disp}(\alpha, \beta) \llcorner A. \end{aligned}$$

Teorema 6.1.13. *Siano $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ–algebra e α, β due misure positive definite su $\mathcal{D}$.*

(1)
- *Per $A \in \mathcal{D}$, gli estremi superiori che definiscono* $\mathrm{sing}(\alpha, \beta)(A)$, $\mathrm{intg}(\alpha, \beta)(A)$, $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha, \beta)(A)$ *e* $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)(A)$*, sono dei* massimi.
- $\mathrm{sing}(\alpha, \beta)$*,* $\mathrm{intg}(\alpha, \beta)$*,* $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha, \beta)$*, e* $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)$ *sono* misure *su $\mathcal{D}$.*

(2)
- $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)$ *e* $\mathrm{intg}(\alpha, \beta)$ *si annullano su* ogni *massimizzante di* $\mathrm{sing}(\alpha, \beta)$*.*
- $\mathrm{sing}(\alpha, \beta)$ *si annulla su* ogni *massimizzante di* $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)$ *per ogni $A \in \mathcal{D}$.*
- $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)$ *si annulla su $\{f > 0\}$, se f è massimizzante di* $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha, \beta)$ *e viceversa questa sui massimizzanti di* $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)$*, per ogni $A \in \mathcal{D}$.*
- *Dati T, F e g massimizzanti rispettivamente di* $\mathrm{sing}(\alpha, \beta)$*,* $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)$ *e* $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha, \beta)$ *su $A \in \mathcal{D}$, si ha che anche T, $F \setminus T$ ed $f = g \cdot \mathbb{1}_{A \setminus F \cup T}$, rispettivamente, lo sono.*

Osservazione 6.1.14.

- Riguardo l'ultimo punto del Teorema 6.1.13–(2), un'altra terna di massimizzanti "disgiunti" è data da $T \setminus F$, F ed $f = g \cdot \mathbb{1}_{A \setminus F \cup T}$.
- $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha, \beta)$ è nulla su $F \cup T$, cioè la sua restrizione ad A è concentrata su $A \setminus F \cup T$.
- Le misure $\mathrm{sing}(\alpha, \beta)$ e $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)$, ristrette ad A, non sono necessariamente concentrate sui loro generici massimizzanti in A, cfr. Osservazione 6.1.11.

Problema 6.1.15. *In generale,* $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)$ *e* $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha, \beta)$ *sono mutuamente singolari? Ovvero,* $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha, \beta)$ *è concentrata su $\{f > 0\}$ per qualche f sua massimizzante?*

Teorema 6.1.16. *Siano $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ–algebra e α, β due misure positive definite su $\mathcal{D}$.*

(1)
- *Se $A \in \mathcal{D}$ è finito per* $\mathrm{sing}(\alpha, \beta)$*, due insiemi che realizzano tale valore massimo hanno* differenza simmetrica nulla rispetto ad α*, se è finito per* $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)$ *due insiemi che realizzano tale valore hanno* differenza simmetrica nulla rispetto ad α*, se è finito per* $\mathrm{intg}(\alpha, \beta)$ *due funzioni che realizzano tale valore sono funzioni che differiscono in A* su un insieme nullo rispetto a β.
- *Detti rispettivamente $S \in \mathcal{D}$ e $D \in \mathcal{D}$, dei sottoinsiemi di $A \in \mathcal{D}$ che realizzano come massimo* $\mathrm{sing}(\alpha, \beta)(A)$ *e* $\mathrm{disp}(\alpha, \beta)(A)$ *ed $f \in \mathcal{FM}(\mathcal{D})$ una funzione, nulla fuori da A, che realizza come massimo* $\mathrm{intg}(\alpha, \beta)(A)$*, si ha:*

$$\mathrm{sing}(\alpha, \beta)(A) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{sing}(\alpha, \beta) \llcorner A \equiv \alpha \llcorner S; \tag{6.1.1}$$

$$\mathrm{intg}(\alpha, \beta)(A) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{intg}(\alpha, \beta) \llcorner A \equiv f \cdot \beta; \tag{6.1.2}$$

$$\mathrm{disp}(\alpha, \beta)(A) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{disp}(\alpha, \beta) \llcorner A \equiv \alpha \llcorner D. \tag{6.1.3}$$

- *Se* $\operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A)$*,* $\operatorname{intg}(\alpha,\beta)(A)$ *e* $\operatorname{disp}(\alpha,\beta)(A)$ *sono tutti finiti, si possono determinare gli insiemi massimizzanti* $S \in \mathscr{P}(A) \cap \mathcal{D}$*,* $D \in \mathscr{P}(A) \cap \mathcal{D}$ *nelle formule* (6.1.1)*,* (6.1.2) *e si può determinare* $f \in \mathcal{FM}(\mathcal{D})$ *nella* (6.1.3)*, per cui* S*,* D*,* $\{f > 0\}$ *sono* disgiunti *e le tre misure si* annullano tutte *su* $A \setminus S \cup D \cup \{f > 0\}$.

(2) Si ha, in generale,

$$\alpha = \operatorname{sing}(\alpha,\beta) + \operatorname{intg}(\alpha,\beta) + \operatorname{disp}(\alpha,\beta). \tag{6.1.4}$$

Osservazione 6.1.17. In generale, se una misura μ su Y è σ–finita ed è singolare per una misura ν sugli $H \subseteq Y$ per cui $\mu(H) < +\infty$, allora le due misure sono *mutuamente singolari* su Y. Pertanto, dagli enunciati 6.1.13–(2) e 6.1.16–(1), si deducono le estensioni del Teorema 6.1.16 nei vari casi di σ–finitezza, relativamente a massimizzanti “massimali” in misura: rispetto ad α per $\operatorname{sing}(\alpha,\beta)$ e $\operatorname{disp}(\alpha,\beta)$, rispetto a β per $\operatorname{intg}(\alpha,\beta)$.

Problema 6.1.18. *È vero che*

$$\begin{cases} \operatorname{sing}(\alpha,\beta) \equiv 0 \\ \alpha(A) < +\infty \Rightarrow \operatorname{disp}(\alpha,\beta)(A) = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \equiv \operatorname{intg}(\alpha,\beta)\,?$$

Problema 6.1.19. *Quando il funzionale rilassato della* ψ*–energia convessa* $\int_A \psi(Du)$ *è una misura, essa avrà parte singolare, integrale e dispersa rispetto alle misure* $\mathcal{H}^n$*. Se* ψ *fosse a crescita più che lineare è vero che il solo termine non nullo della decomposizione sarebbe* intg*?*

Problema 6.1.20. *In che ipotesi una funzione* f *che rappresenta* $\operatorname{intg}(\alpha,\beta)$ *è la* reciproca *di una che rappresenta* $\operatorname{intg}(\beta,\alpha)$*?*

Dimostrazione del Teorema 6.1.13–(1). Per provare che i valori estremali delle definizioni sono realizzati si suppone che, per $A \in \mathcal{D}$, nei vari casi rispettivamente, si abbia

$$\operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A) > 0, \quad \operatorname{intg}(\alpha,\beta)(A) > 0, \quad \operatorname{intg}^\sigma(\alpha,\beta)(A) > 0, \quad \operatorname{disp}(\alpha,\beta)(A) > 0,$$

essendo altrimenti un insieme massimizzante l'insieme *vuoto* e una funzione massimizzante la funzione *nulla*.

(*Sing*) Sia $\{S_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ una successione crescente di elementi di $\mathcal{D}$ contenuti in $A \in \mathcal{D}$ per cui

$$\operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A) = \lim_{h\to\infty} \alpha(S_h), \quad \beta(S_h) = 0, \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Per le proprietà di σ–additività delle misure α e β, posto $S = \bigcup S_h \in \mathcal{D}$, si ha

$$\operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A) = \alpha(S) = \operatorname{sing}(\alpha,\beta)(S), \quad \beta(S) = 0.$$

In particolare, $\operatorname{sing}(\alpha,\beta)$ è singolare con β su A. Si noti che se tale misura non fosse finita si potrebbe perdere l'unicità, a meno di insiemi α–nulli, di S.

(*Intg*) Sia $\{f_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $\mathcal{D}$–misurabili per cui

$$\operatorname{intg}(\alpha,\beta)(A) = \lim_{h\to\infty} \int_A f_h\, d\beta, \quad f_h \geq 0, \quad f_h \cdot \beta \llcorner A \leq \alpha \llcorner A, \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Sostituendo f_h con $f_h \cdot \mathbb{1}_A$, si può assumere che le f_h siano nulle al di fuori di A. Inoltre, fissato n, ogni $B \in \mathcal{D}$ sottoinsieme di A può essere decomposto in sottoinsiemi disgiunti appartenenti a $\mathcal{D}$, per ognuno dei quali esiste $h \le n$ tale che $f_1 \vee \cdots \vee f_n = f_h$. Per cui,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B \subseteq A, \quad B \in \mathcal{D} \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_B f_1 \vee \cdots \vee f_n \, d\beta \ \le \ \alpha(B),$$

essendo $f_1 \vee \cdots \vee f_n$ crescente e quindi convergente ad una funzione $\mathcal{D}$–misurabile f, nulla al di fuori di A, per il teorema di Beppo Levi si ha

$$\operatorname{intg}(\alpha,\beta)(A) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_1 \vee \cdots \vee f_n \, d\beta = \int\limits_A f \, d\beta = \operatorname{intg}(\alpha,\beta)(\{f>0\}), \ \ f \ge 0, \ \ f \cdot \beta \le \alpha.$$

Per provare la prima eguaglianza si usa il fatto che le $f_1 \vee \cdots \vee f_n$ ed f sono ammissibili per $\operatorname{intg}(\alpha,\beta)$ su A; per l'ultima uguaglianza, la convergenza è monotona crescente, quindi

$$A \supseteq \{f > 0\} \supseteq \{f_1 \vee \cdots \vee f_n > 0\}$$

e le funzioni $f_1 \vee \cdots \vee f_n$ sono ammissibili per $\operatorname{intg}(\alpha,\beta)$ su $\{f>0\}$, quindi

$$\int_A f d\beta = \operatorname{intg}(\alpha,\beta)(A) \ge \operatorname{intg}(\alpha,\beta)(\{f>0\}) \ge \int_{\{f>0\}} f_1 \vee \cdots \vee f_n \, d\beta \ \nearrow \int_A f \, d\beta.$$

Se tale integrale non fosse finito potrebbe perdersi l'unicità, a meno di insiemi β–nulli, di f.

$(Intg^\sigma)$ Rispetto a quanto appena mostrato basta osservare in più che gli insiemi $\{f_k > 0\}$ sono σ–finiti per β e quindi lo stesso vale per $\{f_1 \vee \cdots \vee f_n > 0\}$. Essendo la convergenza di $f_1 \vee \cdots \vee f_n$ ad f monotona crescente, si ha che $\{f > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n > 0\}$ è σ–finito rispetto a β:

$$\operatorname{intg}^\sigma(\alpha,\beta)(A) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_1 \vee \cdots \vee f_n \, d\beta = \int\limits_A f \, d\beta = \operatorname{intg}^\sigma(\alpha,\beta)(\{f>0\}),$$

$$f \ge 0, \ \{f>0\} \ \sigma\text{–finito per } \beta, \ f \cdot \beta \le \alpha.$$

$(Disp)$ Sia $\{D_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ una successione crescente di elementi di $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{D}$, per cui

$$\operatorname{disp}(\alpha,\beta)(A) \lim_{h\to\infty} \alpha(D_h), \ \alpha\llcorner D_h \text{ dispersa per } \beta\llcorner D_h, \forall h \in \mathbb{N}.$$

Se $C \subseteq \bigcup_{h\in\mathbb{N}} D_h$ è α–positivo, esiste un indice $h \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha(C \cap D_h) > 0$, ne segue che $\beta(C \cap D_h) = +\infty$ e quindi $\beta(C) = +\infty$. Per cui, posto $D = \bigcup D_h \in \mathcal{D}$, si ha

$$\operatorname{disp}(\alpha,\beta)(A) = \alpha(D) = \operatorname{disp}(\alpha,\beta)(D), \quad \alpha\llcorner D \text{ dispersa per } \beta\llcorner D.$$

Si noti che se tale misura non fosse finita si potrebbe perdere l'unicità, a meno di insiemi α–nulli, di D.

Proviamo, indipendentemente dalla precedente proprietà, che le tre funzioni di insieme sono misure. Si ha:

$$\begin{aligned}\operatorname{sing}(\alpha,\beta)\big(A\big) &= \sup\big\{\alpha(B) \ : \ B \in \mathcal{D}, \ B \subseteq A, \ \beta(B) = 0\big\} \\ &= \sup\big\{\alpha(A \cap B) \ : \ B \in \mathcal{D}, \ \beta(B \cap A) = 0\big\} \\ &= \sup\big\{\alpha\llcorner B(A) \ : \ B \in \mathcal{D}, \ \beta(B) = 0\big\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{intg}(\alpha,\beta)\big(A\big) &= \sup\Big\{\int\limits_A f\,d\beta \;:\; f\in\mathcal{FM}(\mathcal{D}),\ f\geq 0,\ \forall B\subseteq A,\ B\in\mathcal{D}\ \int\limits_B f\,d\beta\leq\alpha(B)\Big\}\\ &= \sup\Big\{f\cdot\beta(A)\;:\; f\in\mathcal{FM}(\mathcal{D}),\ f\geq 0,\ f\cdot\beta\llcorner A\leq\alpha\llcorner A\Big\}\\ &= \sup\Big\{f\cdot\beta(A)\;:\; f\in\mathcal{FM}(\mathcal{D}),\ f\geq 0,\ f\cdot\beta\leq\alpha\Big\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{intg}^{\sigma}(\alpha,\beta)\big(A\big) = \sup\Big\{\int\limits_A f\,d\beta :\ & f\in\mathcal{FM}(\mathcal{D}),\ f\geq 0,\\ & \{f>0\}\ \sigma\text{–finito per }\beta,\ \forall B\in\mathcal{D}\cap\mathcal{P}(A)\ \int\limits_B f\,d\beta\leq\alpha(B)\Big\}\\ = \sup\Big\{f\cdot\beta(A) :\ & f\in\mathcal{FM}(\mathcal{D}),\ f\geq 0,\\ & \{f>0\}\ \sigma\text{–finito per }\beta,\ f\cdot\beta\llcorner A\leq\alpha\llcorner A\Big\}\\ = \sup\Big\{f\cdot\beta(A) :\ & f\in\mathcal{FM}(\mathcal{D}),\ f\geq 0,\\ & \{f>0\}\ \sigma\text{–finito per }\beta,\ f\cdot\beta\leq\alpha\Big\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{disp}(\alpha,\beta)\big(A\big) &= \sup\Big\{\alpha(B)\;:\; B\in\mathcal{D},\ B\subseteq A,\ \alpha\llcorner B \text{ dispersa per } \beta\llcorner B\Big\}\\ &=\sup\Big\{\alpha(A\cap B)\;:\; B\in\mathcal{D},\ \alpha\llcorner A\cap B \text{ dispersa per } \beta\llcorner A\cap B\Big\}\\ &=\sup\Big\{\alpha\llcorner B(A)\;:\; B\in\mathcal{D},\ \alpha\llcorner B \text{ dispersa per } \beta\llcorner B\Big\}.\end{aligned}$$

Quindi, ognuna delle funzioni di insieme in questione è estremo superiore (al variare dei parametri B ed f nelle rispettive classi di ammissibilità) di misure su $\mathcal{D}$ per cui è numerabilmente subadditiva su $\mathcal{D}$, cfr. Teorema 5.2.25.
Si mostra poi la superadditività per unioni disgiunte. Ci si basa sul fatto che le classi ammissibili di insiemi e di funzioni sono chiuse per unione e rispettivamente per l'operazione di reticolo di massimo tra due funzioni. Siano $A, C\in\mathcal{D}$, $A\cap C=\emptyset$.

Per quanto riguarda la parte singolare: per ogni $B, D\in\mathcal{D}$, $B\subseteq A$, $D\subseteq C$ con $\beta(B)=\beta(D)=0$, essendo $B\cup D\in\mathcal{D}\cap\mathcal{P}(A)$ un'unione disgiunta e $\beta(B\cup D)=0$, si ha

$$\beta(B\cup D)=0 \text{ e } \alpha(B)+\alpha(D)=\alpha(B\cup D)\leq \operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A\cup C).$$

Per quanto riguarda la parte integrale: per ogni $g,h\in\mathcal{FM}(\mathcal{D})$, $g\geq 0$, $h\geq 0$ con $g\cdot\beta\llcorner A\leq\alpha\llcorner A$ e $h\cdot\beta\llcorner C\leq\alpha\llcorner C$, essendo $A\cap C=\emptyset$, si ha

$$g\mathbb{1}_A\vee h\mathbb{1}_C\cdot\beta=(g\mathbb{1}_A+h\mathbb{1}_C)\cdot\beta\llcorner A\cup C\leq\alpha\llcorner A\cup C,$$

quindi,

$$\int_A g\,d\beta+\int_C h\,d\beta \;=\; \int_A g\mathbb{1}_A\,d\beta+\int_C h\mathbb{1}_C\,d\beta \;=\; \int_{A\cup C}(g\mathbb{1}_A+h\mathbb{1}_C)\,d\beta \;\leq \operatorname{intg}(\alpha,\beta)(A\cup C).$$

Per la parte integrale speciale: se $\{g>0\}$ e $\{h>0\}$ sono σ–finiti per β anche $\{g\mathbb{1}_A+h\mathbb{1}_C>0\}$ lo è, per cui:

$$\int_A g\,d\beta+\int_C h\,d\beta = \qquad\cdots\qquad \leq \operatorname{intg}^{\sigma}(\alpha,\beta)(A\cup C).$$

Per quanto riguarda la parte dispersa: per ogni $B, D \in \mathcal{D}$, $B \subseteq A$, $D \subseteq C$ con $\alpha \llcorner B$ dispersa per $\beta \llcorner B$ e $\alpha \llcorner D$ dispersa per $\beta \llcorner D$, essendo $B \cup D \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}(A)$ un'unione disgiunta, si ha $\alpha \llcorner B \cup D$ dispersa per $\beta \llcorner B \cup D$, quindi

$$\alpha(B) + \alpha(D) = \alpha(B \cup D) \le \operatorname{disp}(\alpha, \beta)(A \cup C).$$

Passando agli estremi superiori al variare di B, D e g, h, si ottiene che le funzioni di insieme sono superadditive su $\mathcal{D}$ e quindi additive su $\mathcal{D}$.
Pertanto, si conclude grazie al Teorema 5.2.50 che sono misure definite su $\mathcal{D}$. Q.E.D.

Dimostrazione del Teorema 6.1.13–(2). Dimostriamo che $\operatorname{intg}(\alpha, \beta)$, $\operatorname{intg}^\sigma(\alpha, \beta)$ e $\operatorname{disp}(\alpha, \beta)$ si annullano su ogni massimizzante di $\operatorname{sing}(\alpha, \beta)$, per ogni $A \in \mathcal{D}$ e che $\operatorname{sing}(\alpha, \beta)$ si annulla su ogni massimizzante di $\operatorname{disp}(\alpha, \beta)$, per ogni $A \in \mathcal{D}$. Anche ora supponiamo che i valori $\operatorname{sing}(\alpha, \beta)(A)$, $\operatorname{intg}(\alpha, \beta)(A)$, $\operatorname{intg}^\sigma(\alpha, \beta)(A)$ e $\operatorname{disp}(\alpha, \beta)(A)$ siano tutti non nulli, poiché altrimenti si otterrebbe la mutua singolarità semplicemente con la coppia di insiemi A, $\emptyset$.

Siano $S_A = S \in \mathcal{D}$, $D_A = D \in \mathcal{D}$ ed $f_A = f \in \mathcal{FM}(\mathcal{D})$ massimizzanti su A, rispettivamente di $\operatorname{sing}(\alpha, \beta)$, $\operatorname{disp}(\alpha, \beta)$, $\operatorname{intg}(\alpha, \beta)$,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sing}(\alpha, \beta)(A) = \operatorname{sing}(\alpha, \beta)(S) = \alpha(S) > 0, && \beta(S) = 0,\\
&\operatorname{intg}(\alpha, \beta)(A) = \operatorname{intg}(\alpha, \beta)(\{f > 0\}) = \int_A f d\beta > 0, \quad f \ge 0, && f \cdot \beta \llcorner A \le \alpha \llcorner A;\\
&\operatorname{disp}(\alpha, \beta)(A) = \operatorname{disp}(\alpha, \beta)(D) = \alpha(D) > 0, && \alpha \llcorner D \text{ dispersa per } \beta \llcorner D.
\end{aligned}$$

Per l'assoluta continuità di $\operatorname{disp}(\alpha, \beta)$ rispetto a β, si ha che $\operatorname{disp}(\alpha, \beta)(S) = \beta(S) = 0$. Quindi, $\operatorname{sing}(\alpha, \beta)$ è singolare su A, con $\operatorname{disp}(\alpha, \beta)$ nulla su S. Analogamente $\operatorname{intg}(\alpha, \beta)$ è assolutamente continua rispetto a β e si ha $\operatorname{intg}(\alpha, \beta)(S) = 0$. Si ha dunque che $\operatorname{sing}(\alpha, \beta)$ è singolare su A, con $\operatorname{intg}(\alpha, \beta)$ nulla su S. L'asserto per $\operatorname{intg}^\sigma(\alpha, \beta)$ segue poiché $\operatorname{intg}(\alpha, \beta) \ge \operatorname{intg}^\sigma(\alpha, \beta)$.

Va ora mostrato che $\operatorname{sing}(\alpha, \beta)(D) = 0$. Infatti, se $B \in \mathcal{D}$, $B \subseteq D$, $\beta(B) = 0 < +\infty$, essendo α dispersa per β su D, deve essere $\alpha(B) = 0$. Passando all'estremo superiore al variare di tali B, si conclude.

Osservazione 6.1.21. Si noti che $\operatorname{sing}(\alpha, \beta)$ e $\operatorname{disp}(\alpha, \beta)$ sono mutuamente singolari su $S \cup D$, in quanto

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sing}(\alpha, \beta)(D) = \operatorname{sing}(\alpha, \beta)(S \cap D) = \operatorname{sing}(\alpha, \beta)(D \setminus S) = 0,\\
&\operatorname{disp}(\alpha, \beta)(S) = \operatorname{disp}(\alpha, \beta)(S \cap D) = \operatorname{disp}(\alpha, \beta)(S \setminus D) = 0,\\
&\operatorname{sing}(\alpha, \beta)(S \setminus D) = \operatorname{sing}(\alpha, \beta)(S) = \operatorname{sing}(\alpha, \beta)(S \cup D),\\
&\operatorname{disp}(\alpha, \beta)(D \setminus S) = \operatorname{disp}(\alpha, \beta)(D) = \operatorname{disp}(\alpha, \beta)(S \cup D).
\end{aligned}$$

Proviamo per prima cosa che $\operatorname{disp}(\alpha, \beta)$ si annulla su $\{f > 0\}$, per ogni f massimizzante per $\operatorname{intg}^\sigma(\alpha, \beta)$ su un qualsiasi $A \in \mathcal{D}$. Sia quindi $f_A = f \in \mathcal{FM}(\mathcal{D})$ una tale massimizzante, si ha

$$\operatorname{intg}^\sigma(\alpha, \beta)(A) = \int_A f d\beta = \operatorname{intg}^\sigma(\alpha, \beta)\big(\{f > 0\}\big), \;\; f \ge 0, \;\; \{f > 0\} \; \sigma\text{–finito per } \beta, \;\; f \cdot \beta \llcorner A \le \alpha \llcorner A.$$

Come osservato, cfr. Osservazione 6.1.9, per la sua definizione, $\operatorname{disp}(\alpha, \beta)$ è dispersa rispetto a β ed essendo una misura si annulla sugli insiemi σ–finiti per β. Pertanto, $\operatorname{disp}(\alpha, \beta)(\{f > 0\}) = 0$.
Mostriamo ora che $\operatorname{intg}^\sigma(\alpha, \beta)$ si annulla su ogni massimizzante su A di $\operatorname{disp}(\alpha, \beta)$, in particolare $\operatorname{disp}(\alpha, \beta)$ è singolare per $\operatorname{intg}^\sigma(\alpha, \beta)$ su ogni $A \in \mathcal{D}$. Senza perdere in generalità, si assume

come in precedenza che $\mathrm{disp}(\alpha,\beta)(A)$ sia non nullo.
Sia $D_A = D \in \mathcal{D}$ che realizza come massimo il valore $\mathrm{disp}(\alpha,\beta)(A)$:

$$\mathrm{disp}(\alpha,\beta)(A) = \mathrm{disp}(\alpha,\beta)(D) = \alpha(D) > 0, \quad \alpha\llcorner D \text{ dispersa per } \beta\llcorner D$$

e sia $g \in \mathcal{FM}(\mathcal{D})$, nulla fuori da D, una funzione ammissibile per realizzare il valore $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)(D)$, con $\int_D g\,d\beta < +\infty$:

$$g \geq 0, \quad \int_D g\,d\beta < +\infty, \quad g\cdot\beta\llcorner D \leq \alpha\llcorner D.$$

Deve essere $\int_{\{g>0\}} g\,d\beta = 0$, infatti:

$$\forall n > 0, \quad \beta\left(\left\{g > \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n\int_{\{g>\frac{1}{n}\}} gd\beta \leq n\alpha\left(\left\{g > \frac{1}{n}\right\}\right) \quad \text{con} \quad \int_{\{g>\frac{1}{n}\}} gd\beta < +\infty.$$

Poiché α è dispersa per β su D, si ha o $\alpha\left(\left\{g > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0 = \beta\left(\left\{g > \frac{1}{n}\right\}\right)$ o $\beta\left(\left\{g > \frac{1}{n}\right\}\right) = +\infty$, ma questo secondo caso è escluso per la finitezza dell'integrale.
Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $\beta\left(\left\{g > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$, quindi $\beta(\{g > 0\}) = 0$ e in particolare, $\int_{\{g>0\}} g\,d\beta = 0$ per ogni g con integrale finito, ammissibile per realizzare il valore $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)(D)$, cfr. Osservazione 6.1.7. In definitiva,

$$\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)(D) = 0, \quad \mathrm{disp}(\alpha,\beta)(A) = \mathrm{disp}(\alpha,\beta)(D),$$

cioè $\mathrm{disp}(\alpha,\beta)$ è singolare su A per $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)$ concentrata su $A \setminus D$.

Mostriamo ora che dati $T,\ F \in \mathcal{D}\cap\mathcal{P}(A)$ e $g \in \mathcal{FM}(\mathcal{D})$ nulla al fuori di A, rispettivamente massimizzanti su A per $\mathrm{sing}(\alpha,\beta)$, $\mathrm{disp}(\alpha,\beta)$ e $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)$, allora anche $S = T$, $D = F \setminus T$ ed $f = g\cdot\mathbb{1}_{A\setminus D\cup T} = g\cdot\mathbb{1}_{A\setminus F\cup T}$ sono massimizzanti delle rispettive misure su A.
Preliminarmente si osserva che gli insiemi S, D e $\{f > 0\}$ sono a due a due disgiunti.
Si ricorda che, per i precedenti punti, in generale si ha

$$\begin{aligned}
&0 = \mathrm{sing}(\alpha,\beta)(F),\\
&0 = \mathrm{disp}(\alpha,\beta)(T) = \mathrm{disp}(\alpha,\beta)(\{g > 0\}),\\
&0 = \beta(T) = \mathrm{intg}(\alpha,\beta)(T) \geq \mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)(T) \geq \int_T gd\beta \geq 0,\\
&0 = \mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)(F) \geq \int_A g\mathbb{1}_F d\beta = \int_F gd\beta \geq 0.
\end{aligned}$$

Si mostra che D ed f sono ammissibili su A, rispettivamente per $\mathrm{disp}(\alpha,\beta)$ ed $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)$.
Infatti, α è dispersa per β su $D \subseteq F$ poiché lo è su F e $f\cdot\beta \leq \alpha$ poiché $f \leq g$.
Si ottiene infine che sono massimizzanti considerando che $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)(F\cup T)$ e l'integrale di g su $F \cup T$, rispetto a β, sono nulli:

$$\mathrm{disp}(\alpha,\beta)(A) = \alpha(F) = \mathrm{disp}(\alpha,\beta)(F) = \mathrm{disp}(\alpha,\beta)(F\cap T) + \mathrm{disp}(\alpha,\beta)(D) = \mathrm{disp}(\alpha,\beta)(D) = \alpha(D),$$

$$\begin{aligned}
\int_A fd\beta = \int_{A\setminus F\cup T} gd\beta = \int_A gd\beta = \mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)(A) = \mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)(\{g > 0\})\\
= \mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)(\{g > 0\} \setminus F \cup T) = \mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)(\{f > 0\}).
\end{aligned}$$

Quindi D è massimizzante su A per $\mathrm{disp}(\alpha,\beta)$ ed f è massimizzante su A per $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)$.
Q.E.D.

Dimostrazione del Teorema 6.1.16–(1).

- *Unicità dei massimizzanti.*

$(Sing)$ Se $\operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A) < +\infty$ e $\operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A) = \alpha(S) = \alpha(T)$, $\beta(S) = \beta(T) = 0$, $S,\ T \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}(A)$, dalla massimalità segue

$$\alpha(S) = \alpha(S \cup T)$$

e dalla finitezza,

$$\begin{aligned} \alpha(S) &= \alpha(S \cup T) = \alpha(S) + \alpha(T) - \alpha(S \cap T), \\ \alpha(S \cap T) &= \alpha(T) = \alpha(T \setminus S) + \alpha(S \cap T), \\ \alpha(T \setminus S) &= 0. \end{aligned}$$

Per simmetria, si ha anche $\alpha(S \setminus T) = 0$, per cui $\alpha(S \triangle T) = 0$.

$(Intg)$ Se $\operatorname{intg}(\alpha,\beta)(A) < +\infty$ e

$$\operatorname{intg}(\alpha,\beta)(A) = \int_A f d\beta = \int_A g d\beta,\ \ f,\ g \geq 0,\ f{\cdot}\beta \llcorner A,\ g{\cdot}\beta \llcorner A \leq \alpha \llcorner A,\ f, g \in \mathcal{FM}(\mathcal{D}),$$

dalla massimalità segue

$$\int_A f d\beta = \int_A f \vee g d\beta$$

e dalla finitezza,

$$\begin{aligned} \int_A f d\beta &= \int_A f \vee g d\beta = \int_A f d\beta + \int_A g d\beta - \int_A f \wedge g d\beta, \\ \int_A f \wedge g d\beta &= \int_A g d\beta = \int_A (g - f)^+ d\beta + \int_A f \wedge g d\beta, \\ \int_A (g - f)^+ d\beta &= 0. \end{aligned}$$

Per simmetria si ha anche $\int_A (f-g)^+ d\beta = 0$, per cui si ha $\int_A |f - g| d\beta = 0$.

Esercizio 6.1.22. Dimostrare in ipotesi di finitezza per $\operatorname{disp}(\alpha,\beta)(A)$, l'unicità a meno di insiemi α–nulli dell'insieme che realizza tale valore.

- *Rappresentazione.*

$(Sing)$ Se $\operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A)$ è finita su un insieme $A \in \mathcal{D}$, si ha che per ogni sottoinsieme $B \in \mathcal{D}$ di A è determinato, a meno di insiemi α–nulli, l'insieme S_B che realizza come massimo il valore $\operatorname{sing}(\alpha,\beta)(B)$. Si ottiene quanto desiderato per $S = S_A$. Per additività delle misure:

$$\begin{aligned} \operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A) &= \operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A \setminus B) + \operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A \cap B) \\ &= \alpha\big(S_{A\setminus B}\big) + \alpha\big(S_{A\cap B}\big) \\ &= \alpha\big(S_{A\setminus B} \cup S_{A\cap B}\big). \end{aligned}$$

Essendo le classi di insiemi ammissibili chiuse per unione ed essendo $\operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A) < +\infty$, per unicità si ha che

$$\alpha\Big(\big(S_{A\setminus B} \cup S_{A\cap B}\big) \triangle S_A\Big) = 0.$$

Quindi, essendo $S_{A\setminus B}$, $S_{A\cap B}$ contenuti rispettivamente in $A \setminus B$, $A \cap B$ e disgiunti, si ottiene:

$$\alpha\big(S_A \cap B\big) = \alpha\big(S_{A\cap B}\big) = \mathrm{sing}(\alpha,\beta)(B),$$

così per ogni C per cui $B = A \cap C \in \mathcal{D}$, si ha

$$\alpha(S_A \cap C) = \alpha(S_A \cap C \cap A) = \mathrm{sing}(\alpha,\beta)(C \cap A),$$

cioè, $\alpha \llcorner S_A = \mathrm{sing}(\alpha,\beta) \llcorner A$.

$(Intg)$, $(Disp)$ In maniera analoga, grazie all'unicità garantita dalla finitezza e alla chiusura per operazioni di reticolo ed unione delle rispettive classi di funzioni ed insiemi ammissibili, si provano le relazioni per le altre due misure.

- *Partizione.*

Per costruire la "partizione di A di concentrazione" rispetto alle tre misure, per l'ultimo punto del Teorema 6.1.13–(2) si trovano S, D, f, nulla su fuori da A, massimizzanti su A per $\mathrm{sing}(\alpha,\beta)$, $\mathrm{disp}(\alpha,\beta)$ e $\mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)$ con $S \cap D = \emptyset$, $S \cap \{f > 0\} = \emptyset$, $D \cap \{f > 0\} = \emptyset$. Avendo come ipotesi aggiuntiva che $\mathrm{sing}(\alpha,\beta)(A) + \mathrm{disp}(\alpha,\beta)(A) + \mathrm{intg}(\alpha,\beta)(A) < +\infty$, si ha innanzitutto che $\mathrm{intg}(\alpha,\beta) = \mathrm{intg}^\sigma(\alpha,\beta)$ su A. Quindi, dalle formule (6.1.1), (6.1.2), (6.1.3) segue

$$\mathrm{sing}(\alpha,\beta)(A \setminus S) = 0,\ \mathrm{disp}(\alpha,\beta)(A \setminus D) = 0,\ \mathrm{intg}(\alpha,\beta)(\{f = 0\}) = \int_{\{f=0\}} f d\beta = 0,$$

pertanto,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sing}(\alpha,\beta)(A \setminus S \cup D \cup \{f > 0\}) \leq \mathrm{sing}(\alpha,\beta)(A \setminus S) = 0,\\
&\mathrm{disp}(\alpha,\beta)(A \setminus S \cup D \cup \{f > 0\}) \leq \mathrm{disp}(\alpha,\beta)(A \setminus D) = 0,\\
&\mathrm{intg}(\alpha,\beta)(A \setminus S \cup D \cup \{f > 0\}) \leq \mathrm{sing}(\alpha,\beta)(\{f = 0\}) = 0.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lezione VII

7.1 Una Generalizzazione del Teorema di Radon–Nikodym/2

Dimostrazione del Teorema 6.1.16–(2). Per provare in generale l'uguaglianza (6.1.4), preliminarmente si osserva che, essendo α maggiore delle altre tre misure, non è riduttivo dimostrare l'uguaglianza solo per gli $A \in \mathcal{D}$ per cui

$$\operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A) \;+\; \operatorname{intg}(\alpha,\beta)(A) \;+\; \operatorname{disp}(\alpha,\beta)(A) \;<\; +\infty \tag{7.1.1}$$

Si assumerà quindi nel seguito questa condizione, inoltre converrà introdurre la seguente notazione:

Definizione 7.1.1.

$$\mathcal{F} \;=\; \left\{\; A \in \mathcal{D} \;:\; \operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A) \;+\; \operatorname{intg}(\alpha,\beta)(A) \;+\; \operatorname{disp}(\alpha,\beta)(A) \;<\; +\infty \;\right\}.$$

Dato $A \in \mathcal{F}$, si considereranno anche $S \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}(A)$, $D \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}(A)$, $f \in \mathcal{FM}(\mathcal{D})$ nulla fuori da A, rispettivamente massimizzanti su A per $\operatorname{sing}(\alpha,\beta)$, $\operatorname{disp}(\alpha,\beta)$, $\operatorname{intg}(\alpha,\beta)$, che soddisfano le proprietà nella tesi del Teorema 6.1.16–(1). Ricordiamole, indicando con R l'insieme "residuale" $A \setminus S \cup D \cup \{f > 0\}$:

$$S \cap D = \emptyset, \quad S \cup D \subseteq \{f = 0\}, \tag{7.1.2}$$

$$\operatorname{sing}(\alpha,\beta)(R) \;=\; \operatorname{intg}(\alpha,\beta)(R) \;=\; \operatorname{disp}(\alpha,\beta)(R) \;=\; 0, \quad R = A \setminus S \cup D \cup \{f > 0\}, \tag{7.1.3}$$

$$\operatorname{sing}(\alpha,\beta) \llcorner A = \alpha \llcorner S = \operatorname{sing}(\alpha,\beta) \llcorner A \setminus D, \tag{7.1.4}$$

$$\operatorname{intg}(\alpha,\beta) \llcorner A = \operatorname{intg}(\alpha,\beta) \llcorner \{f > 0\} = f \cdot \beta = \operatorname{intg}(\alpha,\beta) \llcorner A \setminus S \cup D,$$

$$\operatorname{disp}(\alpha,\beta) \llcorner A = \alpha \llcorner D = \operatorname{disp}(\alpha,\beta) \llcorner A \setminus S \cup \{f > 0\},$$

in particolare,

$$\operatorname{intg}(\alpha,\beta)(S) = \operatorname{disp}(\alpha,\beta)(S) = 0, \tag{7.1.5}$$

$$\operatorname{sing}(\alpha,\beta)(\{f > 0\}) = \operatorname{disp}(\alpha,\beta)(\{f > 0\}) = 0,$$

$$\operatorname{sing}(\alpha,\beta)(D) = \operatorname{intg}(\alpha,\beta)(D) = 0.$$

Con queste assunzioni e notazioni vi sono altri due passi fondamentali per provare l'uguaglianza (6.1.4).

Iniziamo con il ridurci al caso in cui β è finita.

Lemma 7.1.2. *Se si ha che se*

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \beta(A) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \alpha(A) = \operatorname{sing}(\alpha,\beta)\big(A\big) + \operatorname{intg}(\alpha,\beta)\big(A\big),$$

allora

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \alpha(A) = \operatorname{sing}(\alpha,\beta)\big(A\big) + \operatorname{intg}(\alpha,\beta)\big(A\big) + \operatorname{disp}(\alpha,\beta)\big(A\big).$$

Dimostrazione. È sufficiente provare la validità della formula sul sottoinsieme residuale $R = A \setminus S \cup D \cup \{f > 0\}$, ove tutte e tre le misure $\operatorname{sing}(\alpha,\beta)$, $\operatorname{intg}(\alpha,\beta)$ e $\operatorname{disp}(\alpha,\beta)$ si annullano e sui sottoinsiemi S, $\{f > 0\}$, D di A, che rispettivamente "supportano" la parte singolare, la parte integrale e quella dispersa, di α rispetto a β su A. Infatti, questi quattro insiemi sono una partizione di A e la tesi segue per l'additività delle quattro misure α, $\operatorname{sing}(\alpha,\beta)$, $\operatorname{intg}(\alpha,\beta)$ e $\operatorname{disp}(\alpha,\beta)$.

Per prima cosa mostriamo che $\alpha(R) = 0$, si noti che per definizione $R \in \mathcal{F}$. Se α è dispersa per β su R allora $\alpha(R) = \operatorname{disp}(\alpha,\beta)(R) = 0$. D'altronde, il caso contrario è escluso dalle ipotesi: se α non fosse dispersa per β su R vi sarebbe $C \subseteq R \in \mathcal{F}$, $C \in \mathcal{F}$, per cui $\alpha(C) > 0$ e $\beta(C) < +\infty$, ma allora

$$\alpha(C) = \operatorname{sing}(\alpha,\beta)(C) + \operatorname{intg}(\alpha,\beta)(C) \leq \operatorname{sing}(\alpha,\beta)(R) + \operatorname{intg}(\alpha,\beta)(R) = 0.$$

Per quanto riguarda S e D, dalle formule (7.1.4), (7.1.5) si ottiene

$$\alpha(S) = \operatorname{sing}(\alpha,\beta)(S) = \operatorname{sing}(\alpha,\beta)(A), \quad \alpha(D) = \operatorname{disp}(\alpha,\beta)(D) = \operatorname{disp}(\alpha,\beta)(A).$$

Esaminiamo il supporto di $\operatorname{intg}(\alpha,\beta)$. Poiché ci si limita ad $A \in \mathcal{F}$, si ha che f ha integrale rispetto a β finito su A. Quindi i sottoinsiemi di $A \in \mathcal{F}$,

$$I_h = \{x \in A \setminus S \ : \ f(x) > 1/h\}, \quad h \in \mathbb{N},$$

appartengono ad $\mathcal{F}$ e hanno misura rispetto a β finita. Dalle ipotesi si ottiene

$$\alpha(I_h) = \operatorname{sing}(\alpha,\beta)(I_h) + \operatorname{intg}(\alpha,\beta)(I_h),$$

quindi, per le proprietà di continuità delle misure su successioni crescenti di insiemi, si deduce dalle formule (7.1.4), (7.1.5) che

$$\alpha\big(\{f > 0\}\big) = \operatorname{sing}(\alpha,\beta)\big(\{f > 0\}\big) + \operatorname{intg}(\alpha,\beta)\big(\{f > 0\}\big) = \operatorname{intg}(\alpha,\beta)\big(\{f > 0\}\big) = \operatorname{intg}(\alpha,\beta)\big(A\big).$$

Infine, dalle formule (7.1.2)–(7.1.5) e dall'additività di misure si ottiene la tesi. Q.E.D.

Proviamo ora la decomposizione nel caso in cui β è finita.

Definizione 7.1.3. *Siano γ e δ due funzioni positive a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ e definite sulla famiglia di insiemi $\mathcal{G}$, poniamo*

$$(\gamma - \delta)^+(A) = \sup\big\{\gamma(B) - \delta(B) \ : \ B \in \mathcal{G}, \quad B \subseteq A, \quad +\infty > \delta(B)\big\} \vee 0.$$

Osservazione 7.1.4.

- Se le due funzioni si annullano su $\emptyset \in \mathcal{G}$ si ha $(\gamma - \delta)^+(A) \geq 0$ e l'estremo superiore può essere limitato ai B per cui valga anche $\delta(B) \leq \gamma(B)$.
- Ogniqualvolta $\delta(A) < +\infty$ o $\gamma(A) < +\infty$, si ha $\gamma(A) - \delta(A) \ \leq \ (\gamma - \delta)^+$.
- Se γ è crescente, $(\gamma - \delta)^+(A) \ \leq \ \gamma(A)$.

- La funzione di insieme $(\gamma-\delta)^+$ è crescente rispetto all'inclusione.
- Se γ e δ sono nulle sul vuoto ed additive sull'anello di insiemi $\mathcal{G}$, allora anche $(\gamma-\delta)^+$, ristretta a $\mathcal{G}$, lo è. Se γ e δ sono misure sul σ–anello $\mathcal{G}$, anche $(\gamma-\delta)^+$ lo è.

Lemma 7.1.5. *Siano δ, γ misure definite sul σ–anello di insiemi $\mathcal{G}$ e $A \in \mathcal{G}$, si ha*

$$(\delta-\gamma)^+(A) = \sup\bigl\{\delta(B)-\gamma(B) \ : \ B \in \mathcal{G}, \quad B \subseteq A, \quad \gamma(B) < +\infty, \quad (\gamma-\delta)^+(B) = 0\bigr\}.$$

Dimostrazione.

(i) Sia $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{D}$ tale che

$$+\infty > \gamma(B) \geq (\gamma-\delta)^+(B) > 0.$$

Con un procedimento iterativo si tolgono a B le parti che non darebbero contributo ad $(\delta-\gamma)^+$ nella zona ove $\gamma \geq \delta$, ottenendo un decremento di $(\gamma-\delta)^+(B)$, sino ad annullarlo. Esiste $C_1 \subseteq B$, $C_1 \in \mathcal{D}$ con $\delta(C_1) < +\infty$, tale che

$$\begin{cases} \gamma(C_1) - \delta(C_1) \geq 0 \\ \gamma(C_1) - \delta(C_1) \geq (\gamma-\delta)^+(B) - 1 \end{cases} \qquad \delta(C_1) + \gamma(C_1) < +\infty,$$

posto quindi $B_1 = B \setminus C_1$ si ha, grazie all'additività e a queste disuguaglianze,

$$\delta(B_1) - \gamma(B_1) \ \geq \ \delta(B) - \gamma(B), \quad (\gamma-\delta)^+(B_1) = (\gamma-\delta)^+(B) - (\gamma-\delta)^+(C_1) \leq 1.$$

Iterando il procedimento, si ottengono due successioni $\bigl\{B_h\bigr\}_{h\in\mathbb{N}}$ e $\bigl\{C_h\bigr\}_{h\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{D}$ con $\delta(C_h) < +\infty$, tali che, posto $B_{-1} = B_0 = B$, $C_0 = \emptyset$, si ha, per ogni $h \in \mathbb{N}$,

$$C_{h+1} \subseteq B_h = B_{h-1} \setminus C_h = B \setminus \bigcup_{i=1}^{h} C_i \subseteq B_{h-1},$$

$$\begin{cases} \gamma(C_h) - \delta(C_h) \geq 0 \\ \gamma(C_h) - \delta(C_h) \geq (\gamma-\delta)^+(B_{h-1}) - 1/h \end{cases} \qquad \alpha(C_h) + \gamma(C_h) < +\infty,$$

per additività e queste disuguaglianze, si ottiene

$$\delta(B_h) - \gamma(B_h) \geq \delta(B_{h-1}) - \gamma(B_{h-1}), \quad (\gamma-\delta)^+(B_h) \leq 1/h. \tag{7.1.6}$$

Quindi, posto $B_\infty = \bigcap_{h=1}^\infty B_h = B \setminus \bigcup_{h=1}^\infty C_h \in \mathcal{D}$, per la monotonia di $(\gamma-\delta)^+$, segue

$$0 \ \leq \ (\gamma-\delta)^+(B_\infty) \ \leq \ \lim_{h\to\infty} 1/h = 0.$$

Cioè $(\gamma-\delta)^+(B_\infty) = 0$ e per definizione,

$$\forall D \subseteq B_\infty, \ D \in \mathcal{D} \quad \delta(D) = +\infty \ \text{ oppure } \ \gamma(D) \leq \delta(D) < +\infty.$$

(ii) Quando $\delta(B_\infty) = +\infty$, l'uguaglianza è provata poiché

$$(\gamma-\delta)^+(B_\infty) = 0, \ \ \gamma(B_\infty) < +\infty, \ \ (\delta-\gamma)^+(A) = \delta(B) - \gamma(B) = \delta(B_\infty) - \gamma(B_\infty) = +\infty.$$

(iii) Altrimenti, si ha $\gamma\llcorner B_\infty \leq \delta\llcorner B_\infty$, $\delta(B_\infty) < +\infty$.

Se $\delta(B) < +\infty$ si può passare al limite, per convergenza dominata, nella formula (7.1.6), ottenendo

$$\delta(B_\infty) - \gamma(B_\infty) \geq \delta(B) - \gamma(B),$$

quindi B_∞ sarebbe un candidato più vantaggioso di B per realizzare $(\delta - \gamma)^+(A)$, con altresì $(\gamma - \delta)^+(B_\infty) = 0$.

Se $\delta(B) = +\infty$ si osserva che, essendo $\delta(B_\infty) < +\infty$, $\gamma\Big(\bigcup_{h=1}^\infty C_h\Big) < +\infty$, $(\delta - \gamma)^+$ una misura e l'unione dei C_h disgiunta,

$$\delta(B) = \delta\Big(\bigcup_{h=1}^\infty C_h\Big) - \delta(B_\infty) = +\infty = \delta\Big(\bigcup_{h=1}^\infty C_h\Big) = (\delta - \gamma)^+\Big(\bigcup_{h=1}^n C_h\Big) = \sum_{h=1}^\infty (\delta - \gamma)^+(C_h),$$

$$\forall h \in \mathbb{N},\ \ \delta(C_h) < +\infty,$$

riducendosi così al candidato $\bigcup_{h=1}^\infty C_h$ che è σ–finito per δ. Pertanto, per ogni $h \geq 1$, per quanto appena provato nel caso di finitezza rispetto a δ (con C_h al posto di B), si ha

$$\exists D_h \in \mathcal{D},\ \ D_h \subseteq C_h,\ \ \ \gamma(D_h) < +\infty,\ \ \ (\gamma - \delta)^+(D_h) = 0,$$

$$\frac{1}{2^h} + \delta(D_h) - \gamma(D_h) \geq (\delta - \gamma)^+(C_h).$$

Essendo anche i D_h a due a due disgiunti e $\gamma\Big(\bigcup_{h=1}^\infty D_h\Big) \leq \gamma(B) < +\infty$, per Beppo Levi

$$\begin{aligned}(\delta - \gamma)^+(A) = +\infty = (\delta - \gamma)^+\Big(\bigcup_{h=1}^\infty C_h\Big) &= \lim_{n\to\infty}(\delta - \gamma)^+\Big(\bigcup_{h=1}^n C_h\Big) = \sum_{h=1}^n (\delta - \gamma)^+(C_h)\\ &\leq 1 + \lim_{n\to\infty}\sum_{h=1}^n \delta(D_h) - \gamma(D_h) = 1 + \lim_{n\to\infty}\delta\Big(\bigcup_{h=1}^n D_h\Big) - \gamma\Big(\bigcup_{h=1}^n D_h\Big)\\ &= \delta\Big(\bigcup_{h=1}^\infty D_h\Big),\end{aligned}$$

il che dimostra l'uguaglianza, poiché $(\gamma - \delta)^+$ è una misura e per costruzione per ogni $h \geq 1$ $(\gamma - \delta)^+(D_h) = 0$, per cui anche $(\gamma - \delta)^+\Big(\bigcup_{h=1}^\infty D_h\Big) = 0$.

Q.E.D.

Lemma 7.1.6. *Siano α', β' misure definite sul σ–anello di insiemi $\mathcal{G}$ ed $Y \in \mathcal{G}$, tali che*

$$\beta'(Y) < +\infty,\ \ \ \mathrm{sing}(\alpha', \beta')(Y) = 0,\ \ \ \mathrm{intg}(\alpha', \beta')(Y) = 0,$$

allora si ha $\alpha'(Y) = 0$.

Dimostrazione. Per assurdo sia $\alpha'(Y) > 0$. Poiché $\mathrm{sing}(\alpha', \beta')(Y) = 0$, dalla definizione segue che $\beta'(Y) > 0$ ed essendo finito deve esistere un $\lambda > 0$ tale che $\alpha'(Y) > \lambda \cdot \beta'(Y)$. In particolare, si ottiene che $\big(\alpha' - \lambda \cdot \beta'\big)^+(Y) > 0$. Per il Lemma 7.1.5, si ha $\alpha' = \delta$, $\lambda \cdot \beta' = \gamma$,

$$\exists C \in \mathcal{G},\ \ C \subseteq Y,\ \ \alpha'(C) < +\infty, \big(\lambda \cdot \beta' - \alpha'\big)^+(C) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha'(C) > \lambda \cdot \beta'(C) \geq 0.$$

Poiché $\mathrm{sing}(\alpha', \beta')(C) = 0$ risulta dalla definizione che $\beta'(C) > 0$. Da $\big(\lambda \cdot \beta' - \alpha'\big)^+(C) = 0$ segue

$$\forall D \in \mathcal{G},\ \ D \subseteq C,\ \ \alpha'(D) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \alpha'(D) \geq \lambda \cdot \beta'(D),$$

ovvero, poiché $\alpha'(C) < +\infty$,

$$\forall D \in \mathcal{G},\ D \subseteq C \quad \Longrightarrow \quad \alpha'(D) \geq \int_D \lambda \cdot \mathbb{1}_C \, d\beta',$$

cioè $\lambda \cdot \mathbb{1}_C$ è ammissibile per $\operatorname{intg}(\alpha', \beta')(C)$, per cui

$$\operatorname{intg}(\alpha', \beta')(Y) \geq \operatorname{intg}(\alpha', \beta')(C) \geq \lambda \cdot \beta'(C) > 0,$$

contro l'ipotesi $\operatorname{intg}(\alpha', \beta')(Y) = 0$. Q.E.D.

Lemma 7.1.7 (Teorema di Radon–Nikodym)**.** *Si ha*

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \beta(A) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \alpha(A) = \operatorname{sing}(\alpha, \beta)\big(A\big) + \operatorname{intg}(\alpha, \beta)\big(A\big).$$

Dimostrazione. Si ha, per le assunzioni (7.1.1), (7.1.2), (7.1.3), (7.1.4), (7.1.5), con le notazioni adottate,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sing}(\alpha, \beta) \llcorner A = \alpha \llcorner S, \quad \beta(S) = 0;\\
&\operatorname{sing}(\alpha, \beta) \llcorner (A \setminus S) \equiv 0;\\
&\operatorname{intg}(\alpha, \beta) \llcorner A = \operatorname{intg}(\alpha, \beta) \llcorner (A \setminus S);\\
&\operatorname{intg}(\alpha, \beta) \llcorner S \equiv 0.
\end{aligned}$$

Rimane quindi da dimostrare che $\alpha \llcorner (A \setminus S) = \operatorname{intg}(\alpha, \beta) \llcorner (A \setminus S)$.
Per questo si consideri la misura data da $\alpha' = \alpha \llcorner (A \setminus S) - \operatorname{intg}(\alpha, \beta) \llcorner (A \setminus S)$. La funzione α' è una misura poiché α è maggiore di $\operatorname{intg}(\alpha, \beta)$ e quest'ultima è una misura finita, per l'assunzione (7.1.1). Posto quindi $\beta' \equiv \beta \llcorner (A \setminus S)$, si ottiene, come nell'Osservazione 6.1.8,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sing}(\alpha', \beta') &= \operatorname{sing}\big(\alpha - \operatorname{intg}(\alpha, \beta), \beta\big) \llcorner (A \setminus S) = \operatorname{sing}(\alpha, \beta) \llcorner (A \setminus S) \equiv 0;\\
\operatorname{intg}(\alpha', \beta') &= \operatorname{intg}\big(\alpha - \operatorname{intg}(\alpha, \beta), \beta\big) \llcorner (A \setminus S) \leq \operatorname{intg}(\alpha, \beta) \llcorner (A \setminus S) - \operatorname{intg}(\alpha, \beta) \llcorner (A \setminus S) \equiv 0.
\end{aligned}$$

Poiché anche $\beta' = \beta \llcorner (A \setminus S)$ è finita, essendolo β, per il Lemma 7.1.6 anche α' è nulla:

$$\alpha(A) = \alpha(S) + \alpha(A \setminus S) = \operatorname{sing}(\alpha, \beta)(S) + \operatorname{intg}(\alpha, \beta)(A \setminus S) = \operatorname{sing}(\alpha, \beta)(A) + \operatorname{intg}(\alpha, \beta)(A).$$

Q.E.D.

Lezione VIII

8.1 Problemi di Frontiera Libera e Unicità

In molte formulazioni di problemi di Calcolo delle Variazioni, una volta provata l'esistenza, si possono avere diverse soluzioni (anche a meno di classi di trasformazioni interessanti, o di oggetti che diano un contributo trascurabile).

L'analisi dell'unicità porta in certi casi a provare che "per dati generici", in diverse accezioni, vi è unicità della soluzione.

Si enuncia un teorema di esistenza del tipo quelli introdotti nella seconda lezione per poi stabilire alcune congetture ragionevoli riguardanti l'unicità delle soluzioni. Queste rivestono un certo interesse anche per quanto riguarda il "moto di ipersuperfici lungo la curvatura media", nozione che sarà introdotta in un ambito generale nelle prossime sezioni.

Una specializzazione del Teorema 3.1.1 è la seguente:

Teorema 8.1.1. *Sia f una funzione definita su $\mathbb{R}^n$ tale che:*

$$f \in C^{\omega}(\mathbb{R}^n), \qquad \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

allora esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che realizza:

$$\min\Big\{ \int_E f(x)\,dx + \mathcal{H}^{n-1}(\partial E) \;:\; E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \Big\}. \tag{8.1.1}$$

Osservazione 8.1.2. Il problema riveste interesse quando il dato f abbia una variazione sufficiente tra valori negativi e positivi, ottenendo altrimenti soluzioni equivalenti all'insieme vuoto.

La condizione all'infinito sull'integranda serve ad ottenere soluzioni che siano, sostanzialmente, limitate. Per questo basterebbe imporre che l'integranda sia strettamente maggiore di 1 al di fuori di un insieme compatto.

Poiché per la ricerca dei punti di minimo ci si può limitare agli insiemi con misura $n-1$ dimensionale del bordo finita, si può imporre l'ulteriore vincolo che gli insiemi siano chiusi e con bordo topologico uguale a quello della loro parte interna:

$$E = \overline{E}, \quad \partial E = \partial E^{\circ}.$$

Così facendo le eventuali soluzioni saranno dei compatti.

Come enunciato nel Teorema 2.2.9, i rappresentanti canonici delle soluzioni hanno, se $n \leq 7$, frontiera analitica, altrimenti l'insieme dei punti singolari della frontiera ha dimensione di Hausdorff al più $n-8$.

Il teorema enunciato si può estendere al caso non euclideo di varietà compatte analitiche. Nel caso dei tori è utile la seguente enunciazione in termini di funzioni periodiche, che permette di ricondursi al caso euclideo evitando di rielaborare la teoria dei perimetri e delle funzioni a variazione limitata.

Teorema 8.1.3. *Sia f una funzione definita su $\mathbb{R}^n$ tali che:*

$$f \in C^\omega(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}er_n(2\pi)$$

allora esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che realizza:

$$\min\Big\{ \int\limits_{[0,2\pi]^n \cap E} f(x)\,dx + \mathcal{H}^{n-1}\big([0,2\pi)^n \cap \partial E\big) \ : \ E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \ \ \mathbb{1}_E \in \mathcal{P}er_n(2\pi) \Big\}. \tag{8.1.2}$$

Osservazione 8.1.4. Le osservazioni fatte per il Problema (8.1.1) per quanto riguarda l'esistenza e la regolarità continuano a valere in questo caso più generale: in particolare rimane vero il teorema di regolarità di Federer. Tale teorema rappresenta il massimo dei risultati che sono stati ottenuti come descrizione "qualitativa" delle soluzioni: esistenza, parte "facile", e regolarità, parte "difficile".

Lo studio "quantitativo", ovvero di "classificazione" delle soluzioni e il calcolo di grandezze a loro correlate, inizia con i problemi di unicità.

Problema 8.1.5. *Esistono classi abbastanza generali di integrande per cui vi sia, in senso opportuno, unicità della soluzione per il Problema* (8.1.2)*?*

Congettura 8.1.6. *Per la maggior parte* delle integrande $f \in \mathcal{P}er_n(2\pi) \cap C^\omega(\mathbb{R}^n)$ vi è unicità (come rappresentanti chiusi e coincidenti con la chiusura della propria parte interna) delle soluzione per il Problema (8.1.2).

La congettura va precisata specificando cosa si intenda con "per la maggior parte". Una prima interpretazione può essere o topologica o di teoria della misura, rispettivamente: trovare una topologia sulla famiglia delle integrande per cui quelle con unicità siano un denso o addirittura un aperto denso, o trovare una misura sulla famiglia delle integrande per cui quasi ogni integranda ammetta un un'unica soluzione.

Chiaramente è necessario che la topologia, o la misura, scelte siano in qualche senso naturali e significative per la famiglia in questione: quindi bisogna esaminare quali topologie e misure sono rilevanti per la famiglia delle funzioni analitiche su una varietà analitica compatta senza bordo. Per ora considereremo l'approccio topologico.

Si sceglie la seguente topologia (topologia *germe* sulle funzioni analitiche periodiche reali):

Definizione 8.1.7. *Si dice che la successione $\{f_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ di funzioni di $\mathcal{P}er_n(2\pi) \cap C^\omega(\mathbb{R}^n)$ converge in $C^\omega(\mathbb{R}^n)$ alla funzione f di $\mathcal{P}er_n(2\pi) \cap C^\omega(\mathbb{R}^n)$ se esiste un aperto A di $\mathbb{C}^n$ contenente $\mathbb{R}^n$ tale che tutte le f_h siano prolungabili con funzioni $\widetilde{f}_h$ olomorfe su A e queste convergano uniformemente al prolungamento olomorfo di f su A. Ovvero:*

$$\exists A \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n), \ \ \mathbb{R}^n \subseteq A, \ \ \forall h \in \mathbb{N}\ \exists \widetilde{f}_h, \ \widetilde{f} \in \mathcal{O}(A), \ \ \widetilde{f}_h|_{\mathbb{R}^n} = f_h, \ \widetilde{f}|_{\mathbb{R}^n} = f, \ \lim_{h\to\infty} \|\widetilde{f}_h - \widetilde{f}\|_{L^\infty(A)} = 0.$$

Definizione 8.1.8. *Si dice topologia germe su $\mathcal{P}er_n(2\pi) \cap C^\omega(\mathbb{R}^n)$ la più fine topologia che rende convergenti le successioni convergenti in $C^\omega(\mathbb{R}^n)$.*

Osservazione 8.1.9. La topologia ottenuta è quella che ha come insiemi chiusi gli insiemi chiusi per successioni convergenti in $C^\omega(\mathbb{R}^n)$. Essa coincide inoltre con la più fine topologia su $\mathcal{P}er_n(2\pi) \cap C^\omega(\mathbb{R}^n)$ che rende continui gli operatori di restrizione ad $\mathbb{R}^n$, definiti sugli spazi di Banach delle funzioni olomorfe limitate su un dominio contenente $\mathbb{R}^n$, le cui tracce su $\mathbb{R}^n$ siano periodiche e reali, con la norma uniforme.

Osservazione 8.1.10. Per l'unicità del prolungamento analitico l'estensione olomorfa di una funzione periodica su $\mathbb{R}^n$ a valori reali è periodica come funzione delle parti reali dei suoi argomenti (si consideri la composizione dell'estensione con una traslazione per un multiplo del periodo): quindi nella Definizione 8.1.7 basta ricondursi alla convergenza sulla famiglia numerabile di aperti del tipo $A_k = \{z \in \mathbb{C}^n \ : \ |\mathrm{Im}\, z| \leq \frac{1}{k}\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Questo giustifica il nome topologia germe dato alla topologia scelta, in quanto coincide con il limite diretto della classica topologia *compatto–aperto* per lo spazio di Frechet delle funzioni olomorfe di un aperto di $\mathbb{C}^n$, cfr. [38].

Congettura 8.1.11. La famiglia delle integrande di $\mathcal{P}er_n(2\pi) \cap C^\omega(\mathbb{R}^n)$ per cui vi è unicità di soluzione nel Problema (8.1.2) è densa per la topologia germe su $\mathcal{P}er_n(2\pi) \cap C^\omega(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione 8.1.12. Risultati di questo tipo sono noti in letteratura: esempi classici riguardano i problemi di Plateau unidimensionali. Recenti risultati di unicità per dati generici riguardano funzionali del tipo $\int_{[0,1]} |u'|^2 d\mathcal{H}^1 + \mathcal{H}^0(S_u)$, cfr. [4].

Congettura 8.1.13. La famiglia delle integrande di $\mathcal{P}er_n(2\pi) \cap C^\omega(\mathbb{R}^n)$ per cui vi è unicità di soluzione nel Problema (8.1.2) contiene un aperto denso per la topologia germe su $\mathcal{P}er_n(2\pi) \cap C^\omega(\mathbb{R}^n)$.

Problema 8.1.14. *Trovare una ragionevole misura di probabilità su $\mathcal{P}er_n(2\pi) \cap C^\omega(\mathbb{R}^n)$ in modo che l'insieme delle integrande per cui non vi è unicità nel Problema* (8.1.2) *abbia misura nulla.*

8.2 Variazioni per Composizione

Volendo considerare invece che problemi di minimo per frontiere libere problemi di "evoluzione" per frontiere libere, o semplicemente problemi di stazionarietà, è utile introdurre una nozione di variazione. Questa rappresenta un primo passo nello studio dei movimenti secondo la variazione di un funzionale, di cui i movimenti secondo la curvatura media, cfr. [6, 8], dovrebbero costituire un caso particolare. Il desiderio di introdurre una larga generalizzazione del concetto di movimento secondo la curvatura media ha molte motivazioni: una di esse potrebbe essere la possibilità di studiare con metodi del tipo della "discesa" problemi variazionali "statici" come quelli considerati nella precedente sezione. Una seconda motivazione è la speranza di poter stabilire, in una classe abbastanza ampia di problemi, qualche teorema di unicità valido per quasi tutti i dati. A tale scopo conviene dare una definizione di "variazione" che si adatti ai problemi variazionali del tipo considerato nel Teorema 8.1.1, in cui non avrebbe molto interesse confrontare la funzione caratteristica di E con le funzioni ottenute per "addizione di piccole perturbazioni", mentre ha più interesse considerare insiemi ottenuti da E per "piccole deformazioni dell'ambiente"; ciò equivale a comporre la *funzione* caratteristica di E con funzioni molto vicine all'identità. Nella prossima sezione si esamineranno con maggior dettaglio alcuni tra gli esempi di tale nozione.

Introduciamo preliminarmente la definizione di *famiglia C_0^∞ di deformazioni* in un aperto Ω.

Definizione 8.2.1. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Si dice che Ψ è una famiglia C_0^∞ di deformazioni di Ω e si scrive $\Psi \in \mathcal{D}ef C_0^\infty(\Omega)$, se Ψ è una funzione con dominio $\mathbb{R}$ tale che:*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \textit{posto} \quad \psi_\lambda \equiv \Psi(\lambda), \quad \textit{si ha} \quad \psi_\lambda : \Omega \to \Omega;$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \Omega \quad \textit{posto} \quad \Phi(x, \lambda) = x - \psi_\lambda(x), \quad \textit{si ha} \quad \Phi \in \left[C_0^\infty(\Omega \times \mathbb{R})\right]^n;$$

$$\forall x \in \Omega \quad \psi_0(x) \equiv x.$$

Osservazione 8.2.2. È chiaro che per λ vicino a 0 la deformazione ψ_λ è un diffeomorfismo C^∞ di Ω in se.

Osservazione 8.2.3. Per ogni funzione u, comunque definita e per ogni $\Psi \in \mathcal{D}ef C_0^\infty(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha $\operatorname{dom} u \circ \psi_\lambda \subseteq \Omega$ e $\operatorname{cod} u \circ \psi_\lambda \subseteq \operatorname{cod} u$.

Accanto a $\mathcal{D}ef C_0^\infty(\Omega)$ si possono considerare altre famiglie di deformazioni: per esempio imponendo alla "perturbazione" Φ un diverso grado di regolarità.

Nello studio delle variazioni di un funzionale F per composizione con deformazioni di una funzione u in un aperto Ω, ha interesse considerare espressioni del tipo $F(u \circ \Psi(\lambda))$, con $\Psi \in \mathcal{D}ef C_0^\infty(\Omega)$. Data la grande varietà di situazioni che vorremo tener presente daremo una definizione molto astratta di *variazione per composizione*, che vagamente si ispira a quelle di sottodifferenziale (per esempio cfr. [16]). In particolare non converrà fare ipotesi a priori sul dominio del funzionale F, né su quello della funzione u di cui si dovranno considerare le composizioni con deformazioni. Tenendo conto della Definizione 8.2.1 e dell'Osservazione 8.2.2, passiamo alla definizione:

Definizione 8.2.4. *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, F un funzionale a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ e sia u una funzione.*
In tali ipotesi, si definisce l'insieme $\mathcal{V}ar^-(F,u,\Omega)$ nel modo seguente:

- *se $u|_\Omega \in \operatorname{dom} F$ e $F(u|_\Omega) \in \mathbb{R}$, allora $\mathcal{V}ar^-\big(F,u,\Omega\big)$ è l'insieme delle coppie (α,ν) tali che:*
$$\nu \in \mathcal{MB}(\Omega), \quad \alpha \in \left[L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\nu)\right]^n \ e$$
$$\forall \Psi \in \mathcal{D}ef C_0^\infty(\Omega), \quad si\ ha: \tag{8.2.1}$$
$$\liminf_{\lambda \to 0} \frac{F^-(u\circ\psi_\lambda) - F(u\circ\psi_0) - \int\limits_\Omega \big(\alpha(x) \cdot [\psi_\lambda(x) - x]\big)\, d\nu(x)}{|\lambda|} \ \geq\ 0,$$
ove $F^-(u\circ\psi_\lambda) = F(u\circ\psi_\lambda)$ se $u\circ\psi_\lambda \in \operatorname{dom} F$ e $F^-(u\circ\psi_\lambda) = +\infty$, altrimenti;
- *se $u|_\Omega \notin \operatorname{dom} F$ o $F(u|_\Omega) \notin \mathbb{R}$ allora, per definizione, si pone $\mathcal{V}ar^-\big(F,u,\Omega\big) = \emptyset$.*

Gli elementi di $\mathcal{V}ar^-(F,u,\Omega)$ si diranno sottovariazioni di F per composizione di u in Ω.

Osservazione 8.2.5. Si osservi che $u\circ\psi_0 = u|_\Omega$ e se $F^-(u|_\Omega) \in \mathbb{R}$ si ha $F^-(u|_\Omega) = F(u|_\Omega)$. Se F in $u|_\Omega$ assume il suo valore minimo e questo è reale si ha, per ogni misura ν, $(0,\nu) \in \mathcal{V}ar^-(F,u,\Omega)$.

Dalle sottovariazioni si passa alle sopravariazioni e alle variazioni con la seguente definizione:

Definizione 8.2.6. *Nelle ipotesi della Definizione 8.2.4 si pone:*
$$\mathcal{V}ar^+(F,u,\Omega) = \big\{(\alpha,\nu) \ : \ (-\alpha,\nu) \in \mathcal{V}ar^-(-F,u,\Omega)\big\};$$
$$\mathcal{V}ar(F,u,\Omega) = \mathcal{V}ar^-(F,u,\Omega) \cap \mathcal{V}ar^+(F,u,\Omega).$$
Gli elementi di $\mathcal{V}ar^+(F,u,\Omega)$ si diranno sopravariazioni di F per composizione di u in Ω, quelli di $\mathcal{V}ar(F,u,\Omega)$ variazioni di F per composizione di u in Ω.

Osservazione 8.2.7. I domini dei funzionali per i problemi di tipo frontiera libera non hanno struttura vettoriale né struttura di varietà e la scelta della nozione di variazione data con la Definizione 8.2.4 permette almeno di formulare con linguaggio relativamente elementare diversi problemi di tipo variazionale, pur dovendo eventualmente ricorrere per le dimostrazione a più raffinati concetti di analisi funzionale, geometria differenziale e teoria geometrica della misura. Le definizioni possono essere avvicinate da una parte, per esempio, a quelle trattate in [10, Section 2.4, Remark 1] per determinare la così detta equazione di Du Bois–Reymond e in [12] per trovare condizioni necessarie di stazionarietà per problemi di frontiera libera, dall'altra alle variazioni che vengono usualmente prese in considerazione quando si studiano i problemi tipo Plateau ed altri problemi di Teoria Geometrica della Misura.

Problema 8.2.8. *Ci si domanda quali siano esempi particolari della nozione di variazione definita in questa sezione, noti nella corrente letteratura di matematica e se mai è stata introdotta la nozione di variazione indipendentemente dalla rappresentazione e dalle proprietà del funzionale.*

Osservazione 8.2.9. Se (α, ν) è un elemento di $\mathcal{V}ar(F, u, \Omega)$ (oppure di $\mathcal{V}ar^-(F, u, \Omega)$, $\mathcal{V}ar^+(F, u, \Omega)$) e se (α', ν') è tale che

$$\forall A = A^\circ \Subset \Omega \qquad \int_A \alpha \, d\nu = \int_A \alpha' \, d\nu',$$

allora anche (α', ν') appartiene a $\mathcal{V}ar(F, u, \Omega)$ (rispettivamente a $\mathcal{V}ar^-(F, u, \Omega)$, $\mathcal{V}ar^+(F, u, \Omega)$).

Si è preferito scegliere come elementi di $\mathcal{V}ar(F, u, \Omega)$ coppie aventi come prima componente una funzione vettoriale di punto e come seconda componente una misura di Borel non negativa, piuttosto che funzioni vettoriali di insieme: questo perché in molti problemi si possono individuare delle coppie (α, ν) privilegiate, in cui sia α che ν hanno interessante significato geometrico, come illustrato dagli esempi dati in seguito.

Osservazione 8.2.10. Se Ω, F, u sono tali che per ogni deformazione Ψ del tipo considerato nella Definizione 8.2.1, esista finita la derivata

$$\frac{d}{d\lambda} F(u \circ \psi_\lambda) \Big|_{\lambda=0}$$

allora $\mathcal{V}ar(F, u, \Omega) = \mathcal{V}ar^-(F, u, \Omega) = \mathcal{V}ar^+(F, u, \Omega)$; se poi $(\alpha, \nu) \in \mathcal{V}ar(F, u, \Omega)$, $(\alpha', \nu') \in \mathcal{V}ar(F, u, \Omega)$, si ha per ogni $A = A^\circ \Subset \Omega$ e per ogni deformazione Ψ:

$$\int_A \alpha' \, d\nu' = \int_A \alpha \, d\nu,$$

$$\frac{d}{d\lambda} F(u \circ \psi_\lambda) \Big|_{\lambda=0} = \int_\Omega \big(\alpha(x) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(x, 0)\big) \, d\nu(x).$$

Quando (α, ν) è un elemento di $\mathcal{V}ar(F, u, \Omega)$ (oppure di $\mathcal{V}ar^-(F, u, \Omega)$, $\mathcal{V}ar^+(F, u, \Omega)$) e per ν–quasi ogni $x \in \Omega$ è verificata $|\alpha(x)| = 0$, si scriverà $0 \in \mathcal{V}ar(F, u, \Omega)$ (rispettivamente $0 \in \mathcal{V}ar^-(F, u, \Omega)$, $0 \in \mathcal{V}ar^+(F, u, \Omega)$).

Osservazione 8.2.11. Le principali famiglie di funzionali a cui ci si riferisce sono dei tre tipi seguenti, ovvero quella delle combinazioni lineari di loro elementi, al variare di opportune classi X_i ed Y_i, $1 \le i \le 3$:

$$\mathcal{F}_1 = \Big\{ F \ : \ \exists \psi \in Y_1 \ \forall A \in \mathcal{A}(\Omega), \ u \in X_1 \cap C^1(\Omega) \ \ F(u;A) = \int\limits_A \psi(x, u(x), \nabla u(x))\, d\mathcal{H}^n(x) \Big\};$$

$$\mathcal{F}_2 = \Big\{ F \ : \ \exists \psi \in Y_2 \ \forall A \in \mathcal{A}(\Omega), \ u \in X_2 \cap \mathcal{D}'(\Omega) \ \ F(u;A) = \int\limits_A \psi(Du) \Big\};$$

$$\mathcal{F}_3 = \Big\{ F : \exists p \in Y_3 \, \forall A \in \mathcal{A}(\Omega), \, u \in X_3 \cap \mathcal{FM}(\mathcal{H}^h \llcorner \Omega) \ F(u;A) = \int\limits_A u(x)p(x) \cdot d\mathcal{H}^h(x) \Big\},$$

$h \le n$.

Per il primo tipo di funzionali la variazione classica ottenuta mediante perturbazioni additive, o addirittura il differenziale, sono in molti casi utili, mentre la variazione proposta può non essere interessante lasciando fissa l'immagine della funzione. Già per la seconda famiglia sorgono dei problemi con perturbazioni additive, e con la terza, in cui rientrano i funzionali dei problemi di frontiera libera (ove le famiglie X_3 sono quella delle funzioni caratteristiche e quella delle caratteristiche di frontiere di insiemi) le difficoltà presentate dall'approccio classico sembrano definitive.

Osservazione 8.2.12. Se la definizione di variazione proposta è stata fatta tenendo presente il caso in cui il funzionale agisce su funzioni caratteristiche di insiemi, bisogna notare che tale nozione è utile anche quando le funzioni della famiglia X siano parametrizzazioni di varietà o debbano rispettare vincoli. Le perturbazioni per composizione con Ψ agiscono solo sui livelli delle funzioni, $\{x \, : \, u(x) = c\}$, permettendo di rispettare vincoli lasciando l'immagine invariata. Inoltre trattando di grandezze geometriche relative ai grafici di funzione potrebbe convenire esprimerle con funzionali definiti sulle funzioni caratteristiche degli stessi grafici, cfr. [23].

Osservazione 8.2.13. Per diversi tipi di funzionali e classi di funzioni u per determinare una variazione ammissibile è sufficiente verificare la condizione (8.2.1), Osservazione 8.2.10, per classi particolari di deformazioni Ψ. Esempi notevoli sono

$$F(u, A) = \int\limits_A u(x)p(x)\, d\mathcal{H}^h(x), \quad \operatorname{supp} u \in V_h C^1(\Omega),$$

con le deformazioni $\psi_\lambda = \mathrm{Id} + \lambda \cdot g(\lambda) \cdot \varphi$, ove $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $\varphi \in \big[C_0^\infty(A)\big]^n$.
Se poi u è la funzione caratteristica di una varietà E regolare (o addirittura di un insieme $\mathcal{H}^h$ rettificabile) ci si può ridurre a considerare la composizione con $\psi_\lambda = \big(\mathrm{Id} + \lambda \cdot \varphi\big)^{-1}$, ottenendo che $u \circ \psi_\lambda$ è la funzione caratteristica dell'insieme $(\mathrm{Id} + \lambda \cdot \varphi)\big(E\big)$, che per λ sufficientemente piccolo ha la stessa regolarità di E, cfr. Osservazione 8.2.2.

Tenendo presente le considerazioni fatte esaminiamo alcuni esempi, alcuni dei quali verranno approfonditi nella prossima sezione.

Esempio 8.2.14. Siano $p \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $p \ge 0$, e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Per ogni $w \in \mathcal{FB}(\mathbb{R}^n)$ non negativa, si definisce

$$F(w) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(x)p(x)\, d\mathcal{H}^0(x),$$

sarà allora:

$$\forall \alpha : \alpha(x_0) = -\nabla p(x_0) \qquad \big(\alpha, \delta_{\{x_0\}}\big) \in \mathcal{V}ar\big(F, \mathbb{1}_{\{x_0\}}, \mathbb{R}^n\big).$$

Esempio 8.2.15. Per ogni $w \in \mathcal{FB}(\mathbb{R}^n)$ non negativa, si definisce

$$F(w) = \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|x - x_0| \, d\mathcal{H}^0(x),$$

sarà allora:

$$\forall \alpha : |\alpha(x_0)| \leq 1 \qquad \big(\alpha, \delta_{\{x_0\}}\big) \in \mathcal{V}ar^-\big(F, \mathbb{1}_{\{x_0\}}, \mathbb{R}^n\big),$$

mentre $\mathcal{V}ar^+\big(F, \mathbb{1}_{\{x_0\}}, \mathbb{R}^n\big) = \emptyset$.

Esempio 8.2.16. Sia F un qualsiasi funzionale tale che:

$$\operatorname{dom} F = \big\{\mathbb{1}_{\{x_0\}}\big\}, \quad F(\mathbb{1}_{\{x_0\}}) \in \mathbb{R}.$$

Allora si ha

$$\forall \alpha : |\alpha(x_0)| \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(\alpha, \delta_{\{x_0\}}\big) \in \mathcal{V}ar\big(F, \mathbb{1}_{\{x_0\}}, \mathbb{R}^n\big).$$

Osservazione 8.2.17. Se il funzionale G è una restrizione del funzionale F e si ha $G(u|_\Omega) = F(u|_\Omega)$, allora si ha:

$$\mathcal{V}ar^-(G, u, \Omega) \supseteq \mathcal{V}ar^-(F, u, \Omega), \quad \mathcal{V}ar^+(G, u, \Omega) \supseteq \mathcal{V}ar^+(F, u, \Omega), \quad \mathcal{V}ar(G, u, \Omega) \supseteq \mathcal{V}ar(F, u, \Omega).$$

Osservazione 8.2.18. Si indica un caso in cui pur essendo verificata l'ipotesi dell'Osservazione 8.2.10, $\mathcal{V}ar(F, u, \Omega)$ è vuoto: sia $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$ tale che per qualsiasi $r \geq 0$ e qualsiasi $\theta \in \mathbb{R}$ si abbia $g(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin^3\theta$; allora posto, quando definito, per una funzione w:

$$F(w) = \int_{\mathbb{R}^2} w(x, y) g(x, y) \, d\mathcal{H}^0(x, y),$$

si vede facilmente che $\mathcal{V}ar(F, \mathbb{1}_{\{(0,0)\}}, \mathbb{R}^2) = \emptyset$, essendo $\frac{d}{d\lambda} F\big(\mathbb{1}_{\{(0,0)\}} \circ \psi_\lambda\big)\Big|_{\lambda=0}$ non lineare in $\frac{d\psi_\lambda}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}$.

Esempio 8.2.19. Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$, sia E un sottoinsieme compatto avente frontiera regolare $\partial E = \partial E^\circ$ di classe C^1. Si definisca, per ogni funzione $w \in \mathcal{FB}(\mathbb{R}^n)$ e a valori in $\mathbb{N}$, il funzionale:

$$F(w) = \int_{\mathbb{R}^n} w(x) \, d\mathcal{H}^n(x).$$

Allora, detta, per ogni $x \in \partial E$, $\alpha(x)$ la normale a ∂E diretta verso l'interno di E e posto, per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\nu(B) = \mathcal{H}^{n-1}(B \cap \partial E)$, si ha:

$$\big(\alpha, \nu\big) \in \mathcal{V}ar\big(F, \mathbb{1}_E, \mathbb{R}^n\big).$$

Si noti che allo stesso risultato si sarebbe giunti ponendo per ogni $x \notin \partial E$ $\alpha(x) = 0$ e $\nu(B) = \mathcal{H}^{n-1}(B)$.

Osservazione 8.2.20. Formule analoghe a quella considerata nell'Esempio 8.2.19 si possono ottenere per insiemi E aventi perimetro localmente finito. In tal caso converrà considerare funzioni vettoriali α che si annullano al di fuori della frontiera ridotta di E introdotta in [14] (cfr. Esempio 9.1.7).

Osservazione 8.2.21. Se E è una soluzione canonica del problema trattato nel Teorema 2.1.1 è facile vedere che se $f \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, e si considera il funzionale F definito per ogni funzione non negativa $w \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, dalla formula:

$$F(w) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(x)f(x)\, d\mathcal{H}^n(x) + \mathcal{H}^{n-1}\big(\partial\{x \;:\; w(x) \neq 0\}\big),$$

risulta:

$$0 \in \mathcal{V}ar\big(F, \mathbb{1}_E, \mathbb{R}^n\big).$$

Si ritrova così, in un contesto diverso dal solito, il noto fenomeno per cui le funzioni che minimizzano un funzionale abbastanza regolare, ne annullano la variazione prima.

Esempio 8.2.22. Siano $0 < h < n$ numeri naturali, ed S è una varietà h dimensionale, immersa in $\mathbb{R}^n$, compatta, senza bordo e di classe C^2. Si definisca, per ogni funzione $w \in \mathcal{FB}(\mathbb{R}^n)$ e a valori in $\mathbb{N}$, il funzionale:

$$F(w) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(x)\, d\mathcal{H}^h(x),$$

allora posto $\nu(B) = \mathcal{H}^h(B \cap S)$ e chiamato α il vettore di curvatura media, si ha (cfr. [8] ed Esempio 9.1.11):

$$\big(\alpha, \nu\big) \in \mathcal{V}ar\big(F, \mathbb{1}_S, \mathbb{R}^n\big).$$

Osservazione 8.2.23. Combinando le tecniche degli Esempi 8.2.19 e 8.2.22. si potrebbero studiare varietà di classe C^2 con bordo di classe C^1, cfr. Esempio 9.1.1, Esempio 9.1.11.

Esempio 8.2.24. Siano $0 < h < k < n$ numeri naturali, V una varietà k dimensionale, immersa in $\mathbb{R}^n$, compatta, senza bordo e di classe C^2. Sia $S \subseteq V$ una varietà h dimensionale, immersa in $\mathbb{R}^n$, compatta, senza bordo e di classe C^2.
Si consideri il funzionale F_V, definito *solo per* $w \in \mathcal{FB}(\mathbb{R}^n)$, $w \geq 0$, $w|_{\mathbb{R}^n \setminus V} \equiv 0$:

$$F_V(w) = \int\limits_V w(x)\, d\mathcal{H}^h(x).$$

Allora posto $\nu(B) = \mathcal{H}^h(B \cap S)$, si ha:

$$\big(\alpha{+}\delta, \nu\big) \in \mathcal{V}ar\big(F_V, \mathbb{1}_S, \mathbb{R}^n\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ è il vettore di curvatura media di } S,\ \delta \text{ è un vettore normale a } V.$$

Congettura 8.2.25. Nelle ipotesi dell'Esempio 8.2.24 esiste una varietà S tale che:

$$0 \;\in\; \mathcal{V}ar\big(F_V, \mathbb{1}_S, \mathbb{R}^n\big).$$

Osservazione 8.2.26. Per $h = 1$ la congettura è riconducibile allo studio delle geodetiche chiuse su V, di cui w è la funzione caratteristica.

Osservazione 8.2.27. È da notare che nella Congettura 8.2.25, il funzionale non gode delle proprietà considerate nell'Osservazione 8.2.10.

Osservazione 8.2.28. Più in generale ci si potrebbe chiedere se è possibile soddisfare $0 \in \mathcal{V}ar(F, \varphi, \mathbb{R}^n)$, con funzioni φ che non siano funzioni caratteristiche di varietà regolari. A tale proposito può essere interessante considerare anche la seguente congettura, che asserisce l'esistenza di funzioni che annullano la variazione per composizione di un particolare funzionale senza fornirne il minimo (vedi Osservazione 8.2.21):

Congettura 8.2.29. Siano $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ non identicamente nulla, $h \in \mathbb{N}$, $0 < h < n$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ si definisce, per ogni $w \in \mathcal{FB}(\mathbb{R}^n)$ non negativa:

$$F_\lambda(w) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(x)\big(1 + \lambda f^2(x)\big)\, d\mathcal{H}^h(x).$$

Allora esistono un numero $\lambda > 0$ ed una funzione u_λ non negativa tali che

$$0 < \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_\lambda(x)\, d\mathcal{H}^h(x) \; < +\infty, \quad 0 \in \mathcal{V}ar(F_\lambda, u_\lambda, \mathbb{R}^n).$$

Osservazione 8.2.30. Probabilmente la congettura vale ancora se si impone che u_λ sia una funzione caratteristica, cioè assuma solo i valori 0 o 1; essa è probabilmente falsa per $h = n$ ed è anche falsa per h numero reale positivo non intero.

La teoria finora svolta non permette di inquadrare il caso delle varietà illimitate immerse in $\mathbb{R}^n$ ed aventi curvatura media nulla. Per recuperare questo caso conviene dare la nozione di *variazione locale per composizione.*

Definizione 8.2.31. *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, F una funzione definita su coppie aventi come prima componente una funzione e come seconda componente un insieme, ed a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ e sia u una funzione arbitraria, si definisce l'insieme delle variazioni locali per composizione:*

$$\begin{aligned}&\mathcal{V}ar_{\mathrm{loc}}(F, u, \Omega)\\ &= \Big\{(\alpha, \nu) : \nu \in \mathcal{MB}(\Omega),\ \alpha \in \big[L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \nu)\big]^n,\ \forall\, A = A^\circ \Subset \Omega\ \big(\alpha|_A, \nu \llcorner \mathcal{B}(A)\big) \in \mathcal{V}ar\big(F(\cdot, A), u, A\big)\Big\}\end{aligned}$$

Osservazione 8.2.32. Fissato $A = A^\circ \Subset \Omega$ si ha $\operatorname{dom} F(\cdot, A) = \big\{x\ : (x, A) \in \operatorname{dom} F\big\}$, quindi se esiste $A = A^\circ \Subset \Omega$ per cui $u|_A \notin \operatorname{dom} F(\cdot, A)$, si ha $\mathcal{V}ar_{\mathrm{loc}}(F, u, \Omega) = \emptyset$.

Esempio 8.2.33. Vediamo come "localizzare" la variazione per il funzionale dell'Esempio 8.2.19, quando l'insieme regolare E non sia compatto. Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$, sia E un sottoinsieme chiuso avente frontiera regolare $\partial E = \partial E^\circ$ di classe C^1. Si definisce, per ogni $A = A^\circ \Subset \mathbb{R}^n$ e per ogni funzione $w \in \mathcal{FB}(A)$ e a valori in $\mathbb{N}$, la funzione:

$$F(w, A) = \int\limits_A w(x)\, d\mathcal{H}^n(x).$$

Allora, detta, per ogni $x \in \partial E$, $\alpha(x)$ la normale a ∂E diretta verso l'interno di E e posto, per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\nu(B) = \mathcal{H}^{n-1}(B \cap \partial E)$, si ha:

$$\big(\alpha, \nu\big) \in \mathcal{V}ar_{\mathrm{loc}}\big(F, \mathbb{1}_E, \mathbb{R}^n\big).$$

In modo del tutto analogo si possono "localizzare" gli altri problemi esposti.

Lezione IX

9.1 Esempi di Variazioni Ammissibili

Esempio 9.1.1. Siano $\Omega = \mathbb{R}^n$, $p \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $w \in \mathcal{FB}(\mathbb{R}^n)$, a valori in $\mathbb{N}$ e a supporto compatto, quando definito, si ponga:

$$F(w) = \int_{\mathbb{R}^n} w(x)p(x)\, d\mathcal{H}^n(x),$$

Siano poi E un dominio compatto regolare, ovvero $(E; \partial E) \in V_n B_{n-1} C^1(\mathbb{R}^n)$ e ν_E la normale a ∂E diretta verso l'interno di E.
Si ha, grazie alla formula di coarea e alla regolarità del bordo,

$$\big(\nu_E \cdot p; \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial E\big) \;\in\; \mathcal{V}ar(F, \mathbb{1}_E, \mathbb{R}^n), \tag{9.1.1}$$

ovvero, ricordando la definizione di variazione per composizione e le Osservazioni 8.2.2, 8.2.10, 8.2.13, ci si può ricondurre a

$$\frac{d}{d\lambda}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_E(x + \lambda\varphi(x))p(x) \cdot\, d\mathcal{H}^n(x)\Big]\Big|_{\lambda=0} = \int_{\partial E} \big(\varphi(x) \cdot \nu_E(x)\big)\, p(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

comunque sia scelta $\varphi \in \big[C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\big]^n$, oppure:

$$\frac{d}{d\lambda}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\big(\mathrm{Id}+\lambda\varphi\big)(E)}(x)p(x) \cdot\, d\mathcal{H}^n(x)\Big]\Big|_{\lambda=0} = -\int_{\partial E} \big(\varphi(x) \cdot \nu_E(x)\big)\, p(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

comunque sia scelta $\varphi \in \big[C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\big]^n$.

Osservazione 9.1.2. Volendo giustificare euristicamente la formula conviene esaminare separatamente tre casi in situazioni particolari: la perturbazione φ è nulla in un intorno di ∂E, la perturbazione è non nulla su ∂E ed ad esso normale, la perturbazione è non nulla e tangente a ∂E.
Nel primo caso, per $\lambda\|\varphi\|_{L^\infty}$ minore della distanza del supporto di φ da ∂E, si ha che $\mathbb{1}_E \circ (\mathrm{Id} + \lambda\varphi)$ è eguale a $\mathbb{1}_E$, quindi la variazione è nulla.

Osservazione 9.1.3. Per esemplificare il secondo caso, consideriamo più in particolare la seguente situazione: $p \equiv 1$, E è compatto, $\partial E \in V_{n-1}C^2$ ed $A = \big(\partial E\big)_{3r}$, con $r \in (0, 1)$ abbastanza piccolo affinché A sia regolare e sia definita univocamente la mappa di proiezione ortogonale su ∂E in $A \setminus \partial E$, che quindi risulta regolare anch'essa.
Volendo considerare l'effetto di perturbazioni normali al bordo, si considera una perturbazione del tipo particolare (interna), con:

$$\begin{aligned}&\varphi(y + t\nu_E(y)) = g(t) \cdot \nu_E(y), \quad y \in \partial E, \quad |t| \in [0, 2r],\\ &0 \le g \le 1, \quad g(t) = 1 \quad |t| \in [0, r], \quad g(t) = 0 \quad |t| \in [2r, 3r],\end{aligned}$$

si pone, per $|\lambda| < r$, $\mathbb{1}_E \circ (\mathrm{Id} + \lambda\varphi) = \mathbb{1}_{E_\lambda}$. Quindi dalla definizione di variazione rispetto alla perturbazione φ, grazie alle formule di coarea e alla regolarità della frontiera di E si ottiene:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathcal{H}^n(E_\lambda) - \mathcal{H}^n(E)}{\lambda} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E).$$

Si osservi che la distanza tra ∂E_λ e ∂E è $|\lambda|$.

Osservazione 9.1.4. Nel caso concreto in cui $E = \overline{B}_\rho(0)$ ci si rende conto del risultato ammettendo come perturbazione φ l'identità, che coincide sulla frontiera topologica di E con $-\rho\nu_E$:

$$\mathbb{1}_E(x + \lambda x) = 1 \iff |1+\lambda| \cdot |x| \leq \rho \iff x \in \overline{B}_{\frac{\rho}{|1+\lambda|}}(0) \iff \mathbb{1}_{\overline{B}_{\frac{\rho}{|1+\lambda|}}}(x) = 1.$$

Quindi si ha

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \Big[\int\limits_{B_{\frac{\rho}{|1+\lambda|}}} p(x)\, dx - \int\limits_{B_\rho} p(x)\, dx \Big] =$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \Big[\frac{1}{\lambda} \int\limits_{B_{\frac{\rho}{|1+\lambda|}} \setminus B_\rho} p(x)\, dx + \frac{1}{\lambda} \int\limits_{B_\rho} \Big(\mathbb{1}_{\overline{B}_{\frac{\rho}{|1+\lambda|}}}(x) - \mathbb{1}_{\overline{B}_\rho}(x) \Big) \cdot p(x)\, dx \Big] =$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \int\limits_{B_{\frac{\rho}{|1+\lambda|}} \setminus B_\rho} p(x)\, dx + 0 = -\rho \int\limits_{\partial B_\rho} p(x)\, \mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Osservazione 9.1.5. Per esemplificare l'ultimo caso, in cui la perturbazione è tangente al bordo, è utile considerare sempre l'esempio concreto della palla in $\mathbb{R}^2$ e della seguente perturbazione

$$\varphi(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{(-y,x)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$0 \leq g \leq 1, \quad g(t) = 1 \ \ t \in [\rho/2, 3/2 \cdot \rho], \quad g(t) = 0 \ \ (t - \rho/4)(t - 7/4 \cdot \rho) \geq 0.$$

In questo caso, per $|\lambda| < \frac{\sqrt{3}}{2}\rho$, si ha che $\mathbb{1}_{B_\rho} \circ (\mathrm{Id} + \lambda\varphi) = \mathbb{1}_{B_{\sqrt{\rho^2-\lambda^2}}}$. Per $A = B_{2\rho}(0)$ la variazione è quindi

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \Big[\int\limits_A \mathbb{1}_{B_\rho}((x,y) + \lambda\varphi(x,y))\, dx\, dy - \int\limits_A \mathbb{1}_{B_\rho}(x,y)\, dx\, dy \Big] =$$
$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \big[\mathbb{1}_{B_{\sqrt{\rho^2-\lambda^2}}}(x,y) - \mathbb{1}_{B_\rho}(x,y) \big]\, dx\, dy = -\pi \lim_{\lambda \to 0} \frac{\rho^2 - (\rho^2 - \lambda^2)}{\lambda} = 0.$$

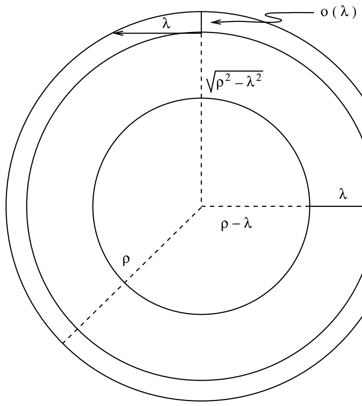


Figura 9.1.1

Osservazione 9.1.6. Considerando il caso in cui sia l'insieme di partenza che una sua deformazione siano palle osserva che la differenza delle misure n dimensionali è asintotica alla differenza dei raggi. Inoltre per perturbazioni normali (Osservazione 9.1.3) la differenza dei raggi è asintotica a λ mentre per perturbazioni tangenziali (Osservazione 9.1.5) tale differenza è un infinitesimo di ordine superiore a λ. Questi due fatti sono in sostanza quelli che permettono di dimostrare la formula (9.1.1) in generale.

In generale si può pensare che la differenza tra le misure n dimensionali di un insieme regolare di dimensione n e di una sua deformazione locale sia asintotica alle massime distanze dei i punti tra le frontiere topologiche (in $\mathbb{R}^n$) dei due insiemi, intersecate con una palla abbastanza piccola.

D'altronde il comportamento asintotico a λ e quello di ordine infinitesimo superiore a λ sono tipici per queste "massime distanze locali" delle frontiere dell'insieme e dell'insieme perturbato: rispettivamente nel caso di perturbazioni normali e nel caso di perturbazioni tangenziali. Infine una perturbazione generica asintoticamente, per λ infinitesimo, può essere sostituita da due perturbazioni consecutive: quella della sua componente normale e quella della sua componente tangenziale.

Esempio 9.1.7. Si esamina ora un esempio ad hoc che mostra come estendere in senso debole le variazioni ottenute nei casi regolari trattati.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $p \in L^\infty(\Omega)$. Si definisce

$$F_p(u) = \int_\Omega u(x)p(x)\,dx, \quad u \in C^1(\Omega) \cap L^1(\Omega).$$

Si ottiene derivando sotto il segno di integrale

$$\frac{d}{d\lambda}\Big[\int_\Omega u(x+\lambda\varphi(x)) \cdot p(x)\,dx\Big]\Big|_{\lambda=0} = \int_\Omega \big(\nabla u \cdot \varphi\big)\,p\,d\mathscr{L}^n.$$

In questo caso vi sono molte scelte possibili per le variazioni ammissibili, in quanto un fattore moltiplicativo può essere spostato dal vettore alla funzione di insieme. Una scelta interessante è la seguente:

$$\begin{cases} \nu = p \cdot |\nabla u| \cdot \mathcal{H}^n, \\ \alpha = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}. \end{cases}$$

Osservazione 9.1.8. In questa ottica risulta chiaro come estendere questa variazione quando la funzione u sia in $BV(\Omega)$:

$$\begin{cases} \nu = p \cdot |Du|, \\ \alpha = \frac{Du}{|Du|}. \end{cases}$$

Un esercizio, non facilissimo, è quindi:

Esercizio 9.1.9. Se $\Omega \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, $p \in C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $u \in BV(\Omega)$ allora:

$$\Big(\frac{Du}{|Du|}; p \cdot |Du|\Big) \in \mathcal{V}ar\big(F_p, u, \Omega\big).$$

Osservazione 9.1.10. Il caso trattato nell'Esempio 9.1.1 rientra in tale inquadramento.
Si può infine osservare che tale proprietà caratterizza le funzioni BV_{loc}:

$$u \in BV_{loc}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall p \in C^0_0(\Omega) \;\; \mathcal{V}ar\big(F_p, u, \Omega\big) \neq \emptyset.$$

Esempio 9.1.11. Vediamo come estendere l'Esempio 9.1.1 a varietà con bordo immerse con sufficiente regolarità.
Siano $\Omega = \mathbb{R}^n$, $p \in C^1(\Omega)$, $h < n$. Per ogni $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e per ogni funzione di Borel w definita su A a valori in $\mathbb{N}$, quando definito, si ponga:

$$F(w; A) = \int_A w(x)\, p(x) \cdot d\mathcal{H}^{h+1}(x).$$

Sia $(E; L) \in V_{h+1} B_h C^2(\Omega)$. Se $\varphi \in C^\infty_0$ e λ è abbastanza piccolo gli insiemi con funzioni caratteristiche $\mathbb{1}_E \circ (\mathrm{Id} + \lambda\varphi)$, $\mathbb{1}_{(\mathrm{Id}+\lambda\varphi)(E)}$ sono ancora varietà regolari. Ha quindi senso il limite che definisce la variazione rispetto alla perturbazione φ. Si ha che:

$$\exists \pi : E \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \;\; \exists k : E \longrightarrow \mathbb{R}^n, \;\; \exists \beta : L \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

tali che, comunque siano scelti un insieme relativamente compatto $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ e una funzione $\varphi \in \big[C^\infty_0(A)\big]^n$, vale la seguente
(9.1.2)

$$\frac{d}{d\lambda}\Big[\int_A \mathbb{1}_E(x+\lambda\varphi(x)) p(x) \cdot d\mathcal{H}^{h+1}(x)\Big]\Big|_{\lambda=0} = -\int_{E\cap A} \big(\pi\varphi \cdot \nabla p\big)\, d\mathcal{H}^{h+1} + \int_{E\cap A} \big(\varphi \cdot k\big)\, p d\mathcal{H}^{h+1} + \int_{L\cap A} \big(\varphi \cdot \beta\big)\, p d\mathcal{H}^{h},$$

ovvero

$$\frac{d}{d\lambda}\Big[\int_A \mathbb{1}_{(\mathrm{Id}+\lambda\varphi)(E)}(x) p(x) \cdot d\mathcal{H}^{h+1}(x)\Big]\Big|_{\lambda=0} = \int_{E\cap A} \big(\pi\varphi \cdot \nabla p\big)\, d\mathcal{H}^{h+1} - \int_{E\cap A} \big(\varphi \cdot k\big)\, p d\mathcal{H}^{h+1} - \int_{L\cap A} \big(\varphi \cdot \beta\big)\, p d\mathcal{H}^{h}.$$

Grazie a tale espressione si può scegliere come rappresentante della variazione di F per composizione su $\mathbb{1}_E$ in $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \nu = \mathcal{H}^{h+1} \llcorner E + \mathcal{H}^h \llcorner L \\ \alpha = \big(k \cdot p - \pi \cdot \nabla p\big) \cdot \mathbb{1}_{E \setminus L} + \beta \cdot p \cdot \mathbb{1}_L. \end{cases}$$

Osservazione 9.1.12. I campi π, k, β hanno un preciso significato geometrico nelle ipotesi di regolarità assunte. Più precisamente, cfr. [6,8], π è il campo di proiezione ortogonale sullo spazio normale alla varietà immersa, k è il campo di un particolare vettore normale, di *curvatura media* e β è il campo del vettore normale al bordo, *interno*, e tangente alla varietà. Più precisamente se si indicano con $\nu^1 \dots \nu^{n-h-1}$ gli $n-h-1$ campi di una base ortonormale dello spazio normale alla varietà (definiti localmente), si ha:

$$\pi = \sum_{i=1}^{n-h-1} \nu^i \otimes \nu^i, \quad k = \sum_{i=1}^{n-h-1} \left(\mathrm{div}_{T(E)}\nu^i\right) \cdot \nu^i,$$

ove $\mathrm{div}_{T(E)}\phi$, *divergenza tangenziale* della funzione ϕ, è la traccia della proiezione ortogonale sullo spazio tangente del gradiente di ϕ, il *gradiente tangenziale* di ϕ.

Volendo estendere il procedimento ad ambienti più generali, come insiemi rettificabili o varifold, la formula (9.1.2) può essere considerata come una definizione di proiettore normale, vettore di curvature media e vettore tangente normale al bordo.

Come accennato nell'Osservazione 8.2.11, nei casi regolari trattati (localmente parametrizzabili) questo tipo di variazione viene sostanzialmente a coincidere con variazioni classiche additive sulle funzioni di parametrizzazione. In ambienti più generali, ove vi sia compattezza rispetto a convergenze non forti, la scelta presente sembra più praticabile di un'eventuale estensione del concetto di parametrizzazione.

Infine va ricordato il seguente teorema, cfr. [43]:

Teorema 9.1.13 (Teorema della divergenza tangenziale)**.** *Siano* $\Omega \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \left[C^1(\Omega)\right]^n$, $(E, L) \in V_{h+1}B_hC^2(\Omega)$, π *il campo di proiezioni normali di* (E, L), k *il vettore di curvatura media,* β *il vettore tangente interno normale al bordo, allora si ha:*

$$\int_E \left[\mathrm{div}\varphi - \left(\pi \cdot \nabla\varphi\right)\right] d\mathcal{H}^{h+1} = -\int_E \left(\varphi \cdot k\right) d\mathcal{H}^{h+1} - \int_L \left(\varphi \cdot \beta\right) d\mathcal{H}^h.$$

Osservazione 9.1.14. Un approccio diretto per ottenere un'espressione della variazione relativa ad una perturbazione e quindi determinare $\mathcal{V}ar_{\mathrm{loc}}\big(F, u, \Omega\big)$, è relativamente complicato in quanto è necessaria la parametrizzazione locale della varietà e del suo bordo. Volendo capire quali relazioni tra grandezze diano la variazione ammissibile conviene esaminare euristicamente come si trasformano gli insiemi $E \setminus L$ (corpo) ed L (bordo), composti con una perturbazione dell'identità, $\psi = \mathrm{Id} + \varphi$, infinitesima. A tal fine è utile decomporre l'azione di questa deformazione in una parte tangenziale, e in una parte normale.

Osservazione 9.1.15. Gli argomenti euristici, Osservazioni 9.1.2, 9.1.5 e 9.1.6, usati per rendere plausibile il risultato enunciato nell'Esempio 9.1.1 mostrano che il contributo alla variazione della parte di perturbazione tangenziale alla varietà viene così ripartito: la parte tangenziale al corpo nulla sul bordo dà contributo nullo così come il contributo tangenziale sia al corpo che al bordo, mentre il contributo tangenziale al corpo ma normale al bordo è dato dal seguente addendo:

$$\int_L \left(\varphi \cdot \beta\right) p d\mathcal{H}^h.$$

Osservazione 9.1.16. Per esaminare il contributo dato alla variazione dalla parte di perturbazione normale alla varietà conviene considerare due casi semplici: quello in cui la varietà è un segmento nel piano, $h = 0$ ed $n = 2$ e quello in cui la varietà è una "semisfera" $n-2$ dimensionale in $\mathbb{R}^n$, $h = n-3$.

Esemplificando ulteriormente, se E è il segmento $[0, 1] \times \{0\}$ e si ammettono perturbazioni normali che siano semplici costanti in un intorno della varietà:

$$\varphi(x, y) = g(y) \cdot (0, 1); \quad g(t) = 1 \;\; |t| \leq 1, \;\; g(t) = 0 \;\; |t| \geq 3/2 \;, \;\; g(t) < 1 \;\; |t| \in (1, 3/2),$$

si ha che l'insieme perturbato è $[0,1] \times \{-\lambda\}$ quindi:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\Big[\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{[0,1]\times\{-\lambda\}}(x,y)\cdot p(x,y)d\mathcal{H}^1 - \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{[0,1]\times\{0\}}(x,y)\cdot p(x,y)d\mathcal{H}^1\Big]&\\
= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\Big[\int_0^1 p(x,-\lambda)dx - \int_0^1 p(x,0)dx\Big]&\\
= \lim_{\lambda\to 0} \int_0^1 \frac{p(x,-\lambda)-p(x,0)}{\lambda}dx&\\
= -\int_0^1 \frac{\partial p}{\partial y}(x,0)dx&\\
= -\int_E \big(\varphi\cdot\nabla p\big)\, d\mathcal{H}^1.&
\end{aligned}$$

Questo contributo può essere visto come quello dovuto ad uno spostamento normale in un mezzo anisotropo: se si pone p costante tale termine non compare. Pur imponendo p costante il contributo normale può non essere nullo. Nel caso in cui E è una semisfera $n-2$ dimensionale di raggio ρ, contenuta nel sottospazio $x_n = 0$ di $\mathbb{R}^n$, usando per esempio le perturbazioni normali dell'Osservazione 9.1.3, prolungate ad $\mathbb{R}^n$ in modo costante per x_n e sommate ad un vettore costante v con le prime $n-1$ componenti nulle, la varietà deformata è una semisfera di raggio $\rho - \lambda$ e centro v. Si ottiene quindi un contributo alla variazione rispetto a φ pari a

$$\begin{aligned}
p\cdot\frac{\mathcal{H}^{n-2}\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)}{2}\lim_{\lambda\to 0}\frac{(\rho-\lambda)^{n-2}-\rho^{n-2}}{\lambda} &= -\,p\cdot\frac{\mathcal{H}^{n-2}\big(\mathbb{S}^{n-2}\big)}{2}\cdot(n-2)\rho^{n-3}\\
&= -\,p\cdot\frac{\mathcal{H}^{n-2}\big(\mathbb{S}^{n-2}_\rho\big)}{2}\cdot\frac{n-2}{\rho},
\end{aligned}$$

questa espressione mette il risalto la dipendenza dalla curvatura e la dipendenza solo dalla componente della perturbazione in una direzione normale privilegiata, che origina il termine del tipo

$$\int_E \big(\varphi\cdot k\big)\, pd\mathcal{H}^{h+1}.$$

Osservazione 9.1.17. Si dimostra ora la formula (9.1.2) nel caso in cui E è il sostegno di una curva parametrizzata γ, regolare e quindi semplice, in $\mathbb{R}^n$. Siano $\Omega = \mathbb{R}^n$, $p \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $E = [\gamma]$, ove si pone:

$$\begin{aligned}
&\gamma \in \Big[C^1\big([0,l]\big)\Big]^n, \quad \forall t \neq s \quad |\gamma'(t)| = 1, \quad \gamma(t)\neq\gamma(s);\\
&\varphi \in \Big[C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\Big]^n, \quad \forall\lambda \ \ |\lambda| < \frac{1}{\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}} \quad \gamma_\lambda = \Big(\mathrm{Id}+\lambda\varphi\Big)\circ\gamma.
\end{aligned}$$

Per i parametri presi in considerazione l'operatore $\psi_\lambda = \mathrm{Id} + \lambda\varphi$, da $\mathbb{R}^n$ in se, è localmente invertibile con inversa del gradiente continua e limitata, quindi è globalmente invertibile, cfr. Osservazione 8.2.2, pertanto γ_λ non solo è ben definita ma è una curva parametrica, regolare e semplice.

Bisogna calcolare il limite:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0}\ \frac{1}{\lambda}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{[(\mathrm{Id}+\lambda\varphi)\circ\gamma]}\, pd\mathcal{H}^1 - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{[\gamma]}\, pd\mathcal{H}^1\Big]\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\ \frac{1}{\lambda}\Big[\int_0^l p\big(\gamma(t)+\lambda\varphi(\gamma(t))\big)\,\big|\big(\mathrm{Id}+\lambda\nabla\varphi(\gamma(t))\big)\gamma'(t)\big|\,dt - \int_0^l p(\gamma(t))\,dt\Big].
\end{aligned}$$

Considerando che per ogni $t\in[0,l]$, per ogni vettore $v\neq 0$ e per ogni λ con modulo minore strettamente di $1/_{\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}}$, il vettore $\big(\mathrm{Id}+\lambda\nabla\varphi(\gamma(t))\big)\cdot v$ non è nullo, si ha che anche $|\big(\mathrm{Id}+\lambda\nabla\varphi\circ\gamma\big)\cdot\gamma'|$ è derivabile in $\lambda=0$ e si ottiene dopo un'integrazione per parti, che:

$$\begin{aligned}
&\int_0^l \big(\nabla p(\gamma)\cdot\varphi(\gamma)\big)\,dt - \int_0^l \big(\nabla p(\gamma)\cdot\gamma'\big)\big(\varphi(\gamma)\cdot\gamma'\big)\,dt\\
&\quad - \int_0^l \big(\varphi(\gamma)\cdot\gamma''\big)\,p(\gamma)\,dt + \big(\varphi(\gamma(0))\cdot\gamma'(0)\big)p(0) - \big(\varphi(\gamma(l))\cdot\gamma'(l)\big)p(l)\\
&= \int_0^l \Big(\nabla p(\gamma)\cdot[\varphi(\gamma)-\gamma'(\varphi(\gamma)\cdot\gamma')]\Big)\,dt\\
&\quad - \int_0^l \big(\varphi(\gamma)\cdot\gamma''\big)\,p(\gamma)\,dt - \big(\varphi(\gamma(0))\cdot\gamma'(0)\big)p(0) + \big(\varphi(\gamma(l))\cdot\gamma'(l)\big)p(l).
\end{aligned}$$

9.2 Movimenti di Misure

Come già accennato, l'introduzione di $\mathcal{V}ar$ è motivata anche da un tentativo di formalizzazione, *in senso debole* e studio dell'evoluzione di un insieme con "velocità pari" alla "variazione" di un funzionale generale, che nel caso particolare del funzionale area per varietà senza bordo è la così detta "evoluzione secondo il vettore di curvatura media", cfr. [6, 8].

Osservazione 9.2.1. Per questa finalità le varietà $V_hB_{h+1}C^\alpha$ sembrano un ambiente troppo ristretto, e tra i motivi che inducono alla formulazione debole del problema va osservato che una tale evoluzione può presentare la nascita di singolarità. Per esempio l'evoluzione con velocità dei suoi punti pari al vettore di curvatura media, di un toro circolare di rotazione in $\mathbb{R}^3$, con raggio minore relativamente piccolo rispetto a quello maggiore, avendo i punti del cerchio equatoriale interno velocità diretta verso il centro e molto maggiore rispetto agli altri, darà origine ad un dato istante a un insieme con una singolarità, un "toro" con raggio minore nullo, corrispondente ad un cambio della topologia.

Osservazione 9.2.2. Con la definizione di $\mathcal{V}ar$ e il suo calcolo per varietà $h+1$ dimensionali, Esempio 9.1.11, si ha una nozione debole di vettore di curvatura media, formula (9.1.2), direttamente estendibile ad oggetti più generali.

Per procedere in tale direzione è necessario introdurre una nozione di movimento per misure, $\mathcal{MM}$, che può essere vista come una generalizzazione di una nozione duale (la perturbazione è fissata e variano le funzioni peso) a quella di $\mathcal{V}ar$ per funzionali elementari di tipo particolare: quelli lineari rispetto alle misure. Nei casi particolari di moti di varietà $\mathcal{MM}$ coinvolge le tangenti.

Definizione 9.2.3. *Siano* $\widetilde{\Omega} \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ *e* $\widetilde{\Omega}_t = \{x : (x,t) \in \widetilde{\Omega}\}$. *Siano poi* μ *e* ν *funzioni definite su* $\mathbb{R}$, *a valori misure, tali che:*

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mu_t,\ \nu_t \in \mathcal{MB}(\widetilde{\Omega}_t).$$

Date infine $n+1$ *funzioni* $\upsilon_0, \upsilon_1 \dots, \upsilon_n$, $(\upsilon_1 \dots \upsilon_n) = \upsilon$, *a valori reali e con dominio contenuto in* $\widetilde{\Omega}$ *si scriverà* $(\upsilon_0, \upsilon_1 \dots, \upsilon_n, \nu) \in \mathcal{MM}(\mu, \widetilde{\Omega})$, *e si dirà che* $\upsilon_0, \upsilon_1 \dots, \upsilon_n$, ν *descrivono il movimento della misura* μ *in* $\widetilde{\Omega}$, *se e solo se*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\widetilde{\Omega}),\ \forall t \in \mathbb{R} \qquad \int_{\widetilde{\Omega}_t} |\varphi(x,t)|\, d\mu_t(x) < +\infty,$$

anzi $\displaystyle\int_{\widetilde{\Omega}_t} \varphi(x,t)\, d\mu_t(x)$ *è assolutamente continua in* t;

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\widetilde{\Omega})$, *per quasi ogni* $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}\int_{\widetilde{\Omega}_t} \varphi(x,t)\, d\mu_t(x) = \int_{\widetilde{\Omega}_t} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\, d\mu_t(x) + \int_{\widetilde{\Omega}_t} \varphi(x,t)\upsilon_0(x,t)\, d\nu_t(x) + \int_{\widetilde{\Omega}_t} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,t)\upsilon_i(x,t)\, d\nu_t(x).$$

Esempio 9.2.4. Siano $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\gamma \in \left[C^1(\mathbb{R})\right]^n$, $p \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, e quindi si ponga per ogni $t \in \mathbb{R}$ $\mu_t = p(\gamma(t),t) \cdot \delta_{\gamma(t)}$. In tal caso se

$$\begin{cases} \upsilon_0 = \frac{\partial p}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial p}{\partial x_i}\frac{d\gamma_i}{dt}, \\ \upsilon_i = p\gamma_i', \quad \text{per } 1 \le i \le n, \\ \nu_t = \delta_{\gamma(t)}. \end{cases}$$

si ha $(\upsilon_0, \upsilon_1, \dots \upsilon_n, \nu) \in \mathcal{MM}(\mu, \Omega)$.

Osservazione 9.2.5. Nel caso in cui $\mu_t = \mu_0$, ovvero non dipenda dal tempo, si può scegliere $\nu_t = \mu_0$ e $\upsilon_i = 0$, per ogni $1 \le i \le n$.

Osservazione 9.2.6. Euristicamente, riferendosi al caso in cui μ_t è un'evoluzione regolare di una varietà $B_hV_{h+1}C^2$ con densità di massa banale, a meno di fattori moltiplicativi si può pensare che: υ individua la "componente normale al sostegno di μ_t" del "campo di velocità" di spostamento di μ_t; υ_0 la "divergenza tangenziale del campo di velocità" e quindi la velocità di cambiamento di μ_t dovuto alle "variazioni d'area del suo supporto". Questo risulta comprendere un termine di bilancio con l'esterno di "bordo" dovuto al "moto interno" (tangenziale) e un termine di bilancio dovuto alle "deformazioni normali". Infine ν_t individua nel caso il "supporto" di μ_t e le "zone" ove avviene scambio con l'esterno.

Il seguente esempio precisa, nel caso particolare in cui i supporti delle misure μ_t siano curve semplici parametrizzate, i modi di dire ora esposti.

Si consideri quindi una famiglia di curve parametrizzate, i cui sostegni individuino le misure μ_t:

$$\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad \gamma \in \left[C^2(\mathbb{R} \times [0,l])\right]^n, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ s \in [0,l] \quad \gamma_t'(s) = \frac{d\gamma_t}{ds}(s) \neq 0, \quad \mu_t = \mathcal{H}^1 \llcorner [\gamma_t].$$

Indicando con τ, k, rispettivamente il versore tangente alla curva e il vettore di curvatura media, che nel caso di parametrizzazione per lunghezza d'arco coincidono con γ' e γ'' (il versore

β normale al bordo sarà invece individuato da $\gamma'(0)$ e da $-\gamma'(l)$) ed indicando con $\mathbf{v}$ la velocità di spostamento di un punto sulla curva γ_t, ovvero $\frac{d\gamma_t}{dt}$, si ottiene, con procedimento simile a quello dell'Osservazione 9.1.17:

$$\begin{cases} \upsilon = \mathbf{v} - \tau(\tau \cdot \mathbf{v}) = (\mathrm{Id} - \tau \otimes \tau)\mathbf{v} = \pi\mathbf{v}, \\ \upsilon_0 = -\big(k \cdot \mathbf{v}\big) - \big(\beta \cdot \mathbf{v}\big), \\ \nu_t = \mathcal{H}^1 \llcorner [\gamma_t] + \mathcal{H}^0 \llcorner \partial[\gamma_t], \end{cases}$$

e tale risultato rimane valido per il moto regolare di varietà $B_h V_{h+1} C^2$.

Osservazione 9.2.7. I precedenti esempi mostrano che il termine υ_0 comprende le variazioni di massa "interne": sia quelle dovute alla variazione della geometria del supporto, sia quelle dovute al cambiamento di densità della "massa trasportata".
Nel caso di una curva semplice con densità: $\mu_t = p(x,t)\mathcal{H}^1 \llcorner [\gamma_t]$, si avrebbe, avendo scelto $\nu_t = \mathcal{H}^1 \llcorner [\gamma_t] + \mathcal{H}^0 \llcorner \partial[\gamma_t]$:

$$\upsilon = p \cdot \pi\mathbf{v}, \quad \upsilon_0 = -p \cdot \big(k \cdot \mathbf{v}\big) - p \cdot \big(\beta \cdot \mathbf{v}\big) + \big(\pi \nabla p \cdot \mathbf{v}\big) + \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Esercizio 9.2.8. Nel caso in cui $\mu_t = p(x,t)\mathcal{H}^n$ con $p \in C^1_0(B_{1/2})$, $\widetilde{\Omega} = B_1 \times \mathbb{R}$, determinare una velocità di movimento.

Problema 9.2.9. *In quali ipotesi μ_t è assolutamente continua rispetto a ν_t?*

Lezione X

10.1 Movimenti secondo la Variazione

Si vuole ora approfondire il legame tra $\mathcal{V}ar$ ed $\mathcal{MM}$ e definire con precisione l'*evoluzione, secondo la variazione di un funzionale.* Nel caso in cui il funzionale $F(u)$ si rappresenti come integrazione, rispetto alla misura h dimensionale, della funzione caratteristica u di una varietà regolare senza bordo, si ottiene la così detta equazione di evoluzione *secondo la curvatura media.*

Lo studio del problema ai dati iniziali per tale legge di evoluzione è stato negli ultimi quattro anni intensamente ripreso dopo lavori quali [8] e [3], sia per quanto riguarda l'esistenza che per l'approssimazione con equazioni di evoluzione semilineari. A quest'ultimo proposito ci si può riferire al recente lavoro [27] (vedi anche [28]), mentre per una breve rassegna dei principali approcci al problema ci si può riferire a [6] (in appendice) e alle rispettive bibliografie.

Definizione 10.1.1. *Siano $\widetilde{\Omega}$ un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, F una funzione definita in $\mathbb{R}$ a valori funzioni (che in generale rappresenterà una famiglia di "funzionali locali") ν una funzione definita in $\mathbb{R}$ il cui valore in t è una misura in $\widetilde{\Omega}_t$.*
Si dirà che la funzione u di una variabile reale e a valori funzioni, è un movimento secondo la variazione di F in $\widetilde{\Omega}$, e si scriverà $u \in \mathcal{MV}ar(F, \nu, \widetilde{\Omega})$, se e solo se

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n,\ v_1, \dots, v_n,\ p,\ \mu, \quad \textit{posto } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

$$\begin{cases} \big(-|\alpha|^2, v_1, \dots, v_n, \nu\big) \in \mathcal{MM}(\mu, \widetilde{\Omega}), \\ \forall t \in \mathbb{R} \qquad v_{it} = \alpha_{it} p_t, \\ \forall t \in \mathbb{R} \qquad (\alpha_t, \nu_t) \in \mathcal{V}ar_{\mathrm{loc}}\big(F_t, u(\cdot, t), \widetilde{\Omega}_t\big), \\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall A = A^\circ \Subset \widetilde{\Omega}_t \qquad \mu_t(A) = F_t\big(u(\cdot, t); A\big). \end{cases}$$

Se esiste una famiglia di funzioni $\big\{\Phi_t\big\}_{t \in \mathbb{R}}$ per cui si abbia:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall A = A^\circ \Subset \widetilde{\Omega}_t \qquad \Phi_t\big(u(\cdot, t); A\big) = \nu_t(A),$$

si scriverà anche $u \in \mathcal{MV}ar(F, \Phi, \widetilde{\Omega})$.

Osservazione 10.1.2. Nel caso in cui per ogni $t \in \mathbb{R}$, per ogni $A = A^\circ \Subset \widetilde{\Omega}_t$, e per ogni funzione $w \in \mathcal{FB}(\widetilde{\Omega}_t)$ a valori in $\mathbb{N}$, risulti

$$F_t(w, A) = \int\limits_A w(x)\, d\mathcal{H}^h(x) = \Phi_t(w, A),$$

sarebbe interessante confrontare $\mathcal{MV}ar(F, \Phi, \widetilde{\Omega})$ con i movimenti secondo la curvatura media descritti in [8]. È possibile che le maggiori differenze siano legate all'ipotesi di assoluta continuità di $\int\limits_{\widetilde{\Omega}_t} \varphi(x, t)\, d\mu_t(x)$, fatta nelle Definizioni 9.2.3 e 10.1.1. Tale ipotesi renderà probabilmente più difficile l'esistenza di movimenti secondo la variazione, più facile la loro unicità.

Osservazione 10.1.3. Si considera l'esempio di una circonferenza che cambia raggio nel piano ($\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^3$),

$$F_t(w, A) = F(w; A) = \int\limits_A w(x, y)\, d\mathcal{H}^1(x, y), \quad u_t(x, y) = u(x, y, t) = \mathbb{1}_{\partial B_{\rho(t)}(0,0)}(x, y),$$

con $\rho \in C^1(\mathbb{R})$, $\rho > 0$.
In tale caso, posto $\nu_t(A) = \mu_t(A) = \int_A u_t(x, y)\, d\mathcal{H}^1(x, y)$, si hanno il vettore α_t della variazione di $F(u_t; A)$ relativo a ν_t e il movimento (v_0, v, ν_t) di μ_t, dati da:

$$\begin{cases} \alpha_t(x, y) = -\frac{(x,y)}{|(x,y)|^2}, \\ v_0(x, y, t) = \frac{\rho'(t)}{|(x,y)|}, \\ v(x, y, t) = \frac{(x,y)}{|(x,y)|} \cdot \rho'(t). \end{cases}$$

Imponendo quindi le condizioni per cui u sia un movimento secondo la variazione di F in $\widetilde{\Omega}$ relativo a ν, sul supporto di ν_t si ha: $-|\alpha_t(x, y)|^2 = v_0(x, y, t)$ cioè $-\frac{1}{\rho^2} = \frac{\rho'}{\rho}$, $\alpha_t(x, y) = v(x, y, t)$, $p_t \equiv 1$, cioè $-\frac{(x,y)}{\rho^2} = \frac{\rho'}{\rho}(x, y)$, per cui deve essere $\rho\rho' = -1$, ovvero $\rho(t) = \sqrt{\rho^2(0) - 2t}$.

Osservazione 10.1.4. Se $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ed il funzionale è definito sulle funzioni indicatrici di punti come valore di tale funzione:

$$F(\mathbb{1}_{\{x\}}; A) = \int\limits_A \mathbb{1}_{\{x\}}(y) f(y)\, d\mathcal{H}^0(y) = \int\limits_A f\, d\delta_x = f(x)\mathbb{1}_A(x),$$

si ha che un'evoluzione $u_t = \mathbb{1}_{\{\gamma(t)\}}$ che corrisponda al moto di un punto γ, come curva differenziabile a valori in $\mathbb{R}^n$, è ammissibile nel senso della Definizione 10.1.1. Essa segue la variazione del funzionale se e solo se verifica la classica equazione di massima discesa (quando non sia su $\{f = 0\} \cap \{\nabla f = 0\}$)

$$\gamma' = -\nabla f(\gamma).$$

In [6] sono ricavate le equazioni del moto per funzioni i cui grafici si evolvano seconda la curvatura media.

Osservazione 10.1.5. Il valore del funzionale su un'evoluzione secondo la sua variazione deve sostanzialmente calare.

Nel caso in cui $\nu_t = u(x, t)\mathcal{H}^h \llcorner \mathcal{B}(\widetilde{\Omega}_t)$, con $u(\cdot, t)$ boreliana, si userà la notazione $u \in \mathcal{MV}ar_h(F, \widetilde{\Omega})$. Questa condizione particolare è interessante per i problemi ai dati iniziali del tipo:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{MV}ar_h(F, \widetilde{\Omega}) \\ \lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x, t) g(x)\, d\mathcal{H}^h = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x) g(x)\, d\mathcal{H}^h, \quad \forall g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Lo studio di tali problemi dovrebbe rientrare nello schema classico: esistenza, unicità, dipendenza, continua dai dati, stabilità e regolarità.

Enunciamo ora due congetture introducendo le seguenti notazioni utili per la prima di esse.

- $\mathcal{P}_n = \left\{q \in \mathcal{P}er_n(2\pi) \cap C^\omega(\mathbb{R}^n) \ : \ q > 0\right\}$
- $F_{h,q}(u, A) = \int\limits_A u(x) q(x)\, d\mathcal{H}^h(x)$
- $\mathcal{A}mb\, C^\alpha(u) = \bigcup\limits_{u \in C^\alpha(A)} A$

- $\mathcal{S}ing\, C^\alpha(u) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}mb\, C^\alpha(u)$

Congettura 10.1.6 (Teorema di esistenza e regolarità)**.** Dati una funzione q ed un insieme S tali che:

$$S \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1}), \quad S \in V_h C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}), \quad S \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}, \quad q \in \mathcal{P}_n;$$

allora esiste almeno un insieme L tale che:

$$L \subseteq \mathbb{R}^n \times [0, +\infty), \quad L \cap \mathbb{R}^n \times \{0\} = S,$$

per cui si abbia:

$$\mathbb{1}_L \in \mathcal{MV}ar_h\Big(F_{h,q}; \mathbb{R}^n \times [0, +\infty)\Big), \quad \mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathcal{A}mb\, V_{h+1} B_h C^\infty\big((L, S)\big).$$

Congettura 10.1.7 (Teorema di unicità come proprietà generica)**.** Sia S una varietà compatta, senza bordo di classe C^∞, dimensione h, immersa in $\mathbb{R}^n$, con $n > 2h + 1$ e sia $k > n$.

Allora per *quasi ogni* polinomio reale p di n variabili reali e di grado k, *esiste un solo* insieme $L \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ che verifichi le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
&\forall a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b \quad L \cap \mathbb{R}^n \times [a, b] \quad \text{è compatto;}\\
&\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (x,t) \in L \quad \Longleftrightarrow \quad \liminf_{\rho \to 0} \frac{\mathcal{H}^{h+1}\big(B_\rho(x,t) \cap L\big)}{\rho^{h+1}} > 0;\\
&\forall f \in \mathcal{FB}\big(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\big) \quad \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{L_t} |f(x,t)|\, d\mathcal{H}^h(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_L |f|\, d\mathcal{H}^{h+1} = 0 \Big];\\
&L \cap \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0] = S \times (-\infty, 0];\\
&\mathbb{1}_L \in \mathcal{MV}ar_h\big(F, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\big);
\end{aligned}$$

avendo definito per ogni $t \in \mathbb{R}$, per ogni $A = A^\circ \Subset \mathbb{R}^n$ e per ogni funzione w definita su $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{N}$:

$$F_t(w, A) = \begin{cases} \int\limits_{A \cap S} \big(1 + p^2(x)\big) \cdot e^{-|x|^2}\big)\, d\mathcal{H}^h(x), & \text{per } t \le 0;\\ \int\limits_A \big(1 + p^2(x)\big) \cdot e^{-|x|^2}\big) \cdot w(x)\, d\mathcal{H}^h(x), & \text{per } t > 0. \end{cases}$$

Osservazione 10.1.8. La definizione della funzione $F_t(w, a)$ è stata fatta per conglobare le condizioni iniziali, per $t \le 0$ e l'evoluzione per $t > 0$.

Appendice A

Funzioni a Variazione Limitata e Distribuzioni

In quanto esposto sulle funzioni a variazione limitata e sulle energie convesse il riferimento alla teoria delle distribuzioni è stato marginale e non necessario. Alcuni fatti elementari permettono di specificare meglio alcune relazioni tra funzioni a variazione limitata e distribuzioni. Il seguente teorema generalizza l'Osservazione 3.2.8, e giustifica ulteriormente l'usuale notazione per la variazione totale in un aperto A di una funzione misurabile e per le energie con integranda convessa.
Ricordiamo, per prima cosa, la definizione di derivata distribuzionale di una funzione localmente sommabile:

Definizione. *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $F \in \mathcal{D}^*(A)$. Si dice che un funzionale T, lineare e continuo su $\left[C_0^\infty(A)\right]^n$, è la derivata distribuzionale di F in A se:*

$$\forall \varphi \in \left[C_0^\infty(A)\right]^n, \quad T(\varphi) = -F(\operatorname{div} \varphi)$$

nel caso si scrive $T = DF$.

Teorema. *Sia $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e sia $f \in L^1_{\text{loc}}(A)$, i seguenti asserti sono equivalenti:*

- $\forall B \Subset A,\ B \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ *Df ha un'estensione continua a* $\left(\left[C_0^0(\overline{B})\right]^n, \|\cdot\|_{L^\infty(B)}\right)$,
- $f \in BV_{\text{loc}}(A)$.

Nel caso la norma di Df come funzionale lineare e continuo su $\left[C_0^0(\overline{B})\right]^n$, $B \Subset A$, è data da $\mathbf{V}(f, B)$.

Tenendo presente che il duale delle funzioni continue su di uno spazio compatto separabile corrisponde allo spazio delle misure σ–additive con segno a variazione totale finita, è naturale che se $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ allora la funzione che associa ad $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ il valore $\int_A |Df|$ sia la restrizione ad $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ di una misura σ–additiva definita sui boreliani e finita sugli insiemi compatti. Più precisamente una misura σ–additiva che estende la variazione totale di una funzione f, è la misura variazione totale, nel senso delle misure vettoriali, della misura vettoriale associata alla derivata distribuzionale Df.

Appendice B

Moto delle superfici secondo la curvatura media

Luigi Ambrosio, Pisa 1989

Alcuni esempi suggeriscono che anche le superfici lisce possono, nel loro moto secondo la curvatura media, sviluppare singolarità. È quindi ragionevole cercare una descrizione intrinseca del moto secondo curvatura media, che non faccia ricorso a parametrizzazioni. Descriveremo il metodo di Brakke, che ha il privilegio di funzionare per arbitrarie dimensioni e codimensioni ed il metodo sviluppato, per trattare l'evoluzione di ipersuperfici, da Osher–Sethian ed Evans–Spruck. Infine discuteremo alcune congetture di De Giorgi volte ad approssimare l'equazione di Evans–Spruck con equazioni semilineari, del tipo $u_t = \Delta u - H(u)$.

• La misura di Hausdorff k–dimensionale

Sia k un intero tra 1 e n, sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$; la misura k–dimensionale di Hausdorff di A è definita nel seguente modo:

$$\mathcal{H}^k(A) \;=\; \frac{\omega_k}{2^k} \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^k_\delta(A)$$

ove ω_k è la misura di Lebesgue della palla unitaria di $\mathbb{R}^k$ e

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) \;=\; \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(C_i))^k \;:\; \mathrm{diam}\,(C_i) \;<\; \delta, \;\; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_1 \right\}.$$

La misura di Hausdorff consente di integrare funzioni definite su varietà k–dimensionali anche non regolari, senza far ricorso alla parametrizzazione. La normalizzazione $\frac{\omega_k}{2^k}$ assicura la validità della formula dell'area:

$$\mathcal{H}^k\left(f(\Omega)\right) \;=\; \int_\Omega |J_k f(x)| \; dx$$

ove $f : \; \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una funzione lipschitziana iniettiva e $|J_k f(x)|^2$ si ottiene sommando i quadrati dei determinanti di tutti i minori di ordine k della matrice jacobiana.

• Il gradiente tangenziale ed il vettore curvatura media

Sia $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie k–dimensionale di classe C^2 e sia $g : \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x \in \Gamma$. Indicheremo con $D^\top g(x)$ il gradiente tangenziale di g, vale a dire la proiezione di $Dg(x)$ sullo spazio tangente a Γ in x. Indicheremo con $D^\perp g(x)$ il gradiente normale, dato da

$Dg(x) - D^\top g(x)$. In modo analogo si definisce la divergenza tangenziale $\mathrm{div}^\top g$ di un campo vettoriale $g:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{div}^\top g \;=\; \sum_{i=1}^n D_i^\top g_i \;=\; \sum_{i=1}^n \langle D^\top g_i, e_i\rangle,$$

ove $\{e_1,\dots,e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Il vettore curvatura media $H(\Gamma,x)$ è definito nel seguente modo:

$$H(\Gamma,x) \;=\; -\sum_{i=1}^{n-k} \big(\mathrm{div}^\top \nu_i\big)\nu_i,$$

ove $(\nu_1(y),\dots,\nu_{n-k}(y))$ sono campi di vettori di classe C^1 costituenti una base ortonormale dello spazio normale a Γ in y, al variare di y in un intorno di x. La definizione è ben posta e nel caso in cui Γ è una ipersuperficie ($k = n-1$), la formula si riduce a

$$H(\Gamma,x) \;=\; -(\mathrm{div}^\top \nu)\nu,$$

ove ν è un campo normale a Γ.

• Il teorema della divergenza e la variazione prima dell'area

Sia Γ una superficie di classe C^2 e priva di bordo e sia $g \in C_0^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Il teorema della divergenza afferma che:

$$\int_\Gamma \mathrm{div}^\top g \, d\mathcal{H}^k \;=\; -\int_\Gamma \langle g, H\rangle \, d\mathcal{H}^k.$$

Sia $\Phi_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito da

$$\Phi_s(x) \;=\; x + sg(x).$$

Per s abbastanza piccolo, Φ_s è un diffeomorfismo di classe C^1 e si può dimostrare che

$$\frac{d}{ds}\Big(\mathcal{H}^k\left(\Phi_s\left(\Gamma\right)\right)\Big)\Big|_{s=0} \;=\; \int \mathrm{div}^\top g \, d\mathcal{H}^k.$$

Questi due risultati implicano che superfici compatte Γ_t di classe C^2 e prive di bordo che si evolvono secondo la curvatura media soddisfano l'equazione

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathcal{H}^k\left(\Gamma_t\right)\Big) \;=\; \int_{\Gamma_t} \mathrm{div}^\top H_t \, d\mathcal{H}^k \;=\; -\int_{\Gamma_t} |H_t|^2 \, d\mathcal{H}^k. \tag{1}$$

• Moto secondo la curvatura media di varietà parametrizzate

Diremo che le superfici $\Gamma_t \subseteq \mathbb{R}^n$ si evolvono secondo la curvatura media se esiste una superficie Γ e parametrizzazioni $F(\cdot,t):\ \Gamma \to \mathbb{R}^n$ di Γ_t tali che

$$\frac{d}{dt}F(p,t) \;=\; H(p,t) \qquad \forall (p,t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+,$$

ove $H(p,t)$ è la curvatura media di Γ_t in $F(p,t)$.

• **La definizione di Brakke**

La definizione di Brakke consiste in una localizzazione della (1). Data $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, la derivata dell'integrale di φ su $\Phi_s(\Gamma)$ è data da:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(\int_{\Phi_s(\Gamma)} \varphi\, d\mathcal{H}^k\right)\bigg|_{s=0} &= \int_\Gamma \Big(\varphi \operatorname{div}^\top g \,+\, \langle D\varphi, g\rangle\Big)\, d\mathcal{H}^k \\ &= \int_\Gamma \Big(\operatorname{div}^\top(\varphi g) \,-\, \langle D^\top\varphi, g\rangle \,+\, \langle D\varphi, g\rangle\Big)\, d\mathcal{H}^k \\ &= \iint_\Gamma \Big(-\varphi\langle g, H\rangle \,+\, \langle D^\perp\varphi, g\rangle\Big)\, d\mathcal{H}^k.\end{aligned}$$

Ponendo $g = H_t$ ed osservando che la perpendicolarità di H_t a Γ_t implica

$$\langle D^\perp\varphi, H_t\rangle \;=\; \langle D\varphi, H_t\rangle,$$

si ottiene allora

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Gamma_t} \varphi\, d\mathcal{H}^k\right) \;=\; -\int_{\Gamma_t} |H_t|^2\, \varphi\, d\mathcal{H}^k \;+\; \int_{\Gamma_t} \langle D\varphi, H_t\rangle\, d\mathcal{H}^k. \tag{2}$$

Richiedendo che (2) valga per ogni scelta di φ, si ottiene così una formulazione debole del moto secondo curvatura media di superfici di arbitraria dimensione e codimensione. Si riesce inoltre a dare un senso alla (2) nella classe dei varifolds interi rettificabili $\mathbf{IV}_k(\mathbb{R}^n)$, definibile nel seguente modo: una misura μ appartiene a $\mathbf{IV}_k(\mathbb{R}^n)$ se esistono un insieme M contenuto in un'unione numerabile di superfici C^1 k–dimensionali ed una funzione molteplicità $\theta:\ M \to \mathbf{N}$ tali che

$$\mu(B) \;=\; \int_{B\cap M} \theta\, d\mathcal{H}^k$$

per ogni insieme boreliano B. Il vettore curvatura media dei varifolds è definibile usando la variazione prima di μ rispetto alle deformazioni $\Phi_s(x) \;=\; x + sg(x)$.

Il principale risultato del libro di Brakke è l'esistenza, per un certo dato iniziale μ_0, di varifolds μ_t verificanti la condizione

$$D^+\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu_t\right) \;\le\; -\int_{\mathbb{R}^n} |H_t|^2 \varphi\, d\mu_t \;+\; \int_{\mathbb{R}^n} \langle D\varphi, H_t\rangle\, d\mu_t$$

per ogni scelta della funzione φ in $C_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$, ove

$$D^+ f(t) \;=\; \limsup_{s\downarrow t} \frac{f(s)-f(t)}{s-t}.$$

La motivazione che ha portato Brakke a rilassare l'uguaglianza in una diseguaglianza sembra essere la possibilità di perdite istantanee di area, che portano il rapporto incrementale a $-\infty$. Non si ha in generale alcun teorema di unicità.

• **Le ipersuperfici viste come insiemi di livello**

Sia $k = n-1$ ed immaginiamo che gli insiemi di livello $\Gamma_t \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n :\ u(x,t) = c\}$ di una funzione $u(x,t) \in C^2\left(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)\right)$ il cui gradiente spaziale non è mai nullo si evolvano secondo la curvatura media. Fissato $x_0 \in \Gamma_{t_0}$, la legge che regola il moto di x_0 è l'equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} x'(t) = -\big(\operatorname{div}\ \nu\,(x(t),t)\big)\,\nu(x(t),t) & t > t_0 \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

ove $\nu(x,t) = Du(x,t)/|Du(x,t)|$. Essendo la funzione $u(x(t),t)$ identicamente uguale a c per $t \geq t_0$, la sua derivata in t_0 è nulla. Si ha quindi

$$u_t(x_0,t_0) = |Du(x_0,t_0)|\,(\operatorname{div}\nu(x_0,t_0))\,.$$

Essendo $x_0,\ t_0$ e c arbitrari, si ricava l'equazione

$$\begin{cases} u_t = -|Du|\operatorname{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) = \Delta u - \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{D_iuD_ju}{|Du|^2} D^2_{ij}u \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{3}$$

Viceversa, si verifica con lo stesso ragionamento che se l'equazione (3) ha soluzione per un certo dato iniziale u_0, allora l'evoluzione seconda curvatura media degli insiemi di livello di u_0 è data dagli insiemi di livello di u. Ad esempio, nel caso in cui $u_0(x) = |x|^2$, la soluzione u è data da $|x|^2 + 2(n-1)t$. Va osservato che se u verifica la (3) e $\phi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente monotona e di classe C^2, anche $\phi(u)$ soddisfa la (3), con dato iniziale $\phi(u_0)$. La regolarità di u è quindi in generale non maggiore di quella di u_0.

• **Evoluzione dei grafici**

Supponiamo che Γ_0 sia il grafico di una funzione v_0, vale a dire

$$\Gamma_0 = \{(x_1,\ldots x_n):\ v_0(x_1,\ldots,x_{n-1}) = x_n\}\,.$$

In tal caso, se l'equazione

$$\begin{cases} v_t = \sqrt{1 + |Dv|^2}\operatorname{div}\left(\frac{Dv}{\sqrt{1+|Dv|^2}}\right) \\ v(x_1,\ldots,x_{n-1},0) = v_0(x_1,\ldots,x_{n-1}) \end{cases} \tag{4}$$

ha soluzione, una soluzione della (3) (con $u_0(x_1,\ldots x_n) = v_0(x_1,\ldots,x_{n-1}) - x_n$) si ottiene ponendo

$$u(x_1,\ldots x_n,t) = v(x_1,\ldots,x_{n-1},t) - x_n.$$

Ecker e Huisken hanno dimostrato che la (4) ha una soluzione globale e di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$ se il dato iniziale v_0 è una funzione lipschitziana. Dimostriamo qui l'esistenza di soluzioni per dati iniziali v_0 con derivate prime e seconde limitate in $\mathbb{R}^n$. Se si scrive l'equazione nella forma

$$v_t = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(Dv)D^2_{ij}v$$

con

$$a_{ij}(p) = \delta_{ij} - \frac{p_ip_j}{1+|p|^2},$$

si vede che la matrice dei coefficienti tende ad essere degenere per $|p| \to +\infty$. Per ovviare a questo inconveniente si fissa un parametro $\sigma > 0$ destinato a diventare infinitesimo e si considerano le soluzioni v^σ dell'equazione

$$v_t \;=\; \sum_{i,j=1}^{n-1} a^\sigma_{ij}(Dv) D^2_{ij} v, \qquad a^\sigma_{ij}(p) \;=\; (1+\sigma)\delta_{ij} \;-\; \frac{p_i p_j}{1+|p|^2}$$

con dato iniziale v_0. Applicando il principio del massimo, si trova $\|v^\sigma\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty$. Derivando l'equazione prima rispetto ad una delle variabili spaziali e poi rispetto a t, lo stesso principio implica che

$$\|Dv^\sigma\|_\infty \leq \|Dv_0\|_\infty, \quad \|v^\sigma_t\|_\infty \leq \|D^2 v_0\|_\infty.$$

Osservando che

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a^\sigma_{ij}(p)\xi_i\xi_j \geq \left(1 \;-\; \frac{L^2}{1+L^2}\right)|\xi|^2$$

se $|p| \leq L$ e prendendo $L = \|Dv_0\|_\infty$, si ottiene una stima uniforme in σ delle derivate parziali seconde di v^σ. È quindi possibile trovare una successione $(\sigma_h) \downarrow 0$ tale che v^{σ_h} converge uniformemente nelle derivate prime spaziali e debolmente nella derivata prima temporale a v, che è la soluzione (unica per il principio del massimo) della (4).

• **Soluzioni nel senso della viscosità della** (3)

Evans e Spruck hanno pensato di dare un senso alla (3) anche per funzioni u il cui gradiente può non esser definito, o può annullarsi. Per far questo si sono ispirati, con qualche variante, alla nozione di soluzione di viscosità introdotta da P. L. Lions.

Sia $u : \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Diremo che u è una sottosoluzione della (3) se per ogni funzione $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ e per ogni $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ tale che $u - \phi$ ha un massimo locale in (x_0,t_0) si ha

$$\phi_t(x_0,t_0) \;\leq\; \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} \;-\; \frac{D_i\phi D_j\phi}{|D\phi|^2}\right) D^2_{ij}\phi(x_0,t_0)$$

se $D\phi(x_0,t_0) \neq 0$ e in caso contrario

$$\phi_t(x_0,t_0) \;\leq\; \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} \;-\; \eta_i\eta_j)\, D^2_{ij}\phi(x_0,t_0)$$

per qualche $\eta \in \mathbb{R}^n$ con $|\eta| \leq 1$.

La definizione di soprasoluzione si dà in modo analogo, scambiando massimi con minimi ed invertendo le due diseguaglianza di sopra. Le soluzioni sono le funzioni del tempo al tempo stesso sottosoluzioni e soprasoluzioni. Si verifica facilmente che le funzioni u di classe C^1 che soddisfano la (3) nelle regioni ove $|Du| \neq 0$ sono soluzioni nel senso della viscosità e che se u è una soluzione della (3) nel senso della viscosità anche la funzione composta $\phi(u)$ lo è, purché $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia strettamente monotona e continua.

Evans e Spruck hanno dimostrato che la (3) ha soluzione unica nel senso della viscosità per dati iniziali u_0 continui e costanti all'esterno di una palla sufficientemente grande. Più precisamente, ogni sottosoluzione dell'equazione è minore o uguale di ogni soprasoluzione, purché la diseguaglianza valga per $t = 0$. Il loro risultato è poi stato generalizzato in varie direzioni da Giga–Goto–Ishii e Sato.

La soluzione della (3) è ottenuta, almeno per dati iniziali di classe C^2 e costanti all'infinito, come limite uniforme delle soluzioni u_ϵ dei problemi

$$\begin{cases} u_t = \sqrt{\epsilon^2 \ + \ |Du|^2}\,\mathrm{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{\epsilon^2+|Du|^2}}\right) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

che equivalgono ai problemi (ponendo $v = u/\epsilon$)

$$\begin{cases} v_t = \sqrt{1 \ + \ |Dv|^2}\,\mathrm{div}\left(\frac{Dv}{\sqrt{1+|Dv|^2}}\right) \\ v(x,0) = \epsilon^{-1}u_0(x). \end{cases}$$

Per quanto già visto, le costanti di Lipschitz di u_ϵ sono tutte minori od uguali della costante di Lipschitz di u_0. È quindi sufficiente dimostrare che il limite di ogni sottosuccessione di u_ϵ per ϵ tendente a zero è soluzione nel senso della viscosità. L'idea geometrica di questa approssimazione è la seguente: supponiamo, per fissare le idee, che sia $n = 2$, che l'insieme Γ_0 ove u_0 si annulla sia la frontiera di un dominio liscio e semplicemente connesso, che u_0 sia negativa all'interno del dominio e positiva all'esterno. Se indichiamo con Γ_t l'evoluzione di Γ_0, è naturale attendersi che l'evoluzione del cilindro $\Gamma_0 \times \mathbb{R}$ sia $\Gamma_t \times \mathbb{R}$. Questo cilindro è approssimato per ϵ piccolo dal grafico

$$\left\{(x,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ s \ = \ \frac{u_0(x)}{\epsilon}\right\}.$$

Si può quindi pensare che, a t fissato, per ϵ abbastanza piccolo il cilindro $\Gamma_t \times \mathbb{R}$ sia vicino all'evoluzione del grafico di u_0/ϵ. Intersecando quindi con il piano $s = 0$, si ottiene che Γ_t deve essere vicina al luogo di zeri delle funzioni u_ϵ.

• Il moto degli insiemi di livello secondo Osher–Sethian ed Evans–Spruck

Utilizzando l'equazione (3) si può definire il moto in senso generalizzato delle superfici compatte secondo la curvatura media. Sia Γ_0 un insieme compatto (nessuna regolarità è ora richiesta) e sia u_0 una funzione continua, costante all'infinito, il cui luogo di zeri è Γ_0. Diremo allora che gli insiemi $\Gamma_t \ = \ \{u(\cdot,t) = 0\}$ rappresentano l'evoluzione di Γ_0, in senso debole, secondo la curvatura media. I principali risultati dei lavori di Evans–Spruck, supportati da simulazioni numeriche di Osher–Sethian, sono i seguenti:

1. La definizione è ben posta: gli insiemi Γ_t non dipendono dalla scelta di u_0, ma solo dal suo luogo di zeri.

2. L'applicazione $t \mapsto \Gamma_t$ è un semigruppo ad un parametro: l'insieme Γ_{t+s} coincide con l'evoluzione al tempo s di Γ_t.

3. Si ha $d\big(\Gamma_0, \widetilde{\Gamma}_0\big) \ \le \ d\big(\Gamma_t, \widetilde{\Gamma}_t\big)$ per $t \ge 0$. In particolare, se inizialmente gli insiemi sono disgiunti, allora continuano ad esserlo per $t > 0$. Inoltre, se $\Gamma_0 \subseteq \widetilde{\Gamma}_0$, l'inclusione continua a valere per tempi positivi.

4. Si possono avere perdite istantanee di area: per esempio se Γ_0 è un sottoinsieme proprio della frontiera di un dominio liscio e semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$, allora $\Gamma_t \ = \ \emptyset$ per $t > 0$.

5. Gli insiemi di livello Γ_t possono sviluppare una parte interna anche se Γ_0 è un insieme magro. L'esempio più semplice è costituito dall'insieme (si veda il lavoro di Soner citato in bibliografia)
$$\Gamma_0 \;=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; xy = 0 \;\right\}.$$
Essi congetturano che questo fenomeno avvenga tutte le volte che vi è mancanza di unicità delle soluzioni nel senso di Brakke e che l'insieme Γ_t sia fatto dall'unione di tutte le possibili evoluzioni nel senso di Brakke.

È annunciato infine un teorema di regolarità per gli insiemi di livello delle soluzioni di (3).

• **Approssimazione di problemi di area minima**

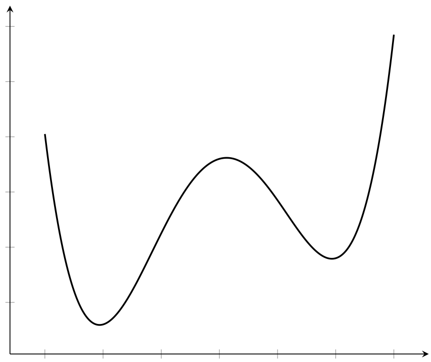
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato con frontiera lipschitziana e sia $c \in\; [0, \mathrm{mis}(\Omega)]$. Teoremi ormai classici assicurano l'esistenza di soluzioni del problema variazionale
$$\min \{\mathcal{H}\,(\Omega \cap \partial E) :\; E \subseteq \Omega,\; \mathrm{mis}(E) = c \;\}.$$
È possibile inoltre dimostrare che per gli insiemi minimizzanti la superficie $\Omega \cap \partial E$ è analitica al di fuori di un insieme K chiuso di dimensione inferiore ad $n-8$, vale a dire $\mathcal{H}^k(K) = 0$ per ogni $k > n-8$. Il vincolo di volume fa sì che la curvatura media della superficie minimizzante sia costante.

Modica e Mortola hanno dimostrato che il problema $(\mathcal{P})$ può essere approssimato da altri problemi ambientati nello spazio $H^1(\Omega)$. Essi hanno considerato i seguenti problemi
$$\min \left\{ \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u|^2}{h} + hW(u) \right) dx :\; \int_\Omega u\,dx \;= c,\;\; 0 \le u \le 1 \;\right\},$$
ove $W : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ è una funzione continua che si annulla solo agli estremi ed hanno dimostrato le seguenti proprietà:

1. ogni successione u_h di soluzioni di $(\mathcal{P}_h)$ è relativamente compatta in $L^2(\Omega)$;
2. ogni punto di accumulazione della successione per $h \to \infty$ è la funzione caratteristica di una soluzione di $(\mathcal{P})$;
3. se $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{W}(s)\,ds \;=\; \frac{1}{2}$, allora si ha convergenza delle energie:
$$\lim_{h\to\infty} \min\,(\mathcal{P}_h) \;=\; \min\,(\mathcal{P})\,.$$

Va osservato che in generale non è detto che tutta la successione converga, a meno che il minimo del problema limite sia unico.

Recentemente Bellettini, Paolini e Verdi hanno dimostrato la validità dell'approssimazione anche dal punto di vista numerico. Sempre in questi ultimi anni, è stata trovata un'interpretazione fisica dell'approssimazione suggerita da Modica–Mortola, nell'ambito della teoria dei fluidi di Cahn–Hilliard. L'energia libera $\Theta(u)$ di tali fluidi dipende dalla densità u del fluido ed ha l'andamento descritto in figura.



Minimizzando l'energia libera con un vincolo di massa (un vincolo sull'integrale di u) si può sottrarre la funzione lineare e si trova quindi che i minimi corrispondono ad una divisione del fluido in due fasi α e β, con la sola condizione

$$\alpha \cdot \mathrm{mis}\,(\{u=\alpha\}) \ + \ \beta \cdot \mathrm{mis}\,(\{u=\beta\}) \ = \ \text{costante}.$$

D'altro canto, le sole interfacce fisicamente osservate sono lisce e con curvatura media costante. Per spiegare questo, era stato suggerito di minimizzare l'energia libera del fluido più una piccola costante per l'integrale di Dirichlet. Questo procedimento corrisponde esattamente all'approssimazione di Modica–Mortola.

• Approssimazione del moto secondo la curvatura media con equazioni semilineari

I risultati "statici" di approssimazione sopra descritti hanno portato De Giorgi a formulare la seguente congettura (si suppone ora $n > 1$, W derivabile e si indica con χ_E la funzione caratteristica di E a valori $\{0,1\}$):

Congettura 1. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana tale che $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$, e sia u_h la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \ - \ h^2 W'(u) \\ u(x,0) = \chi_{\{f<\lambda\}}(x). \end{cases}$$

Allora, per quasi ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste una funzione $u : \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \to \{0,1\}$ tale che

$$\lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_h(x,t) - u(x,t)|^2 \, dx \ = \ 0, \quad \forall \, t \geq \ 0$$

e, posto $u(x,t) = \chi_{E_t}(x)$, le frontiere Γ_t di E_t evolvono secondo la curvatura media.

L'idea euristica è che se i funzionali convergono, allora anche le corrispondenti curve di massima pendenza lo fanno. In certi casi questo è stato dimostrato, si veda ad esempio il lavoro di Degiovanni, Marino e Tosquez citato in bibliografia.

La Congettura 1 ha finora ricevuto conferme solo parziali: Owen, Rubinstein e Sternberg ne hanno dato una dimostrazione non rigorosa, con sviluppi in serie formali. Una dimostrazione rigorosa della convergenza delle funzioni $u_h(\cdot,t)$, per t piccolo, ad un moto secondo la curvatura media è stata trovata da De Mottoni e Schatzman supponendo la superficie iniziale liscia ed approssimando la sua funzione caratteristica con opportune funzioni v_h che sono poi prese come dato iniziale per u_h.

In seguito De Giorgi ha pensato di modificare la sua congettura in modo da far evolvere tutti gli insiemi di livello di f contemporaneamente e così da recuperare la soluzione di Evans–Spruck.

Consideriamo ad esempio la funzione

$$W(t) \;=\; \frac{1 \;-\; \cos 2\pi t}{2\pi}.$$

Fissati interi $h,\ k$ ed una funzione lipschitziana f definita in $\mathbb{R}^n$, sia $u_{h,k}$ la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \;-\; \frac{\sin(2\pi k u)}{k} h^2 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Congettura 2. Se u è una soluzione di (3) nel senso delle viscosità con dato iniziale f, si ha

$$u \;=\; \lim_{k\to\infty} \lim_{h\to\infty} u_{h,k},$$

uniformemente sui compatti.

Una congettura più forte sarebbe la seguente: se k_h tende a ∞ più lentamente di h, si ha

$$u \;=\; \lim_{h\to\infty} u_{h,k(h)}.$$

Referenze

1. G. Bellettini, M. Paolini, and C. Verdi, Γ*–convergence of discrete approximations to interfaces with prescribed mean curvature*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **1** (1990), no. 4, 317–328.

2. ______, *Numerical minimization of geometrical type problems related to calculus of variations*, Calcolo **27** (1991), 251–278.

3. K. A. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton University Press, NJ, 1978.

4. L. Bronsard and R. V. Kohn, *On the slowness of phase boundary motion in one space dimension*, Comm. Pure. Appl. Math. **43** (1990), 983–997.

5. Y. G. Chen, Y. Giga, and S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 749–786.

6. M. G. Crandall and P. L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), 487–502.

7. E. De Giorgi, *Alcune congetture riguardanti l'evoluzione delle superfici secondo la curvatura media*, Pisa, 1990.

8. ______, *Some conjectures on flow by mean curvature*, Proc. Capri Workshop, 1990.

9. P. De Mottoni and M. Schatzman, *Évolution géométriques d'interfaces,*, C. R. Acad. Sc. Paris Sér. I Math. **309** (1989), no. 7, 207–320.

10. M. Degiovanni, A. Marino, and M. Tosques, *Evolution equations with lack of convexity*, Nonlinear Anal. **9** (1990), 1401–1443.

11. K. Ecker and G. Huisken, *Mean curvature flow of entire graphs*, Ann. of Math. (2) **130** (1989), 453–471.

12. L. C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 635–681.

13. L. C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature II*, Trans. Am. Math. Soc. **330** (1992), 321–332.

14. M. Gage, *Curve shortening makes convex curves circular*, Invent. Math. **76** (1984), 357–364.

15. M. Gage and R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Diff. Geom. **23** (1986), 69–96.

16. Y. Giga, S. Goto, H. Ishii, and M. H. Sato, *Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 443–470.

17. M. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Diff. Geom. **26** (1987), 285–314.

18. G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Diff. Geom. **20** (1984), 237–266.

19. ______, *Asymptotic behaviour for singularities of the mean curvature flow*, J. Diff. Geom. **31** (1990), 285–299.

20. O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural′ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

21. L. Modica, *Gradient theory of phase transitions and minimal interface criterion*, Arch. Rat. Mech. Anal. **98** (1987), 123–142.

22. S. Osher and J. A. Sethian, *Front propagation with curvature depending speed: algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations*, Jour. Comp. Phys. **79** (1988), 12–49.

23. N. C. Owen, J. Rubinstein, and P. Sternberg, *Minimizer and gradient flows for singularly perturbed bi–stable potentials with a Dirichlet condition*, Proc. Royal Soc. London **429** (1990), 502–532.

24. L. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proc. Centre of Math. Anal., vol. 3, Australian Nat. Univ., 1983.

25. H. M. Soner, *Motion of a set by the curvature of its boundary*, J. Diff. Equations **101** (1993), 313–372.

Bibliografia

[1] D. R. Adams and L. I. Hedberg, *Function spaces and potential theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 314, Springer–Verlag, Berlin, 1996.

[2] G. Alberti, *Rank one property for derivatives of functions with bounded variation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **123** (1993), no. 2, 239–274.

[3] S. Allen and J. Cahn, *A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening*, Acta Metall. **27** (1979), 1084–1095.

[4] M. Amar and V. De Cicco, *The uniqueness as a generic property for some one-dimensional segmentation problems*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **88** (1992), 151–173.

[5] L. Ambrosio, *A compactness theorem for a new class of functions of bounded variation*, Boll. Un. Mat. Ital. **3-B** (1989), 857–881.

[6] ______, *Moto delle superfici secondo la curvatura media*, Pisa, 1989.

[7] L. Ambrosio and E. De Giorgi, *Un nuovo tipo di funzionale nel calcolo delle variazioni*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **82** (1988), 199–210.

[8] K. A. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton University Press, NJ, 1978.

[9] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), no. 6, 771–831.

[10] L. Cesari, *Optimization–theory and applications*, Applications of Mathematics (New York), vol. 17, Springer–Verlag, New York, 1983, Problems with ordinary differential equations.

[11] B. Dacorogna, *Weak continuity and weak lower semicontinuity of nonlinear functionals*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 922, Springer–Verlag, Berlin–New York, 1982.

[12] C. M. Dafermos, *Disclinations in liquid crystals*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **23** (1970), 49–64.

[13] E. De Giorgi, *Su una teoria generale della misura $(r-1)$–dimensionale in uno spazio euclideo a r dimensioni*, Ann. Mat. Pura Appl. **36** (1954), 191–213.

[14] ______, *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$–dimensionali in uno spazio euclideo a r dimensioni*, Ricerche Mat. **4** (1955), 95–113.

[15] T. Q. de Gromard, *Approximation forte dans $BV(\Omega)$*, C. R. Acad. Sc. Paris **301** (1985), 261–264.

[16] I. Ekeland and R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976, Translated from the French, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 1.

[17] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Lectures notes on measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Ann Arbor, 1992.

[18] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985.

[19] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer–Verlag, 1969.

[20] ———, *The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimension*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 767–771.

[21] H. Federer and W. H. Fleming, *Normal and integral currents*, Ann. of Math. **72** (1960), 458–520.

[22] I. Fonseca and G. Leoni, *Modern methods in the calculus of variations: L^p spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2007.

[23] M. Giaquinta, G. Modica, and J. Souček, *Cartesian currents and variational problems for mappings into spheres*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **16** (1989), no. 3, 393–485 (1990).

[24] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Math., vol. 80, Birkhäuser, Boston, 1984.

[25] H. Hahn and A. Rosenthal, *Set Functions*, The University of New Mexico Press, Albuquerque, N. M., 1948.

[26] R. Hardt and L. Simon, *Seminar on geometric measure theory*, Birkhäuser, Basel, 1986.

[27] T. Ilmanen, *Convergence of the Allen–Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature*, J. Differential Geom. **38** (1993), no. 2, 417–461.

[28] ———, *Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature*, 1994.

[29] H. Jenkins and J. Serrin, *The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions*, J. Reine Angew. Math. **229** (1968), 170–187.

[30] F. J. Almgren Jr., *Plateau's problem: An invitation to varifold geometry*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1966.

[31] B. B. Mandelbrot, *Self–affine fractal sets. I. The basic fractal dimensions*, Fractals in physics (Trieste, 1985), North-Holland, Amsterdam, 1986, pp. 3–15.

[32] G. Dal Maso, *Integral representation on* $\mathrm{BV}(\Omega)$ *of* Γ*–limits of variational integrals*, Manuscripta Math. **30** (1979/80), no. 4, 387–416.

[33] U. Massari, *Esistenza e regolarità delle ipersuperfici di curvatura media assegnata in* $\mathbb{R}^n$, Arch. Rational Mech. Anal. **55** (1974), 357–382.

[34] ———, *Frontiere orientate di curvatura media assegnata in* L^p, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **53** (1975), 37–52.

[35] U. Massari and M. Miranda, *A remark on minimal cones*, Boll. Un. Mat. Ital. A (6) **2** (1983), no. 1, 123–125.

[36] M. Miranda, *Distribuzioni aventi derivate misure insiemi di perimetro localmente finito*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **18** (1964), 27–56.

[37] F. Morgan, *Geometric measure theory – A beginner's guide*, Academic Press, Boston, 1988.

[38] L. Nachbin, *Holomorphic functions, domains of holomorphy and local properties*, Notes prepared by Richard M. Aron. North–Holland Mathematics Studies, 1, North–Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1970.

[39] D. Preiss, *Geometry of measures in* $\mathbf{R}^n$*: distribution, rectifiability, and densities*, Ann. of Math. **125** (1987), no. 3, 537–643.

[40] T. Radó, *On the Problem of Plateau*, Chelsea Publishing Co., New York, N. Y., 1951.

[41] C. A. Rogers, *Hausdorff measures*, Cambridge University Press, 1970.

[42] J. Serrin, *On the definition and properties of certain variational integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 139–167.

[43] L. Simon, *Lectures on geometric measure theory*, Proc. Center Math. Anal., vol. 3, Australian National University, Canberra, 1983.

[44] ______, *Survey lectures on minimal submanifolds*, Seminar on minimal submanifolds, Ann. of Math. Stud., vol. 103, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1983, pp. 3–52.

[45] M. Struwe, *Minimal surfaces of varing topological type*, Seminario tenuto presso la Scuola Normale Superiore di Pisa, gennaio 1992.

[46] A. I. Vol′pert and S. I. Hudjaev, *Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics*, Mechanics: Analysis, vol. 8, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1985.

[47] L. C. Young, *Surfaces paramétriques généralisées*, Bull. Soc. Math. France **79** (1951), 59–84.

[48] W. P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Springer–Verlag, 1989.

Finito di stampare a Napoli
nel mese di dicembre 2016
nelle Officine Grafiche Francesco Giannini & Figli SpA