Equazioni Ellittiche su Grafi

Sun-Ra J.N. Mosconi

21 ottobre 1999

Contents

Chapter 1

Introduzione

L'obbiettivo di questa tesi è di fornire dei risultati di regolarità per analoghi di equazioni ellittiche su opportuni spazi discreti: i grafi. Per il momento non daremo la definizione precisa di grafo, ed in questa introduzione basterà pensare ad un grafo come a ciò che intuitivamente suggerisce il termine: un insieme di punti di cui alcuni sono collegati da segmenti.
Ricordiamo brevemente la definizione di soluzione debole di un'equazione ellittica in forma di divergenza. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e $W_0^{1,2}(\Omega)$ lo spazio di Sobolev definito come il completamento di $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$, (le funzioni $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto contenuto in Ω), rispetto alla norma

$$\|f\|_{W_0^{1,2}} = \|f\|_{L^2} + \|\nabla f\|_{L^2}.$$

Sia $\mathbb{A} : \Omega \to \mathcal{M}_n$ è una funzione a valori nelle matrici n per n i cui autovalori sono uniformemente limitati dall'alto e dal basso da due numeri positivi λ e Λ; diremo che $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ è soluzione debole dell'equazione ellittica

$$\operatorname{div}(\mathbb{A}Du) = f, \tag{1.1}$$ SD

dove $f \in L^p(\Omega)$ con $p > n/2$, se vale

$$\int_\Omega (\mathbb{A} \cdot Du \cdot D\varphi + f\varphi)\, d\mathcal{L}^n = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega),$$

dove il gradiente di u è quello distribuzionale, (che per il teorema di Myers-Serrin appartiene allo spazio $L^2(\Omega)$), e $\mathcal{L}^n$ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.
Un risultato fondamentale nella teoria delle equazioni ellittiche in forma di divergenza è il cosiddetto teorema regolarità di De Giorgi-Nash, dimostrato indipendentemente dai due matematici in DG [13], Nash [28] e ridimostrato ed esteso

ai casi più generali da Moser, Stampacchia, Trudinger ed altri. Il teorema afferma che una qualunque soluzione debole di (1.1) è Hölderiana in Ω. Non ci soffermeremo sulle implicazioni di questo risultato, ricordando soltanto che quest'ultimo ha permesso la soluzione del diciannovesimo problema di Hilbert.
In questa tesi tratteremo di equazioni analoghe alla (1.1) sui grafi e dimostreremo un teorema di regolarità Hölderiana discreta per soluzioni di queste equazioni. L'interesse di un risultato di questo tipo consta nelle applicazioni a diversi campi della teoria dei grafi; ne descriveremo brevemente tre: le applicazioni al calcolo numerico, alla teoria delle catene di Markov discrete ed alla teoria spettrale dei grafi.

Per quel che riguarda il calcolo numerico le connessioni sono abbastanza evidenti. Se ci proponiamo di trovare soluzioni numeriche di un'equazione come quella descritta in (1.1) un metodo che possiamo usare è quello di costruire uno schema alle differenze finite e risolvere il problema lineare associato. Questo metodo è stato molto studiato in letteratura, citiamo ad esempio [10]; in [7] Bube e Strikwerda sviluppano una teoria di Schauder discreta per schemi alle differenze finite, che riguarda quindi una regolarità più alta delle soluzioni.
In [22],[23] Trudinger e Kuo studiano il problema della convergenza delle soluzioni di schemi affatto generali a soluzioni di problemi ellittici non variazionali. Il metodo da loro usato è quello di ottenere una regolarità a priori delle soluzioni in [23]; successivamente, in [22] generalizzano un risultato classico di Motzkin e Wasow [27], costruendo uno schema approssimante per il quale ottengono la convergenza sfruttando argomenti di compattezza. Nel capitolo 3 descriveremo la parte riguardante la regolarità delle approssimanti sviluppata da Trudinger e Kuo. Osserviamo però che i metodi di dimostrazioni usati in [23] sono strettamente legati alla struttura di $\mathbb{R}^n$, e quindi riguardano solo grafi molto simili al reticolo $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Il metodo dimostrativo risale sostanzialmente a Krilov e Safanov [21] ed è stato per la prima volta adattato al caso del reticolo $\mathbb{Z}^n$ da Lawler in [24] per equazioni contenenti solamente il termine di secondo grado.
La necessità di una trattazione generale come quella di Trudinger e Kuo è dovuta al fatto che l'obbiettivo che si sono posti gli autori era quello di trattare approssimazioni di equazioni ellittiche fortemente nonlineari. Sulla base di un approccio generale descritto da Barles e Souganidis in [4] Trudinger e Kuo in [22] dimostrano, nel modo descritto, la convergenza delle approssimanti ad una soluzione dell'equazione ellittica che si è discretizzata. Trattandosi di equazioni fortemente nonlineari la soluzione a cui tendono le approssimanti è da intendersi in senso viscoso, come descritto ad esempio nel

libro di Caffarelli e Cabrè [8]. Essendo una soluzione viscosa una soluzione in senso molto debole di un'equazione ellittica, il loro metodo porta anche ad alcuni risultati di esistenza. Purtroppo il metodo ha interesse soprattutto per equazioni che hanno già l'unicità delle soluzioni. Utilizzando infatti la compattezza delle approssimanti, si ha solo convergenza di una sottosuccessione, (e vengono quindi a mancare stime sull'errore, come osservato dagli stessi autori); in caso di non unicità non è quindi chiaro a quali soluzioni gli schemi convergano.
Notiamo inoltre che mentre per la teoria delle soluzioni in senso viscoso la convergenza naturale delle approssimanti è quella uniforme, la stessa cosa non può dirsi per i problemi ellittici di tipo variazionale. Per quest'ultimo tipo di problemi, infatti, il contesto naturale per parlare di approssimazione di equazioni differenziali (che sono, quindi, equazioni di Eulero di funzionali) è quello della Gamma Convergenza, una teoria sviluppata da Ennio De Giorgi. Non ci addentreremo nelle definizioni necessarie per poter chiarire la differenza di cui abbiamo accennato, rimandando alle note di L.Ambrosio [1]. Ci limitiamo a dire che la gamma convergenza delle discretizzazioni di un funzionale al funzionale stesso è stata analizzata con succeso da Bellettini e Gobbino in [5], [18] nel caso del funzionale di Mumford e Shah, un funzionale che dà luogo ad un problema a frontiera libera molto studiato negli ultimi anni. I risultati esposti in questa tesi forniscono a nostro avviso un utile strumento per lo sviluppo del metodo utilizzato nel caso del funzionale di Mumford e Shah a funzionali di tipo diverso.

Per quel che riguarda le catene di Markov discrete, cominciamo col dare un semplice esempio. Ricordiamo che una catena di Markov discreta è il dato di un insieme di "stati" discreti $\{x\}_{x\in\mathcal{S}}$, che possiamo descrivere come i vertici di un grafo, e dall'assegnazione delle probabilità di passare da uno stato ad un'altro. A quest'ultimo dato può essere associato un segmento fra uno stato e l'altro, con un "peso" dato dalla probabilità di transizione fra i due stati; per una descrizione precisa della teoria rimandiamo al libro di Billingsley [6]. Senza entrare in dettagli ci limitiamo ad affermare che, se indichiamo con $p(x,y)$ la probabilità di transizione dallo stato x allo stato y, il comportamento di una soluzione di

$$u(x) = \sum_y p(x,y)u(y), \tag{1.2}$$

dove u è una funzione degli stati, è molto importante per lo studio della catena di Markov associata al dato $(\{x\}_{x\in\mathcal{S}}, \{p(x,y)\}_{x,y\in\mathcal{S}})$. Se chiamiamo

P l'operatore lineare che agisce sulle funzioni del grafo come

$$P(u)(x) = \sum_y p(x,y)u(y),$$

allora è chiaro che possiamo riscrivere la (1.2) come

$$P(u) = u.$$

Senza addentrarci nei dettagli, sotto certe ipotesi la catena di Markov associata alla matrice P avrà una distribuzione di probabilità "stazionaria" u se

$$\lim_k P^k(u) = u,$$

nel qual caso u soddisferà la (1.2). Lo studio di un'equazione del tipo

$$u_{k+1} = Pu_k,$$

è quindi l'analogo sui grafi dello studio dell'equazione del calore in $\mathbb{R}^n$. In particolare, se si pone $p_k(x,y) = (P^k)_{x,y}$, (possiamo pensare che P sia rappresentato da una matrice), allora $p_k(x,y)$ sarà la probabilità di passare dallo stato x a quello y dopo k passi. Si è quindi portati a studiare le proprietà di decadimento, (rispetto a k) di $p_k(x,y)$, come analogo discreto del comportamento asintotico del nucleo del calore in $\mathbb{R}^n$. Risultati molto fini in questa direzione, sono stati recentemente ottenuti in [11] da Coulhon e Grigoryan con tecniche di teoria dei semigruppi.
Più in generale, consideriamo il problema di studiare il nucleo del calore su una varietà Riemanniana completa non compatta M; negli ultimi anni un notevole numero di risultati rivelano le connessioni profonde fra il comportamento del nucleo del calore su M e le proprietà geometriche della varietà stessa; citiamo, fra i tanti, i lavori di Varopoulos, Coulhon e Saloff-Coste [31], [29], [12]. Un metodo che ha fornito molti risultati è stato quello di "discretizzare" la varietà M, trovando un grafo (infinito) che abbia le stesse proprietà geometriche di M. Questo processo di discretizzazione si basa su un concetto introdotto da Kanai [20] e Gromov [19], quello di "quasi-isometria".

Se (X_1, dist_1) e (X_2, dist_2) sono spazi metrici, una applicazione $\varphi : X_1 \to X_2$ si dice una quasi-isometria se esistono costanti $a > 0$ e $b \geq 0$ tali che, per ogni $x, y \in X_1$,

$$a^{-1}\,\mathrm{dist}_1(x,y) - b \leq \mathrm{dist}_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq a\,\mathrm{dist}_1(x,y) + b,$$

ed esiste una costante $c \geq 0$ tale che, per ogni $z \in X_2$ esiste un $x \in X_1$ per cui

$$\mathrm{dist}_2(z, \varphi(x)) \leq c.$$

Per una trattazione mirata ai grafi si veda il libro di Soardi [30]. Utilizzando questo concetto, possiamo dire che una discretizzazione di una varietà M è un grafo immerso in M quasi isometrico ad M stessa. Naturalmente la bontà di questa discretizzazione dipende da un controllo delle costanti a, b, c della definizione di quasi-isometria. Osservando che le proprietà asintotiche del nucleo del calore e le proprietà geometriche relative ad esso sono stabili per quasi-isometrie, lo studio di queste proprietà su di una varietà M può essere ricondotto allo studio delle analoghe proprietà su un'opportuna discretizzazione di M.
Sulla base del fatto che il comportamento asintotico del nucleo del calore è strettamente connesso con le stime di regolarità classiche delle soluzioni delle equazioni paraboliche, (dimostrate da Aronson in [2]), Delmotte ha cercato in [15] di ottenere le stesse stime per equazioni paraboliche su un grafo sulla sola base di alcune sue proprietà geometriche. Il risultato ottenuto è però valido solo per nuclei che hanno la seguente proprietà:

$$\exists \alpha > 0 \text{ tale che } \quad p(x,x) \geq \alpha. \tag{1.3}$$

La dimostrazione di questo risultato si basa su un controllo molto fine fra il processo di Markov continuo nel tempo e quello discreto, ed è molto tecnica. Un altro metodo per ottenere le stime di Aronson, è quello utilizzato da Auscher in [3], dove si usano solo le stime di regolarità ellittica per ottenere quelle di regolarità parabolica nel caso di un operatore che non dipende dal tempo. I primi risultati di regolarità ellittica sui grafi, trovati da Merkov in [25] e da Delmotte in [14] non sono però utili per questo tipo di dimostrazione, perchè riguardano equazioni prive del termine noto. Il metodo di Auscher, infatti, si basa sul considerare l'equazione

$$\triangle u = \partial_t u,$$

come un'equazione ellittica con termine noto $\partial_t u$. Dalle stime di regolarità ellittica per equazioni con termine noto possiamo quindi risalire, attraverso il metodo di Auscher, alle stime di Aronson senza dover ricorrere all'ipotesi tecnica (1.3).

Per quel che riguarda la teoria spettrale sui grafi, questa è rivolta allo studio degli autovalori della matrice che rappresenta il laplaciano. Come esempio di laplaciano "pesato" su un grafo possiamo dare, (in un grafo finito), la matrice $I - P$ descritta precedentemente. L'analisi spettrale di questa matrice fornisce molti risultati utili nelle applicazioni pratiche, come ad esempio misure di efficienza di reti telematiche; una rassegna di molte altre applicazioni della teoria spettrale si trova nel libro di Chung [9]. In questo contesto, un semplice esempio in cui lo studio della regolarità di equazioni ellittiche più generali di quelle studiate in [25], [14], ha una sua utilità, è la validità della diseguaglianza di Harnack. Una delle conseguenze ormai classiche della diseguaglianza di Harnack per soluzioni di equazioni del tipo

$$\triangle u + cu = 0,$$

è che l'autospazio relativo al primo autovalore ha dimensione 1 ed è costituito unicamente da funzioni che non cambiano segno, mentre tutte le altre autofunzioni devono cambiare segno.

Veniamo ora ai contenuti esposti in questa tesi. L'obbiettivo è quello di dare un risultato di "Hölderianità" di certe funzioni definite su grafi. Nel capitolo 1 introdurremo il concetto di grafo e svilupperemo un'analogo del calcolo classico in questo contesto, arrivando a fornire una serie di risultati sulle proprietà geometriche che ci interessano. Il capitolo si concluderà con la formulazione di cosa intenderemo per equazione ellittica su un grafo. Nel capitolo 2 dimostreremo il risultato di regolarità Hölderiana per soluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale e nel capitolo 3 esporremo un riadattamento dei risultati di Trudinger e Kuo [23].
Cerchiamo ora di descrivere i risultati dei capitoli 2 e 3, sottolineandone le differenze. Per semplicità ci ricondurremo ad un semplice esempio unidimensionale. Supponiamo che il grafo in questione sia il sottinsieme $\mathbb{Z}$ contenuto in $\mathbb{R}$. Trattando funzioni definite sui numeri interi, definiremo l'Hölderianità discreta nella maniera ovvia, ma per sole distanze intere: diremo che $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ è α-Hölderiana se esiste una costante positiva C tale che

$$|u(n) - u(m)| \leq C\,|n - m|^{\alpha}$$

per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$. Consideriamo allora un operatore del tipo

$$L(u)(n) = p_0(n)u(n) - p_+(n)u(n+1) - p_-(n)u(n-1),$$

con $p_\pm : \mathbb{Z} \to (\lambda, \Lambda)$ con $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ e p_0 arbitraria. Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ soddisfa certe ipotesi di sommabilità, e $p_\pm$ soddisfano certe ipotesi di simmetria, nel capitolo 3 si dimostra che ogni soluzione di

$$L(u)(n) = f(n),$$

è α-Hölderiana, con $\alpha = \alpha(L)$.
Questo risultato è analogo a quello dimostrato da Trudinger e Kuo in [23], e che desciveremo nel capitolo 4, ma con una fondamentale differenza: a prescindere dalle naturali ipotesi di sommabilità su f la differenza sta nelle ipotesi di simmetria dei coefficienti $p_\pm$. Mentre in [23] si suppone la condizione di simmetria

$$p_-(n) = p_+(n), \tag{1.4}$$

noi supporremo che valga l'ipotesi

$$p_+(n) = p_-(n+1). \tag{1.5}$$

Chiariamo la differenza concettuale fra le due ipotesi con un esempio tratto dai processi di Markov. Se $f = 0$ e P è un operatore del tipo

$$P(u)(n) = p_0(n)u(n) + p_+(n)u(n+1) + p_-(n)u(n-1),$$

$$p_0(n) + p_+(n) + p_-(n) = 1, \qquad 0 \le p_0, p_-, p_+ \le 1,$$

allora l'equazione

$$P(u) = u,$$

descrive la distribuzione stazionaria di un processo di Markov; quest'ultimo è definito dalle condizioni secondo le quali, partendo dallo stato n, $p_0(n)$ è la probabilità di rimanervi, $p_+(n)$ quella di passare allo stato $n+1$ e $p_-(n)$ quella di passare a quello $n-1$. In questo senso, la (1.4) concerne la regolarità di processi in cui la probabilità di passare da uno stato n a quello $n+1$ è la stessa di quella da passare dallo stato n a quello $n-1$. L'ipotesi (1.5) da noi assunta concerne invece la regolarità di processi in cui la probabilità di passare da uno stato n ad uno adiacente è la stessa di quella del passaggio inverso; questo tipo di processi di Markov sono detti "reversibili".

Chapter 2

Definizioni e prime proprietà

In questo primo capitolo introdurremo il concetto di grafo. A seconda dei contesti un grafo astratto può essere un oggetto più o meno generale: riservandoci di precisare più avanti quello che diremo, segnaliamo che in letteratura si sono studiati grafi più che numerabili, non localmente finiti o anche semplicemente non regolari. Nella definizione di grafo che daremo, pur cercando di mantenere la massima generalità possibile, escluderemo queste ultime “patologie”; questo perché l'obbiettivo che ci poniamo è quello di poter ottenere risultati che siano utili nei processi di approssimazione di equazioni nel continuo. Sarà quindi naturale considerare grafi che comunque siano poco più generali di quelli che normalmente si incontrano nel calcolo numerico.

Descriveremo dapprima un formalismo che ci permetta di snellire enunciati e formule del calcolo discreto, dopodiché inizieremo a considerare proprietà isoperimetriche sui grafi, analizzandone le prime conseguenze funzionali.

Una volta sviluppato il linguaggio adeguato, definiremo una serie di operatori alle differenze: essi ci permetteranno di definire gli analoghi discreti degli operatori ellittici continui e studieremo fino a che punto si può spingere questa analogia.

È importante sottolineare fin da ora che la maggior parte degli enunciati che otterremo in questo capitolo (e nei successivi) riguarderanno un grafo fissato; tuttavia questi risultati avranno interessanti applicazioni a questioni di discretizzazione di equazioni in spazi più generali. In quest'ottica, non saranno tanto le proprietà di un singolo grafo o di una singola equazione alle differenze ad essere significative: sarà invece fondamentale il comportamento asintotico di queste proprietà su una successione di grafi.

2.1 Grafi

Daremo ora la definizione precisa di grafo. La prima evidente caratteristica che si incontra è l'intrinseca assenza di una struttura metrica. Tipicamente si cerca di sopperire a questa mancanza considerando "realizzazioni metriche" o "network" associate ad un grafo astratto: in sostanza si considera il grafo come un insieme di segmenti di una certa lunghezza (gli "spigoli") che si incontrano in certi punti (i "vertici").

Questo tipo di approccio, oltre ad avere innegabili vantaggi di visualizzazione, fornisce un procedimento standard di indagine, il cui schema è il seguente: dato un grafo, si trasporta il problema in questione sulle sue realizzazioni; si sfrutta allora l'ampia gamma di spazi metrici associati al grafo stesso, ciascuno con caratteristiche geometriche proprie; si cerca quindi di risolvere il problema utilizzando le proprietà di una realizzazione oculatamente selezionata. Non ci addentreremo troppo nelle questioni riguardanti le realizzazioni e anzi cercheremo di mantenere un livello di astrazione più alto possibile (compatibilmente coi nostri scopi).

In particolare, introdurremo la nozione di grafo derivato, che per quanto di nostra conoscenza non appare in letteratura. Quest'ultima sembra essere la più naturale per poter ben ambientare oggetti analoghi ai campi vettoriali (primo fra tutti quelli di tipo gradiente). Grazie a questa nozione eviteremo l'imbarazzo di dover scegliere se un "oggetto di tipo funzione" è da considerarsi definito sugli spigoli o sui vertici (scelta particolarmente nebulosa da affrontare nel contesto delle realizzazioni).
Interessanti parallelismi si otterranno fra le relazioni grafo-grafo derivato, funzione-derivata e insieme-bordo, parallelismi esplicitati dal teorema della divergenza.

Concluderemo proseguendo sul percorso indicato da questo parallelismo, ottenendo nel caso discreto la nota equivalenza fra diseguaglianze di tipo Sobolev e diseguaglianza isoperimetrica.

Definizione 2.1.1. Diremo grafo il dato $\{G, L, h\}$ di un insieme G al più numerabile, i cui elementi si diranno "vertici" e di un sottoinsieme L di $G \times G$, i cui elementi si diranno "lati", (o "adiacenze"), a lunghezza $h \in \mathbb{R}^+$, che sia simmetrico rispetto alla diagonale ossia: $(i,j) \in L \Rightarrow (j,i) \in L$. Diremo due vertici i e j adiacenti se $(i,j) \in L$ nel qual caso scriveremo $i \sim j$ e supporremo sempre che ogni punto del grafo abbia un numero finito di vertici adiacenti.
Diremo infine che un grafo G è k-regolare se ogni vertice ha al più k vertici adiacenti.

Osservazione 2.1.1. Sull'insieme dei vertici considereremo la topologia discreta a meno che non sia diversamente indicato e indicheremo con G' lo spazio $\mathcal{C}^0(G,\mathbb{R})$. Supporremo inoltre che l'insieme dei vertici sia dotato di una struttura di spazio di misura sulla sigma-algebra delle parti, la cui misura sarà specificata di volta in volta.

Osservazione 2.1.2. Per brevità di linguaggio indicheremo spesso con G la terna che descrive il grafo; inoltre spesso considereremo sul grafo una misura che assegna ad ogni punto lo stesso valore che chiameremo "elemento di volume" (solitamente una potenza di h), nel qual caso chiameremo il grafo "uniforme" e l'elemento di volume dV.

saturato **Definizione 2.1.2.** Consideriamo l'applicazione

$$G \times G \ni (i,j) \xrightarrow{A} (j,i) \in G \times G,$$

e definiamo L/A come il quoziente (insiemistico) di L rispetto all'azione definita da A. Gli elementi di L/A si diranno i "lati" (non orientati) del grafo G, e si indicheranno con $[i,j] := \{(i,j),(j,i)\}$. Inoltre, se abbiamo una terna (G,L,h), con $L \subset G \times G$ ma non simmetrico rispetto alla diagonale, viene naturalmente definita una struttura di grafo $(G,\tilde{L},h)$ dove $\tilde{L}$ è il saturato di L rispetto all'azione di A.

riscalamenti **Esempio 2.1.1.** *(Riscalamenti)*
Utilizzando il parametro h nella definizione precedente forniamo un primo e fondamentale esempio di comportamento asintotico di una successione di grafi. Supponiamo di avere fissato un grafo $(G,L,1)$, sull'insieme di vertici del quale è definita una misura μ_1. Potremo allora considerare la famiglia ad un parametro di grafi (G,L,h) con delle misure μ_h. La corrispondenza $h \to (G,L,h,\mu_h)$ sarà spesso informalmente chiamata "riscalamento" del grafo G. Nel seguito definiremo una serie di oggetti e proprietà $\mathcal{P}_h$ dei grafi, che dipenderanno da G, L, h e μ_h. Quando diciamo che siamo interessati al comportamento per riscalamento di certe proprietà , ci riferiremo al comportamento della corrispondenza $h \to \mathcal{P}_h$. Notiamo fin da ora che spesso il parametro da tenere sotto controllo in un riscalamento sarà μ_h. L'osservazione precedente, ad esempio, ci suggerisce che la famiglia di grafi $(G,L,h,dV = h^s)$ ha un buon comportamento per riscalamenti. Molte delle proprietà puramente geometriche, (e quindi, in linea di principio, indipendenti dall'unica quantità di tipo "metrico" data da h o da quella di spazio di misura data da μ_h), dovranno avere come principale requisito quello di essere stabili per riscalamenti del tipo descritto. $\square$

esempio griglia

Esempio 2.1.2. Un tipico esempio di grafo è dato dal reticolo $h\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, definito come il sottogruppo di $\mathbb{R}^n$ generato dagli elementi $\{he_i\}$ dove $\{e_i\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$; le adiacenze sono definite dalla relazione $x \sim y \Leftrightarrow \|x - y\| = h$, (questo grafo fa parte di una ampia classe di grafi, detti "grafi di Cayley associati ad un gruppo"). In questo caso è naturale associare ad ogni vertice del grafo l'elemento di volume $dV = h^n$. □

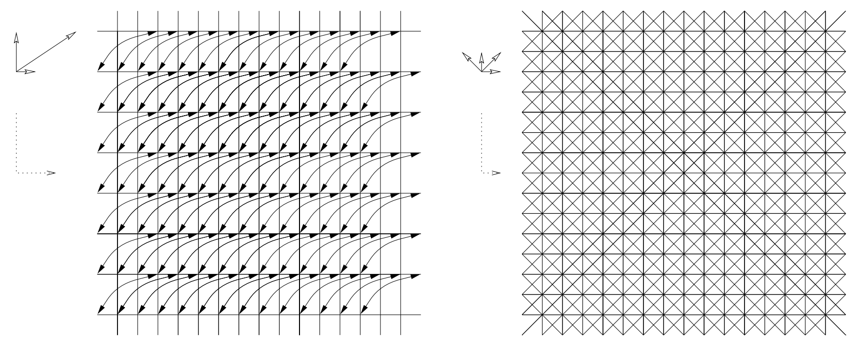
Esempio 2.1.3. *(Grafi di Cayley)*

grafi di cayley

L'esempio precedente si può generalizzare, definendo un'ampia classe di grafi che, come vedremo in seguito, hanno buone proprietà isoperimetriche. Dato un gruppo H finitamente generato, consideriamo un insieme di generatori Γ di H che sia chiuso per inverso, ossia: $x \in \Gamma \Rightarrow x^{-1} \in \Gamma$; si definisce il grafo di Cayley G associato a (H, Γ) dando come insieme di vertici $G := H$ e dicendo che $a \sim b$ se e solo se $ab^{-1} \in \Gamma$. Se il minimo numero di generatori di H è n, può essere naturale associare al grafo l'elemento di volume h^n. Notiamo che i grafi di Cayley sono sempre connessi, nel senso che dati due vertici a e b, esiste una successione di vertici $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ tali che $a_i \sim a_{i+1}$. Inoltre osserviamo che la moltiplicazione (a destra, per esempio) per elementi di H definisce un'azione transitiva e fedele sui vertici e manda vertici adiacenti in vertici adiacenti. Quando parleremo del grafo di Cayley associato al gruppo $\mathbb{Z}^n$, sottintenderemo sempre che l'insieme di generatori sia dato dalla base canonica simmetrizzata; la figura Z2.1.3 mostra due diverse

Z

Figure 2.1: Due grafi di Cayley sul gruppo $\mathbb{Z}^2$, con indicati gli insiemi di generatori



strutture di grafo di Cayley sul gruppo $\mathbb{Z}^2$. □

Esempio 2.1.4. *(Alberi)*

Un albero è un altro esempio molto comune di grafo. Si definisce infatti albero un qualunque grafo connesso, nel senso dell'esempio precedente, e che sia privo di cammini iniettivi chiusi. Un cammino iniettivo chiuso è semplicemente una successione di vertici adiacenti $\{x_1, \ldots, x_n\}$ per cui $x_i \neq x_{i+2}$ e $x_1 = x_n$. Sostanzialmente un albero è un grafo per cui non è possibile compiere circuiti chiusi senza mai tornare sui propri passi. Un albero si dice q-omogeneo se ogni punto ha q vertici adiacenti. Si può dimostrare, (vedi, ad esempio il libro di Figà-Talamanca figatta [16]), che un grafo di Cayley è un q-albero omogeneo se e solo se H è $*^n\mathbb{Z} \times (*^m\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ con $2n + m = q$. $\square$

Sulla base dell'esempio esempio griglia 2.1.2 definiremo il concetto di derivata su un grafo. Consideriamo una funzione regolare definita su $\mathbb{R}^n$; per restrizione questa definirà una funzione su $h\mathbb{Z}^n$. Per ogni coppia di punti x e y adiacenti consideriamo ora il rapporto incrementale $(f(x) - f(y))/h$. In questo modo otterremo una funzione "antisimmetrica" definita sull'insieme degli spigoli. È plausibile aspettarsi che, se la f è sufficentemente regolare, questi rapporti incrementali convergano in qualche senso alla derivata di f. Guidati dall'osservazione che la derivata in senso discreto è definita naturalmente sugli spigoli piuttosto che sui vertici, definiamo quindi un grafo dove poter considerare oggetti che costituiscano un analogo discreto dei campi di tipo gradiente o più in generale campi vettoriali nel continuo.

DG **Definizione 2.1.3.** Sia dato un grafo (G, L, h); il "grafo derivato" DG è il dato $(L, \{((i,j),(j,l)) \in L \times L\}, 2h)$ (saturando secondo la definizione saturato 2.1.2). L'adiacenza $((i,j),(j,l))$ si indicherà più brevemente con (j,i,l), mentre quella $((j,l),(i,j))$ (che si ottiene saturando), si indicherà con $-(j,i,l)$; notiamo che così facendo si ha $(j,i,i) = -(j,i,i)$. DG ha quindi per vertici le adiacenze di G e due adiacenze sono a loro volta adiacenti se hanno un vertice in comune; in altre parole l'adiacenza (j,i,l) indica che posso passare da i a l passando da j.
Se il grafo G ha una misura μ, su DG sarà indotta la misura che all'adiacenza (i,j) associa la quantità $\frac{\mu\{i,j\}}{2h}$.
Osserviamo che l'applicazione A induce un'applicazione $\tilde{A}$ di DG in sé, data da

$$DG \ni (i,j) \xrightarrow{\tilde{A}} (j,i) \in DG.$$

Notiamo che un riscalamento di G induce naturalmente un riscalamento per DG. Possiamo a questo punto definire i campi e tutta una serie di operatori "differenziali" sui grafi. Notiamo che in maniera induttiva possiamo definire i grafi D^kG.

Definizione 2.1.4.

1. Un campo di vettori su un grafo G è un $\mathbb{F} \in DG'$ tale che $\mathbb{F} \circ \tilde{A} = -\mathbb{F}$.
2. Definiamo due applicazioni

$$\begin{array}{c} G' \xrightarrow{D} DG' \\ f \to Df(i,j) = \frac{f(j)-f(i)}{h} \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{c} G' \xrightarrow{*} DG' \\ f \to f^*(i,j) = \frac{f(i)+f(j)}{2} \end{array} .$$

3. La divergenza di un campo vettoriale sul grafo G è definita come:

$$\operatorname{div}(\mathbb{F})(i) = \frac{1}{h} \sum_{j \sim i} \mathbb{F}(i,j). \tag{2.1}$$

divergenza

4. Una superficie regolare S di G è il dato di un $S \subset DG'$ tale che $A(S) \cap S = \varnothing$. Dato $\Omega \subset G$ porremo:

$$\partial\Omega := \{v \in DG \mid D\chi_\Omega < 0\} \subset DG, \tag{2.2}$$

frontiera

$$\tilde{\partial}\Omega := \{x \in G \mid (x,i) \ o \ (i,x) \in \partial\Omega \text{ per qualche } i \in G\} \subset G, \tag{2.3}$$

frontiera2

osservazioni DG

Osservazione 2.1.3. È a questo punto opportuno fare qualche osservazione.

La definizione 1) ci dice che un campo di vettori è sostanzialmente il dato di una orientazione e di un modulo sullo spigolo: l'orientazione è quella data dall'ordinamento (i,j), se $\mathbb{F}(i,j) \geq 0$, e il modulo è dato da $|\mathbb{F}|$. La condizione $\mathbb{F} \circ \tilde{A} = -\mathbb{F}$ serve per garantire che queste siano ben definite.

La 2) definisce la derivata come campo vettoriale sulla base di quanto precedentemente detto; la definizione di f^* si rivelerà molto utile per la validità di una regola di Liebnitz e inoltre ha un buon comportamento in processi di approssimazione.

La 3) trova la sua giustificazione nell'esempio esempio griglia 2.1.2. Considerando infatti un campo vettoriale regolare in $\mathbb{R}^n$, la sua divergenza in un punto si può approssimare con il flusso uscente da un cubo molto piccolo centrato nel punto. Se si discretizza il flusso considerandolo costante su ogni faccia, ecco che si ottiene per la divergenza esattamente la definizione data.

La 4) si basa ancora sull'esempio esempio griglia 2.1.2. Supponiamo di avere una ipersuperficie regolare in $\mathbb{R}^n$; questa definirà univocamente il suo campo di vettori normali e viceversa potremo quindi considerare la superficie come il dato del suo campo. Volendo campionare questo campo sulla griglia $\mathbb{Z}^n$ otterremo un insieme di spigoli S dotati di orientazione. La condizione $A(S) \cap S = \varnothing$

equivale a dire che se $\mathbf{n}$ è una normale esterna, allora $-\mathbf{n}$ non lo è. Il fatto che sottoinsiemi del grafo DG definiscano ipersuperfici di G giustifica la definizione di misura indotta sul grafo derivato data nella definizione 2.1.3: se ad esmpio G è uniforme con elemento di volume h^n, la misura naturale da considerare sul derivato sarà h^{n-1}, perché in DG si misurano ipersuperfici.

La conferma del fatto che le definizioni precedenti sono ben poste, oltre che da considerazioni euristiche, sta nella proposizione seguente

Proposizione 2.1.5. *(formula di Gauss-Green)*

gauss green *Sia G un grafo uniforme, $\Omega \subset G$, $|\Omega| < +\infty$ e $\mathbb{F}$ un campo vettoriale su G; allora:*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{F})\, d\mu = \int_{\partial\Omega} \mathbb{F}\, d\tilde{\mu}. \tag{2.4}$$

Dim Basta osservare che se uno spigolo è tutto contenuto in Ω la divergenza darà contributi di segno opposto sui vertici dello spigolo:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{F})\, d\mu = \sum_{x\in\Omega}\sum_{j\sim x} \mathbb{F}(x,j)\, \frac{dV}{h} = \sum_{x\in\Omega}\sum_{\substack{j\sim x\\ j\notin\Omega}} \mathbb{F}(x,j)\, \frac{dV}{h},$$

Ed essendo $\partial\Omega = \{(i,j) \in DG \mid i \in \Omega \text{ e } j \notin \Omega\}$ si ottiene l'enunciato. $\square$

EperF **Definizione 2.1.5.** Il prodotto scalare fra due campi vettoriali $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ sul grafo G è definito dalla forma bilineare:

$$\begin{gathered} DG' \times DG' \xrightarrow{\cdot} G' \\ (\mathbb{E}, \mathbb{F}) \to \mathbb{E} \cdot \mathbb{F}(x) = \tfrac{1}{2}\sum_{j\sim x} \mathbb{E}(x,j)\mathbb{F}(x,j). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Quando due campi saranno solo giustapposti questo indicherà semplicemente il prodotto puntuale di funzioni di DG. Da questo "prodotto scalare" discenderà una norma che indicheremo con $\|\ \|$. Una norma più naturale sarà invece quella definita da:

$$\begin{gathered} DG' \times DG' \xrightarrow{|\ |} G' \\ \mathbb{F} \to |\mathbb{F}|\,(x) = \tfrac{1}{2}\sum_{j\sim x} |\mathbb{F}(x,j)|\,. \end{gathered}$$

Da ora in poi, quando scriveremo $\|\mathbb{F}\|_p$, intenderemo, quando non sarà diversamente specificato, la norma $L^p(\mu)$ della funzione $|\mathbb{F}|$.

Osservazione 2.1.4. I fattori 2 sono dovuti al fatto che la derivata discreta viene calcolata sempre due volte come risulta chiaramente dall'esempio 2.1.2, dove le direzioni a disposizione per differenziare in senso discreto sono il doppio di quelle realmente significative per differenziare in senso continuo.

Definiamo ora gli spazi di Sobolev sui grafi. Per motivi tecnici dovremo chiamare in causa la definizione di f^* per dire che una funzione "è zero sul bordo".

Definizione 2.1.6. Se Γ è una ipersuperficie regolare di G, si definisce

$$W_0^{1,p}(G;\Gamma) := \{f \in L^p \mid |f|^*_{\lfloor \Gamma} = 0 \quad e \ |Df| \in L^p\}.$$

Porremo inoltre

$$W^{1,p}(G) := W_0^{1,p}(G;\varnothing).$$

Proposizione 2.1.6.

1. *(Regola di Leibniz) Se $f,\ g \in G'$ si ha:*

$$D(fg)(i,j) = f^*\,Dg(i,j) + Df\,g^*(i,j). \tag{2.6}$$

leibnitz

2. *(Formula di Co-area) Se $f \in G'$ e $|Df| \in L^1(G)$ allora:*

$$\int_G |Df|\,d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mu}(\partial\{f \leq t\})\,dt. \tag{2.7}$$

coarea

Dim. Per ottenere la (2.6) basta esplicitare:

$$\begin{aligned} f^*\,Dg(i,j) + Df\,g^*(i,j) &= \frac{1}{2h}(f(i)+f(j))(g(j)-g(i)) + \\ &\quad + \frac{1}{2h}(f(i)-f(j))(g(i)+g(j)) \\ &= \frac{1}{h}(f(j)g(j) - f(i)g(i)). \end{aligned}$$

Per quel che riguarda la (2.7), ricordando che per spazi di misura σ-finita vale il teorema di Fubini-Tonelli e che le serie a termini positivi godono delle proprietà associativa e commutativa, abbiamo la catena di uguaglianze:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mu}(\partial\{f \leq t\}) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{DG} \chi_{\{f(x)\leq t<f(y)\}}(x,y)\, dt\, d\tilde{\mu}(x,y) \\
&= \int_{DG}\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,+\infty)}(t-f(x))\chi_{(0,+\infty)}(f(y)-t)\, dt\, d\tilde{\mu}(x,y) \\
&= \int_{DG} (f(y)-f(x))^{+}\, d\tilde{\mu}(x,y) \\
&= \frac{1}{2h}\sum_{i\sim j}(f(y)-f(x))^{+}(\mu(y)+\mu(x)) \\
&= \frac{1}{2h}\left(\sum_{x}\mu(x)\sum_{y\sim x}(f(y)-f(x))^{+} + \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{y}\mu(y)\sum_{y\sim x}(f(y)-f(x))^{+}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{G}\sum_{y\sim x}\big(Df^{+}(x,y)-Df^{-}(x,y)\big)\, d\mu(x).
\end{aligned}
$$

□

Notiamo l'analogia con il caso continuo, in particolare per quel che riguarda la formula (coarea 2.7). Quest'ultima è infatti l'analogo discreto di un risultato ormai classico di analisi reale:

Se $u \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, allora vale la formula:

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\| d\,\mathcal{L}^n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\{u \leq t\})d\,t;$$

in realtà l'enunciato resta valido per funzioni ben più generali, le funzioni BV, ma rimandiamo per questo argomento al libro di Giusti giusti [17]. Per quanto è a nostra conoscenza una tale formula di coarea nell'ambito dei grafi non esiste in letteratura; tuttavia essa ci fornirà uno strumento molto utile nel paragrafo successivo.

2.2 Problemi isoperimetrici su grafi

In questo paragrafo daremo alcune definizioni per trattare problemi isoperimetrici sui grafi. Già nel caso continuo si osserva che le diseguaglianze di tipo isoperimetrico sono strettamente connesse con diseguaglianze di tipo Sobolev o Poincaré e quindi anche con il comportamento della misura delle palle al variare del raggio. Vedremo come anche nel caso dei grafi sia possibile estrapolare informazioni isoperimetriche sfruttando unicamente informazioni di tipo funzionale come le diseguaglianze citate sopra. Specificheremo infine il discorso esaminando il caso dei grafi di Cayley, ottenendo diseguaglianze isoperimetriche dovute unicamente alla struttura di gruppo del grafo.

Sarà utile, da ora in poi, considerare grafi infiniti e connessi, nel senso dato dall'esempio 2.1.3. Per trattare anche i grafi finiti, introdurremo la definizione di "grafo con bordo".

Definizione 2.2.1. Un'applicazione fra due grafi Ω e G è una funzione f fra gli insiemi di vertici che preserva le adiacenze, ossia tale che

$$x \sim y \quad (\text{in } \Omega) \Rightarrow \quad f(x) \sim f(y) \quad (\text{in } G).$$

Diremo che Ω è un sottografo di G se esiste una applicazione (fra grafi) iniettiva da Ω in G.
Se $\Omega \subset G$ è un sottografo connesso di G con frontiera $\tilde{\partial}\Omega$, (vedi definizione 2.3) connessa, diremo che $(\Omega \hookrightarrow G)$ è un grafo con bordo e porremo $W_0^{1,p}(\Omega; \partial\Omega) := W_0^{1,p}(\Omega)$

Osservazione 2.2.1. Notiamo che data una applicazione iniettiva da un *insieme* Ω all'*insieme* di vertici di un grafo G, è data naturalmente una struttura di grafo su Ω in maniera tale che f sia una applicazione fra grafi. Basta porre:

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) \sim f(y).$$

esempio quadrato **Esempio 2.2.1.** L'esempio più immediato di grafo con bordo consiste della griglia quadrata mostrata nella figura 2.2, di lato 1 e lunghezza degli spigoli $h_n := 1/n$ in $1/n\mathbb{Z}^2$, ossia $[0,1] \times [0,1] \cap 1/n\mathbb{Z}^2$. Più in generale indicheremo con $Q_n^k \hookrightarrow \mathbb{Z}^k$ il grafo finito il cui insieme dei vertici è dato da:

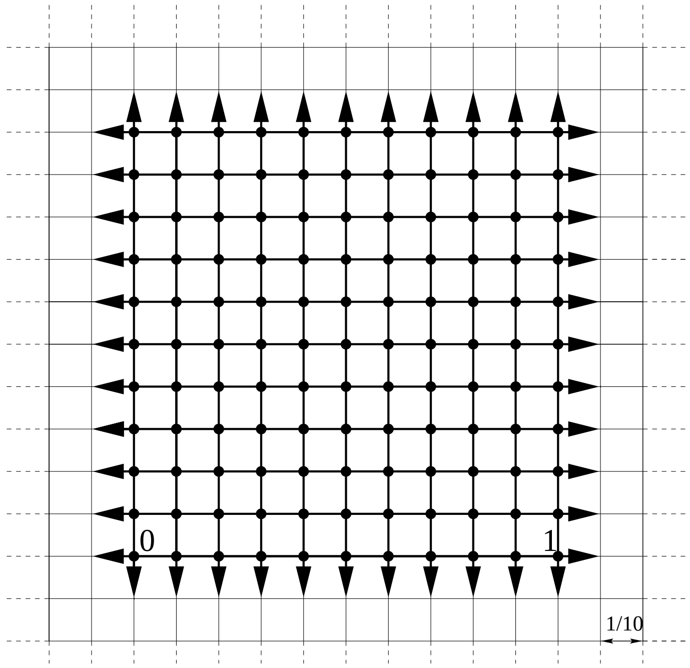
$$\underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{k} \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^k,$$

(la struttura di grafo è quella data dall'osservazione precedente). $\square$

D'ora in poi supporremo allora che il grafo G sia infinito e k-regolare; di volta in volta faremo osservazioni riguardanti la modificazione dei risultati per grafi con bordo finiti immersi in grafi infiniti.

Q

Figure 2.2: Il grafo con bordo $Q_2^{10} \hookrightarrow \mathbb{Z}^2$; le frecce indicano il bordo.



Dotiamo ora il grafo G di una struttura metrica. Per semplicità formalizzeremo la proprietà di connessione: si noti come la definizione seguente dà lo stesso concetto di connessione esposto nell'esempio 2.1.3. grafi di cayley

Definizione 2.2.2.

1. Se G è un grafo finito chiameremo "matrice di connessione" la matrice:

$$C(G)_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \text{ o } i \sim j \ , \\ 0 & \text{altrimenti} \ . \end{cases} \tag{2.8}$$ Connessione

Sottintendendo la dipendenza da G diremo che $A \subset G$ è connesso se:

$$\forall i, j \in A \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad (C^n)_{i,j} > 0. \tag{2.9}$$ connessione

2. Se il grafo G è connesso, lo doteremo di una distanza a valori in $\mathbb{N}$ data da:

$$d(x,y) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid (C^n)_{x,y} \neq 0\}. \tag{2.10}$$

`distanza intrinseca`

   Denoteremo con B una generica palla di G rispetto a questa distanza.

Passiamo ora a definire le proprietà cosiddette "isoperimetriche" su un grafo. Ricordiamo che in $\mathbb{R}^n$, la proprietà isoperimetrica si esprime come

$$(\mathcal{L}^n(\Omega))^{1-1/n} \leq c_n \mathcal{H}^{n-1}(\Omega), \tag{2.11}$$

`isoperimetrica 0`

per ogni Ω, ad esempio, limitato e con frontiera lipschitziana. Notiamo innanzitutto che questa diseguaglianza è invariante per riscalature, ed esprime una proprietà delle due misure $\mathcal{L}^n$ e $\mathcal{H}^{n-1}$. Perchè si possa generalizzare una diseguaglianza di questo tipo sui grafi, dovremo quindi porre delle condizioni sul tipo di misura μ definita sul grafo stesso. In particolare il punto 4 dell'osservazione 2.1.3, ci suggerisce che il legame fra le misure μ e $\tilde{\mu}$ dato nella definizione 2.1.3, è fondamentale perchè siano valide proprietà di riscalatura. Data quindi una misura μ definita sul grafo G, una proprietà come quella data dalla (2.11), esprime contemporaneamente una caratteristica geometrica intriseca del grafo e una proprietà della misura μ. Nel nostro contesto, però, è più utile esaminare la validità della prima rispetto alla seconda. In altre parole ci interessa, dato un grafo astratto G, se G ha una misura per cui vale una proprietà del tipo (2.11), piuttosto che se per una data misura vale questa proprietà. Ora, poiché la proprietà isoperimetrica necessita di una invarianza per riscalamento, è chiaro che una misura μ per la quale valga una diseguaglianza del tipo (2.11), deve avere una buona proprietà di riscalamento. La definizione di proprietà isoperimetrica su un grafo dovrà essere quindi indipendente dal parametro h, in analogia col fatto che la proprietà isoperimetrica (2.11) è invariante per omotetie. Daremo allora la definizione nel caso in cui G abbia parametro di lungezza dei lati 1 ed una misura data μ, dopodiché riscaleremo il grafo e la misura, (come descritto nell'esempio 2.1.1), in maniera tale da soddisfare le proprietà naturali di invarianza della diseguaglianza isoperimetrica.

`isoperimetrico` **Definizione 2.2.3.** Diremo che un grafo infinito $(G, L, 1)$ con misura μ è (C, δ)-isoperimetrico se

$$\forall\ U \subset G \quad t.c. \quad \mathrm{card}(U) < +\infty, \qquad |U|^{\frac{\delta-1}{\delta}} \leq C\,|\partial U|$$

nel qual caso chiameremo δ "dimensione isoperimetrica" e C "costante isoperimetrica" del grafo; scrivendo $|\partial\Omega|$, abbiamo sottinteso che la misura in questione fosse $\tilde{\mu}$, data dalla definizione 2.1.3.

Diremo che un grafo infinito (G, L, h) con misura μ' è (C, δ)-isoperimetrico se $(G, L, 1)$ con misura $\mu = h^{-\delta}\mu'$ è (C, δ)-isoperimetrico.
Quando sarà fissata una dimensione isoperimetrica $\delta > 1$ porremo, per $p < \delta$, $p^* := \frac{\delta p}{\delta - p}$.

esempio del cazzo

Esempio 2.2.2. La definizione precedente ci fornisce una condizione necessaria perché, dato un grafo G astratto, la famiglia $(G, L, h,)$ sia "equi-isoperimetrica" rispetto alla famiglia di misure $\{\mu_h\}$. Possiamo infatti dire che se un grafo con una misura μ è (C, δ)-isoperimetrico, questo significa che la misura μ deve riscalare rispetto ad h come h^δ. Consideriamo ad esempio la famiglia di grafi di Cayley dati dal sottogruppo $h\mathbb{Z}^n$ di $\mathbb{R}^n$, con insieme di generatori $\Gamma = \{\pm he_1, \ldots, \pm he_n\}$. È intuitivo, (ma lo dimostreremo in seguito), che il grafo $\mathbb{Z}^n_1$ è $(4, n)$-isoperimetrico, quando si consideri su di esso la misura che conta i punti. Poichè tutti questi grafi sono sostanzialmente "isomorfi", (anche se non "isometrici"), è naturale supporre che una famiglia di misure $\{\mu_h\}_{h \geq 0}$ arbitrarie che li renda "equiisoperimetrici" debba essere del tipo $\mu_h = \mu_1 h^n$. $\square$

misura del perimetro

Osservazione 2.2.2. Notiamo che, in base dalla definizione isoperimetrico 2.2.3, la funzione caratteristica di un $\Omega \subset G$ ha la proprietà che

$$\int_G |D\chi_\Omega| \, d\mu = |\partial\Omega| \, .$$

Infatti $D\chi_\Omega \neq 0$ solo sugli spigoli (non orientati) che stanno in $\partial\Omega$; scrivendo l'integrale come un integrale sugli spigoli, è facile vedere che ogni spigolo $[x, y]$ di $\partial\Omega$ verrà contato una volta con misura $\mu(x)$ ed un'altra con misura $\mu(y)$. Quindi si avrà

$$\int_G |D\chi_\Omega| \, d\mu = \frac{1}{2h} \sum_{[x,y] \in \partial\Omega} (\mu(x) + \mu(y)),$$

che è proprio quanto affermato. Osserviamo l'analogia con la proprietà dei cosiddetti "insiemi di Caccioppoli", per la cui teoria rimandiamo al libro di Giusti giusti [17], per i quali la formula di coarea per funzioni BV fornisce l'analoga uguaglianza:

$$P(\Omega, G) = \int_G |D\chi_\Omega| \, ,$$

dove P è il perimetro secondo Caccioppoli e $|D\chi_\Omega|$ è la misura variazione totale della derivata distribuzionale di χ_Ω.

controllo dal basso del volume **Osservazione 2.2.3.** Notiamo che una diseguaglianza di tipo isoperimetrico fornisce immediatamente un contollo dal basso sulla crescita di volume. Se poniamo $V(x,r) = |B(x,r)|$, $V(r) = \inf_{x\in G} V(x,r)$, otteniamo che in un grafo infinito (C,δ) isoperimetrico

$$V(r) \geq cr^{\delta}.$$

Applicando infatti la diseguaglianza isoperimetrica alle palle, si otterrà:

$$V(x,r)^{(\delta-1)/\delta} \leq C(V(x,r+1) - V(x,r)).$$

Per induzione supponiamo di aver dimostrato che

$$V(x,r) \geq cr^{\delta}.$$

Allora si avrà, per $V(x,r+1)$:

$$V(x,r+1) = \sum_{i=0}^{r}(V(x,i+1) - V(x,i)) + 1 \geq \frac{1}{C}\sum_{i=0}^{r} V(x,i)^{(\delta-1)/\delta},$$

e osservando che, (per la monotonia del volume), nella sommatoria ci saranno almeno $(r+1)/4$ termini maggiori di $V(x,(r+1)/4)^{1-1/\delta}$, si ottiene

$$V(x,r+1) \geq \frac{r+1}{4C} V(x, \frac{r+1}{4})^{1-1/\delta}.$$

Applicando allora l'ipotesi induttiva, si otterrà:

$$V(x,r+1) \geq \frac{1}{C4^{\delta}} c^{1-1/\delta}(r+1)^{\delta} = c(r+1)^{\delta},$$

da cui la tesi, avendo scelto

$$c = \frac{1}{4C^{1/\delta}}.$$

Utilizzando la formula di coarea (2.7) possiamo dimostrare l'equivalenza della diseguaglianza di Sobolev e di quella isoperimetrica. Pur essendo questo risultato ben noto nel caso continuo, (vedi sempre [17]), non è presente in letteratura l'analogo discreto.

minchia **Proposizione 2.2.3.** *Sia G un grafo k-regolare. G è (C,δ) isoperimetrico con $\delta > 1$ se e solo se $\forall f$ a supporto finito e $p < \delta$ si ha:*

$$\left(\int_G |f|^{p^*}\, d\mu\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C'(C,\delta,k,p)\left(\int_G |Df|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.12)$$ sobolev

Dim Un'implicazione si ottiene considerando la diseguaglianza di Sobolev sobolev (2.12) per l'esponente 1^* applicata alle funzioni caratteristiche di insiemi. Supponiamo che G sia (C,δ) isoperimetrico e dimostriamo l'enunciato per l'esponente 1^*. Poniamo, per $t>0$:

$$f_t(x) = \begin{cases} t & \text{se } f(x) \geq t, \\ f(x) & \text{se } -t \leq f(x) \leq t, \\ -t & \text{se } f(x) \leq -t; \end{cases} \qquad g(t) = \|f_t\|_{1^*}.$$

Ordiniamo i valori di $|f|$ in maniera crescente, ponendo:

$$t_0 = 0,\ t_i = |f(x_i)|\,, \quad t_i \geq t_{i-1} \quad , \quad h_i = |f(x_i)| - |f(x_{i-1})|\,,$$

per un'opportuna scelta degli x_i. Si avrà allora, per $i \geq 1$:

$$g(t_i) = \|f_{t_{i-1}} + h_i \chi_{\{|f|\geq t_i\}}\|_{1^*} \ \leq \|f_{t_{i-1}}\|_{1^*} + h_i |\{|f| \geq t_i\}|^{1/1^*} \tag{2.13}$$

fritta

$$\leq g(t_{i-1}) + C h_i\, |\partial\{|f| \geq t_i\}| \ = \ g(t_{i-1}) + C \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\partial\{|f| \geq t\}|\ dt,$$

dove l'ultima diseguaglianza è vera perché $\partial\{|f| \geq t_i\} \neq \varnothing$. Quindi

$$\begin{aligned} \|f\|_{1^*} \ &= \ \sum_{i=1}^{\infty} (g(t_i) - g(t_{i-1})) \ \leq \ C \sum_{i=1}^{\infty} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\partial\{|f| \geq t\}|\ dt \\ &= \ \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial\{f \leq t\}|\ dt \ = \ \int_G |Df(x)|\ d\mu. \end{aligned}$$

Poniamo ora:

$$f_m(x) = \max_{y \sim x} \{|f(y)|\},$$

e applichiamo la diseguaglianza appena dimostrata a $f^{p\frac{\delta-1}{\delta-p}}$:

$$\begin{aligned} \left(\int_G |f|^{p^*}\, d\mu\right)^{\frac{1}{1^*}} \ &\leq \ C \int_G \sum_{y\sim x} \left| f(y)^{p\frac{\delta-1}{\delta-p}} - f(x)^{p\frac{\delta-1}{\delta-p}} \right|\ d\mu(x) \\ &\leq \ Cp\frac{\delta-1}{\delta-p} \int_G |f_m(x)|^{\delta\frac{p-1}{\delta-p}} \sum_{y\sim x} |f(y) - f(x)|\ d\mu(x) \\ &\leq \ Cp\frac{\delta-1}{\delta-p} \left(\int_G |f_m|^{p^*}\ d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_G |Df|^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \ Cp\frac{\delta-1}{\delta-p} (k+1)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_G |f|^{p^*}\ d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_G |Df|^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

E concludiamo osservando che $1/p^* = 1/1^* - (p-1)/p$ $\square$

Invece della definizione 2.2.3, è spesso utile avere diseguaglianze isoperimetriche di altro tipo. La definizione che abbiamo dato, infatti, fa appello ad una dimensione δ che non è realmente intriseca del grafo. Daremo quindi una proprietà isoperimetrica più naturale. Consideriamo la funzione φ_G definita da

$$\varphi_G(\lambda) = \min\{r \in \mathbb{N} \mid V(r) > \lambda\}, \tag{2.14}$$ fi

per $\lambda \geq 0$ (nel seguito sottintenderemo sempre la dipendenza esplicita da G). Notiamo che φ è una funzione crescente. Nel caso di $\mathbb{R}^n$ con la misura di Lebesgue si avrebbe, ad esempio,

$$\varphi(\omega_n |\Omega|) = |\Omega|^{1/n}$$

dove si è indicato $\omega_n = |B(0,1)|$. Sulla base di questa analogia e della necessaria invarianza per riscalamento, diamo la seguente definizione, che è stata proposta per la prima volta da Couhlon e Saloff-Coste in [12]:

isoperimetrica 2 **Definizione 2.2.4.** Diremo che un grafo (G, L, h) è φ-isoperimetrico se esiste una costante positiva C per cui vale

$$\frac{|\Omega|}{h\varphi(C|\Omega|)} \leq C |\partial\Omega|, \quad \forall \Omega \subset G.$$

sobolev generalizzata **Osservazione 2.2.4.** La proposizione 2.2.3, si può generalizzare per grafi che sono solamente φ-isoperimetrici. Basterà infatti scegliere nella dimostrazione

$$g(t) = \|f_t\|_1,$$

per ottenere, al posto della (2.13)

$$g(t_i) = \|f_{t_{i-1}} + h_i \chi_{\{|f| \geq t_i\}}\|_1 \leq \|f_{t_{i-1}}\|_1 + h_i |\{|f| \geq t_i\}|,$$

da cui si ottiene

$$g(t_i) \leq g(t_{i-1}) + C h_i h \varphi(C \operatorname{supp} f) |\partial\{|f| \geq t_i\}| .$$

Procedendo allora come nel resto della dimostrazione, si ottiene il seguente risultato:

G è φ-isoperimetrico se e solo se vale la seguente φ-diseguaglianza di Sobolev-Poincaré sulle funzioni a supporto compatto:

$$\left(\int_G |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq C'(C, \delta, k, p) h \varphi(C \operatorname{supp} f) \left(\int_G |Df|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Diamo ora una strumento fondamentale per dimostrare diseguaglianze isoperimetriche del tipo di quella descritta sopra. Se per diseguaglianze isoperimetriche come la (2.2.3) lo strumento funzionale naturale è una 1-diseguaglianza di Sobolev, per quelle come la (2.2.4) si usa una diseguaglianza che nell'articolo di Couhlon e Saloff-Coste [12] è chiamata "pseudo-Poincaré". Se f è a supporto finito in G, consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} &G \xrightarrow{f_r} G \\ &x \to \tfrac{1}{V(x,r)} \textstyle\int_{B(x,r)} f(y)\, d\mu. \end{aligned}$$

Definizione 2.2.5. Diremo che il grafo G supporta una p-diseguaglianza di tipo pseudo-Poincaré se esiste una costante C positiva per cui

$$\|f - f_r\|_p \leq rhC\|Df\|_p, \tag{2.15}$$ pseudo-Poincare

per ogni $r \geq 0$ ed f a supporto finito.

Con queste definizioni si ha allora il seguente teorema, che contiene come caso particolare un risultato dimostrato in [12] da Couhlon e Saloff-Coste.

PP implica f **Teorema 2.2.4.** *Se G è un grafo che supporta una p-diseguaglianza pseudo-Poincaré, allora G soddisfa una diseguaglianza isoperimetrica del tipo*

$$\frac{|\Omega|}{h\varphi^p(C\,|\Omega|)} \leq C\,|\partial\Omega|\,, \tag{2.16}$$ FK

in particolare, se $p = 1$, G è φ-isoperimetrico.

Dim Fissiamo $\lambda \geq 0$ ed f a supporto finito. Osserviamo che si ha

$$|\{|f| \geq \lambda\}| \leq \left|\{|f - f_r| \geq \frac{\lambda}{2}\}\right| + \left|\{|f_r| \geq \frac{\lambda}{2}\}\right|,$$

per ogni r in $\mathbb{R}^+$. È chiaro che

$$\sup_{x\in G} |f_r(x)| \leq \left(\frac{1}{V(r)}\right)^{1/p} \|f\|_p,$$

e possiamo allora scegliere r che sia il più piccolo intero per cui

$$\left(\frac{1}{V(r)}\right)^{1/p} \|f\|_p < \frac{\lambda}{2},$$

ossia, per la definizione (2.14), $r_0 = \varphi((2/\lambda)^p \|f\|_p^p)$. Con questa scelta di r, si avrà allora

$$\begin{aligned} |\{|f| \geq \lambda\}| &\leq \left|\{|f - f_{r_0}| \geq \frac{\lambda}{2}\right| \leq \\ &\leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^p \|f - f_{r_0}\|_p^p, \end{aligned}$$

(la seconda diseguaglianza è la diseguaglianza di Tchebitceff). Sia ora $f = \chi_\Omega$, $\lambda = 1$, ed applichiamo la pseudo-Poincaré, per ottenere

$$|\Omega| \leq 2^p C \varphi^p (2^p |\Omega|) h^p \|Df\|_p^p;$$

ricordando che, per l'osservazione 2.2.2

$$|\partial\Omega| = \|D\chi_\Omega\|_1 = h^{p-1} \|D\chi_\Omega\|_p^p,$$

si ottiene infine

$$|\Omega| \leq 2^p C \varphi^p (2^p |\Omega|) h \, |\partial\Omega| \, ,$$

che conclude la dimostrazione del teorema. □

Osservazione 2.2.5. Notiamo che la quantità φ, per come è stata definita, è in un certo senso "adimensionale", nel senso che non dipende da h, che è l'unico parametro dimensionale di un grafo. In letteratura diseguaglianze geometriche come quella data dalla (2.16) vengono spesso chiamate "diseguaglianze di Faber-Krahn".

Diamo ora una semplice applicazione di quanto dimostrato. Abbiamo in conlusione ridotto il problema di stabilire se un grafo è φ-isoperimetrico ad una diseguaglianza di tipo pseudo-Poincaré. Questo fatto ha una sua utilità perché esiste una classe molto ampia di grafi in cui è semplice mostrare la validità di quest'ultima. La classe in questione è quella dei grafi di Cayley, definita nell'esempio 2.1.3. I prossimi due risultati possono ormai dirsi classici e la dimostrazione che riportiamo è tratta da [12]

Lemma 2.2.5. *Ogni grafo di Cayley G supporta una 1-diseguaglianza pseudo-Poincaré del tipo*

$$\|f - f_r\|_1 \leq 2rh \|Df\|_1.$$

Dim Sia $\Gamma = \{e_1^{\pm 1}, \dots, e_k^{\pm 1}\}$ l'insieme di generatori simmetrico del gruppo G. Sia f una funzione a supporto finito fissata. Definiamo, per ogni $y \in G$ la funzione $f^y(x) = f(xy)$, osservando che se $e_j \in \Gamma$, si ha

$$\|f - f_j^e\|_1 \leq 2h\|Df\|_1,$$

per definizione di derivata. Ora, se $y \in B(e, n)$, (dove e è l'identità di G), è arbitrario, applicando la diseguaglianza triangolare al più n volte, si ottiene

$$\|f - f^y\|_1 \leq 2nh\|Df\|_1.$$

Ma allora

$$\begin{aligned}
\|f - f^y\|_1 &\leq \frac{1}{V(n)} \int_G \int_{B(e,n)} |f(x) - f(xy)| \; d\mu(y)\, d\mu(x) \leq \\
&\leq \frac{1}{V(n)} \int_{B(e,n)} \|f - f^y\|_1 \, d\mu \leq \\
&\leq 2nh\|Df\|_1,
\end{aligned}$$

□

Questo lemma, unitamente al teorema PP implica f 2.2.4, dà il seguente

Corollario 2.2.6. *Se G è un grafo di Cayley, allora G è φ-isoperimetrico, con costante 2, ossia vale*

$$\frac{|\Omega|}{h\varphi(2\,|\Omega|)} \leq 2\,|\partial\Omega|\,.$$

□

es. cayley **Esempio 2.2.7.** In un grafo di Cayley, con parametro di lunghezza $h = 1$, la diseguaglianza φ-isoperimetrica dipende solamente da un controllo dal basso della crescita di volume.
Se, ad esempio, è valido un controllo dal basso di tipo polinomiale

$$V(n) \geq Cn^\delta,$$

allora è facile vedere che $\varphi(C\lambda) \leq \lambda^{1/\delta}$: infatti, in queste ipotesi, si ha che se $Cn^\delta \geq \lambda$, allora, a maggior ragione $V(n) \geq \lambda$; perciò, essendo n^δ crescente, si ha che $V(\lambda^{1/\delta}) \geq C\lambda$, ossia, appunto

$$\varphi(C\lambda) \leq \lambda^{1/\delta}.$$

Da ciò discende che il grafo di Cayley è (C, δ)-isoperimetrico:

$$|\Omega|^{(\delta-1)/\delta} \leq C\, |\partial\Omega| \, .$$

Se invece il grafo è a crescita di tipo almeno esponenziale, ossia vale

$$V(n) \geq C e^{cn^{\alpha}},$$

con $0 < \alpha \leq 1$, allora vale, con un ragionamento analogo, la diseguaglianza isoperimetrica

$$|\Omega| \left(\log |\Omega|\right)^{-1/\alpha} \leq C\, |\partial\Omega| \, ,$$

per $|\Omega| \geq 2$. $\square$

Esempio 2.2.8. Possiamo a questo punto giustificare le affermazioni fatte
esempio del cazzo
nell'esempio 2.2.2. Consideriamo ancora la griglia quadrata $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$; un semplice calcolo mostra che vale la stima

$$V(r) = 2r(r+1) + 1 \geq 2r^2,$$

e quindi $\varphi(2\lambda) \leq \lambda^{1/2}$. $\square$

Osservazione 2.2.6. In un grafo finito si potranno utilizzare tutti gli argomenti di compattezza attraverso i quali si dimostrano le varie disegueglianze di Sobolev-Poincaré; Questo tipo di dimostrazione ha però lo svanteggio di non fornire un controllo esplicito dall'alto delle costanti e quindi i risultati che si ottengono non sono utili per le stime da usare nei processi di approssimazione tipici del metodo delle differenze finite.

2.3 Diseguaglianze di Poincaré

In questo paragrafo esamineremo il significato geometrico di diseguaglianze di tipo Poincaré. Gran parte dei risultati di questo paragrafo sono generalizzazioni di enunciati dell'articolo di Couhlon e Saloff-Coste csc [12]. Una p-diseguaglianza di Poincaré è una stima del tipo

$$\int_{B(x,r)} \left| f(y) - f_{B(x,r)} \right|^p \, d\mu(y) \leq hCr^p \int_{B(x,2r)} |Df|^p \,(y)\, d\mu(y),$$

valida per ogni palla ed ogni f. È opportuno fin da ora sottolineare la differenza fra una 1-diseguaglianza di Poincaré e la diseguaglianza pseudo-Poincaré che abbiamo già definito. In quest'ultima, infatti, l'integrazione è fatta in tutto lo spazio, ed il termine f_B non è una costante, ma dipende da y. Studieremo le relazioni intercorrenti fra la diseguaglianza di Poincaré e quella pseudo-Poincaré, dopodiché passeremo a dare interpretazioni puramente geometriche delle 1- e 2- diseguaglianze di Poincaré, arrivando a collegarle con altri tipi di diseguaglianze, come quella di Nash. Ricordiamo che una diseguaglianza di Nash è una stima del tipo

$$\|f\|_p{}^{\alpha} \leq C_p \|Df\|_p \|f\|_1{}^{\beta}.$$

definiamo allora un concetto di dimensione che non è presente in letteratura, ottenuta richiedendo un'invarianza per riscalamento della diseguaglianza: definiamo δ_N come quel numero dato dalle costanti della diseguaglianza precedente secondo la formula

$$\frac{\alpha}{\beta} + p = \delta_N, \tag{2.17}$$

dimensione di nash

chiameremo δ_N "dimensione di Nash" del grafo. Poichè tutte le diseguaglianze in questione si comportano bene per riscalamento, supporremo per tutto il paragrafo che il grafo G abbia parametro di lunghezza $h = 1$.

Cominciamo col definire una proprietà che sarà fondamentale nella maggior parte dei risultati che otterremo nei capitoli successivi.

Definizione 2.3.1. Diciamo che un grafo G è *doubling*, o anche che ha regolarità di volume, se esiste una costante positiva C per cui vale

$$V(x, 2r) \leq CV(x, r), \quad \forall x \in G \ , \ r \in \mathbb{R}^+.$$

Diamo ora una proposizione che chiarisce il legame fra la 1-diseguaglianza di Poincaré e la pseudo-Poincaré.

poincare implica p-poincare

Proposizione 2.3.1. *Se G è un grafo doubling che supporta una 1-diseguaglianza di Poincarè, allora supporta una diseguaglianza pseudo-Poincaré, e quindi è φ-isoperimetrico e (C, δ)-isoperimetrico per un qualche $\delta \geq 1$.*

Dim Dimostriamo la prima affermazione. Sia f una funzione su G a supporto finito Ω ed $r \geq 0$ fissato. Sia $\Omega_r := \{x \in G \mid \text{dist}(x, \Omega) \leq r\}$. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di Ω_r:

$$\mathcal{F} = \{U \subset \Omega \mid \text{dist}(x, y) \geq r \ \text{ se } x, y \in U \text{ e } x \neq y\},$$

e scegliamo in $\mathcal{F}$ un insieme $\{x_i\}_{i=1}^n$ di cardinalità massima. Per come è stato definito, quest'ultimo gode delle proprietà

$$\Omega_r \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r), \quad B(x_k, \frac{r}{2}) \cap B(x_l, \frac{2}{r}) = \varnothing, \text{ se } k \neq l \ .$$

Poniamo, per semplicità di notazione, $B_i = B(x_i, r)$ e $2B_i = B(x_i, 2r)$. Notiamo che la regolarità di volume ci permette di controllare il numero di palle di questa famiglia che contengono un dato punto $x \in \Omega_r$. Se infatti si pone

$$I_r(x) = \{i \mid x \in 2B_i\},$$

si ha, per ogni $x \in \Omega_r$,

$$\begin{aligned} V(x, 4r) &\geq \sum_{i \in I_r(x)} V(x_i, \frac{r}{2}) \geq C^{-4} \sum_{i \in I_r(x)} V(x_i, 8r) \geq \\ &\geq C^{-4} \operatorname{card} I_r(x) V(x, 4r), \end{aligned}$$

dove C è la costante di doubling, e quindi

$$\operatorname{card} I_r(x) \leq C^4. \tag{2.18}$$

controllo numero

Avremo allora

$$\begin{aligned} \|f - f_r\|_1 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{B_i} |f(x) - f_r(x)| \, d\mu \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{B_i} |f(x) - f_r(x_i)| \, d\mu + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{B_i} |f_r(x_i) - f_{2r}(x_i)| \, d\mu + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{B_i} |f_{2r}(x_i) - f_r(x)| \, d\mu. \end{aligned}$$

Il primo termine della somma si minora con la diseguaglianza di Poincaré e sfruttando la (2.18) controllo numero:

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_i} |f(x) - f_r(x_i)| \, d\mu \leq C_1 r h \sum_{i=1}^n \int_{2B_i} |Df| \, d\mu \leq C_1 C^4 h r \|Df\|_1.$$

Per quel che riguarda il secondo termine, il ragionamento è del tutto analogo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}|f_r(x_i)-f_{2r}(x_i)|\;d\mu &\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}|f(x)-f_{2r}(x_i)|\;d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{2B_i}|f(x)-f_r(x_i)|\;d\mu \\
&\leq 2C_1C^4hr\|Df\|_1 .
\end{aligned}$$

Infine il terzo termine si maggiora scrivendo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}|f(x)-f_r(x)|\;d\mu &\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}\frac{1}{V(x,r)}\int_{B(x,r)}|f(y)-f_r(x)|\;d\mu(y)\,d\mu(x) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}\frac{1}{V(x,r)}\int_{2B_i}|f(y)-f_r(x)|\;d\mu(y)\,d\mu(x) \\
&\leq 2C_1rh\sum_{i=1}^{n}\int_{2B_i}|Df|\;d\mu\int_{B_i}\frac{1}{V(x,r)}\,d\mu .
\end{aligned}$$

Basta allora osservare che da $x \in B_i$ segue, per la diseguaglianza triangolare, che $B_i \subset B(x,2r)$, e perciò

$$V(x,r) \geq \frac{1}{C}V(x,2r) \geq \frac{1}{C}V(x_i,r),$$

da cui

$$\int_{B_i}\frac{1}{V(x,r)}\,d\mu \leq C.$$

Usando quindi nuovamente la stima ([controllo numero] 2.18), si ottiene, per il terzo termine

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}|f(x)-f_r(x)|\;d\mu \leq 2C_1C^5rh\|Df\|_1 .$$

Concludiamo osservando che le altre affermazioni del teorema seguono dal teorema [PP implica f] 2.2.4 e dall'argomento dell'esempio [es. cayley] 2.2.7. □

[p-poincare implica p-p-poincare] **Osservazione 2.3.1.** Notiamo che la stessa dimostrazione si sarebbe potuta fare per p-diseguaglianze di Poincaré: sarebbe bastato elevare ogni termine alla potenza p-esima. Naturalmente, però, si sarebbe ottenuta solo la prima parte dell'enunciato, ossia che:

Se G è un grafo doubling che supporta una p-diseguaglianza di Poincarè, allora supporta una p-diseguaglianza pseudo-Poincarè.

Osservazione 2.3.2. Notiamo che l'essere $(C, 1)$-isoperimetrico è in realtà poco significativo. Basta considerare il grafo di Cayley associato al gruppo $\mathbb{Z}$: questo grafo è solamente 1-isoperimetrico, come si vede prendendo le palle di raggio n.
Come mostrato nell'osservazione es. cayley 2.2.7, il δ dell'enunciato dipende unicamente da un controllo dal basso del volume del tipo $V(n) \geq Cn^{\delta}$.

Sulla base del'osservazione p-poincare implica p-p-poincare 2.3.1 cerchiamo ora di costruire un analogo per p-diseguaglianze pseudo-Poincaré del teorema PP implica f 2.2.4.

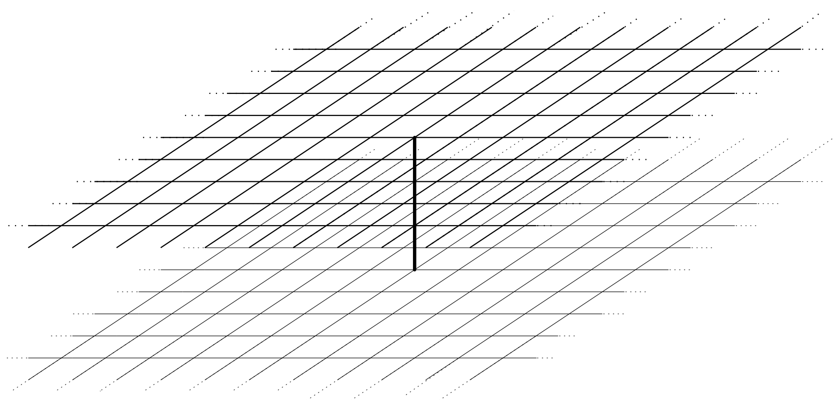
Forniremo ora due proposizioni che ci forniscono un'interpretazione geometrica delle varie diseguaglianze di Poincaré. Diamo prima un esempio significativo.

esempio collo di bottiglia

Esempio 2.3.2. Consideriamo il grafo dato da due copie della griglia $\mathbb{Z}^2$, che chiameremo $\mathbb{Z}^2_1$ e $\mathbb{Z}^2_2$ ed i cui elementi saranno chiamati, rispettivamente, z_1 e z_2. Aggiungiamo un lato a questo grafo sconnesso, ponendo $0_1 \sim 0_2$. In questo modo abbiamo ottenuto un grafo connesso e doubling, mostrato

CDB

Figure 2.3: Un esempio di collo di bottiglia



nella figura CDB 2.3.2. Mostriamo ora che in questo tipo di grafo non può valere una diseguaglianza di Poincaré: Basta prendere la funzione data da

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \in \mathbb{Z}^2_1, \\ 0 & \text{se } z \in \mathbb{Z}^2_2. \end{cases}$$

È facile verificare che si ha

$$\int_{B(0_1,n)} \left| f - f_{B(0_1,n)} \right|^p \, d\mu \geq c_p n^2,$$

mentre, evidentemente, l'integrale della derivata rimane limitato da una seconda costante $\tilde{c}_p$. Chiaramente non può allora valere una p-diseguaglianza di Poincaré, con $p < 2$, perché altrimenti si avrebbe

$$c_p n^2 \leq C_p \tilde{c}_p n^p.$$

Prendendo invece che $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^N$ e costruendo un esempio analogo, si vede che non può valere una p-diseguaglianza di poincaré per $p < N$. $\square$

L'esempio precedente suggerisce un metodo per cercare di costruire controesempi a diseguaglianze di Poincaré: se si trova un lato che "sconnette" il grafo in due componenti infinite a dimensione maggiore di 1, allora non può valere una diseguaglianza di tipo Poincaré. Un modo quantitativo per dire che un lato sconnette il grafo potrebbe essere che tutti i cammini che vanno da una parte all'altra del grafo devono passare dal lato in questione. È chiaro che il controesempio precedente si può generalizzare collegando i due grafi $\mathbb{Z}_1^2$ e$\mathbb{Z}_2^2$ con un qualsiasi numero finito di spigoli. In questo caso avremo allora un grafo infinito con un numero finito di spigoli che lo sconnettono in almeno due componenti connesse infinite.

Possiamo allora intuitivamente dire che la validità di una diseguaglianza di Poincaré ci garantisce l'assenza di "colli di bottiglia" nel grafo. In un certo senso vale il viceversa; vediamo come. Dal momento che troveremo delle stime invarianti per riscalamento, da ora in poi *supporremo* $h = 1$ *e* $\mu(A) = \mathrm{card}(A)$. Sia G un grafo fissato, $x \in G$ e $n \in \mathbb{N}$. Scegliamo, per ogni coppia di punti y_1, y_2 in $B(x,n)$, un cammino orientato di minima lunghezza $\gamma_{y_1;y_2}$. Denoteremo i lati di un cammino con e. Ovviamente dovrà essere $\gamma_{y_1;y_2} \subset B(x,2n)$.Poniamo allora

$$\Gamma_{x;n} := \{\gamma_{y_1;y_2} \mid y_1,\ y_2 \in B(x,n)\}.$$

Si avrà allora, per la diseguaglianza triangolare,

$$|f(y) - f(z)| \leq \sum_{e \in \gamma_{y;z}} |Df(e)|\,,$$

e quindi

$$\sum_{y,z \in B(x,n)} |f(y) - f(z)| \leq \sum_{y,z \in B(x,n)} \sum_{e \in \gamma_{y;z}} |Df(e)|\,.$$

Ma, per il membro di destra si ha

$$V(x,n)\sum_{y\in B(x,n)}|f(y)-f_n(x)|\leq\sum_{y,z\in B(x,n)}|f(y)-f(z)|\,,$$

mentre per quello di sinistra

$$\sum_{y,z\in B(x,n)}\sum_{e\in\gamma_{y;z}}|Df(e)|\leq\sum_{e\in B(x,2r)}\operatorname{card}\{\gamma\in\Gamma_{x;n}\mid e\in\gamma\}\,|Df(e)|\,.$$

Ponendo allora

$$K_1(x,n):=\max_{e\in B(x,2n)}\operatorname{card}\{\gamma\in\Gamma_{x;n}\mid e\in\gamma\},\tag{2.19}$$

K uno

si avrà infine

$$\sum_{y\in B(x,n)}|f(y)-f_n(x)|\leq\frac{K_1(x,n)}{V(x,n)}\sum_{y\in B(x,2n)}|Df|\,.$$

Notiamo che la quantità $K_1(x,n)$ dipende anche dalla scelta iniziale dei cammini minimizzanti $\Gamma_{x;n}$; sarebbe quindi opportuno che K_1 sia minimizzato fra tutte le possibili scelte di cammini. Abbiamo allora dimostrato la seguente

condizione K

Proposizione 2.3.3. *Se $K_1(x,n)\leq C_1nV(x,n)$ allora il grafo G supporta una diseguaglianza di Poincaré.*

□

controesempio collo di bottiglia

Esempio 2.3.4. L'esempio 2.3.2 va trattato con cautela: Definiamo il grafo $G_n=\bigvee_{i=1}^n\mathbb{Z}_i$ dato come l'unione disgiunta di n copie del grafo $\mathbb{Z}$, (con la struttura di grafo di Cayley data dai generatori del gruppo $\{1,-1\}$), quozientato identificando fra loro le identità del gruppo; in formule:

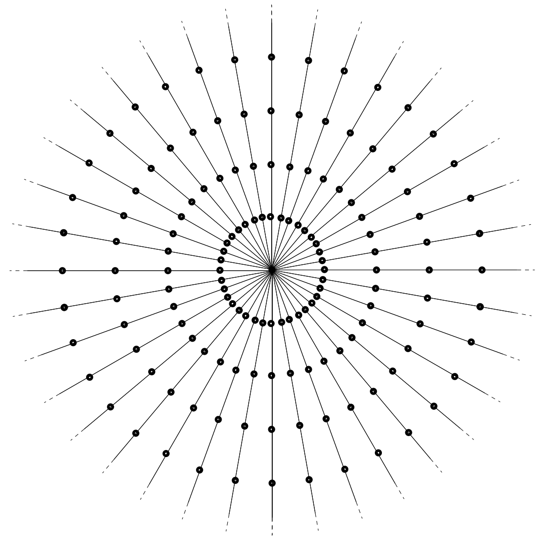
$$\frac{\bigsqcup_{i=1}^n\mathbb{Z}_i}{\{0_1,\ldots,0_n\}},$$

dove il quoziente è quello insiemistico. Il grafo risultante sarà del tipo di quello descritto nella figura 2.3.4. Vogliamo mostrare che questo grafo supporta una 1-diseguaglianza di Poincaré: in base alla proposizione 2.3.3 basta mostrare che per ogni palla $B(x,r)\subset G_n$ esiste una scelta di cammini minimizzanti $\Gamma_{x;r}=\{\gamma_{y_1;y_2}\}$, tale che

$$K_1=\max_{e\in B(x,2r)}\operatorname{card}\{e\in\gamma_{y_1;y_2}\}\leq CrV(x,r).$$

Gn

Figure 2.4: Il grafo $\bigvee_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_i$.



In questo grafo i cammini da scegliere sono univocamente determinati dalla richiesta di minimizzazione della lunghezza. Si vede facilmente che le palle che massimizzano K_1 sono quelle di centro 0, e per queste palle si ha che K_1 raggiunge il suo massimo sgli spigoli uscenti dall'origine; calcolando il numero di cammini che passano da uno di questi spigoli, si ottiene:

$$K_1 = (2n-1)r^2 \leq r(2nr) = rV(0,r),$$

che mostra quanto volevamo.
È chiaro allora che G_n ha una 1-diseguaglianza di Poincaré, anche se ogni suo spigolo sconnette il grafo in due parti infinite. Il motivo per cui la considerazione euristica seguente all'esempio esempio collo di bottiglia 2.3.2 non è valida in questo caso è che il volume della palla cresce in maniera lineare.

□

Cerchiamo ora dare lo stesso tipo interpretazione per una qualunque p-diseguaglianza di Poincaré. Con le notazioni precedenti, scegliamo la famiglia di cammini minimizzanti $\Gamma_{x;n}$. Per ogni cammino $\gamma_{y_1;y_2}$, denotiamo con $|\gamma_{y_1;y_2}|$ la lunghezza di questo cammino, ossia il numero di lati orientati di cui è formato. Dalla:

$$|f(y)-f(z)| \leq \sum_{e \in \gamma_{y;z}} |Df(e)|\,,$$

deduciamo, per la diseguaglianza di Hölder

$$|f(y)-f(z)|^p \leq |\gamma_{y;z}|^{p/q} \sum_{e \in \gamma_{y;z}} |Df(e)|^p\,, \tag{2.20}$$

figa

per ogni y, $z \in B(x,n)$, dove q è l'esponente coniugato di p. È chiaro che

$$V(x,n) \sum_{y \in B(x,n)} |f(y)-f_n(x)|^p \leq \sum_{y,z \in B(x,n)} |f(y)-f(z)|^p\,,$$

mentre

$$\sum_{y,z \in B(x,n)} |\gamma_{y;z}|^{p/q} \sum_{e \in \gamma_{y;z}} |Df(e)|^p \leq \sum_{e \in B(x,2n)} \sum_{\{\gamma \in \Gamma_{x;n} | e \in \gamma\}} |\gamma|\,|Df(e)|^p\,.$$

Quindi, sommando la (2.20) per tutti y, $z \in B(x,n)$ ed usando le ultime due stime si ottiene

$$\sum_{y \in B(x,n)} |f(y)-f_n(x)|^p \leq \frac{1}{V(x,n)} \sum_{e \in B(x,2n)} \sum_{\{\gamma \in \Gamma_{x;n} | e \in \gamma\}} |\gamma|^{p/q}\,|Df(e)|^p\,.$$

Poniamo allora

$$K_p(x,n) := \max_{e \in B(x,n)} \sum_{\{\gamma \in \Gamma_{x;n} | e \in \gamma\}} |\gamma|^{p/q}\,.$$

Otteniamo allora

$$\sum_{y \in B(x,n)} |f(y)-f_n(x)|^p \leq \frac{K_p(x,n)}{V(x,n)} \sum_{y \in B(x,2n)} |Df|^p\,. \tag{2.21}$$

cazzubbo

Abbiamo allora:

puppata **Proposizione 2.3.5.** *Per ogni $+\infty > p > 1$, se $K_p(x,n) \leq Cn^pV(x,n)$, allora G supporta una p-diseguaglianza di Poincaré.*

$\square$

p-poincare brutale

Osservazione 2.3.3. Una brutale maggiorazione mostra che

$$K_p(x,n) \leq (2n)^{p-1} V^2(x,n),$$

ossia che vale comunque, in un grafo uniforme con elemento di volume $dV = h^\delta$:

$$\left(\int_{B(x,n)} |f(y) - f_n(x)|^p \; dV \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq C_p h n \left(\frac{V(x,n)}{n} \right)^{1/p} \left(\int_{B(x,2n)} |Df|^p \; dV \right)^{1/p}. \tag{2.22}$$

poincare brutale

L'osservazione p-poincare implica p-p-poincare 2.3.1 si può generalizzare, dicendo che

Se G è un grafo doubling per cui vale

$$V(x,n) \leq C n^\delta,$$

allora G supporta una p-pseudo diseguaglianza di Poincaré generalizzata del tipo:

$$\|f\|_p \leq \left(C_p n^{(\delta-1)/p} \right) n \|f - f_n\|_p.$$

Infatti basta osservare che nella dimostrazione del teorema poincare implica p-poincare 2.3.1, si può far dipendere la costante della diseguaglianza di Poincarè anche da n. In questo modo si può applicare la stima (poincare brutale 2.22) e ripetere la dimostrazione poincare implica p-poincare 2.3.1.

Osservazione 2.3.4. E' opportuno osservare la forma delle diseguaglianze che si otterrebbero con il procedimento sopra esposto nel caso si tratti di un grafo con arbitrario parametro di lunghezza h e misura omogenea $\mu = h^\delta$ card. In questo caso sussiste ancora la diseguaglianza cazzubbo 2.21, nella forma

$$\int_{B(x,n)} |f(y) - f_n(x)| \; d\mu \leq \frac{K_p(x,n)}{\mathrm{card}(B(x,n))} h^p \int_{B(x,2n)} |Df|^p \, ;$$

Notiamo che il quoziente che gioca il ruolo della costante in questa diseguaglianza e' espresso in termini intrinseci al grafo, ossia indipendenti dal riscalamento, e che quindi la condizione espressa nella Proposizione puppata 2.3.5 e' puramente geometrica.

p-poincare brutale

Sulla base dell'Osservazione 2.3.3, vediamo come sia possibile ottenere una diseguaglianza di Nash. Il risultato che segue non è presente in letteratura in tutta la sua generalità e contiene come caso particolare un risultato ottenuto per vie diverse in CSC [12].

Proposizione 2.3.6. *Supponiamo che il grafo G sia tale che*

$$C^{-1}n^{\delta} \leq V(x,n) \leq Cn^{\delta} \quad \forall x \in G, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.23}$$

controllo crescita di volume

Allora, per ogni $\infty > p > 1$, il grafo G supporta una diseguaglianza di Nash del tipo

$$\|f\|_p^{\alpha} \leq C_p \|Df\|_p \|f\|_1^{\alpha-1},$$

dove

$$\alpha = \alpha(p,\delta) = \frac{p}{p-1} + \frac{1}{\delta} = p' + \frac{1}{\delta},$$

con p' esponente coniugato di p.

Dim Fissiamo una f a supporto finito in G, non identicamente nulla (altrimenti la diseguaglianza è ovvia). Utilizziamo innanzitutto l'osservazione p-poincare brutale 2.3.3, scrivendo

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\leq \|f - f_n\|_p + \|f_n\|_p \\ &\leq C_p n^{(\delta-1)/p+1} \|Df\|_p + \|f_n\|_p. \end{aligned} \tag{2.24}$$

B1

L'obbiettivo è quindi di stimare $\|f_n\|_p$. Osserviamo che, sfruttando il controllo dal basso del volume $V(x,n) \geq C^{-1}n^{\delta}$, si può minorare quest'ultimo termine nel modo seguente:

$$\|f_n\|_p \leq C \frac{\|f\|_1{}^{1-1/p}}{n^{\delta(1-1/p)}} \|f_n\|_1{}^{1/p}, \tag{2.25}$$

A1

e quindi ci siamo ricondotti a stimare il termine $\|f_n\|_1$. Mostriamo che vale

$$\|f_n\|_1 \leq C\|f\|_1.$$

Basta scrivere

$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \sum_{x \in G} \sum_{\mathrm{dist}(x,y) \leq n} \frac{f(y)}{V(x,n)} \leq \\ &\leq \frac{C}{n^{\delta}} \sum_{x \in G} \sum_{\mathrm{dist}(x,y) \leq n} f(y) = \\ &= \frac{C}{n^{\delta}} \sum_{x \in G} f(x) V(x,n) \leq \\ &\leq C^2 \|f\|_1, \end{aligned}$$

che è proprio quanto affermato. Possiamo allora concludere, sostituendo nella (2.25) che vale la stima

$$\|f_n\|_p \le C_p \frac{\|f\|_1{}^{1/p}}{n^{\delta(1-1/p)}},$$

e quindi, per la (2.24)

$$\|f\|_p \le C_p \left(n^{\delta/p+(1-1/p)} \|Df\|_p + \frac{\|f\|_1}{n^{\delta(1-1/p)}} \right).$$

Minimizzando allora su n si ottiene infine

$$\|f\|_p \le C_p \|Df\|_p{}^{\delta/(p'\delta+1)} \|f\|_1{}^{1-\delta/(p'\delta+1)},$$

dove p' è l'esponente coniugato di p, ossia $1/p + 1/p' = 1$. Basta allora elevare ambo i membri all'esponente $p' + 1/\delta$ per ottenere l'enunciato. $\square$

Notiamo che, in generale, la dimensione di Nash del grafo sarà diversa da quella più "geometrica" data dal controllo della crescita di volume (2.23). A priori, perciò, la diseguaglianza di Nash dimostrata sopra non avrà un buon comportamento per riscalamento, perchè il riscalamento naturale sarà quello dato dalla dimensione geometrica δ della (2.23). Fortunatamente avremo comunque a disposizione almeno una diseguaglianza di Nash "compatibile" con la geometria del grafo. Questa affermazione è chiarita dal seguente risultato, che non è presente in letteratura.

Corollario 2.3.7. *Se G ha una crescita di volume controllata come nella (2.23), allora per ogni $\delta > 2$ esiste un p, $\infty > p > 1$ per cui vale una diseguaglianza di Nash che induce una dimensione di Nash $\delta_N = \delta$.*

Dim Fissiamo $\delta > 2$. La proposizione precedente fornisce la famiglia ad un parametro di diseguaglianze di Nash, data da

$$\|f\|_p{}^{\alpha(p)} \le C_p \|Df\|_p \|f\|_1{}^{\alpha(p)-1}.$$

Ciascuna di queste fornisce una dimensione di Nash $\delta_N(p)$, (data dalla (2.17)), quindi la dimostrazione si riduce ad un semplice calcolo: basta verificare che per ogni $\delta > 2$ l'equazione data da

$$\delta_N(p) = \delta,$$

si può risolvere con $p > 1$. Esplicitando l'equazione si ottiene che la soluzione del problema è data da

$$p(\delta) = -\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5\delta^2 - 4\delta + 4},$$

che è, appunto, maggiore di 1 se e solo se δ è maggiore di 2. $\square$

2.4 Operatori alle differenze ellittici

Definiremo ora gli operatori differenziali discreti che ci permetteranno di formulare gli analoghi naturali sui grafi delle equazioni ellittiche.
Esamineremo dapprima l'equivalenza fra la formulazione variazionale e la formulazione puntuale di soluzione e vedremo che per ottenere quest'equivalenza sarà necessario escludere la dipendenza dalle parti della derivata seconda che formalmente rappresentano le derivate seconde miste. Per quanto questo non ci impedisca di definire equazioni al secondo ordine non in forma di divergenza è importante sottolineare che in mancanza di una realizzazione immersa del grafo la derivata seconda è un oggetto che si comporta misteriosamente: le manca sopratutto il carattere "locale", nel senso che la matrice delle derivate seconde non dipende solo dal valore della funzione nel punto e nei suoi adiacenti. Si può osservare, però, che le soluzioni di equazioni non in forma di divergenza altro non sono che soluzioni di sistemi di equazioni lineari. È quindi lecito sperare che questi ultimi discendano da equazioni in forma di divergenza definite su altri grafi, ottenuti sostanzialmente aggiungendo spigoli a quello di partenza.
Definiremo inoltre il concetto di "grafo con bordo", attraverso il quale potremo parlare di valori al contorno e di problemi di Dirichlet e di Neumann. Di nuovo, questa definizione non dovrebbe essere considerata significativa sul singolo grafo, dove potrebbe rivelarsi artificiosa, ma dovrebbe piuttosto essere vista nell'ottica di un processo di discretizzazione.

Definizione 2.4.1. Chiameremo "campo di tensori" su G il dato, per ogni punto $x \in G$ di una matrice $\mathbf{A}(x)_{(i,j)} = \mathbf{A}(x,i,j) \in \mathfrak{M}(k(x),\mathbb{R})$ dove $k(x)$ è il numero di adiacenze di x. Porremo, in analogia con la definizione 2.1.5:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbb{F})\,(i,j) = \sum_{i \sim k} \mathbf{A}(i,j,k)\mathbb{F}(i,k) \quad \forall \mathbb{F} \in DG', \tag{2.26}$$

in modo che $\mathbf{A} \cdot \mathbb{F} \in DG'$

Osservazione 2.4.1. Avremmo anche potuto definire un campo di tensori su G come un campo di vettori su DG. La condizione che $\mathbf{A}$ sia un campo su DG, infatti, si esprime dicendo che $\mathbf{A}(i,j,l) = -\mathbf{A}(-(i,j,l))$ (vedi la definizione 2.1.3 per il significato di $-(i,j,l)$). Quindi per ogni $i \in G$ sono assegnati esattamente $k(i)$ numeri, perché $\mathbf{A}$ è una funzione su D^2G, i cui elementi sono $\{(i,j,l), -(i,j,l) \mid j \sim i,\ l \sim i\}$. Ma per la condizione precedente $\mathbf{A}$ è determinata dai soli valori $\mathbf{A}(i,j,l)$, che sono esattamente $k(i)$.

Imporremo allora che il campo di matrici che definirà l'operatore ellittico sia simmetrico e "uniformemente ellittico" nel senso che

$$
{}^t\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}(x) \quad \forall x \in G \quad \text{e}
$$

$$
\exists \lambda\,,\, \Lambda \ t.c. \quad \lambda \|\xi\|^2 \leq {}^t\xi \cdot \mathbf{A}(x)\xi \leq \Lambda \|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{k(x)}. \tag{2.27}
$$

uniforme ellitticita

A questo punto l'equazione

$$
\operatorname{div}\left(\mathbf{A} \cdot Du\right)(x) = 0 \quad \forall x \in G, \tag{2.28}
$$

parte principale

ha un senso ben preciso.

esempio pesi

Esempio 2.4.1. Supponiamo di avere un oggetto astratto, che chiameremo "sistema", che può essere osservato solo in un numero finito di "stati" $\{s_1, \ldots, s_N\}$. Supponiamo inoltre che da certi stati sia possibile andare solo in certi altri stati, con una certa probabilità nota $p(i,j)$. Definiamo allora una struttura di grafo agli stati possibili del sistema saturando la relazione di adiacenza "gli stati i e j sono adiacenti se posso passare dal primo al secondo con probabilità positiva". Possiamo allora definire il campo di tensori diagonale $\mathbf{A}(i,j,l) = \delta_{j,l} p(i,j)$ sul grafo. Sia ora u una distribuzione di probabilità sugli stati G. L'equazione (2.28) esprime il fatto che la distribuzione u sia stazionaria per la catena di Markov associata alla matrice di probabilità $P_{i,j} = p(i,j)$, ossia che $P \cdot \overline{u} = \overline{u}$, o anche che

$$
\lim_{n \to +\infty} P^n \cdot \overline{u} = \overline{u},
$$

dove si è indicato con $\overline{u}$ il vettore dei valori di u. □

Ci chiediamo ora fino a che punto l'analogia con il caso continuo si possa portare avanti, ed in particolare se sia ancora possibile dare una interpretazione variazionale "debole" dell'equazione (2.28). Osserviamo che, dato un campo $\mathbb{F}$ su G, affinché $\mathbf{A} \cdot \mathbb{F}$ sia ancora un campo di vettori si dovrà avere, fissati i e j,

$$
\sum_{k \sim i} \mathbf{A}(i,j,k)\mathbb{F}(i,k) = -\sum_{k \sim j} \mathbf{A}(j,i,k)\mathbb{F}(j,k) \qquad \forall i,j \in G;
$$

considerando allora campi del tipo $\mathbb{F} = \delta_{(x_0,y_0)} - \delta_{(y_0,x_0)}$ si otterranno le condizioni:

$$
\begin{cases} \mathbf{A}(i,j,k) = 0 & \text{se } k \neq j, \\ \mathbf{A}(i,j,j) = \mathbf{A}(j,i,i) & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.29}
$$

condizioni variazionali

In conclusione se cerchiamo una interpretazione variazionale dell'equazione (2.28) ci dobbiamo aspettare di dover applicare il teorema (2.1.5) e quindi dovremo considerare equazioni del tipo:

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}([i,j])Du(i,j)) = 0, \tag{2.30}$$

parte principale 2

dove si è indicato con $\mathbf{a}([i,j])$ il fatto che $\mathbf{a}$ dipende solo dallo spigolo non orientato. Nell'esempio 2.4.1, questa condizione garantisce che la catena di Markov sia reversibile, ossia che la probabilità di passare da uno stato a ad uno b sia la stessa che per passare da quello b a quello a.

Proposizione 2.4.2. *Sia G un grafo uniforme finito con bordo. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *u è soluzione dell'equazione (2.30) in G.*

2. *u è soluzione dell'equazione in forma debole*

$$\int_G \mathbf{a} \cdot Du \cdot D\varphi \, d\mu = 0 \qquad \forall \varphi \text{ a supporto in } G.$$

3. *u minimizza il funzionale*

$$\mathbb{F}(u) = \int_G \left\| \sqrt{\mathbf{a}} \cdot Du \right\|^2 d\mu.$$

Dim $(1 \Leftrightarrow 2)$ Mostriamo che

$$\operatorname{div}(\varphi^* \mathbf{a} \cdot Du) = \operatorname{div}(\mathbf{a} \cdot Du)\varphi + \mathbf{a} \cdot Du \cdot D\varphi. \tag{2.31}$$

divergenza di F per u

Basta esplicitare:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi^* \mathbf{a} \cdot Du)(x) &= \frac{1}{h} \sum_{y \sim x} (\mathbf{a} \cdot Du)(x,y) \left(\varphi(x) + \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{2} \right) \\ &= \operatorname{div}(\mathbf{a} \cdot Du)\varphi + \mathbf{a} \cdot Du \cdot D\varphi. \end{aligned}$$

Possiamo allora procedere come al solito utilizzando il teorema 2.1.5, ottenendo l'equivalenza cercata dall'uguaglianza:

$$\int_G \mathbf{a} \cdot Du \cdot D\varphi \, d\mu = \int_{\partial G} \varphi^* \mathbf{a} \cdot Du \, d\tilde{\mu} - \int_G \varphi \operatorname{div}(\mathbf{a} \cdot Du) \, d\mu = 0,$$

valida per ogni φ a supporto in G.
$(2 \Leftrightarrow 3)$ Si vede facilmente che il funzionale $\mathbb{F}$ è convesso e differenziabile,

perciò u minimizza se e soltanto se u soddisfa l'equazione di Eulero del funzionale che è proprio l'equazione (2.30) in forma debole. □

Per la questione dell'esistenza e unicità in grafi infiniti la questione è ovviamente più delicata, contrariamente al caso di un grafo finito; rimandiamo al libro di Soardi [30].

Osservazione 2.4.2. Motivati dalla proposizione precedente, ogni volta che useremo il termine "variazionale" riferito ad una equazione, intenderemo sempre che è applicabile la formula di Gauss-Green nella maniera descritta dalla proposizione. Per quanto visto precedentemente, quindi, una equazione di tipo variazionale sarà una equazione la cui "parte pricipale" è simmetrica, ossia dipende solamente dallo spigolo e non dalla sua "orientazione".

Abbiamo ora a disposizione tutti gli strumenti per definire operatori ellittici più generali sui grafi, operatori che, come vedremo, hanno comportamenti analoghi a quelli usuali. L'operatore

$$\mathbb{L}(u) = \mathrm{div}(\mathbf{A} \cdot Du + \mathbf{b}u^*) + \mathbf{c} \cdot Du + du, \tag{2.32}$$

operatore in divergenza

con $\mathbf{A}$ uniformemente ellitica è il generico operatore ellittico in forma di divergenza. Se $\mathbf{A}$ soddisfa le condizioni (2.29) e $\mathbf{b}$ è un campo su G, allora $\mathbb{L}$ definisce sui grafi uniformi la forma bilineare

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_G (\mathbf{a} \cdot Du \cdot Dv + \mathbf{b}u^* \cdot Dv - \mathbf{c} \cdot Duv - duv)\, d\mu, \tag{2.33}$$

operatore variazionale integrale 1

o anche la più naturale

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_G \big(\mathbf{a} \cdot Du \cdot Dv + \mathbf{b}' \cdot Dvu - \mathbf{c} \cdot Duv - duv\big)\, d\mu, \tag{2.34}$$

operatore variazionale integrale 2

dove entrambe le forme bilineari agiscono su insiemi di funzioni del grafo da specificare di volta in volta a seconda del problema al quale siamo interessati. In quest'ultimo caso parleremo di operatore variazionale.

Il generico operatore ellittico non variazionale è invece definito da

$$\mathbb{L}(u) = tr(\mathbf{A}D^2u) + \mathbf{b} \cdot Du + cu, \tag{2.35}$$

operatore non variazionale

dove $\mathbf{A}$ è uniformemente ellittica e si è posto $\mathbf{A}D^2u$ considerando entrambi i fattori come matrici dipendenti da x in $\mathfrak{M}(k(x), \mathbb{R})$.

I problemi di Dirichlet e di Neumann su un grafo omogeneo con bordo ($\Omega \hookrightarrow G$) avranno soluzione (soprasoluzione, sottosoluzione) u se, in forma integrale:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u,v) = (\leq,\ \geq) \int_G (\mathbf{f} \cdot Dv + fv)\ d\mu & \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ u(x) = g(x) & \forall x \in \tilde{\partial}\Omega; \end{cases} \tag{2.36}$$

Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u,v) = (\leq,\ \geq) \int_G (\mathbf{f} \cdot Dv + fv)\ d\mu & \forall v \in W^{1,p}(\Omega), \\ Du(x,y) = \mathbf{g}(x,y) & \forall (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.37}$$

Neumann

per opportuni g e $\mathbf{g}$ rispettivamente dato al bordo e derivata normale e con $\mathcal{L}$ dato dalla (operatore variazionale integrale 2 2.34).
In maniera analoga si possono anche definire le soluzioni forti (soprasoluzioni, sottosoluzioni) dei problemi di Dirichlet e Neumann relative a generiche equazioni ellittiche in foma di divergenza e non; chiaramente nel caso variazionale le due definizioni sono equivalenti.

Osservazione 2.4.3. Tutti gli operatori alle differenze definiti sopra si possono esprimere nella forma generica

$$\mathbb{L}(u)(x) = \sum_{y \sim x} \tilde{\mathbf{a}}(x,y,h)u(y) + c(x,h)u(x).$$

Consideriamo in particolare la parte principale dell'operatore descritto dalla (operatore non variazionale 2.35). Fissato $x \in G$ si avrà

$$\begin{aligned} tr(\mathbf{A}(x)D^2u)(x) &= \frac{1}{2h^2} \sum_{i,j \sim x} a_{i,j}(x)(u(j) + u(i) - 2u(x)) \\ &= \frac{1}{2h^2} \left(\sum_{j \sim x} \left(\sum_{i \sim x} a_{i,j}(x) \right) u(j) + \sum_{i \sim x} \left(\sum_{j \sim x} a_{i,j}(x) \right) u(i) - \right. \\ &\qquad \left. - \left(2 \sum_{i,j \sim x} a_{i,j}(x) \right) u(x) \right), \end{aligned}$$

e, ricordando che la matrice $\mathbf{A}$ è simmetrica e definendo

$$\mathbf{a}(x,i) := \sum_{j \sim x} a_{i,j}(x),$$

si ha

$$tr(\mathbf{A}D^2u)(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{i \sim x} \mathbf{a}(x,i)(u(i) - u(x)) = \sum_{i \sim x} \tilde{\mathbf{a}}(x,i,h)u(i) = \mathrm{div}(\mathbf{a}Du).$$

Spesso, quindi, dato un operatore uniformemente ellittico del tipo (2.35) operatore non variazionale
potremo studiare in realtà operatori con parte principale di tipo diagonale. In particolare sarà interessante il caso in cui la matrice $\mathbf{A}$ oltre ad essere simmetrica definita positiva, è anche "diagonalmente dominante" nel senso che

$$\sum_{i \neq j} |a_{i,j}(x)| \leq a_{i,i}(x) - \lambda_0 \,, \quad i = 1, \ldots, k(x),$$

per un qualche $\lambda_o > 0$ indipendente da x, (si è posto, come al solito, $k(x) = \mathrm{card}\{j \in G \mid j \sim x\}$). Questo tipo di operatori è sufficientemente generale per le applicazioni alla discretizzazione di equazioni ellittiche, come si può vedere nell'articolo di Kuo e Trudinger [23] (TK1). Notiamo comunque che nonostante l'operatore (2.35) (operatore non variazionale) si possa scrivere in forma di divergenza, questo non ci autorizza a considerarlo di tipo variazionale. Esso lo sarà solamente nel caso in cui il termine $\mathbf{a}(x, y)$ sia simmetrico nei suoi argomenti, ovverossia dipendente solo dallo spigolo e non dalla sua orientazione.

Esempio 2.4.3. Supponiamo di avere un circuito elettrico formato da N nodi $n_1 \ldots n_N$ collegati da fili ciascuno di una certa resistenza, tutti della stessa lunghezza h e di sezione unitaria. Possiamo dotare il circuito di una struttura di grafo i cui vertici sono i nodi ed i cui spigoli sono i fili di lunghezza,appunto, h. Supponiamo inoltre che sia assegnato, per ogni nodo del circuito un valore del potenziale elettrico $u(n_i)$. Notiamo che la resistenza $R(n_i, n_j)$ soddisfa l'equazione $u(n_j) - u(n_i) = R(n_j, n_i)\mathbf{i}(i, j)$, dove $\mathbf{i}(i, j)$ è l'intensità della corrente che percorre il filo dal nodo n_i al nodo n_j, con segno. Osserviamo inoltre che la resistenza è direttamente proporzionale alla lunghezza del filo, ossia $R(n_i, n_j) = hc_{i,j}$, dove $c_{i,j}$ è la conduttività specifica del tratto di filo dal nodo n_i al nodo n_j. Possiamo allora definire l'operatore variazionale sul grafo la cui parte principale è data da $\mathbf{a}([i, j]) = c(i, j)$. Notiamo allora che l'equazione (2.28) (parte principale) non esprime altro che la conservazione della carica, o quella più comunemente nota come "prima legge di Kirchoff":
La somma algebrica delle correnti per ogni nodo è nulla.
Se immaginiamo di attaccare ad ogni nodo n_i del circuito una batteria B_i che emette corrente $f(i)$, allora il potenziale u soddisferà una equazione del tipo

$$\mathrm{div}(\mathbf{a} \cdot Du) = f(i).$$

□

Notiamo ora che nell'equazione

$$\mathbb{L}(u) = f + \mathrm{div}(\mathbf{f}), \tag{2.38}$$

equazione ellittica

con $\mathbb{L}$ dato dalla (2.32) il termine di sinistra può essere considerato come un termine di tipo funzione indipendentemente dal fatto che abbia una componente nella forma di una divergenza. Solo per problemi di approssimazione, saremo interessati a considerare il termine noto nella forma posta nella (2.38). Analoga osservazione è lecito fare per il termine "di primo grado" in forma di divergenza nella (2.32). Esplicitando allora la (2.38) avremo:

$$\mathbb{L}(u) = \mathrm{div}(\mathbf{a} \cdot Du) + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot Du + (d + \mathrm{div}(\mathbf{b}))u = f + \mathrm{div}(\mathbf{f}),$$

dove si è utilizzato lo stesso calcolo di (2.31).
Sarà quindi opportuno isolare il termine "di secondo grado" e scrivere l'equazione nella forma semplificata:

$$\mathrm{div}(\mathbf{a} \cdot Du) + \mathbf{b} \cdot Du + cu = f, \tag{2.39}$$

equazione ellittica 2

o anche, per semplicità di notazione nella forma semilineare integrale:

$$\int_G \mathbf{A}(x, u, Du) \cdot Dv - B(x, u, Du)v \, d\mu = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \; v \geq 0, \tag{2.40}$$

forma semilineare

ove si è posto

$$\begin{cases} \mathbf{A}(x, u, Du)(x, y) = \mathbf{a} \cdot Du, \\ B(x, u, Du) = \mathbf{b} \cdot Du + cu - f. \end{cases} \tag{2.41}$$

descriz

Fra questi operatori sarà opportuno considerare quelli cosiddetti "di tipo positivo", ossia tali che

$$\begin{cases} c \leq 0, \\ \mathbf{a}(i, j) \geq h \, |\mathbf{b}| \, (i, j). \end{cases} \tag{2.42}$$

positivita'

In [27] Motzkin e Wasow mostrano che gli operatori di tipo positivo sono una classe "sufficientemente" ricca di operatori discreti; in particolare la condizione $\mathbf{a} \geq h \, |\mathbf{b}|$ è poco restrittiva, poiché h è comunque condannato a tendere a zero. Motzkin e Wasow dimostrano infatti che qualunque operatore differenziale ellittico è approssimabile con una successione di operatori ellittici discreti di tipo positivo. In [22] Kuo e Trudinger estendono questo enunciato ad operatori ellittici anche fortemente nonlineari, approssimando tutti gli operatori di Isaac. Si avrà dunque per l'uniforme ellitticità

$$\begin{aligned} Du \cdot \mathbf{A}(x, u, Du) &\geq \lambda \|Du\|^2, \\ |\mathbf{A}(x, u, Du)(x, y)| &\leq \Lambda \|Du\|. \end{aligned}$$

Inoltre fissato $k > 0$, B si stima dall'alto come

$$\begin{aligned} |(|u| + k)B(x, u, Du)| &\leq \|\mathbf{b}\|\|Du\|(|u| + k) + |c|\,(|u| + k)^2 + |f|\,(|u| + k) \\ &\leq \epsilon\|Du\|^2 + \left(\frac{1}{\epsilon}\|\mathbf{b}\|^2 + |c|\right)(|u| + k)^2 + |f|\,(|u| + k) \\ &\leq \epsilon\|Du\|^2 + \left(\frac{1}{\epsilon}\|\mathbf{b}\|^2 + |c| + k^{-1}\,|f|\right)(|u| + k)^2. \end{aligned}$$

Ponendo allora, per $k > 0$ fissato

$$\bar{u} = |u| + k\ , \quad \bar{a} = \|\mathbf{b}\|^2 + |c| + k^{-1}\,|f|\ ,$$

si avrà per ogni $0 < \epsilon < 1$

$$\begin{cases} Du \cdot \mathbf{A}(x, u, Du) \geq \lambda\|Du\|^2, \\ |\mathbf{A}(x, u, Du)(x, y)| \leq \Lambda\|Du\|, \\ |\overline{u}B(x, u, Du)| \leq \epsilon\|Du\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\overline{a}\overline{u}^2. \end{cases} \tag{2.43}$$

stime sui coefficenti

Ci riferiremo spesso nei prossimi capitoli aqueste condizioni come alle condizioni di uniforme ellitticità per operatori di tipo semilineare.

Chapter 3

Regolarità ellittica: il caso variazionale

In questo paragrafo ci proponiamo di ottenere una diseguaglianza di tipo Harnack per soluzioni di equazioni ellittiche variazionali definite su grafi che abbiano certe proprietà elementari (regolarità di volume e proprietà isoperimetriche). Il metodo di dimostrazione che useremo è sostanzialmente quello di Moser, [26], il cui schema è il seguente:

1) Stimeremo gli estremi della soluzione con delle norme di tipo integrale. Per fare ciò utilizzeremo una tecnica di iterazione di medie integrali su supporti crescenti; vedremo che il processo di iterazione si potrà avviare sulla base dell'esistenza di una diseguaglianza isoperimetrica e si potrà concludere attraverso la regolarità di volume.

2) Otterremo delle stime di decadimento della misura degli insiemi di livello. In questa stima risiede il principale motivo della richiesta di una diseguaglianza del tipo Poincaré.

3) Sfrutteremo queste stime per poter confrontare fra loro i controlli integrali ottenuti al punto 1). Per far ciò dimostreremo un analogo discreto del lemma di John-Niremberg.

Per motivi di chiarezza seguiremo durante il capitolo l'ordine inverso a quello ora descritto, anche perché i risultati ottenuti all'interno dei punti 1) e 3) hanno comunque un'interesse indipendente. Inoltre, durante tutto il capitolo faremo particolarmente attenzione al comportamento delle costanti in gioco. Questo per avere la garanzia che i risultati ottenuti siano compatibili con quelli già noti nel caso continuo, in maniera tale da poter ben sperare in applicazioni a procedimenti di discretizzazione.

Concluderemo il capitolo fornendo controesempi significativi alla Holderianità discreta delle soluzioni, in mancanza di alcune delle ipotesi assunte.

Una questione di notazione: spesso nel susseguirsi delle formule tenderemo ad accorpare tutte le costanti, indicandole con lo stesso simbolo. Successive osservazioni specificheranno la dipendenza dai dati noti.

Per i motivi detti sopra supporremo che il grafo sia connesso e m-regolare, ed abbia le seguenti proprietà:

$$\exists C_1 \quad \text{t.c} \quad \forall B(x,n) \quad |B(x,2n)| \leq C_1 \, |B(x,n)| \, , \tag{3.1}$$

doubling

$$\exists C_2 \text{ t.c. } \; \forall B = B(x,n) \quad \int_B |f(x) - f_B|^2 \, d\mu \leq C_2 h^2 n^2 \int_{2B} |Df|^2 \, d\mu. \tag{3.2}$$

Poincare

Dai risultati del capitolo precedente possiamo allora concludere che il grafo G supporta una diseguaglianza di Sobolev del tipo

$$\left(\int_{B(x,n)} |f|^{2^*} \, d\mu \right)^{1/2^*} \leq C_2' \left(\int_{B(x,n)} |Df|^2 \, d\mu + \frac{1}{h^2 n^2} \int_{B(x,n)} f^2 d\mu \right)^{1/2} , \tag{3.3}$$

ipotesi sobolev

per ogni $f \in W_0^{1,2}(B(x,n))$.
Per ogni $p \in \mathbb{R}$ chiameremo infine media p-esima di una funzione positiva f la quantità:

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B f^p \, d\mu \right)^{1/p} . \tag{3.4}$$

media p-esima

3.1 Il lemma di John-Niremberg

Dimostreremo in questo paragrafo il lemma di John-Niremberg nella sua versione discreta. Naturalmente non potremo seguire il percorso classico della dimostrazione, che normalmente fa appello alla decomposizione di un cubo in cubi diadici disgiunti. Useremo invece massicciamente un lemma di ricoprimento del tipo Vitali per ovviare alla mancanza di struttura del grafo.
Il lemma di John-Niremberg dà sostanzialmente una stima di decadimento degli insiemi di livello delle funzioni che hanno una data norma di tipo integrale controllata. Attraverso questa stima otterremo un controllo dall'alto della media p-esima di $\exp(f)$ in termini della sua media $-p$-esima per un certo $p > 0$.
Tutti i risultati di questo paragrafo si basano unicamente sull'ipotesi di regolarità di volume (3.1) doubling

Cominciamo col dare alcuni lemmi di carattere generale che sono conseguenze immediate dell'ipotesi di doubling. Il seguente, in particolare, ci sarà utile anche nei paragrafi successivi e costituisce un risultato ormai classico valido in qualunque spazio metrico.

lemma tecnico 2

Lemma 3.1.1. *Il grafo G ha la regolarità di volume se e solo se esistono δ, $\tilde{C}_1$ tali che*

$$\frac{|B(x,r)|}{|B(y,R)|} \geq \tilde{C}_1 \left(\frac{r}{R}\right)^{\delta} \quad \forall x, y \in G\,, \quad R \geq r\,, \quad x \in B(y,R).$$

Dim La sufficenza è ovvia. Dimostriamo quindi la necessità. Definiamo, per $i = 0, 1, 2, \dots$

$$r_i = 2^i r, \qquad j = \min\{i \mid B(y,R) \subset B(x,r_i)\}.$$

Per la regolarità di volume si ha:

$$|B(y,R)| \leq |B(x,r_j)| \leq C_1 \, |B(x,r_{j-1})| \leq \cdots \leq C_1^j \, |B(x,r)|\,,$$

e quindi

$$\frac{|B(x,r)|}{|B(y,R)|} \geq C_1^{-j}.$$

D'altra parte, $B(y,R) \not\subseteq B(x,r_{j-1})$, e quindi $r_{j-1} \leq 2R$: se $z \in B(y,R) \setminus B(x,r_{j-1})$, $d(x,z) \geq r_{j-1}$, ed essendo $x \in B(y,R)$, si ha

$$r_{j-1} \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq 2R.$$

Ma allora $j \log 2 \leq \log(4R/r)$ e quindi

$$\frac{|B(x,r)|}{|B(y,R)|} \geq C_1^{-j} \geq C_1^{-2} \left(\frac{r}{R}\right)^{\log C_1 / \log 2},$$

e otteniamo l'enunciato con $\tilde{C}_1 := C_1^{-2}$ e $\delta := \log C_1 / \log 2$. □

I rimanenti risultati sono semplici modificazioni di lemmi classici adattati da Delmotte al caso discreto in Dell [14].

Lemma 3.1.2. *(Vitali)*
Sia B_0 una palla di G e $\mathcal{F}$ una famiglia (necessariamente finita) di palle contenute in B_0. Allora esiste una sottofamiglia $\mathcal{G}$ di $\mathcal{F}$ formata unicamente da palle disgiunte tale che:

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \exists B' \in \mathcal{G} \quad t.c. \quad B \subset 3B'.$$

Dim Ordiniamo le palle di $\mathcal{F}$ in maniera decrescente rispetto al raggio:

$$\mathcal{F} = \big\{B(x_1, n_1), \cdots, B(x_N, n_N)\big\}, \quad n_i \searrow,$$

e scegliamo una successione i_k in maniera induttiva ponendo:

$$i_1 = 1; \quad i_k = \min\{i \mid B(x_i, n_i) \cap B(x_{i_j}, n_{i_j}) = \varnothing \quad \forall j \leq k-1\}.$$

Ponendo allora $\mathcal{G} = \big\{B(x_{i_k}, n_{i_k})\big\}$ si vede che

$$\forall i \quad \exists j \leq i \quad \text{t.c.} \quad B(x_j, n_j) \cap B(x_i, n_i) \neq \varnothing \quad e \quad B(x_j, n_j) \in \mathcal{G}.$$

Ed essendo $n_j \geq n_i$ deve essere $B(x_i, n_i) \subset B(x_j, 3n_j)$ per la diseguaglianza triangolare. □

Definizione 3.1.1. Sia $f \in L^1(G)$; si definisce la norma BMO (Bounded Mean Oscillation) di f in $\Omega \subset G$ come:

$$\|f\|_{BMO(\Omega)} = \sup_{B \subset \Omega} \Big\{ \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| \ d\mu \Big\}.$$

Il seguente lemma fornisce un controllo esplicito dell'oscillazione delle medie di una funzione in termini della sua norma BMO.

stima sull'oscillazione

Lemma 3.1.3. *Se $B \subset B' \subset B_0$ allora si ha:*

$$|f_B - f_{B'}| \leq \|f\|_{BMO(B_0)} \frac{|B'|}{|B|}.$$

Dim Si ha:

$$\begin{aligned} |f_B - f_{B'}| &= \left| \fint_B (f(x) - f_{B'}) \ d\mu \right| \leq \fint_B |f(x) - f_{B'}| \ d\mu \leq \\ &\leq \frac{|B'|}{|B|} \fint_{B'} |f(x) - f_{B'}| \ d\mu \leq \frac{|B'|}{|B|} \|f\|_{BMO(B_O)}. \end{aligned}$$

□

Osservazione 3.1.1. Se si considerano catene di palle $B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_N$ a rapporti fra misure controllati, nel senso che $|B_{i+1}| \leq C\,|B_i|$, otteniamo dal lemma precedente una limitazione uniforme dei salti delle medie di f sulla successione di palle: $\big|f_{B_i} - f_{B_{i+1}}\big| \leq C\|f\|_{BMO(B_N)}$. Questo ci fornisce una specie di teorema del valore intermedio discreto per $g(i) = [f_{B_i}/C\|f\|]$: Se g assume due valori in $\mathbb{Z}$, allora assume tutti i valori intermedi.

Per motivi tecnici avremo bisogno di un raffinamento dell'osservazione precedente.

valore intermedio

Lemma 3.1.4. *Esiste una costante universale C per cui date comunque due palle $B = B(x,r) \subset B(x',r') = B'$, esiste una successione di palle $\{B_i\}_{i=0}^N$ contenute in B' e contenenti B con $B_0 = B$ e $B_N = B'$ tale che se $g(i) = [f_{B_i}/C\|f\|_{BMO(3B')}]$ assume due valori in $\mathbb{Z}$, allora assume tutti i valori intermedi.*

Dim Costruiamo la successione di palle per induzione con B_0 dato dall'enunciato. Supponiamo di aver scelto $B_i = B(x_i, r_i)$ in maniera da soddisfare le ipotesi del lemma; se $2r_i > r'$ porremo $B_{i+1} = B'$.
Supponiamo allora $2r_i < r'$: scegliendo $x_{i+1} \in B_i \cap B(x', r' - 2r_i)$ avremo per la diseguaglianza triangolare:

$$d(x', y) \leq d(x_{i+1}, y) + d(x', x_{i+1}) \leq 2r_i + r' - 2r_i \qquad \forall y \in B(x_{i+1}, 2r_i).$$

Poniamo allora $B_{i+1} = B(x_{i+1}, 2r_i)$. Si ha che $B \subset B_{i+1}$, infatti:

$$d(x_{i+1}, y) \leq d(x_i, x_{i+1}) + d(x_i, y) \leq r_i + r_i \qquad \forall y \in B,$$

per ipotesi induttiva. Osserviamo ora che $B_{i+1} \subset 3B_i$ e $B_i \subset 3B_{i+1}$, infatti:

$$\begin{aligned} d(x_i, y) &\leq d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, y) \leq 3r_i \qquad \forall y \in B_{i+1}, \\ d(x_{i+1}, y) &\leq d(x_{i+1}, x_i) + d(x_i, y) \leq 3r_i \qquad \forall y \in B_i. \end{aligned}$$

Inoltre per $B_j \neq B'$ si avrà $3B_j \subset 3B'$ infatti:

$$d(x', y) \leq d(x', x_j) + d(x_j, y) \leq r' + 3r < 3r' \qquad \forall y \in 3B_j.$$

Allora si avrà:

$$\begin{aligned} \left|f_{B_i} - f_{B_{i+1}}\right| &\leq \left|f_{B_i} - f_{3B_{i+1}}\right| + \left|f_{B_{i+1}} - f_{3B_{i+1}}\right| \\ &\leq \|f\|_{BMO(3B')} \left(\frac{|3B_{i+1}|}{|B_i|} + \frac{|3B_{i+1}|}{|B_{i+1}|} \right) \\ &\leq \|f\|_{BMO(3B')} \left(\frac{|9B_i|}{|B_i|} + \frac{|3B_{i+1}|}{|B_{i+1}|} \right) \leq C\|f\|_{BMO(3B')}, \end{aligned}$$

dove $C = 2(C_1)^4$ e il C_1 è quello dato dalla diseguaglianza (3.1) doubling della regolarità di volume.
L'ultima parte dell'enunciato segue come prima dalla stima sull'oscillazione delle medie di f. □

Lemma 3.1.5. *(John-Niremberg)*
Esiste una costante universale C tale che se $\|f\|_{BMO(4B_0)} \leq 1$ e $f_{B_0} = 0$, allora si ha:

$$|\{x \in B_0 \mid f(x) > t\}| \leq C e^{-t/C} |B_0| .$$

Dim Fissiamo un parametro T da specificare successivamente e poniamo

$$D_k = \{x \in B_0 \mid f(x) > kT\},$$
$$I_k = \{B \subset B_0 \mid kT < f_B < (k+1/2)T\}, \qquad E_k = \bigcup_{B \in I_k} B.$$

Indichiamo con $J_k \subset I_k$ la sottofamiglia di palle disgiunte data dal lemma di Vitali; si avrà allora

$$F_k = \bigcup_{B \in J_k} B \quad \text{e} \quad |E_k| \leq C |F_k| .$$

L'idea è di considerare la stima data dal lemma 3.1.3 come una stima a oscillazione fissata della percentuale di B_0 ricoperta da palle a media abbastanza grande. In altra parole, se f ha media nulla su B_0, allora il lemma 3.1.3 si scrive $|B| \leq 1/|f_B| |B_0|$ e questo ci dice che una palla B sulla quale f ha media maggiore di M copre una percentuale minore di $1/M$ di B_0. Otterremo allora una stima di decadimento esponenziale per gli insiemi F_k i quali a loro volta hanno misura che controlla quella dei D_k. Infatti utilizzando il lemma 3.1.4 si vede che $D_k \subset F_k$: basta osservare che se $x \in D_k$ si può costruire la successione di palle del lemma a partire da x. Si avrà, (con le notazione del lemma 3.1.4), $g(0) \geq k(T/C)$, $g(N) = 0$ e quindi esisterà una palla B_i per cui $g(i) = k(T/C)$ ossia $kT \leq f_{B_i} \leq kT + C$ e per $T > 2C = 4C_1^4$ si otterrà $x \in B_i \in I_k$.
Più in generale si mostra, *mutatis mutandis*, che data una palla $B \in I_{k+n}$ si trova una palla $B' \in I_k$ che la contiene. Avremo allora che se $B \in J_{k+1}$ esiste $B' \in J_k$ tale che $B \subset 3B'$ per costruzione di J_k.
Osserviamo che come nel lemma precedente si può mostrare che $3B' \subset 4B_0$.
A questo punto possiamo scrivere:

$$|F_{k+1}| \leq \sum_{B' \in J_k} \left(\sum_{\substack{B \in J_{k+1} \\ B \subset 3B'}} |B| \right).$$

Vogliamo quindi stimare la percentuale di $3B'$ coperta dalle palle di $L_k = \{B \subset 3B' \mid B \in J_{k+1}\}$; per fare ciò abbiamo bisogno di un controllo dal basso dell'oscillazione delle medie:

$$\begin{aligned} |f_B - f_{3B'}| &\geq |f_B - f_{B'}| - |f_{B'} - f_{3B'}| \\ &\geq (k+1)T - (k+1/2)T - \|f\|_{BMO(3B')}\frac{|3B'|}{|B'|} \\ &\geq T/2 - C_1^2 = H. \end{aligned}$$

Per quanto imposto precedentemente è $H > 0$ e si avrà allora

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{B\in J_{k+1}\\ B\subset 3B'}} |B| &\leq \frac{1}{H}\sum_{\substack{B\in J_{k+1}\\ B\subset 3B'}} |B|\,|f_B - f_{3B'}| \\ &\leq \frac{1}{H}\sum_{\substack{B\in J_{k+1}\\ B\subset 3B'}} \left|\int_B (f(x) - f_{3B'})\,d\mu\right| \\ &\leq \int_{3B'} |f(x) - f_{3B'}|\,d\mu \leq \left|3B'\right|, \end{aligned}$$

e quindi per la regolarità di volume

$$\sum_{\substack{B\in J_{k+1}\\ B\subset 3B'}} |B| \leq \frac{C_1^2}{H}\left|B'\right|.$$

Ponendo $\mu = \frac{C_1^2}{H}$ si verifica facilmente che $\mu < 1$ e

$$|F_{k+1}| \leq \mu \sum_{B'\in J_k} \left|B'\right| = \mu\,|F_k|,$$

da cui per induzione

$$|F_k| \leq \mu^k\,|B_0| = e^{-k/C}\,|B_0|,$$

quindi

$$|D_k| \leq |E_k| \leq C_1^2\,|F_k| \leq C_1^2\ e^{-k/C}\,|B_0|,$$

ed infine

$$\begin{aligned} |\{x\in B_0 \mid f(x) > t\}| &\leq \left|\{x\in B_0 \mid f(x) > [\frac{t}{T}]T\}\right| \\ &\leq C_1^2\ e^{-[\frac{t}{T}]/C}\,|B_0| \leq C_1^2\ e^{1/C}e^{-t/(TC)}\,|B_0|. \end{aligned}$$

□

Otteniamo finalmente la proposizione che ci servirà in seguito.

corollario a john-niremberg **Corollario 3.1.6.** *Esistono due costanti universali α e β tali che*

$$\fint_B \exp(\alpha f(x)/\|f\|_{BMO(4B)})\, d\mu \cdot \fint_B \exp(-\alpha f(x)/\|f\|_{BMO(4B)})\, d\mu \leq \beta^2.$$

Dim Poniamo $\|f\| := \|f\|_{BMO(4B)}$ applichiamo il lemma di John-Niremberg alle funzioni $(f - f_B)/\|f\|$ e $(f_B - f)/\|f\|$: nel primo caso si ha

$$\int_B \exp(\alpha f(x)/\|f\|)\, d\mu = \exp(\alpha f_B/\|f\|) \left(\int_B \exp(\alpha(f(x) - f_B)/\|f\|)\, d\mu \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(\alpha f_B/\|f\|) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\{\exp(\alpha(f(x) - f_B)/\|f\|) > t\}|\, dt \right) \\
&= \exp(\alpha f_B/\|f\|) \left(\int_0^{+\infty} e^s \left| \{ \frac{\alpha(f(x) - f_B)}{\|f\|} > s\} \right| ds + |B| \right) \\
&\leq \exp(\alpha(f_B)/\|f\|) \left(C\,|B| \int_0^{+\infty} e^s e^{-s/(\alpha C)}\, ds + |B| \right) \\
&= C(\frac{1}{C\alpha} - 1 + \frac{1}{C}) \exp(\alpha f_B/\|f\|)\, |B|\,, \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

stima media positiva

avendo posto $\alpha < 1/C$. In maniera del tutto analoga otteniamo per la seconda funzione

$$\int_B \exp(-\alpha f(x)/\|f\|)\, d\mu \leq C(\frac{1}{\alpha C} - 1 + \frac{1}{C}) \exp(-\alpha f_B/\|f\|)\, |B|\,, \qquad (3.6)$$

stima media negativa

e moltiplicando membro a membro si ottiene l'enunciato scegliendo,

$$\alpha = 1/(2C), \qquad \beta = C + 1.$$

□

3.2 La norma BMO del logaritmo

Ci proponiamo ora di studiare la norma BMO del logaritmo delle soluzioni dell'equazione:

$$\int_G \mathbf{A}(x, u, Du) \cdot Dv - B(x, u, Du) v\, d\mu = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),\ v \geq 0, \qquad (3.7)$$

equazione

dove $\mathbf{A}$ e B sono dati dalle 2.41; per quanto gia' visto potremo quindi supporre che valgano per ogni $0 < \epsilon < 1$ le stime:

$$\begin{cases} Du \cdot \mathbf{A}(x,u,Du) \geq \|Du\|^2, \\ |\mathbf{A}(x,u,Du)(x,y)| \leq \Lambda \|Du\| \qquad (\Lambda \geq 1), \\ |\overline{u}B(x,u,Du)| \leq \epsilon \|Du\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\overline{a}\overline{u}^2. \end{cases} \tag{3.8}$$

stime

ottenute eventualmente dividendo l'equazione per λ e ove si è posto, come già visto:

$$\overline{u} = |u| + k\,, \quad \overline{a} = \|\mathbf{b}\|^2 + |c| + k^{-1}\,|f|\,, \tag{3.9}$$

definizione di a

per $k > 0$ fissato. Supporremo infine che valga l'ipotesi tecnica di positivita', giustificata nel primo capitolo:

$$\mathbf{a}([x,y]) + h\mathbf{b}(x,y) > 0, \qquad \forall x \sim y.$$

Applicheremo qui per la prima volta un metodo (che useremo estensivamente nei paragrafi successivi) per ottenere una diseguaglianza di tipo Caccioppoli; considerando nella (3.7) una funzione test opportuna, otterremo una stima per certi versi sorprendente della norma L^2 del gradiente del logaritmo in una palla. Per ottenere la diseguaglianza in questione sarà necessario avere a disposizione una regola di derivazione per funzioni composte; purtroppo non c'è alcuna speranza di ottenere una chain rule generale che valga nel discreto, come è facile intuire da semplici esempi. Fortunatamente, però, esaminando il comportamento di $D(f \circ u)$ potremo sfruttare due fatti:

1) Le funzioni f di cui avremo bisogno qui e nel seguito hanno buone proprietà di monotonia.

2) Il fatto che u sia soluzione di un'equazione di tipo positivo ci permette di avere una stima (brutale ma immediata) del rapporto $u(x)/u(y)$ per x e y adiacenti. Saremo quindi in grado di costruire diseguaglianza che costituiranno efficienti surrogati della Chain Rule per le soluzioni di (3.7).

Per comodità esporremo al riguardo in un unico lemma sia i risultati più urgentemente indispensabili che quelli utili solo nei paragrafi successivi. Attraverso la stima della norma L^2 di $D\log(u)$, potremo affermare che la norma BMO del logaritmo di una soluzione di (3.7) ha un limite superiore C, determinato unicamente dalla struttura dell'equazione. Notiamo fin da ora che sarà solamente in questo punto che utilizzeremo la diseguaglianza di Poincaré. Infine sfrutteremo il controllo sulla norma BMO per applicare il lemma di John-Niremberg, ottenendo un collegamento fondamentale fra media p-esima delle soluzioni e media $-p$-esima.

Tutti i risultati di questo paragrafo dipendono dalle ipotesi (3.1) e (3.2).
Da ora in poi useremo la notazione $\overline{u} = |u| + k$ e k indicherà sempre un numero positivo per cui valgono le stime (3.8).
Tutti i risultati di questo paragrafo non sono presenti in letteratura.

lemma tecnico

Lemma 3.2.1. *Sia $u > 0$ una soluzione di (3.7), $x \in G$ e $k > 0$. Esiste una costante $\theta > 0$, indipendente da k, tale che per ogni $y \sim x$ si ha $\overline{u}(x) \geq \theta \overline{u}(y)$ (si ricordi la (3.9).*

Dim Sia $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$\mathbf{a}([x,y]) + h\mathbf{b}(x,y) \geq \varepsilon_0,$$

Ricordando la forma esplicita (2.39) dell' equazione (3.7) si ha, (osservando che $c = c^+ - c^-$), che la u soddisfa in x l'equazione

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}Du) + \mathbf{b}Du - (c^- + 1 + \frac{f^-}{u})u = -(c^+ + 1 + f^+)u;$$

quindi, definendo $c' = c^- + 1 + f^- \geq 1$, che la $\overline{u}$ soddisfa in x l'equazione:

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}D\overline{u}) + \mathbf{b}D\overline{u} - c'\overline{u} + kc' \leq 0,$$

e quindi, a maggior ragione,

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}D\overline{u}) + \mathbf{b}D\overline{u} - c'\overline{u} \leq 0;$$

esplicitando ed utilizzando la definizione di ε_0 si ottiene allora:

$$\overline{u}(x)\left(c'(x) + \frac{1}{h^2}\sum_{y\sim x}\mathbf{a}([x,y]) + \frac{1}{h}\sum_{y\sim x}\mathbf{b}(x,y)\right) \geq \frac{1}{h^2}\varepsilon_0\overline{u}(y),$$

per ogni $y \sim x$. La tesi segue allora banalmente prendendo il massimo delle quantita' (positive) che moltiplicano $\overline{u}(x)$ nel membro a sinistra. □

processo di approssimazione

Osservazione 3.2.1. Notiamo che in un ipotetico processo di approssimazione la costante $\theta(|\mathbf{b}|, |c|, h)$ del lemma precedente ha un buon comporamento asintotico se $\mathbf{b}$ e c rimangono equilimitati:

$$\lim_{h\to 0^+}\theta(|\mathbf{b}|, |c|, h) = \frac{\lambda}{m\Lambda}.$$

Questa stima asintotica, però, vale più in generale, come vedremo dal prossimo esempio.

norma q mezzi **Esempio 3.2.2.** Consideriamo la successione di grafi $Q_n^N \hookrightarrow 1/n\mathbb{Z}^N$ data nell'esempio esempio quadrato 2.2.1. Considereremo su questi grafi la successione di equazioni alle differenze ellittici data da

$$\operatorname{div}(Du_n) = f_n,$$

con condizioni al bordo, ad esempio, nulle. Sia $f_n(x) = -c_n \delta_{(1/2,\dots,1/2)}(x)$ con n pari, (nel qual caso il punto $x_0 := (1/2, \dots, 1/2)$ appartiene al grafo) e $\{c_n\}$ successione di numeri positivi; dall'unicità della soluzione e dalla simmetria del grafo deduciamo facilmente che, per n pari, si ha

$$u(x_0) - u(x_0 \pm \frac{1}{n} e_i) = c_n \frac{1}{n^2},$$

per $i = 1 \dots, N$. Se vogliamo sperare di ottenere dei risultati di regolarità discreta una condizione necessaria sarà certamente che la quantità a destra sia infinitesima per $n \to \infty$.
Notiamo allora che l'elemento di volume naturale sul grafo è certamente $(1/n)^N$ e che, con questa misura, si ha:

$$\|f_n\|_q = c_n \left(\frac{1}{n}\right)^{N/q};$$

possiamo allora dire che la condizione che il termine $c_n \frac{1}{n^2}$ tenda a zero per $n \to \infty$ si traduce nel fatto che esista un $q > N/2$ per cui le norme L^q delle f_n siano equilimitate. Notiamo subito che la condizione di equilimitatezza delle $\|f_n\|_{L^{N/2}}$ non è sufficiente, come si vede considerando il caso $c_n = n^2$.

Supponiamo ora di voler approssimare un'equazione ellittica del tipo

$$\triangle u = f,$$

definita nel cubo unitario di $\mathbb{R}^N$, Q, con equzioni alle differenze del tipo precedente. Quel che è naturale fare è di associare ad f la successione di funzioni del grafo data da

$$f_n(x) = \fint_{D_n(x)} f,$$

dove $D_n(x) = \{y \mid |y_i - x_i| \leq 1/2n\}$, per $x \in G$. Si può dimostrare infatti che se $f \in L^q(Q)$, allora

$$\sum_{x \in G} \chi_{D_n(x)} f_n(x) \xrightarrow{L^q} f;$$

La condizione che le norme L^q delle f_n siano equilimitate è quindi compatibile con la condizione classica che il problema da approssimare sia tale che $f \in L^q$ per un qualche $q > N/2$. Viceversa, se $f \in L^q$ per $q > N/2$, allora, approssimando nella maniera descritta, si ha

$$f_n(x) = \fint_{D_n(x)} f\, dx \leq n^{N/q} \left(\int_{D_n(x)} |f|^q \right)^{1/q},$$

e quindi in particolare $f_n(x) n^{-2}$ è infinitesimo.

Diamo ora, una volta per tutte, un lemma che comprende anche diseguaglianze che ci saranno utili solo in seguito. Per comodità del lettore sottolineamo che gli unici risultati che sfrutteremo in questo paragrafo sono ai punti 1) e 3). I punti 2) e 3) non sono presenti in letteratura.

Proposizione 3.2.3. *(Chain rule)*
chain rule *Sia $u : G \to \mathbb{R}$ una funzione positiva e θ dato dal lemma* lemma tecnico *3.2.1.*

1. *Per ogni x, $y \in G$ si ha:*

$$|D(\log(u))(x,y)| \leq \left| (\frac{1}{u})^*(x,y) Du(x,y) \right|.$$

2. *Se u è una soluzione di* equazione *(3.7), per ogni $p > 0$ esistono costanti $c_1(p)$, $c_2(p,\theta)$ tali che per ogni $k > 0$, x, $y \in G$ si ha:*

$$c_1 \left| (pu^{p-1})^*(x,y) D\overline{u}(x,y) \right| \geq |D(\overline{u}^p)(x,y)| \geq c_2 \left| (p\overline{u}^{p-1})^*(x,y) D\overline{u}(x,y) \right|.$$

3. *Se u è una soluzione di* equazione *(3.7), per ogni $p < 0$ esistono costanti $c_3(p)$, $c_4(p,\theta)$ tali che per ogni $k > 0$, x, $y \in G$ si ha:*

$$c_3 \left| (p\overline{u}^{p-1})^*(x,y) D\overline{u}(x,y) \right| \geq |D(\overline{u}^p)(x,y)| \geq c_4 \left| (p\overline{u}^{p-1})^*(x,y) D\overline{u}(x,y) \right|.$$

Dim Osservando che le diseguaglianze sono banalmente verificate per $u(x) = u(y)$, trattandosi di valori assoluti possiamo supporre $u(x) < u(y)$ senza perdere in generalità.
1) Ponendo $t = u(y)/u(x)$, $t > 1$, si ha:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{u(y)} + \frac{1}{u(x)} \right) (u(y) - u(x)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + 1 \right) (t-1) \geq \log(t).$$

2) Basterà porre $s = \overline{u}(x)/\overline{u}(y) < 1$ e trovare limitazioni c_1 e c_2 tali che

$$c_1 \geq \frac{2}{p} \frac{1 - s^p}{(1 + s^{p-1})(1 - s)} \geq c_2 \quad \forall s \in [\theta, 1),$$

dove θ è dato dal lemma precedente. Osserviamo allora che un semplice calcolo mostra che la funzione da controllare ha limite finito per $t \to 1$, e quindi assume massimo e minimo finiti (e positivi).
3) Come al punto 2), ponendo $q = -p$, basta trovare c_3 e c_4 in maniera tale che

$$c_3 \geq \frac{2}{q} \frac{\frac{1}{s^q} - 1}{(1 + \frac{1}{s^{q+1}})(1 - s)} \geq c_4 \quad \forall s \in [\theta, 1).$$

Di nuovo la funzione è continua e limitata e quindi assume massimo e minimo positivi. □

costanti

Osservazione 3.2.2. Sarà utile dare una stima delle costanti che compaiono nel lemma precedente.
Per quel che riguarda il punto 2) la questione è piuttosto semplice per $p \geq 1$. Dopo aver minorato e maggiorato il termine $(1 + t^{p-1})$ con 1 e con 2 rispettivamente, ci riconduciamo a studiare gli estremi della funzione $f(s) := (1 - s^p)/(1 - s)$. Si ha, intanto, $f(0) = 1$ e $f(1) = p$.
Con semplici calcoli si vede che se f ha un punto critico interno x_c, con $f(x_c) = l$, allora:

$$p x_c^{p-1} = f(x_c) = l \quad e \quad l x_c (1 - \frac{1}{p}) = l - 1.$$

Quindi se $p \geq 1$ è $l \leq 1$ perciò l non può essere massimo. D'altro canto l non può essere minore di 1 e contemporaneamente positivo, quindi l non è minimo. In definitiva $\max_{[0,1]} f = p$ e $\min_{[0,1]} f = 1$.
Analizziamo ora il caso $0 \leq p \leq 1$. Innanzitutto si vede facilmente che $c_1 = 2/p$ va bene, perché:

$$1 - s^p \leq (1 + s^{p-1})(1 - s) = 1 - s^p + s^{p-1} - s \quad e \quad s \leq s^{p-1}$$

lemma tecnico

Il controllo su c_2 coinvolge il lemma 3.2.1: si deve infatti minorare il termine $(1 + t^{p-1})$ con $(1 + \theta^{p-1})$ (essendo $t \geq \theta$). Studiando ancora la funzione f di sopra si vede che se f assumesse in x_c minimo interno l sarebbe di nuovo $p x_c^{p-1} = f(x_c) = l$, ma per $p \leq 1$ è $l = p x_c^{p-1} \geq p$.
Passiamo ora al punto 3). Moltiplicando e dividendo per s^{p+1} ci riconduciamo a trovare delle stime del tipo

$$\alpha \frac{s^{q+1} + 1}{s} \leq f(s) \leq \beta \frac{s^{q+1} + 1}{s} \quad s \in [\theta, 1).$$

Osserviamo che si ha $2/\theta \geq (s^{q+1}+1)/s \geq 1$. Ci siamo così ricondotti alle stime precedenti.

Svolgendo i semplici calcoli indicati nell'osservazione precedente si ottengono delle stime precise, che raccoglieremo in un corollario a sé stante.

Corollario 3.2.4. *Le costanti c_1, c_2, c_3, c_4 della proposizione precedente sono date da:*

$$c_1(|p|) = c_3(|p|) = \begin{cases} 2 & se \ \ |p| \geq 1, \\ \dfrac{2}{|p|} & se \ \ |p| \leq 1. \end{cases}$$

e

$$c_2(|p|) = c_4(|p|) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{|p|} & se \ \ |p| \geq 1, \\ \theta & se \ \ |p| \leq 1. \end{cases}$$

dove θ è data dal lemma lemma tecnico *3.2.1*

$\square$

caccioppoli per il logaritmo

Lemma 3.2.5. *Sia $u > 0$ una soluzione di (*equazione *3.7) e sia $\eta \geq 0$ a supporto contenuto in $B \subset G$. Allora esiste una costante C dipendente solo dalla struttura di (*equazione *3.7) tale che, per ogni $k > 0$ fissato:*

$$\int_B \|\eta^* D \log(\overline{u})\|^2 \, d\mu \leq C \int_B \left(\overline{a}\eta^2 + \|D\eta\|^2\right) \, d\mu. \tag{3.10}$$

Caccioppoli per il logaritmo

Dim Consideriamo in (equazione 3.7) come funzione test $v = \eta^2 1/\overline{u}$. Avremo per la regola di Liebnitz

$$D(\eta^2) = 2\eta^* D\eta,$$

e quindi

$$-\int_B (\eta^2)^* D(\frac{1}{\overline{u}})\mathbf{a} \cdot D\overline{u} \, d\mu = 2\int_B (\frac{1}{\overline{u}})^* \eta^* D\eta \mathbf{a} \cdot D\overline{u} \, d\mu - \int_B \eta^2 \frac{1}{\overline{u}} B(x, \overline{u}, D\overline{u}) \, d\mu.$$

Osserviamo che per ogni $f \geq 0$ si ha $(f^*)^2 \leq (f^2)^*$ e che $f \leq 2f^*$; avremo quindi per la diseguaglianza di Young e sfruttando le (stime 3.8)

$$\begin{aligned} -\int_B (\eta^2)^* D(\frac{1}{\overline{u}}) \cdot D\overline{u} \, d\mu \quad &\leq \quad \Lambda \left(\int_B \delta \|(\frac{1}{\overline{u}})^* (\eta^2)^* D\overline{u}\|^2 \, d\mu + \frac{1}{\delta} \int_B \|D\eta\|^2 \, d\mu \right) + \\ &\quad + \int_B \eta^2 \frac{1}{\overline{u}^2} \, |\overline{u} B(x, \overline{u}, D\overline{u})| \, d\mu \\ &\leq \quad \Lambda(\delta + 4\epsilon) \int_B \|(\frac{1}{\overline{u}})^* (\eta^2)^* D\overline{u}\|^2 \, d\mu + \\ &\quad + \int_B \left(\frac{1}{\epsilon} \overline{a} \eta^2 + \frac{\Lambda}{\delta} \|D\eta\|^2 \right) \, d\mu, \end{aligned}$$

dove si è usato che $D(\overline{u}^{-1})(x,y)D\overline{u}(x,y) \leq 0$. Poiché per la proposizione chain rule 3.2.3, punto 1

$$(D(\log(\overline{u}))(x,y))^2 \leq (\frac{1}{\overline{u}}^*)^2(x,y)(D\overline{u}(x,y))^2,$$

il lemma sarà dimostrato se troveremo ϵ e δ in maniera tale che

$$-D(\frac{1}{\overline{u}}) \cdot D\overline{u} \geq 2\Lambda(\delta + 4\epsilon)\|(\frac{1}{\overline{u}})^* D\overline{u}\|^2,$$

e per la proposizione chain rule 3.2.3, punto 3), basterà scegliere ϵ e δ in maniera tale che $2\Lambda(\delta + 4\epsilon) \leq c_4(-1)$.
Con queste scelte si otterrà infatti

$$\begin{aligned}
\Lambda(\delta + 4\epsilon)\int_B \|\eta^* D\log(\overline{u})\|^2\, d\mu &\leq \Lambda(\delta + 4\epsilon)\int_B \|\eta^*(\frac{1}{\overline{u}})^* D\overline{u}\|^2\, d\mu \\
&\leq \int_B \Lambda(\delta + 4\epsilon)\|(\frac{1}{\overline{u}})^*(\eta^2)^* D\overline{u}\|^2 - \\
&\qquad -(\eta^2)^* D\frac{1}{\overline{u}} D\overline{u}\, d\mu \\
&\leq \int_B \left(\frac{1}{\epsilon}\overline{a}\eta^2 + \frac{\Lambda}{\delta}\|D\eta\|^2\right)\, d\mu.
\end{aligned}$$

Otteniamo quindi l'enunciato scegliendo, ad esempio, $\epsilon = \delta = c_4(-1)/10\Lambda$ e quindi, con semplici calcoli $C = 40\Lambda^2/(c_4(-1))^2$. □

Osservazione 3.2.3. Una più attenta analisi della dipendenza delle costanti dalla struttura dell'equazione (equazione 3.7) mostrerebbe che, essendo $c_4(-1) = \theta$, per h sufficientemente piccolo si avrà, (in base all'osservazione processo di approssimazione 3.2.1):

$$c_4 = \theta \geq \frac{1}{2m\Lambda}, \qquad C \leq 100m^2\Lambda^4.$$

norma BMO di logu

Corollario 3.2.6. *Sia u è una soluzione positiva di (equazione 3.7) in $2B \subset G$, $diam(G) \leq \infty$.Se $k > 0$, allora*

$$⨍_B |\log(\overline{u}) - \log(\overline{u})_B|\, d\mu \leq C, \tag{3.11}$$

norma BMO formula

dove $C = C(G, \Lambda, \mathbf{b}, c)$.

Dim Se $B = B(x_0, r)$, scegliamo η nella (Caccioppoli per il logaritmo 3.10) come

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B(x_0, r), \\ 1 - \frac{d(x,B)}{2r} & \text{se } x \in B(x_0, 2r) \setminus B(x_0, r), \\ 0 & \text{se } x \notin B(x_0, 2r). \end{cases} \tag{3.12}$$

funzione test

e notiamo che si ha

$$\eta \leq 1, \qquad \|D\eta\|^2 \leq \frac{m}{4r^2h^2}.$$

Sostituendo allora nella (Caccioppoli per il logaritmo 3.10) si ha

$$\begin{aligned}
\int_B |D\log(\overline{u})|^2 (x)\, d\mu &\leq 2\int_{2B} \|\eta^* D\log(\overline{u})\|^2(x)\, d\mu \\
&\leq C\int_{2B} \left(\overline{a}\eta + \|D\eta\|^2\right)\, d\mu \\
&\leq C\left(\|\overline{a}\|_{\delta/2}\left(\int_{2B}\eta^{2^*}\, d\mu\right)^{2/2^*} + \int_{2B}\|D\eta\|^2\, d\mu\right) \\
&\leq C(\|\overline{a}\|_{\delta/2}+1)\left(\int_{2B}\frac{\eta^2}{h^2r^2}\, d\mu + \int_{2B}\|D\eta\|^2\, d\mu\right) \\
&\leq Cm(\|\overline{a}\|_{\delta/2}+1)\frac{|B|}{h^2r^2},
\end{aligned}$$

dove si è fatto uso dell'ipotesi (ipotesi sobolev 3.3). Completiamo la dimostrazione osservando che per la diseguaglianza di Poincarè si ha

$$\begin{aligned}
⨍_B |\log(\overline{u}) - \log(\overline{u})_B|\, d\mu &\leq \left(⨍_B |\log(\overline{u}) - \log(\overline{u})_B|^2\, d\mu\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{|B|^{1/2}}\left(C_2 r^2 h^2 \int_B |D\log(\overline{u})|^2\, d\mu\right)^{1/2} \\
&\leq Cm^{1/2}(\|\overline{a}\|_{\delta/2}+1)^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

costante per BMO

Osservazione 3.2.4. La costante del corollario precedente ha un buon comportamento asintotico per $h \to 0$. Supponiamo infatti di voler discretizzare un'equazione differenziale ellittica in un dominio limitato Ω tramite una successione di equazioni del tipo (equazione 3.7) definite su grafi G_{h_n}: i grafi G_{h_n} saranno allora grafi "immersi" in Ω e vedremo che è possibile costruirli in maniera tale che il fattore m rimanga limitato; vedremo inoltre che il termine $\|\overline{a}_h\|_{\delta/2}$ convergerà al termine $\|\overline{a}\|_{\delta/2}$, dove $\overline{a}$ è il termine corripondente dell'equazione che si vuole approssimare.

Osservazione 3.2.5. La dimostrazione del corollario norma BMO di logu 3.2.6 si sarebbe potuta portare a termine anche considerando altri tipi di diseguaglianze di Poincaré: in particolare se vale la p,q-diseguaglianza di Poincaré, con $1 \leq q \leq p \leq 2$

$$\left(⨍_B |f - f_B|^q\, d\mu\right)^{1/q} \leq C_{p,q}hr\left(⨍_B |Df|^p\, d\mu\right)^{1/p} \qquad \forall B = B(x,r),$$

allora

$$\begin{aligned}
\fint_B |\log(\overline{u}) - \log(\overline{u})_B| \, d\mu &\leq \left(\fint_B |\log(\overline{u}) - \log(\overline{u})_B|^q \, d\mu \right)^{1/q} \\
&\leq C_{p,q} hr \left(\fint_B |D \log(\overline{u})|^p \, d\mu \right)^{1/p} \\
&\leq \frac{C_{p,q} hr}{|B|^{1/2}} \left(\int_B |D \log(\overline{u})|^2 \, d\mu \right)^{1/2} \\
&\leq C_{p,q} C C m^{1/2} (\|\overline{a}\|_{\delta/2} + 1)^{1/2}.
\end{aligned}$$

È inoltre facile vedere che la dimostrazione si può portare a termine anche utilizzando diseguaglianze di Poincaré (o di Sobolev-Poincaré) deboli: in queste diseguaglianze la derivata viene integrata su di un supporto più grande $\sigma B \supset B$, con $\sigma \geq 1$ fissato indipendentemente dalla palla B.

collegamento fra p e -p

Corollario 3.2.7. *Sia u una soluzione positiva di (3.7) in $4B \subset G$; allora esistono due costanti $\tilde{p} > 0$, $\tilde{C}$ dipendenti solo dalla struttura di (3.7) e dal grafo G tali che, per ogni $k > 0$*

$$\left(\fint_B \overline{u}^{\tilde{p}} \, d\mu \right)^{1/\tilde{p}} \leq \tilde{C} \left(\fint_B \overline{u}^{-\tilde{p}} \, d\mu \right)^{-1/\tilde{p}}.$$

Dim Applicando il corollario 3.1.6 alla funzione $\log(u)$ si ha

$$\fint_B \overline{u}^{\alpha/\|\log(\overline{u})\|_{BMO(4B)}} \, d\mu \fint_B \overline{u}^{-\alpha/\|\log(\overline{u})\|_{BMO(4B)}} \, d\mu \leq \beta^2.$$

Ma per il corollario precedente $\|\log(\overline{u})\|_{BMO(4B)} \leq C$; quindi, ponendo $\tilde{p} = \alpha/C$ e $\tilde{q} = \alpha/\|\log(\overline{u})\|_{BMO(4B)}$, si ha $\tilde{p} \leq \tilde{q}$; perciò per la diseguaglianza di Hölder

$$\left(\fint_B \overline{u}^{\pm\tilde{p}} \, d\mu \right)^{1/\tilde{p}} \leq \left(\fint_B \overline{u}^{\pm\tilde{q}} \, d\mu \right)^{1/\tilde{q}},$$

e quindi, moltiplicando membro a membro, si ottiene infine

$$\left(\fint_B \overline{u}^{\tilde{p}} \, d\mu \right)^{1/\tilde{p}} \left(\fint_B \overline{u}^{\pm\tilde{p}} \, d\mu \right)^{1/\tilde{p}} \leq \beta^{2/\tilde{p}}.$$

□

costante per BMO di logu

Osservazione 3.2.6. La costante $\tilde{C}$ del corollario precedente ha una dipendenza esponenziale in Λ/λ. Esplicitando i conti si ha infatti, in base all'osservazione 3.2.4:

$$\beta^{2/\tilde{p}} \leq K(G) e^{K(G)\Lambda \|\overline{a}\|_{\delta/2}{}^{1/2}},$$

dove $K(G)$ è una costante che dipende solo dalla geometria del grafo G.

3.3 I principi del massimo locali

In questo paragrafo dimostreremo la diseguaglianza di Harnack per le soluzioni u di (3.7). Il percorso che seguiremo sarà il seguente:

1) Otterremo una diseguaglianza di tipo Caccioppoli per le potenze di u; con diseguaglianza di tipo Caccioppoli indendiamo una stima della norma $L^2(B_r)$ della derivata in temini della norma $L^2(B_{\sigma r})$ e di $\sigma > 1$. È questa la fondamentale caratteristica delle soluzioni di equazioni ellittiche.

2) Avendo a disposizione la diseguaglianza di Sobolev potremo quindi utilizzare il punto 1) per avviare un processo iterativo: per la diseguaglianza di Sobolev, la norma $L^{2^*}(B_r)$ di u^p è controllata dalla norma $L^2(B_{\sigma r})$ della derivata; ma quest'ultima e a sua volta controllata dalla norma $L^2(B_{\sigma^2 r})$ per il punto 1). Essendo $2^* = \gamma 2$, con $\gamma > 1$, avremo quindi

$$\|u\|_{L^{\gamma p}(B_{\sigma r})} \leq C(\sigma)\|u\|_{L^p(B_r)}.$$

3) Iterando il processo si avrà che la media γ^k-esima di u si controlla con la sua media $\tilde{p}$-esima (per $\tilde{p}$ fissato a priori). Sfruttando la regolarita di volume, vedremo che per un k sufficentemente grande questo dà una stima dell'estremo superiore di u in termini della sua media $\tilde{p}$-esima. Analogo discorso si può naturalmente fare per l'estremo inferiore, che sarà controllato dal basso con la media $-\tilde{p}$-esima.

Per tutto il paragrafo supporremo allora che valga una 2-diseguaglianza di Sobolev del tipo dato dalla (2.12). Inoltre continueremo ad utilizzare le convenzioni esposte all'inizio del paragrafo precedente.

Lemma 3.3.1. *(Diseguaglianza di Caccioppoli)*
Sia $\beta \neq 0, -1$, u soluzione positiva dell'equazione (3.7). Allora se $\eta \geq 0$ è a supporto nella palla $B \subset G$ si ha, per ogni $k > 0$

$$\int_B \|\eta^* D\overline{u}^\beta\|^2 \, d\mu \leq C(|\beta|) \int_B (\overline{a}\eta^2 + \|D\eta\|^2)\|(\overline{u}^\beta)^*\|^2 \, d\mu. \tag{3.13}$$

Dim Procederemo in maniera analoga alla dimostrazione del lemma 3.2.5. Consideriamo come funzione test nella (3.7)

$$v = \eta^2 \overline{u}^p, \qquad p = 2\beta - 1.$$

Sostituendo, si avrà

$$\int_B \big((\eta^2)^* D(\overline{u}^p)\mathbf{a}D\overline{u}\, d\mu + 2(\overline{u}^p)^*\eta^* D\eta\mathbf{a}D\overline{u}\, d\mu. - \eta^2\overline{u}^p B(x,u,Du)\big)\, d\mu = 0$$

Utilizziamo il fatto genarale

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}\cdot\mathbb{G}fg^*(x) &= \frac{1}{4}\left(\sum_{x\sim y}\mathbb{F}(x,y)\mathbb{G}(x,y)f(x)g(x)+\sum_{x\sim y}\mathbb{F}(x,y)\mathbb{G}(x,y)f(y)g(y)\right)\\
&\le \frac{1}{8}\Bigg(\sum_{x\sim y}\delta(\mathbb{F}(x,y)f(x))^2+\frac{1}{\delta}(\mathbb{G}(x,y)g(x))^2+\\
&\qquad +\sum_{x\sim y}\delta(\mathbb{F}(x,y)f(y))^2+\frac{1}{\delta}(\mathbb{G}(x,y)g(y))^2\Bigg)\\
&\le \frac{\delta}{2}\sum_{x\sim y}(\mathbb{F}f^*(x,y))^2+\frac{1}{2\delta}\sum_{x\sim y}(\mathbb{G}g^*(x,y))^2\\
&= \delta\|\mathbb{F}f^*\|^2(x)+\frac{1}{\delta}\|\mathbb{G}g^*\|^2(x),
\end{aligned}$$

per qualunque coppia di campi vettoriali $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ e funzioni non negative f, g (si è sfruttato che $(f^2)^*\le 2(f^*)^2$ se $f\ge 0$).
Otteniamo allora, ponendo $\mathbb{F}=\eta^*D\overline{u}$, $\mathbb{G}=D\eta$, $f=\overline{u}^{(p-1)/2}$, $g=\overline{u}^{(p+1)/2}$

$$\begin{aligned}
\int_B(\eta^2)^*D(\overline{u}^p)\cdot D\overline{u}\,d\mu &\le \Lambda\Bigg(\int_B\delta\|(\overline{u}^{(p-1)/2})^*\eta^*D\overline{u}\|^2\,d\mu+\\
&\qquad +\frac{1}{\delta}\int_B\|(\overline{u}^{(p+1)/2})^*D\eta\|^2\,d\mu\Bigg)+\\
&\qquad +\int_B\eta^2\overline{u}^{p-1}\left|\overline{u}B(x,u,Du)\right|\,d\mu,
\end{aligned}$$

se $p>0$ e u è una soprasoluzione.
Analogamente se è $p<0$, (nel qual caso $D(\overline{u}^p)\cdot D\overline{u}\le 0$), e u è una sottosoluzione, si ha:

$$\begin{aligned}
-\int_B(\eta^2)^*D(\overline{u}^p)\cdot D\overline{u}\,d\mu &\le \Lambda\Bigg(\int_B\delta\|(\overline{u}^{(p-1)/2})^*\eta^*D\overline{u}\|^2\,d\mu+\\
&\qquad +\frac{1}{\delta}\int_B\|(\overline{u}^{(p+1)/2})^*D\eta\|^2\,d\mu\Bigg)+\\
&\qquad +\int_B\eta^2\overline{u}^{p-1}\left|\overline{u}B(x,u,Du)\right|\,d\mu.
\end{aligned}$$

Osserviamo che per ogni funzione $f\ge 0$, si ha

$$f(x)\le 2f^*(x,y)\le 2((f^{1/2})^*(x,y))^2,$$

e quindi $f \leq 2\|(f^{1/2})^*\|^2$.
Usando le stime (3.8) e la chain rule risulta perciò:

$$
\begin{aligned}
{c_{2,4}}^2(|p|)\int_B \|\eta^*(\overline{u}^{(p-1)/2})^* D\overline{u}\|^2\,d\mu &\leq \pm\int_B (\eta^2)^* D(\overline{u}^p)\cdot D\overline{u}\,d\mu\\
&\leq \Lambda\biggl(\int_B \delta\|\eta^*(\overline{u}^{(p-1)/2})^* D\overline{u}\|^2\,d\mu +\\
&\quad +\frac{1}{\delta}\int_B \|(\overline{u}^{(p+1)/2})^* D\eta\|^2\,d\mu\biggr)+\\
&\quad +\int_B \eta^2(\overline{u})^{p-1}\epsilon\|D\overline{u}\|^2+\frac{1}{\epsilon}\eta^2\overline{a}\overline{u}^{p+1}\,d\mu\\
&\leq (\Lambda\delta+16\epsilon)\int_B \|\eta^*(\overline{u}^{\beta-1})^* D\overline{u}\|^2\,d\mu +\\
&\quad +\int_B\left(\frac{\Lambda}{\delta}\|D\eta\|^2+\frac{2}{\epsilon}\overline{a}\eta^2\right)\|(\overline{u}^\beta)^*\|^2\,d\mu,
\end{aligned}
$$

(ricordando che $\beta = (p+1)/2$); scegliendo ϵ e δ in maniera opportuna si ha

$$
\int_B \|\eta^*(\overline{u}^{\beta-1})^* D\overline{u}\|^2\,d\mu \leq C\int_B \left(\|D\eta\|^2+\overline{a}\eta^2\right)\|(\overline{u}^\beta)^*\|^2\,d\mu,
$$

dove $C = K(\Lambda/c(\pm|p|))^2$. Applicando ancora la chain rule concludiamo che

$$
{c_{1,3}}^2(p)\int_B \|\eta^* D(\overline{u}^\beta)\|^2\,d\mu \leq C\int_B \left(\|D\eta\|^2+\overline{a}\eta^2\right)\|(\overline{u}^\beta)^*\|^2\,d\mu.
$$

□

Caccioppoli per -1

Osservazione 3.3.1. Il caso $\beta = -1$ nel lemma è stato in realtà già trattato nel lemma (3.2.5). Questo infatti è l'unico caso per cui $(s^{\beta+1})' = (\beta+1)s^\beta$.

costante caccioppoli

Osservazione 3.3.2. Utilizzando il corollario 3.2.2 si può valutare la dipendenza della costante del lemma precedente. Si ottiene pertanto che, per h sufficientemente piccolo,

$$
C(|\beta|) = \begin{cases} \tilde{C}\,|\beta|^2 & \text{se } |\beta| > 1,\\ \tilde{C}\,|\beta|^{-2} & \text{se } |\beta| < 1. \end{cases}
$$

Ci proponiamo ora di dare un lemma tecnico che ci permetta di controllare l'estremo superiore di una funzione f con la sua media p-esima. Nel caso della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ questo non è in generale possibile, ma il fatto che la misura sul grafo sia discreta ci permetterà di controllare $\max f$ con una media sufficientemente alta; notiamo che il "sufficientemente" dipende unicamente dal diametro dell'insieme sul quale si vuole il controllo.

lemma tecnico 3

Lemma 3.3.2. *Per ogni $r > 0$ esiste una costante $\tilde{q}(r) > 0$ tale che*

1. *Per ogni f, $B = B(x,r) \subset G$*

$$\left(\fint_B f^{\tilde{q}} \, d\mu \right)^{1/\tilde{q}} \geq C \max_B f.$$

2. *Per ogni $f > 0$, $B = B(x,r) \subset G$*

$$\left(\fint_B f^{-\tilde{q}} \, d\mu \right)^{-1/\tilde{q}} \leq C \min_B f.$$

Inoltre $\tilde{q}$ ha un andamento logaritmico con il raggio.

Dim Essendo $\min f^{-1} = (\max f)^{-1}$ basta dimostrare il punto 1). Sia allora $i = i(r)$ tale che $2^{i-1} \leq r \leq 2^i$; allora

$$|B(x,r)| \leq \left|B(x,2^i)\right| \leq C_1 \left|B(x,2^{i-1})\right| \leq \cdots \leq C_1^i \, |B(x,1)| \leq C_1^i m h^{\delta},$$

(dove δ è dato dal lemma lemma tecnico 2 3.1.1. E quindi, per $\tilde{q}(r) \geq i(r)$,

$$\left(\fint_B f^{\tilde{q}} \, d\mu \right)^{1/\tilde{q}} \geq h^{\delta/\tilde{q}} \max_B f \, |B|^{-1/\tilde{q}} \geq \max_B f C_1^{-1} m^{1/i},$$

ottenendo l'enunciato del teorema. □

Sia $\delta > 2$ la dimensione isoperimetrica del grafo G, e $q' > \delta$. Nel seguito porremo:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q'} + \frac{1}{\delta} \right). \tag{3.14}$$

media armonica

Notiamo che così facendo si ha

$$\delta < q < q', \qquad \mu := \delta \left(\frac{2}{q} - \frac{2}{q'} \right) = 1 - \frac{\delta}{q'}. \tag{3.15}$$

conseguenze media armonica

Porremo inoltre:

$$k = k(x,r) = (hr)^{\mu} \|f\|_{L^{q'}(B(x,r))}. \tag{3.16}$$

definizione di k

dipendenza di p

Osservazione 3.3.3. Osserviamo che $\|\overline{a}\|_{L^{q/2}(B(x,r))}$ non dipende da f, ma solamente da $\mathbf{b}$, Λ e da c; infatti il termine dipendente da f si può minorare, (ricordando le (definizione di a 3.9)), nella maniera seguente:

$$\frac{1}{k(x,r)} \|f\|_{L^{q}(B(x,r))} \leq \frac{1}{k(x,r)} \|f\|_{L^{q'}(B(x,r))} \, |B|^{2/q - 2/q'} \leq C,$$

dove si è sfruttata la (3.15) ed il fatto che $|B(x,r)| \leq C(hr)^{\delta}$.
Utilizzando l'ipotesi di regolarità di volume, possiamo allora raffinare l'osservazione 3.2.6, esplicitando la dipendenza di $\tilde{p}$ dal raggio. Trascurando costanti moltiplicative che dipendono unicamente dalla geometria del grafo o dalla struttura dell'operatore in (3.7), in base alla dimostrazione del corollario 3.2.7, si ha che

$$\frac{1}{\tilde{p}} \leq C\|\overline{a}\|_{L^{q/2}(B(x,r))} |B(x,r)|^{2/\delta - 2/q'} \leq C(hr)^{\mu}.$$

principio del massimo

Teorema 3.3.3. *(Principio di massimo locale)*
Sia u una soluzione positiva dell'equazione (3.7) in G. Allora per ogni $\tilde{p}$ fissato, esistono due costanti $C = C(\Lambda, \mathbf{b}, c, G)$ e $\tau = \tau(\Lambda, \mathbf{b}, c, G)$ per cui, se $B(x, \tau r) \subset G$ allora

$$\max_{B(x,r)} u \leq C \left(\fint_{B(x,\tau r)} u^{\tilde{p}} \, d\mu \right)^{1/\tilde{p}} + Ck(x,r).$$

dove k è dato dalla (3.16).

Dim Utilizzeremo il lemma 3.3.1 con una funzione test a supporto in $B = B(x,R)$ del tipo di quella data dalla (3.12). Osserviamo che per ogni $\mathbb{F}$ vale che

$$|\mathbb{F}| \leq m\|\mathbb{F}\|.$$

Poniamo $v = \overline{u}^{\beta}$. Per la diseguaglianza di Sobolev e quella di Young, si ha

$$\begin{aligned}
\left(\int_B |\eta v|^{2^*} \, d\mu \right)^{2/2^*} &\leq C \left(\int_B |D(\eta v)|^2 \, d\mu + \int_B \frac{|\eta v|^2}{h^2 R^2} \, d\mu \right) \\
&\leq C \int_B \|\eta^* Dv\|^2 + \|v^* D\eta\|^2 + \frac{|\eta v|^2}{h^2 R^2} \, d\mu.
\end{aligned}$$

Applicando la diseguaglianza di Caccioppoli (3.13):

$$\left(\int_B |\eta v|^{2^*} d\mu \right)^{2/2^*} \leq C(\beta) \left(\int_B (\overline{a}\eta^2 + \|D\eta\|^2)\|v^*\|^2 + \frac{|\eta v|^2}{h^2 R^2} d\mu \right)$$

Utilizzando la diseguaglianza di Hölder e quella di interpolazione,

$$\begin{aligned}
\int_B \overline{a}(\eta v)^2 d\mu &\leq \left(\int_B \overline{a}^{\frac{q}{2}} \, d\mu \right)^{\frac{2}{q}} \left(\int_B (\eta v)^{\frac{2q}{(q-2)}} \, d\mu \right)^{\frac{(q-2)}{q}} \\
&\leq \left(\int_B \overline{a}^{\frac{q}{2}} d\mu \right)^{\frac{2}{q}} \left(\epsilon \left(\int_B (\eta v)^{2^*} d\mu \right)^{\frac{1}{2^*}} + \frac{1}{\epsilon^{\sigma}} \left(\int_B (\eta v)^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2,
\end{aligned}$$

per $2 < 2q/(q-2) < 2^*$ e $\sigma = -q^*/q$. Maggiorando $(a+b)^2$ con $2(a^2+b^2)$ nella precedente diseguaglianza, si ottiene infine

$$\begin{aligned}\left(\int_B |\eta v|^{2^*}\, d\mu\right)^{2/2^*} \quad &\leq \quad C(|\beta|)\epsilon^{-2\sigma}\|\overline{a}\|_{L^{q/2}} \int_B (\eta^2 + \frac{\eta}{h^2R^2} + \|D\eta\|^2)\|v^*\|^2\, d\mu + \\ &+C(|\beta|)\epsilon^2\|\overline{a}\|_{L^{q/2}} \left(\int_B |\eta v|^{2^*}\ d\mu\right)^{2/2^*}.\end{aligned}$$

Per l'osservazione dipendenza di p 3.3.3, il termine $\|\overline{a}\|_{L^{q/2}(B(x,r))}$ non dipende da f, ma solamente da $\mathbf{b}$, Λ e da c. Scegliendo allora

$$\epsilon^2 C(|\beta|)\|\overline{a}\|_{L^{q/2}} = \frac{1}{2},$$

si otterrà infine

$$\|\eta v\|^2_{L^{2^*}} \leq C(|\beta|)^{\sigma+1}\|\overline{a}\|^{\sigma+1}_{L^{q/2}} \int_B (\eta^2 + \frac{\eta^2}{h^2R^2}\|D\eta\|^2)\|v^*\|^2\, d\mu. \qquad (3.17) \quad \boxed{\texttt{iterazione 1}}$$

Notiamo che $\sigma \to +\infty$ per $q \to \delta$. Specifichiamo ora la funzione test η ponendo, come in (funzione test 3.12) $R = r + s$ e

$$\eta(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in B(x,r), \\ 1 - \frac{d(y,B)}{s} & \text{se } y \in B(x,r+s) \setminus B(x,r), \\ 0 & \text{se } y \notin B(x,r+s). \end{cases}$$

Si avrá allora

$$\eta^2 + \frac{\eta^2}{h^2(r+s)^2} + \|D\eta\| \leq \frac{C}{h^2s^2}.$$

Poniamo

$$\delta = \frac{22^*}{2^*-2}\,, \qquad \chi = \frac{\delta}{\delta-2} > 1,$$

sotto la condizione $2^* > 2$; si avrá, con queste notazioni, $2^* = 2\chi$, perció sostituendo nella (iterazione 1 3.17) e ponendo $2\beta = p$, si ottiene

$$\|\overline{u}\|_{L^{p\chi}(B(r))} \leq \left(\frac{C(p,\Lambda,\mathbf{b},c,\sigma)}{h^2s^2}\right)^{1/p} \|\overline{u}\|_{L^p(B(r+s))}, \qquad (3.18) \quad \boxed{\texttt{iterazione 2}}$$

sfruttando il fatto, già utilizzato nella dimostrazione del Teorema sobolev 2.12, che

$$\int_B \|f^*\|^p\, d\mu \leq 2m \int_B |f|^p\ d\mu.$$

Riscriviamo la (3.18) in forma adimensionale

$$\left(\fint_{B(r)} \overline{u}^{p\chi}\, d\mu\right)^{1/p\chi} \leq \left(\frac{C(p)}{h^2 s^2}\right)^{1/p} \frac{|B(r+s)|^{1/p}}{|B(r)|^{1/p\chi}} \left(\fint_{B(r+s)} \overline{u}^{p}\, d\mu\right)^{1/p}.$$

Utilizziamo allora il Lemma 3.1.1 per stimare la quantità $\frac{|B(r+s)|^{1/p}}{|B(r)|^{1/p\chi}}$:

$$\frac{|B(r+s)|^{1/p\chi}}{|B(r)|^{1/p\chi}}\,|B(r+s)|^{1/p-1/p\chi} \leq C_1^2(1+\frac{s}{r})^{\delta/p\chi}\,|B(r+s)|^{2/p\delta}.$$

Ma, sempre dal Lemma 3.1.1,

$$|B(r+s)|^{2/p\delta} \leq C_1^2(h(r+s))^{2/p}.$$

In conclusione, ricordando che $\delta/p\chi = \delta/p - 2/p$, la (3.18) si può riscrivere nella forma:

$$\left(\fint_{B(r)} \overline{u}^{p\chi}\, d\mu\right)^{1/p\chi} \leq C(p)(1+\frac{s}{r})^{\delta/p}(\frac{r}{s})^{2/p} \left(\fint_{B(r+s)} \overline{u}^{p}\, d\mu\right)^{1/p}. \tag{3.19}$$

iterazione 3

Siamo ora in grado di iniziare il processo di iterazione.
Possiamo supporre, senza perdere in generalità, che $r = 2^n$, $n \geq 1$. Fissato $\tilde{p}$ dovremo cercare di iterare la diseguaglianza precedente un numero sufficiente di volte in maniera tale da poter applicare il Lemma 3.3.2. In particolare il numero di iterazioni N dovrà essere tale che $\chi^N\tilde{p} \geq n+1$, per via dell'andamento logaritmico affermato nell'enunciato del lemma. Scegliamo

$$\chi^N\tilde{p} = 2n, \qquad N = \log(2n/\tilde{p})/\log(\chi), \tag{3.20}$$

N

e definiamo

$$B_i = B(r_i), \quad r = r_1 \leq r_2 \cdots \leq r_N, \quad r_j \geq s_j = r_{j+1} - r_j, \quad j \geq 1.$$

Avremo allora, (per il Lemma 3.3.2 e la (3.19) iterata), la catena di diseguaglianze

$$\begin{aligned} C_1 \max_{B(r)} \overline{u} &\leq \left(\fint_{B_1} \overline{u}^{\tilde{q}}\, d\mu\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}} \leq \left(\fint_{B_1} \overline{u}^{\tilde{p}\chi^N}\, d\mu\right)^{\frac{1}{\tilde{p}\chi^N}} \\ &\leq \left(C(\tilde{p}\chi^{N-1})(1+\frac{s_1}{r_1})\right)^{\frac{\delta}{\tilde{p}\chi^{N-1}}} (\frac{r_1}{s_1})^{\frac{2}{\tilde{p}\chi^{N-1}}} \left(\fint_{B_2} \overline{u}^{\tilde{p}\chi^{N-1}} d\mu\right)^{\frac{1}{\tilde{p}\chi^{N-1}}} \leq \\ \ldots &\leq \prod_{j=1}^{N-1} \left(2C(\tilde{p}\chi^{N-j})\right)^{\frac{\delta}{\tilde{p}\chi^{N-j}}} (\frac{r_j}{s_j})^{\frac{2}{\tilde{p}\chi^{N-j}}} \left(\fint_{B_N} \overline{u}^{\tilde{p}} d\mu\right)^{1/\tilde{p}}, \end{aligned}$$

perché $s_j/r_j \leq 1$, (si è evidenziata solamente la dipendenza da p nella costante, sottintendendo quella dalla struttura dell'equazione).
Il teorema sarà quindi dimostrato determinando gli s_j in maniera tale da poter stimare opportunamente la produttoria. Definiamo ad esempio, per $N > j \geq 1$

$$r_j = 2^n + 2^{j-1}\,; \quad s_j = 2^{j-1}\,; \quad \frac{r_j}{s_j} \leq 4 \cdot 2^{n-j}.$$

Allora si avrà

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{N-1} \left(\frac{r_j}{s_j}\right)^{2/\tilde{p}\chi^{N-j}} &\leq \prod_{j=1}^{N-1} \left(4 \cdot 2^{n-j}\right)^{2/\tilde{p}\chi^{N-j}} \\ &\leq 4^{2\chi/\tilde{p}(\chi-1)} \prod_{j=1}^{N-1} \left(2^{N-j}\right)^{2/\tilde{p}\chi^{N-j}}.\end{aligned}$$

Prendendo il logaritmo della produttoria si vede che quest'ultima rimane limitata, essendo in generale

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{\chi^j} \leq S.$$

Per lo stesso motivo resta limitato il termine

$$\prod_{j=1}^{N-1} \left(2C(\tilde{p}\chi^{N-j}))\right)^{\frac{\delta}{\tilde{p}\chi^{N-j}}},$$

in quanto, per l'Osservazione 3.3.2 e la (3.17), l'andamento della costante C si stima come $C(\tilde{p}\chi^{N-j}) \approx K\chi^{\alpha(N-j)}$.
Passiamo ora alla stima della costante $\tau = r_N/r_0$. Ricordando l'Osservazione 3.3.3 e la (3.20), si ha la stima

$$\tau = 1 + 2^{N-n-1} \leq 1 + \frac{1}{2}\exp\left(c(\frac{\log(2n/\tilde{p})}{\log(\chi)} - n)\right) \leq 1 + C\tilde{p}^{-C},$$

per una qualche costante numerica $C \geq 1$. In conclusione τ può essere scelto indipendentemente da x e da r, e con tale scelta si ha

$$\max_{B(x,r)} \overline{u} \leq C \left(⨍_{B(x,\tau r)} \overline{u}^{\tilde{p}}\, d\mu\right)^{1/\tilde{p}}, \qquad (3.21)$$

quindi, a maggior ragione,

$$\max_{B(x,r)} u \leq \max_{B(x,r)} \overline{u} \leq C \left(\fint_{B(x,\tau r)} u^{\tilde{p}} \, d\mu \right)^{1/\tilde{p}} + Ck(x,r),$$

e la dimostrazione è conclusa.

$\square$

Parallelamente si può dimostrare l'analogo del teorema precedente per la funzione $1/u$, ottenendo in questo modo una stima integrale dal basso dell'estremo inferiore. Vista l'analogia con la dimostrazione precedente daremo solo una traccia della dimostrazione.

principio del massimo 2 **Teorema 3.3.4.** *Sia u una soluzione positiva dell'equazione (3.7) in G e sia k dato dalla (3.16). Allora per ogni $\tilde{p}$ fissato, esistono due costanti C e τ, (con le stesse dipendenze del teorema precedente), per cui, se $B(x,\tau r) \subset G$, allora*

$$\min_{B(x,r)} \overline{u} \geq C \left(\fint_{B(x,\tau r)} \overline{u}^{-\tilde{p}} \, d\mu \right)^{-1/\tilde{p}} .$$

Dim Si procede come nella dimostrazione precedente sruttando però la diseguaglianza di Caccioppoli nel caso $\beta < 0$ ed usando la stessa funzione test. Si ottiene in tal modo la stima (3.19) per la funzione $\overline{u}^{-1}$ e per ogni $p > 0$, $p \neq 2$, perché il lemma di Caccioppoli vale solo per $\beta \neq 0, -1$ e $p = 2\,|\beta|$ (v. osservazione 3.3.1). Si può quindi inziare il processo di iterazione a costo di diminuire leggermente $\tilde{p}$ in maniera tale che $\tilde{p}\chi^j \neq 1$ per $j = 1, \ldots, N$. Imponendo le stesse condizioni sul rapporto r_i/s_i e osservando che la costante $C(p)$ ha ancora un andamento polinomiale, si ottiene ancora la stima (3.21) del teorema precedente per $\overline{u}^{-1}$. Osservando infine che $\max \overline{u}^{-1} = (\min \overline{u})^{-1}$, si conclude elevando ambo i membri della diseguaglianza alla -1. $\square$

Osservazione 3.3.4. Osserviamo che il teorema 3.3.3 è valido sotto l'ipotesi più debole che u sia una soprasoluzione dell'equazione. Questo discende dal fatto che la chain rule si può applicare attraverso il lemma 3.2.1, che è valido in generale per le soprasoluzioni positive (o per le sottosoluzioni negative). Analogo osservazione è stata fatta durante la dimostrazione della diseguaglianza di Caccioppoli.

3.4 La diseguaglianza di Harnack e l'Hölderianità discreta

In questo paragrafo dimostreremo finalmente la diseguaglianza di Harnack per le soluzioni di equazioni ellittiche senza il termine noto. Utilizzando quest'ultima otterremo in maniera standard l'Holderianità discreta di soluzioni di equazioni ellittiche generiche.

Per tutto il paragrafo useremo la notazione:

$$\mathbb{L}(u) = \operatorname{div}(\mathbf{a}Du) + \mathbf{b}Du + cu.$$

Teorema 3.4.1. *(Diseguaglianza di Harnack)*

DH *Sia u una soluzione positiva in $\mathring{G}$ dell'equazione $\mathbb{L}(u) = f$. Allora per ogni $B = B(x,r)$ tale che $\tau B \subset \mathring{G}$ e per μ data dalla* (conseguenze media armonica 3.15)*, si ha*

$$\max_B u \leq C(\min_B u + (hr)^\mu \|f\|_{q'/2}), \qquad (3.22)$$ Harnack

dove $C = C(G,\mathbb{L})$ e $\tau = \tau(G,\mathbb{L})$.

Dim Basta utilizzare i principi del massimo dati dai teoremi principio del massimo 3.3.3 e principio del massimo 2 3.3.4, validi per $B(x,\tau r) \subset \mathring{G}$. Infine si sfrutta il corollario collegamento fra p e -p 3.2.7 per confrontare fra loro le medie integrali dei principi del massimo, ottenendo

$$\begin{aligned} \max_{B(x,r)} u + k(x,r) &\leq C\left(\fint_{B(x,\tau r)} \overline{u}^{\tilde{p}}\, d\mu\right)^{1/\tilde{p}} \leq \\ &\leq C\left(\fint_{B(x,\tau r)} \overline{u}^{-\tilde{p}}\, d\mu\right)^{-1/\tilde{p}} \leq C\left(\min_{B(x,r)} (u + k(x,r))\right). \end{aligned}$$

La dipendenza della costante C è data dall'osservazione costante per BMO di logu 3.2.6. □

Dimostrimao ora l'Hölderianità discreta delle soluzioni di (equazione 3.7). Quest'ultima sarà espressa in termini dell'oscillazione della funzione sulle palle. Fissato un punto $x \in G$, useremo, per una funzione u, le seguenti notazioni:

$$\mathrm{M}(u,x,r) = \max_{B(x,r)} u, \quad \mathrm{m}(u,x,r) = \min_{B(x,r)} u,$$

$$\mathrm{Osc}(u,x,r) = \mathrm{M}(u,x,r) - \mathrm{m}(u,x,r). \qquad (3.23)$$ Osc

regolarita Holderiana

Teorema 3.4.2. *Sia u una soluzione in $\overset{\circ}{G}$ dell'equazione $\mathbb{L}(u) = f$. Allora per ogni $x \in \overset{\circ}{G}$ e $0 < \rho < \tau R < \operatorname{dist}(x, \partial G)$ si ha:*

$$\operatorname{Osc}(u, x, \rho) \leq C \left(\max_{B(x,R)} |u| + \sigma (hR)^\mu \right) \cdot \left(\frac{\rho}{R} \right)^\alpha .$$

Dove C, α e σ dipendono da $\mathbb{L}$, f.

Dim Sia $x \in G$ fissato e supponiamo da ora in poi che la costante C del teorema DH 3.4.1 sia maggiore di un numero H abbastanza grande ceh sara' fissato successivamente, e $\tau r < \operatorname{dist}(x, \partial G)$. Possiamo quindi applicare la diseguaglianza di Harnack alle funzioni positive

$$V_r = \mathrm{M}(u, x, 2r) - u + 1, \qquad v_r = u - \mathrm{m}(u, x, 2r) + 1.$$

Osserviamo che si ha

$$\mathbb{L}(V_r) = c(\mathrm{M}(u, x, 2r) + 1) - f, \qquad \mathbb{L}(v_r) = f + c(1 - \mathrm{m}(u, x, 2r)).$$

Ponendo ora:

$$\sigma = \max\{|\mathrm{M}(u, x, 2r) + 1| \,, |1 - \mathrm{m}(u, x, 2r)|\} \|c\|_{q'/2} + \|f\|_{q'/2}, \tag{3.24}$$

definizione di sigma

ed applicando il teorema Harnack 3.22, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(u, x, 2r) - \mathrm{m}(u, x, r) &\leq C(\mathrm{M}(u, x, 2r) - \mathrm{M}(u, x, r) + \sigma (rh)^\mu), \\ \mathrm{M}(u, x, r) - \mathrm{m}(u, x, 2r) &\leq C(\mathrm{M}(u, x, r) - \mathrm{m}(u, x, 2r) + \sigma (rh)^\mu), \end{aligned}$$

e, sommando membro a membro,

$$\operatorname{Osc}(u, x, 2r) + \operatorname{Osc}(u, x, r) \leq C(\operatorname{Osc}(u, x, 2r) - \operatorname{Osc}(u, x, r) + 2\sigma (rh)^\mu),$$

da cui, risolvendo

$$\operatorname{Osc}(u, x, r) \leq \gamma \operatorname{Osc}(u, x, 2r) + \sigma \gamma (rh)^\mu,$$

dove si è posto $\gamma = (C-1)/(C+1) < 1$ e si è posto che $C > 3$. Iterando quest'ultima diseguaglianza si vede facilmente che vale

$$\begin{aligned} \operatorname{Osc}(u, x, \frac{r}{2^n}) &\leq \gamma^n \operatorname{Osc}(u, x, r) + \sigma \gamma (hr)^\mu \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\gamma^i}{2^{\mu(n-i)}} = \\ &= \gamma^n \operatorname{Osc}(u, x, r) + \sigma \gamma (rh)^\mu \frac{(2^\mu \gamma)^n}{2^{\mu n}(2^\mu \gamma - 1)}, \end{aligned}$$

dove si è posto $2^\mu\gamma > 1$; anche quest'ultima condizione si può infatti soddisfare ponendo

$$C > H = \max\{\frac{2^{-\mu}+1}{1-2^{-\mu}}, 3\}. \tag{3.25}$$ mu>a

Si otterrà infine, ponendo $r = R$

$$\mathrm{Osc}(u, x, \frac{r}{2^n}) \leq \gamma^n \left(\mathrm{Osc}(u, x, r) + K(Rh)^\mu\right) = C_0\gamma^n,$$

Questa stima ci dà il risultato cercato, in quanto ponendo

$$\frac{R}{2^{n(\rho)}} \leq \rho \leq \frac{R}{2^{n(\rho)-1}},$$

si ha, evidentemente

$$\mathrm{Osc}(u, x, \rho) \leq \mathrm{Osc}(u, x, \frac{R}{2^{n(\rho)-1)}}) \leq C_0\gamma^{n(\rho)}.$$

Ma per come è stato scelto $n(\rho)$ si ha ,con semplici calcoli,

$$n(\rho) \geq \frac{\log(R/\rho)}{\log 2}\ , \qquad \gamma^{n(\rho)} \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^\alpha,$$

(dove $\alpha = \log(\gamma^{-1})/\log 2$), che ci fornisce il risultato del teorema. Notiamo che, per la condizione (mu>a 3.25), si ha anche $\alpha < \mu$. □

Liouville **Corollario 3.4.3.** *(Liouville) Sia u una soluzione limitata dell'equazione*

$$\mathrm{div}(\mathbf{a}Du) + \mathbf{b}Du = 0,$$

su un grafo infinito G di dimensione δ. Se $\mathbf{b} \in L^\delta(G)$, allora u è costante.

Dim . Basta osservare che nelle ipotesi dell'enunciato, si ha $\sigma = 0$, (vedi la (definizione di sigma 3.24)). Quindi, essendo il grafo G infinito, per ogni $n > 0$ ed $x \in G$ si ha

$$\mathrm{Osc}(u, x, 1) \leq C \max_G |u| \frac{1}{n^\alpha},$$

e quindi $\mathrm{Osc}(u, x, 1) = 0$, facendo tendere n all'infinito. La condizione che $\mathbf{b} \in L^\delta(G)$ è necessaria affinché la costante C rimanga limitata al tendere di n all'infinito. □

Diamo ora una applicazione del teorema regolarita Holderiana 3.4.2 che può essere utile nei processi di approssimazione mediante discretizzazione di equazioni ellittiche. Nel seguito, quando parleremo di una successione di grafi con bordo $\{G_n \hookrightarrow$

$G\}$, imporremo che l'elemento di lunghezza sia $h_n = 1/\operatorname{diam}(G_n)$, con $\operatorname{diam}(G_n) < \infty$ e $h_n \to 0$ per $n \to \infty$. Inoltre doteremo i grafi di una struttura metrica data dalla distanza

$$\operatorname{dist}_n(x_n, y_n) = h_n \operatorname{dist}(x_n, y_n) \quad \forall x_n,\ y_n \in G_n, \tag{3.26}$$ distanza indotta

dove con dist si è indicata la solita distanza a valori interi su G_n. Su tutti i grafi G_n, considereremo inoltre l'elemento di volume $dV_n = h_n^\delta$, dove δ è la dimensione isoperimetrica di G.

Holderianita 2 **Corollario 3.4.4.** *Consideriamo sulla successione di grafi G_n funzioni u_n equilimitate che siano soluzioni dei problemi ellittici*

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}_n Du_n) + \mathbf{b}_n Du_n + c_n u_n = f_n,$$

in $\overset{\circ}{G}$ e supponiamo che esistano due costanti $K \geq 0$, $q > \delta$, tali che

$$\|\mathbf{a}\|_\infty + \|\mathbf{b}\|_q + \|c\|_{q/2} + \|f\|_{q/2} \leq K, \qquad \mathbf{a}_n \geq K^{-1}. \tag{3.27}$$ quantita

Allora esistono $\alpha = \alpha(G, K)$ e $\tau = \tau(G, K)$ tali che le u_n sono localmente equihölderiane in $\overset{\circ}{G}_n$ rispetto alla distanza dist_n*:*

$$|u_n(x_n) - u_n(y_n)| \leq C \frac{1}{(\operatorname{dist}_n(x_n, \partial G_n))^\alpha} \operatorname{dist}_n(x_n, y_n)^\alpha,$$

per ogni x_n, y_n tali che $\tau \operatorname{dist}_n(x_n, y_n) < \operatorname{dist}_n(x_n, \partial G_n)$.

Dim Discende immediatamente dal teorema 3.4.2: osserviamo innanzitutto che la costante τ del teorema 3.4.2 è limitata da una costante indipendente da n. Prendendo nell'enunciato $R = \operatorname{dist}(x_n, \partial G_n)/\tau$ e moltiplicando e dividendo per h_n, si ha

$$\operatorname{Osc}(u_n, x, r) \leq C_n \left(\frac{h_n}{\operatorname{dist}(x_n, \partial G_n)} h_n r\right)^{\alpha_n}.$$

Il resto dell'enunciato segue semplicemente dalla dipendenza di C_n e α_n dalle quantità limitate nella (3.27). □

3.5 Alcuni controesempi

In questo paragrafo daremo alcuni controesempi che metteranno in luce la necessità delle ipotesi fatte per dimostrare i risultati del paragrafo precedente. Vedremo innanzitutto in che modo una crescita troppo veloce, (più

che polinomiale), del volume permetta il formarsi di singolarità; considereremo infatti un grafo di Cayley, (quindi φ-isoperimetrico), a crescita di volume esponenziale; su di esso definiremo una successione di sottografi sui quali le funzioni armoniche tendono ad assumere delle singolarità.
Modificando opportunamente questo primo esempio, costruiremo una successione di grafi con crescita di volume equiregolare ma che non supporta una diseguaglianza di Poincarè; su questa successione considereremo di nuovo funzioni armoniche equilimitate che risulteranno avere lo stesso comportamento irregolare.
Passeremo quindi a dare un controesempio molto significativo sul ruolo dell'ipotesi di simmetria dei coefficienti della parte principale dell'operatore: analizzeremo le soluzioni di un operatore ellittico a coefficienti asimmetrici, (ossia non variazionale), concludendo che esse tenderanno ad assumere una singolarità.
Infine, sulla base dell'esempio norma q mezzi 3.2.2 daremo una successione di equazioni del tipo

$$\mathrm{div}(Du_n) = f_n,$$

in $Q_n^3 \hookrightarrow 1/n\mathbb{Z}^3$, le cui soluzioni hanno un "salto", pur essendo le norme $L^{3/2}$ delle f_n equilimitate.

Cominciamo col chiarire che cosa significa che una successione di funzioni tende ad assumere un salto in un punto.

successione regolare **Definizione 3.5.1.** Consideriamo una successione di grafi con bordo $G_n \hookrightarrow G'_n$, con $\mathrm{diam}(G_n) \to +\infty$ per $n \to \infty$. Se $f_n : G_n \to \mathbb{R}$ è una successione di funzioni equilimitate e $\Omega_n \hookrightarrow G_n$ è una successione di sottografi di $\{G_n\}$,, diremo che $\{f_n\}$ è regolare in $\{\Omega_n\}$ se

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Osc}(f_n, x_n, 1) = 0,$$

per ogni $(x_n) \in \prod \Omega_n$.
Diremo che $\{f_n\}$ "ha una singolarità" in (x_n) se il limite di sopra è strettamente positivo.

Sulla base della definizione precedente daremo anche una nozione di Hölderianità per una successione di funzioni $\{f_n\}$, che sia coerente con il risultato del teorema Holderianita 2 3.4.4.

Definizione 3.5.2. Siano $\{\Omega_n\} \hookrightarrow \{G_n\} \hookrightarrow \{G'_n\}$ successioni di grafi come nella definizione precedente, con lunghezza dei lati $h_n \to 0$ e distanza indotta

dist_n come nella (`distanza indotta` 3.26). Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni equilimitate definita termine a termine su $\{G_n\}$, poniamo:

$$\mathrm{Osc}(\{f_n\},(x_n),r) = \limsup_{n\to\infty} \mathrm{Osc}(f_n,x_n,r),$$

per ogni (x_n) in $\prod G_n$.
Diremo che la successione $\{u_n\}$ è α-Hölderiana in $\{\Omega_n\}$ se esiste C tale che

$$\mathrm{Osc}(\{f_n\},(x_n),r) \leq Cr^{\alpha},$$

per ogni $(x_n) \in \prod \Omega_n$. Diremo che $\{f_n\}$ è continua in $(x_n) \in \prod G_n$ se

$$\lim_{r\to 0} \mathrm{Osc}(\{f_n\},(x_n),r) = 0.$$

Osservazione 3.5.1. Notiamo che la tesi del teorema `Holderianita 2` 3.4.4 si può esprimere in questo contesto, dicendo che la successione $\{u_n\}$ è Hölderiana in ogni successione di sottografi $\{\Omega_n\} \hookrightarrow \{\mathring{G}_n\}$. Inoltre la definizione `successione regolare` 3.5.1 si ricollega con quella precedente osservando che se $\{f_n\}$ è continua in ogni punto $(x_n) \in \prod G_n$, allora è regolare.

`esempio regolarita` **Esempio 3.5.1.** Sia G un grafo infinito, e sia $\{G_n \hookrightarrow G\}$ tale che $G_n \subset G_{n+1}$ e $\mathrm{diam}(G_n) \to +\infty$ per $n \to \infty$; sia inoltre $\{f_n\}$ una successione di funzioni equilimitate.
È chiaro che in questo caso si ha

$$\{f_n\} \text{ è regolare} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Osc}(\tilde{f}_n,x,1) = 0 \quad \forall x \in G,$$

(dove $\tilde{f}_n$ è l'estensione a zero di f_n fuori da G_n). In altre parole $\{f_n\}$ è regolare se l'oscillazione puntuale tende a zero, (puntualmente).
In questa situazione diremo che $\{f_n\}$ "salta" in $x \in G$, se

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Osc}(f_n,x,1) = \delta > 0,$$

(si noti che si assume l'esistenza del limite). □

`esempio approssimazione di equazioni` **Esempio 3.5.2.** L'esempio precedente sarà il modello di tutti i controesempi che forniremo in seguito. Cerchiamo ora di dare una giustificazione euristica alla definizione `successione regolare` 3.5.1. Ricordando l'esempio `norma q mezzi` 3.2.2, supponiamo di voler approssimare un'equazione del tipo

$$\triangle u = f \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N,$$

con condizioni al bordo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Il metodo più naturale consiste nel discretizzare l'equazione, risolvendo la successione di problemi ellittici

$$\operatorname{div}(Du_n) = f_n \qquad \text{in } \ \Omega_n = \frac{1}{n}\mathbb{Z}^N \cap \Omega,$$

con condizioni al bordo nulle, dove $f_n(x) = (1/n)^N \int_{D(x,1/n)} f$, come nell'esempio norma q mezzi 3.2.2. Se $f \in L^{q/2}$ per qualche $q > N$, allora le norme $L^{q/2}$ delle f_n rimangono equilimitate, ed il principio del massimo principio del massimo 3.3.3 ci assicura che le u_n sono equilimitate. Valendo allora il teorema di regolarità Hölderiana discreta regolarita Holderiana 3.4.2, vediamo, in base allo stesso ragionamento usato nella dimostrazione Liouville 3.4.3, che la successione $\{u_n\}$ è regolare. In particolare la successione $\{u_n\}$ è equihölderiana, e quindi è plausibile aspettarsi di poter utilizzare il teorema di Ascoli-Arzelà su una qualche estensione, (ad esempio polinomiale a tratti), delle u_n a tutto Ω. $\square$

I controesempi che daremo saranno costruiti nella seguente maniera:

1) consideremo una successione di grafi con bordo $\{G_n \hookrightarrow G\}$ inclusi uno dentro l'altro, per i quali, ad esempio, non valgano alcune delle ipotesi geometriche enunciate all'inizio del capitolo;

2) su questi grafi consideremo problemi ellittici del tipo

$$\operatorname{div}(Du_n) = f_n,$$

con buone proprietà di equilimitatezza delle f_n.

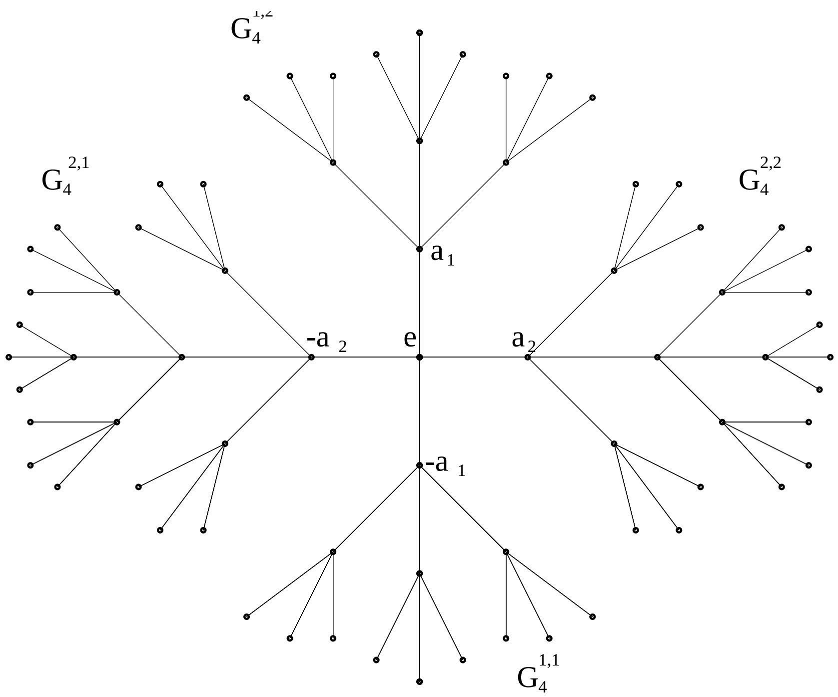
3) mostreremo infine che la successione $\{u_n\}$ è equilimitata ma tende ad assumere un salto in un punto.

Esempio 3.5.3. Consideriamo il grafo di Cayley G associato al gruppo libero $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ con insieme di generatori simmetrico $\{\pm a_1, \pm a_2\}$, dove a_i è il generatore canonico del gruppo ciclico infinito $\mathbb{Z}$. Questo grafo si può rappresentare come un albero, dicendo che da ogni vertice escono esattamente quattro lati nella maniera descritta nella figura G4 3.5.3. Ad ogni vertice $x \in G$ possiamo associare la sua "lunghezza" $\mathrm{l}(x)$ che è la minima lunghezza delle parole che lo rappresentano; è chiaro che la lunghezza di un vetrice è pari alla distanza dello stesso dal vertice e che rappresenta l'identità del gruppo; in formule $\mathrm{l}(x) = \operatorname{dist}(e,x)$. La successione di grafi che consideriamo è data da $G_n \hookrightarrow G$, con $G_n = B(e,n)$. Dal capitolo 1, paragrafo 3, sappiamo che ognuno di questi grafi è φ- isoperimetrico ed ha una dimensione isoperimetrica "infinita": è infatti facile vedere che il volume ha crescita esponenziale:

$$V(e,r) = 23^r \geq r^\delta \qquad \forall \delta > 0,$$

G4

Figure 3.1: Il grafo G_4.



e questo, come visto nell'esempio 2.2.7, ci dice che G è δ-isoperimetrico per ogni $\delta > 0$. Valgono quindi tutte le diseguaglianze di Sobolev ed una diseguaglianza pseudo-Poincaré, ma chiaramente G non è doubling, e quindi la successione $\{G_n\}$ non puó avere volume equiregolare.

Consideriamo i sottografi $G_n^{1,1}, G_n^{1,2}, G_n^{2,1}, G_n^{2,2}$, dati da

$$G_n^{i,j} := \{x \in G_n \mid \text{le parole ridotte di } x \text{ cominciano per } (-1)^j a_i\},$$

(vedi figura). Sia u_n la soluzione del problema di Dirichet

$$\operatorname{div}(Du_n) = 0,$$

con condizioni al bordo date da

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \operatorname{dist}(e,x) = n \text{ e } x \in G_n^{1,2} \cup G_n^{2,2}, \\ -1 & \text{se } \operatorname{dist}(e,x) = n \text{ e } x \in G_n^{1,1} \cup G_n^{2,1}. \end{cases}$$

Possiamo calcolare la soluzione esplicitamente: se poniamo

$$\alpha_n = 2\frac{3^n}{3^{n+1}-1},$$

allora la soluzione u_n è data da

$$u_n(x)\begin{cases} \alpha_n \sum_{i=0}^{\mathrm{dist}(e,x)} \frac{1}{3^i} & \text{se } x \neq e \text{ e } x \in G_n^{2,1} \cup G_n^{2,2}, \\ -\alpha_n \sum_{i=0}^{\mathrm{dist}(e,x)} \frac{1}{3^i} & \text{se } x \neq e \text{ e } x \in G_n^{1,1} \cup G_n^{1,2}, \\ 0 & \text{se } x = e, \end{cases}$$

come è facile verificare.
Ma allora si ha $\mathrm{Osc}(u_n, e, 1) = 2\alpha_n$ e $2\alpha_n \to 4/3$ per $n \to \infty$. Quindi la successione $\{u_n\}$ ha un salto in e. □

Esempio 3.5.4. Consideriamo ancora il grafo $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ dell'esempio precedente; aggiungeremo dei vertici lungo le adiacenze del grafo in maniera tale da renderlo doubling di dimensione tre.
Sia I_n il grafo $[0, n] \cap \mathbb{Z}$; se x e y sono elementi di G, $\mathrm{l}(x) = i$, $\mathrm{l}(y) = i + 1$ e $x \sim y$, "incolliamo" un I_{2^i} fra x e y, come si vede nella figura 3.5.4. Si può vedere che il grafo G' così costruito è doubling: la crescita di volume è infatti massima per le palle centrate in e e per queste palle si ha:

$$V(e, \sum_{i=0}^{n} 2^i) = \sum_{i=1}^{n} 3^i 2^i = \frac{6^{n+1}-1}{5} \leq C\,(2^n - 1)^3 = C\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right)^3,$$

in altre parole se poniamo $r_n = 2^n - 1$, si ha

$$V(e, r_{n+1}) \leq C r_n^3,$$

e perciò per r arbitrario e $r_n \leq r \leq r_{n+1}$, si ha:

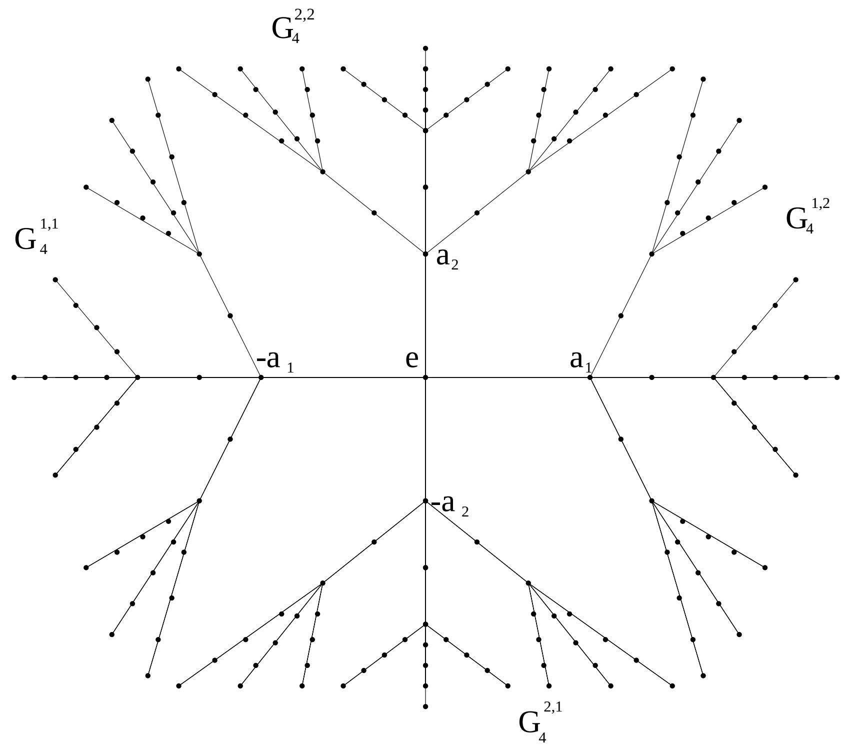
$$V(e, r) \leq V(e, r_{n+1}) \leq C r_n^3 \leq C r^3.$$

Allo stesso modo si può vedere che il grafo G' è isoperimetrico di dimensione tre.
Consideriamo allora la successione di sottografi $\{G_n \hookrightarrow G'\}$ dati come $G_n = B(e, r_n)$; su questi definiamo gli analoghi dei quattro sottografi considerati nell'esempio precedente. Osservando che $G_n \setminus \{e\}$ ha quattro componenti connesse, poniamo

$$G_n^{i,j} = \text{componente connessa contenente } (-1)^j a_i.$$

G4'

Figure 3.2:



Consideriamo allora la successione di funzioni $\{u_n\}$, soluzioni su G_n dei problemi di Dirichlet

$$\operatorname{div}(Du_n) = 0,$$

con condizioni al contorno

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \operatorname{dist}(e,x) = r_n \text{ e } x \in G_n^{1,2} \cup G_n^{2,2}, \\ -1 & \text{se } \operatorname{dist}(e,x) = r_n \text{ e } x \in G_n^{1,1} \cup G_n^{2,1}. \end{cases}$$

Possiamo ancora calcolare esplicitamente la soluzione:

$$u_n(x) = \alpha_n \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \left(\frac{1}{3}\right)^j + (\operatorname{dist}(x,e) - k)\left(\frac{1}{3}\right)^k,$$

$$\text{per } k \text{ tale che} \quad r_k \leq \operatorname{dist}(e,x) < r_{k+1}.$$

Naturalmente α_n dovrà essere tale da soddisfare le condizioni al contorno, ossia

$$\alpha_n = \frac{1 - 2/3}{1 - (2/3)^n},$$

e questo mostra che la successione $\{u_n\}$ non è regolare, perché $\operatorname{Osc}(u_n, e, 1) = 2\alpha_n \to 2/3 \neq 0$.

$\square$

Esempio 3.5.5. Consideriamo la successione di grafi 1-dimensionali $\{Q^1_{2n} \hookrightarrow (1/2n)\mathbb{Z}\}$ e fissiamo due numeri $1 > p > q > 0$, in maniera tale che $p+q = 1$. Notando che $1/2 \in Q^1_{2n}$ per ogni n, definiamo l'operatore ellittico non simmetrico $\mathbf{a}_n(x,y)$ come

$$\mathbf{a}_n\left(\frac{m}{2n}, \frac{m}{2n} + \frac{1}{2n}\right) = \begin{cases} p & \text{se } m > n, \\ q & \text{se } m < n, \\ \frac{1}{2} & \text{se } m = n; \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_n\left(\frac{m}{2n}, \frac{m}{2n} - \frac{1}{2n}\right) = \begin{cases} q & \text{se } m > n, \\ p & \text{se } m < n, \\ \frac{1}{2} & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Sia allora u_n la soluzione dell'equazione ellittica

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}_n Du_n) = 0 \quad \text{in } Q^1_{2n},$$

che si può scrivere come

$$u_n(x) = \mathbf{a}_n(x, x + \frac{1}{2n})u_n(x + \frac{1}{2n}) + \mathbf{a}_n(x, x - \frac{1}{2n})u_n(x - \frac{1}{2n}),$$

con dati al bordo $u_n(0) = 0$, $u_n(1) = 1$.
Calcoliamo esplicitamente la soluzione u_n; poniamo

$$c_i^n = u_n(\frac{i+1}{2n}) - u_n(\frac{i}{2n}) = 2nDu_n(\frac{i}{2n}, \frac{i+1}{2n}),$$

e osserviamo che la u_n è soluzione se e solo se valgono

$$\begin{cases} c_i^n = (p/q)c_{i-1}^n & \text{se } i \leq n, \\ c_i^n = (p/q)c_{i+1}^n & \text{se } i \geq n, \\ c_n = c_{n+1}. \end{cases}$$

Tramite induzione possiamo allora calcolare u_n in funzione del solo valore c_1^n:

$$u_n(\frac{i}{2n}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ c_1^n \sum_{j=0}^{i-1} (p/q)^j & \text{se } 1 \leq i \leq n, \\ u_n(1/2) + c_1^n\, (p/q)^{n-1} \sum_{j=0}^{i-(n+1)} (q/p)^i & \text{se } i > n. \end{cases}$$

Basta allora imporre la condizione $u_n(1) = 1$, ossia, ponendo $\alpha = p/q$:

$$c_1^n = \frac{\alpha - 1}{2(\alpha^n - 1)}.$$

Ma allora la successione $\{u_n\}$ ha un salto nel punto $1/2$, perché

$$\mathrm{Osc}(u_n, \frac{1}{2}) = 2c_n = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \to 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

Notiamo che il salto è non nullo perché $p \neq q$ e che invece torna ad essere 0 se $p = q = 1/2$, che è il caso simmetrico. □

Esempio 3.5.6. Consideriamo la successione di grafi $\{Q_2 n^3 \hookrightarrow (1/2n)\mathbb{Z}^3\}$ e siano $\{e_1, e_2, e_3\}$ i generatori canonici di $(1/2n)\mathbb{Z}^3$. Notiamo che questi grafi soddisfano a tutte le proprietà geometriche richieste all'inizio del capitolo, con costanti indipendenti da n. Definiamo su questi grafi la successione di funzioni $\{u_n\}$ data da

$$u_n(x) = \delta_{(1/2,1/2,1/2)},$$

(dove δ_x è la funzione caratteristica del punto). È chiaro che questa successione è equilimitata ed ha un salto pari ad uno nel punto $(1/2,1/2,1/2)$, e quindi non è regolare. Osserviamo quindi che le u_n soddisfano equazioni ellittiche del tipo

$$\mathrm{div}(Du_n) = f_n,$$

con

$$f_n(x) = \begin{cases} -6(2n)^2 & \text{se } x = (1/2,1/2,1/2), \\ -(2n)^2 & \text{se } x = (1/2,1/2,1/2) \pm e_i,\ i = 1,2,3, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e quindi, qualunque sia $q > 3$, si avrà

$$\|f_n\|_{q/2} = Cn^{q-3} \to +\infty.$$

$\square$

Chapter 4

Regolarità ellittica: il caso non variazionale

In questo capitolo ci poniamo il problema di studiare la regolarità di soluzioni di equazioni ellittiche del tipo

$$\frac{1}{h}\sum_{y\sim x}\mathbf{a}(x,y)\frac{(u(y)-u(x))}{h}=f(x)$$

dove però questa volta non supporremo che il termine $\mathbf{a}$ sia simmetrico rispetto ai suoi argomenti. Avevamo visto che condizione necessaria per cui un'equazione del tipo descritto sopra avesse una formulazione variazionale era che $\mathbf{a}$ dipendesse solo dallo spigolo (non orientato). Alla fine del capitolo precedente si è inoltre descritto un controesempio significativo, che mostra come non si possa in generale sperare di ottenere risultati di regolarità nel caso di coefficienti non simmetrici.

Purtuttavia saremo in grado di ottenere una diseguaglianza di Harnack sotto una particolare condizione di bilanciamento spaziale dei coefficienti. Questa condizione è però esprimibile esclusivamente tramite le proprietà di una specifica immersione del grafo. Per tutto il capitolo, quindi, considereremo unicamente grafi bene immersi in un certo $\mathbb{R}^n$, dove il "bene" sarà definito opportunamente in seguito.

I metodi che useremo saranno sostanzialmente quelli utilizzati per il trattamento della regolarità delle equazioni ellittiche classiche non in forma di divergenza.

4.1 Grafi immersi

In questo paragrafo specificheremo le caratteristiche del problema che vogliamo studiare. Daremo innanzitutto una nozione precisa di grafo "bene" immerso in un $\mathbb{R}^n$, intendendo con ciò che da ogni vertice del grafo fuoriescano un numero sufficiente di spigoli.

Sfruttando il fatto che in un grafo immerso gli spigoli sono rappresentati da vettori di una certa lungezza, formuleremo la condizione di bilanciamento spaziale dei coefficienti; diremo infatti che i coefficienti sono "bilanciati" quando ogni vertice sarà il baricentro (pesato con i coefficienti) dei vertici adiacenti. Attraverso questa nozione potremo definire precisamente il tipo di operatore alle differenze ellittico che ci interessa.

Infine descriveremo una strumento fondamentale per ottenere stime sull'estremo superiore di soluzioni di equazioni a parte principale bilanciata: il sopra-gradiente e l'insieme di contatto. Se da un lato questi saranno oggetti dal profondo significato geometrico, la loro definizione dipende fortemente dall'immersione del grafo che si considera.

grafi immersi **Definizione 4.1.1.** Sia dato un grafo G. Una realizzazione di G in $\mathbb{R}^n$ o grafo immerso in $\mathbb{R}^n$ associato a G è il dato di un sottoinsieme discreto di $\mathbb{R}^n$, che indicheremo sempre con G e di una applicazione $i : L \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$x + i((x, y)) = y \quad e \quad \{x + ti((x, y)) \mid t \in [0, 1]\} \cap G = \{x, y\},$$

(la seconda condizione significa semplicemente che lungo uno spigolo non ci sono vertici). La quantità $h(x, y) = \|i((x, y))\|$ sarà quindi la lunghezza dello spigolo da x a y.
Definiamo inoltre la quantità

$$\rho(x) = \mathrm{dist}(x, \partial \mathrm{co}\{y \mid x \sim y\}),$$

intendendo con co$\{A\}$ l'inviluppo convesso di A; $\rho(x)$ misura la più grande palla contenuta nell'inviluppo convesso degli adiacenti di x.
Diremo che G è bene immerso in $\mathbb{R}^n$ se valgono

1. $\rho(x) \geq \epsilon_0 > 0 \quad \forall x \in G,$

2. $h_M = \max_{x \sim y} h(x, y) < +\infty.$

Definiamo infine la quantità

$$h_m(x) = \min_{x \sim y} h(x, y). \tag{4.1}$$

minima dist

osservazione 1 **Osservazione 4.1.1.** In generale, data una immersione di un grafo G in $\mathbb{R}^n$ l'applicazione $i : L \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ è univocamente determinata dalle condizioni che deve soddisfare:

$$i(x, y) = y - x \quad \forall x \sim y,$$

quindi si potrà dire che una realizzazione di un grafo è una immersione dei vertici del grafo in $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathrm{co}\{x, y\} \cap G = \{x, y\}$.

Osservazione 4.1.2. Ovviamente condizione necessaria perchè un grafo sia immerso in maniera non degenere in $\mathbb{R}^n$ è che ogni vertice abbia almeno $n+1$ adiacenti. Questa condizione, però, non è sufficiente neanche nel caso di un grafo finito, come è facile vedere considerando nel piano un quadrato assieme alle sue diagonali.

Potremo naturalmente considerare grafi con bordo, osservando che una immersione $\Omega \hookrightarrow G$ induce una inclusione di Ω in G sia come sottoinsiemi che come grafi immersi in $\mathbb{R}^n$. Chiaramente in questo contesto si parlerà di frontiera di un sottografo come sottoinsieme di $i(L) \subset \mathbb{R}^n$.

Su un grafo immerso G potremo considerare due metriche:

la prima, che chiameremo "metrica intrinseca" è la usuale metrica sul grafo considerato come oggetto astratto (vedi (distanza intrinseca 2.10));

la seconda è la metrica indotta da $\mathbb{R}^n$ sull'insieme dei vertici. Quando non sarà specificato, tutte le quantità di origine metrica faranno riferimento a quest'ultima.

È chiaro, comunque che entrambe queste metriche inducono la topologia discreta sul grafo (che, per ipotesi, è un sottoinsieme discreto di $\mathbb{R}^n$). Quando parleremo di bordo di un sottografo, quindi, intenderemo sempre quello dato dalla (frontiera2 2.3). Per "parte interna", invece, considereremo l'insieme

$$\overset{\circ}{\Omega} = \{x \in \Omega \mid B(x, 1) \subset \Omega\},$$

dove la distanza rispetto alla quale si definisce $B(x, 1)$ è quella intrinseca. La parte interna di un sottografo Ω sarà quindi l'insieme dei punti $x \in \Omega$ per cui tutte le adiacenze sono contenute in Ω. Infine per chiusura di Ω intenderemo l'unione di Ω e della sua frontiera.

grafi trudinger **Esempio 4.1.1.** Consideriamo il grafo di Cayley associato al gruppo $h\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, con insieme di generatori $\Gamma = \{\pm v_1, \ldots, \pm v_k\} \subset h\mathbb{Z}^n$. Si vede facilmente che condizione necessaria e sufficiente affinché questo sia un grafo immerso in $\mathbb{R}^n$, (attraverso l'inclusione di vertici $h\mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$), per l'osservazione osservazione 1 4.1.1, è che v_i non sia proporzionale a nessun v_j se $j \neq i$. In questo caso osserviamo

che il grafo di Cayley è bene immerso, perchè Γ genera, (sui reali), tutto $\mathbb{R}^n$ grafi immersi
ed è simmetrico; quindi certamente si può porre nella definizione 4.1.1

$$\rho(x) \geq \epsilon_0 = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid B(0,r) \subset \mathrm{co}\{\Gamma\}\} > 0.$$

□

Passiamo a questo punto a definire gli operatori ellittici che studieremo per tutto il capitolo. Dato un grafo immerso G, la derivata in senso discreto di una funzione f definita sui vertici di G sarà data da:

$$Df(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{h(x,y)}.$$

Volendo, potremo considerare la funzione f come definita anche lungo i vertici, e quindi su $\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n \mid x \sim y,\ t \in [0,1]\}$. Basterà infatti porre

$$f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y),$$

ed in questo modo la derivata discreta non sarà altro che la derivata in un qualunque punto interno allo spigolo che si considera, (tenendo conto dell'orientazione con la quale lo si guarda). Analogamente si definirà un campo vettoriale sugli spigoli del grafo immerso come il dato, per ogni spigolo non orientato, di un vettore parallelo allo spigolo stesso. La divergenza di un campo vettoriale $\mathbb{F}$ sarà allora data da

$$\mathrm{div}(\mathbb{F})(x) = \sum_{y \sim x} \frac{\mathbb{F}(x,y)}{h(x,y)}.$$

Definizione 4.1.2. Diremo che un operatore alle differenze ellittico del tipo

$$\mathrm{div}(\mathbf{a}Df) + \mathbf{b}Df + c, \tag{4.2}$$ Operatore

con $\Lambda \geq \mathbf{a}(x,y) \geq \lambda$ è a parte principale bilanciata se vale

$$\sum_{y \sim x} \mathbf{a}(x,y) \frac{(y-x)}{\|y-x\|^2} = 0, \quad \forall x \in G. \tag{4.3}$$ Bilanciamento

Naturalmente si suppone che $\mathbf{a}(x,y) \neq 0$ solo se x e y sono adiacenti.
Diremo che l'operatore è monotono se

$$\mathbf{a}(x,y) - h(x,y)\,|\mathbf{b}(x,y)| \geq \lambda(x) \geq 0, \tag{4.4}$$ Monotonia

e uniformemente monontono se $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$.
Diremo infine che l'operatore è di tipo positivo se

$$c(x) \leq 0. \tag{4.5}$$

Positivita

Porremo infine

$$\overline{a}(x) = \max_{y \sim x} |\mathbf{a}(x,y)|\,, \qquad \overline{b}(x) = \max_{y \sim x} |\mathbf{b}(x,y)|\,. \tag{4.6}$$

estremi di L

Osservazione 4.1.3. Osserviamo che la condizione di forte monotonia non è affatto restrittiva in un processo di approssimazione di operatori uniformemente ellittici per via del fatto che $h(x,y)$ tenderà a zero. Inoltre la condizione di positività è in verità soltanto una ipotesi di comodo.

Osservazione 4.1.4. Gli operatori definiti sopra si possono di nuovo esprimere nella forma

$$\mathbb{L}(u)(x) = \sum_{y \sim x} \tilde{\mathbf{a}}(x,y)u(y). \tag{4.7}$$

Operatore 2

La condizione di monotonia (4.4) si scriverà in questo caso come

$$\tilde{\mathbf{a}}(x,y) \geq \lambda_0 > 0 \quad \forall x \sim y,\ x \neq y,$$

e quella di positività (4.5) come

$$c(x) = \sum_{y \sim x} \tilde{\mathbf{a}}(x,y) \leq 0.$$

Per quel che riguarda la condizione di bilanciamento (4.3) il discorso è più complesso. Si definisce la quantità vettoriale

$$\tilde{\mathbf{b}}(x) = \sum_{y \sim x} \tilde{\mathbf{a}}(x,y)(y-x),$$

e si dice che l'operatore è completamente bilanciato quando

$$\tilde{\mathbf{b}}(x) = 0 \quad \forall x \in G$$

Non è chiaro, però, come si possa eprimere che l'operatore in questa forma rappresenti un operatore che ha solamente la parte principale bilanciata. Questo è dovuto al fatto che un qualunque operatore del tipo (4.2), anche a parte principale non bilanciata, si può bilanciare scaricando parte del termine "del second'ordine" in quella "del prim'ordine". Basterà infatti scegliere coefficienti $\alpha(x,y)$ in maniera tale che

$$\sum_{y\sim x} \alpha(x,y)(y-x) = 0,$$

e scrivere

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{a}Du)(x) + \mathbf{b}Du(x) &= \operatorname{div}(\alpha Du)(x) + \\
&\quad + \sum_{y\sim x} \left(\frac{\mathbf{a}(x,y) - \alpha(x,y)}{h(x,y)} + \mathbf{b}(x,y) \right) Du(x,y) \\
&= \operatorname{div}(\alpha Du)(x) + \mathbf{b}' Du(x)
\end{aligned}$$

dove si è posto

$$\mathbf{b}'(x,y) = \frac{\mathbf{a}(x,y) - \alpha(x,y)}{h(x,y)} + \mathbf{b}(x,y).$$

Così facendo, però, si perdono alcune qualità fondamentali e naturali: innanzitutto il termine di primo grado non si comporta più bene, nel senso che non rimane più limitato per $h \to 0$; in secondo luogo si vede facilmente che la condizione di monotonia non è più suscettibile dell'osservazione precedente. In un processo di approssimazione, quindi, diremo che l'operatore Operatore 2 nella forma (4.7) ha parte principale bilanciata se la quantità $\|\mathbf{b}\|/h$ rimane limitata al tendere di h a zero.

Esempio 4.1.2. Consideriamo il grafo immerso $h\mathbb{Z}^n$ dato dall'esempio esempio griglia 2.1.2. Possiamo allora considerare le usuali discretizzazioni numeriche delle derivate seconde di una funzione $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\frac{\delta^2}{\delta {x_i}^2} u(x) = \frac{u(x+he_i) + u(x-he_i) - 2u(x)}{h},$$

per $x \in \mathbb{Z}^n$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ base canonica di $\mathbb{R}^n$. Per quel che riguarda le derivate prime si pone di solito

$$\frac{\delta}{\delta x_i} u(x) = \frac{u(x+he_i) - u(x-he_i)}{2h}.$$

È allora facile vedere che l'operatore

$$\mathbb{L}_h(u)(x) = \sum_{i=1}^n a(x,i) \frac{\delta^2}{\delta {x_i}^2} u(x) + \sum_{i=1}^n b(x,i) \frac{\delta}{\delta x_i} u(x) + c(x) u(x),$$

ha parte principale bilanciata. Inoltre, se valgono

$$a(x,i) - h\,|b(x,i)| \geq \lambda_0 > 0, \quad c(x) \leq 0,$$

l'operatore è anche fortemente monotono e positivo. □

Esempio 4.1.3. Sia dato un grafo di Cayley associato al gruppo $\mathbb{Z}^n$ con insieme di generatori simmetrico $\Gamma = \{\pm v_1, \dots, \pm v_k\}$, in maniera tale che il grafo sia bene immerso, (ossia soddisfi le condizioni esposte nell' esempio grafi trudinger 4.1.1); si può generalizzare l'esempio precedente ponendo

$$\frac{\delta^2}{\delta {v_i}^2} u(x) = \frac{u(x+v_i) + u(x-v_i) - 2u(x)}{\|v_i\|},$$

$$\frac{\delta}{\delta v_i} u(x) = \frac{u(x+v_i) - u(x-v_i)}{2\|v_i\|}.$$

Definendo nuovamente l'operatore

$$\mathbb{L}_h(u)(x) = \sum_{i=1}^{k} a(x,i) \frac{\delta^2}{\delta {v_i}^2} u(x) + \sum_{i=1}^{k} b(x,i) \frac{\delta}{\delta v_i} u(x) + c(x)u(x), \tag{4.8}$$

tipo trudinger

si ottengono le stesse conclusioni dell'esempio precedente. Vedremo inoltre che, dato un qualunque operatore differenziale uniformemente ellittico del tipo

$$\mathbb{L}u = tr\left(\mathbf{A} \cdot D^2 u\right) + \mathbf{b} \cdot Du + cu,$$

con coefficienti limitati, quest'ultimo sarà approssimabile con uno schema consistente di operatori alle differenze finite del tipo (tipo trudinger 4.8). □

operatori differenziali

Esempio 4.1.4. Indicheremo ora la relazione intercorrente fra un operatore alle differenze come quelli definiti precedentemente e un operatore differenziale del tipo:

$$\tilde{\mathbb{L}}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \tilde{c}u,$$

per $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Sia infatti $\tilde{u}$ la restrizione di u alla griglia G dell'esempio precedente. Consideriamo inoltre l'operatore

$$\mathbb{L}_h(\tilde{u})(x) = \sum_{i=1}^{k} a(x,i) \frac{\delta^2}{\delta {v_i}^2} \tilde{u}(x) + \sum_{i=1}^{k} b(x,i) \frac{\delta}{\delta v_i} \tilde{u}(x) + c(x)\tilde{u}(x),$$

dove $h = \max \|v_i\|$. Per la formula di Tayor si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2}{\delta {v_i}^2}\tilde{u}(x) &= \frac{v_i}{\|v_i\|} \cdot D^2 u(x) \cdot \frac{v_i}{\|v_i\|} + o(1), \\
\frac{\delta}{\delta v_i}\tilde{u}(x) &= Du(x) \cdot \frac{v_i}{\|v_i\|} + o(1),
\end{aligned}$$

e quindi si avrà

$$\tilde{\mathbb{L}}(u)(x) = \mathbb{L}(\tilde{u})(x) + o(1) \quad \forall x \in G, \tag{4.9}$$ $\boxed{\texttt{asintotica}}$

dove si è posto

$$\tilde{a}^{ij}(x) = \sum_{l=1}^{k} \mathbf{a}(x,l) \frac{v_l^i}{\|v_l\|} \frac{v_l^j}{\|v_l\|},$$

$$\tilde{b}^i = \sum_{l=1}^{k} \mathbf{b}(x,l) \frac{v_l^i}{\|v_l\|}, \quad \tilde{c}(x) = c(x),$$

L'operatore $\tilde{\mathbb{L}}$ è uniformemente ellittico se $\mathbb{L}$ è uniformemente monotono e il grafo di Cayley è immerso in maniera non degenere. Basta infatti notare che, essendo

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}^{ij}(x))_{ij},$$

si ha, posto $\hat{v}_l = v_l / \|v_l\|$,

$$\tilde{\mathbf{A}}(x) = \sum_{l=1}^{k} \mathbf{a}(x,l) \hat{v}_l \otimes \hat{v}_l.$$

Quindi, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\xi \cdot \tilde{\mathbf{A}}(x) \cdot \xi &= \sum_{l=1}^{k} \mathbf{a}(x,l) \xi \cdot \hat{v}_l \otimes \hat{v}_l \cdot \xi \\
&= \sum_{l=1}^{k} \mathbf{a}(x,l) (\xi \cdot \hat{v}_l)^2 \\
&\geq \lambda (\|\xi\|')^2,
\end{aligned}$$

dove si è indicato con $\|\ \|'$ la norma ripetto al prodotto scalare (equivalente a quello euclideo)

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (\hat{v}_{l_i} \cdot x)(\hat{v}_{l_i} \cdot y),$$

per una qualche base $\{\hat{v}_{l_i}\}_{i=1}^n$ estratta dall'insieme di generatori $\{\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_k\}$.
$\square$

APPROX **Osservazione 4.1.5.** È facile vedere che la condizione asintotica espressa dalla (4.9) è valida per ogni grafo bene immerso in $\mathbb{R}^n$. Infatti, essendo la (4.9) una condizione puntuale, basterà far dipendere i vettori v_l dal punto x. Per comodità del lettore riscriviamo il risultato dovuto alla formula di Taylor nel caso di un grafo generico. Si avrà, di nuovo

$$\tilde{\mathbb{L}}(u)(x) = \mathbb{L}(\tilde{u})(x) + o(1) \qquad \forall x \in G,$$

con, questa volta

$$\tilde{a}^{ij}(x) = \sum_{l=1}^{k} \mathbf{a}(x,y) \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|} \frac{y_j - x_j}{\|y-x\|},$$

$$\tilde{b}^i(x) = \sum_{l=1}^{k} \mathbf{b}(x,y) \frac{y^i - x^i}{\|y-x\|}, \quad \tilde{c}(x) = c(x).$$

Diamo ora la definizione di sopragradiente e di insieme di contatto. Ricordiamo che nel caso continuo, per una funzione $f \in C^2(B(0,1))$, il sopragradiente in un punto è dato da

$$\{v \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \leq f(x) + v \cdot (y-x), \quad \forall y \in B(0,1)\}.$$

Questo oggetto è strettamente connesso con l'inviluppo concavo di f. Quest'ultimo è infatti definito come

$$f^+ = \inf\{g \mid \ g \text{ è concava e } g \geq f \text{ in } B(0,1)\},$$

e si definisce "l'insieme di contatto di f" come

$$\Gamma^+(f, B(0,1)) = \{x \in B(0,1) \mid f(x) = f^+(x)\}.$$

Nel caso fortunato in cui l'inviluppo concavo di f sia ancora una funzione C^2, osserviamo che il sopragradiente in un punto è il gradiente di f se il punto sta nell'insieme di contatto, altrimenti è l'insieme vuoto.

Trasporteremo ora queste nozioni nel contesto discreto.

sopragradiente **Definizione 4.1.3.** Sia dato un grafo bene immerso in $\mathbb{R}^n$, e sia u una funzione definita su questo grafo. Se Ω è un sottografo di G, si definisce la "mappa normale" di u in Ω come

$$\chi(u,\Omega)(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid u(y) \leq u(x) + v \cdot (y-x) \ , \quad \forall y \in \Omega\},$$

per ogni $x \in \Omega$. Quando non ci sarà rischio di equivoco sottintenderemo la dipendenza da Ω o anche da u, scrivendo $\chi_u(x)$ o $\chi(x)$. Porremo inoltre, per $\Omega` \subset \Omega$

$$\chi(u, \Omega)(\Omega`) = \bigcup_{x \in \Omega`} \chi(u, \Omega)(x),$$

e, di nuovo, potremo anche scrivere $\chi_u(\Omega')$ o $\chi(\Omega')$. L'insieme di contatto di u in Ω è definito da

$$\Gamma^+(u, \Omega) = \{x \in \Omega \mid \chi(u, \Omega)(x) \neq \varnothing\}.$$

e sarà volte denotato direttamente con Γ_u^+.

`invarianze mappa normale` **Osservazione 4.1.6.** Diamo alcune semplici ma fondamentali proprietà della mappa normale.

1. Dalla definizione di sopragradiente discende che x è un punto di massimo globale se e solo se $0 \in \chi_u(x)$.

2. L'insieme $\chi_u(x)$ è per definizione invariante per traslazioni di u. Infatti basta osservare che $\chi_{u+k}(x) \subset \chi_u(x)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

3. Un'altra proprietà di invarianza è posseduta dalla mappa $x \mapsto |\chi_u(x)|$. Quest'ultima è infatti invariante per somme di applicazioni lineari. Dalla definizione è infatti facile vedere che, se $P_w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una applicazione lineare di gradiente w, allora $\chi_u(x) = w + \chi_{u+P_w}(x)$. Infatti, se $v \in \chi_{u+P_w}(x)$, allora

$$u(y) + w \cdot (y - \overline{x}) \leq u(x) + w \cdot (x - \overline{x}) + v \cdot (y - x),$$

   e quindi

$$u(y) \leq u(x) + (v - w) \cdot (y - x),$$

   ossia $v - w \in \chi_u(x)$. Si conclude allora grazie all'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue.

4. L'insieme $\chi_u(x)$ è compatto se il grafo è immerso in maniera non degenere. È infatti immediato vedere che è chiuso. Proviamo la limitatezza. Supponiamo per assurdo che ci sia una successione $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ tale che $\|v_n\| \to \infty$. Allora, ci sarà un indice i ed una sottosuccessione (che chiameremo sempre per cui $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, per cui vale

$$e_i \cdot v_n \geq n.$$

Poichè il grafo è immerso in maniera non degenere ci sarà una combinazione convessa degli adiacenti di x, per cui

$$-e_i = \frac{1}{\rho(x)} \sum_{y_j \sim x} p_j(y - x), \quad p_j \geq 0, \quad \sum p_j = 1.$$

Sommando fra loro le diseguaglianze date dal fatto che $v_n \in \chi_u(x)$, moltiplicate per i coefficienti p_j, si ottiene allora

$$\frac{1}{\rho(x)} \sum_{y_j \sim x} p_j u(y_j) \leq \frac{1}{\rho(x)} u(x) - v_n^i,$$

da cui l'assurdo, perchè allora dovrebbe essere

$$n \leq \frac{1}{\rho(x)} \left(\sum_{y_j \sim x} p_j(u(y_j) - u(x)) \right) = K.$$

Osserviamo che è esclusivamente per questo motivo che si richiede che il grafo sia bene immerso in $\mathbb{R}^n$.

Esempio 4.1.5. Diamo ora una interpretazione geometrica degli oggetti sopra definiti. Consideriamo un grafo Ω finito immerso in $\mathbb{R}^n$. Sia inoltre u una funzione positiva su Ω. Possiamo allora considerare l'insieme

$$\mathrm{co}(u) = \mathrm{co}\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \leq u(x)\}.$$

Allora l'inviluppo concavo di u si può pensare come la funzione

$$u^+(x) = \max\{t \mid (x, t) \in \mathrm{co}(u)\},$$

e l'insieme di contatto come

$$\Gamma^+(u, \Omega) = \{x \in \Omega \mid u(x) = u^+(x)\}.$$

Denotando un piano P_v con il suo gradiente $v \in \mathbb{R}^n$, è chiaro cosa si intende dicendo che la mappa normale in un punto $x \in \Gamma^+(u, \Omega)$ è l'insieme dei piani P_v per $(x, u(x))$ che stanno sopra a $\mathrm{co}(u)$. Si può inoltre osservare che la mappa normale gode di proprietà di monotonia ripetto alla crescita della funzione in un punto. $\square$

La mappa normale sarà il principale strumento per ottenere stime di tipo integrale sull'estremo superiore delle soluzioni di equazioni ellittiche a parte principale bilanciata. Daremo infatti un principio del massimo di tipo Alexandroff-Bakel'man-Pucci per soluzioni u di

$$\mathbb{L}(u)(x) \geq f(x) \quad \forall x \in \Omega \subset G, \tag{4.10}$$ equaz

sotto le seguenti ipotesi, che supporremo valide per tutto il capitolo

$$\begin{cases} 1) & \mathbb{L} \text{ è a parte principale bilanciata, positivo,} \\ & \text{ed uniformemente monotono.} \\ 2) & \mathbb{L} \text{ è a coefficienti uniformemente limitati.} \\ 3) & G \text{ è connesso e bene immerso in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.11}$$ COND

grafi immersi
Ricordando la definizione di $\rho(x)$ in 4.1.1, useremo da ora in poi la seguente notazione

$$\|f\|_{p;\Omega} = \left(\int_\Omega |f|^p\,(x)\, d\mu(x) \right)^{1/p} = \left(\sum_{x \in \Omega} |f|^p\, \rho(x)^n \right)^{1/p},$$

ossia considereremo su G la misura (dipendente dall'immersione) data da:

$$\mu(\{x\}) = \rho(x)^n.$$

Diamo ora una prima applicazione della mappa normale, che ci fornirà lo strumento a cui accennavamo precedentemente.

lemma mappa normale **Lemma 4.1.6.** *Sia u una funzione definita sul sottografo $\overline{\Omega} \subset G$, con $u = 0$ in $\partial\Omega$ e $\max_\Omega u \geq 0$. Allora, posto*

$$R = \frac{\max_\Omega u}{\operatorname{diam} \Omega},$$

si ha

$$B(0, R) \subset \chi_u(\mathring{\Omega}).$$

Dim Sia $d = \operatorname{diam} \Omega$ e $M = \max_\Omega u$. Se $M = 0$, l'enunciato è evidente. Supponiamo allora che $\max_\Omega u > 0$. Per ipotesi u raggiunge il massimo in un punto interno $x_0 \in \mathring{\Omega}$. Consideriamo allora la funzione u_{x_0} definita su $\partial\Omega \cup \{x_0\}$ come

$$u_{x_0}(x) = \begin{cases} M & \text{se } x = x_0, \\ 0 & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

L'idea della dimostrazione è che se un piano per (x_0, M) sta sopra a $\partial\Omega \times 0$, allora o sta sopra ad u, oppure è possibile traslarlo in alto in maniera tale

che passi per un punto di contatto di u e stia sopra ad u.
Si mostra allora che ogni piano per (x_0, M) che sta sopra al cono di vertice (x_0, M) e base la palla $B(x_0, d)$, sta sopra a u_{x_0}; è quindi facile vedere che la mappa normale del cono è proprio $B(0, R)$
Supponiamo quindi che P_v passi per (x_0, M) e stia sopra a $\partial\Omega$. Sia

$$t_v = \max_{\Omega} u(x) - P_v(x) = u(x_v) - P_v(x_v) \geq 0.$$

Se $t_v = 0$, allora P_v sta sopra ad u. Altrimenti $P_v + t_v$ passa per $(x_v, u(x_v))$ e sta sopra ad u.
Sia ora $f_{x_0,d}$ la funzione che ha per grafico il cono di vertice (x_0, M) e base $B(x_0, d)$. La seconda affermazione discende dal fatto che se P_v passa per (x_0, M) e sta sopra ad $f_{x_0,d}$, allora certamente sta sopra ad u_{x_0}, perchè $f_{x_0,d} \geq u_{x_0}$ in $\partial\Omega \cup \{x_0\}$. È chiaro però che

$$B(0, R) \subset \chi(f_{x_0,d}x, \overline{\Omega})(\Omega),$$

perchè la $f_{x_0,d}$ è data da

$$f_{x_0,d} = M - \frac{M}{d}\|x - x_0\|,$$

e, per la diseguaglianza di Cauchy-Swartz, se $\|v\| \leq M/d$

$$v \cdot (x_0 - x) \leq \frac{M}{d}\|x - x_0\|.$$

Quindi si verifica facilmente che

$$M - \frac{M}{d}\|x - x_0\| \leq M + v \cdot (x - x_0).$$

In conclusione abbiamo mostrato che

$$\begin{aligned} B(0, \frac{M}{d}) \quad &\subset \quad \chi(f_{x_0,d}, \overline{\Omega})(\Omega) \subset \chi(u_{x_0}, \partial\Omega \cup \{x_0\})(\partial\Omega \cup \{x_0\}) \subset \\ &\subset \quad \chi(u, \overline{\Omega})(\mathring{\Omega}). \end{aligned}$$

$\square$

Diamo un semplice corollario che mostra la tipica applicazione del lemma precedente.

corollario mappa normale **Corollario 4.1.7.** *Sia u una funzione definita in $\overline{\Omega}$. Allora si ha:*

$$\max_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u + \frac{1}{\omega_n^{1/n}} \operatorname{diam}\Omega \left(\sum_{\Gamma_u^+} |\chi_u(x)| \right)^{1/n},$$

dove con ω_n si è indicato il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$.

Dim Sia $k = \max_{\partial\Omega} u$. Per l'osservazione invarianze mappa normale 4.1.6, possiamo dimostrare l'enunciato supponendo che $\max_{\partial\Omega} u = 0$, eventualmente sostituendo $u - k$ ad u nell'enunciato.
Se $u \leq 0$ abbiamofinito. Supponiamo allora che $M = \max_{\Omega} u > 0$; allora u soddisfa le ipotesi del lemma precedente, e quindi

$$B(0, \frac{M}{\operatorname{diam}\Omega}) \subset \chi_u(\overset{\circ}{\Omega}),$$

da cui, per subadditività

$$\omega_n \left(\frac{M}{\operatorname{diam}\Omega} \right)^n \leq \sum_{\Gamma_u^+} |\chi_u(x)| \, .$$

□

4.2 La stima di Alexandroff-Bakel'man-Pucci discreta

In questo paragrafo otterremo l'analogo discreto della classica stima di Alexandroff-Bakel'man-Pucci. Il metodo che useremo per ottenerla sarà lo stesso che ci permetterà successivamente di ottenere un principio di massimo locale. L'idea è quella di esaminare il comportamento di una sottosoluzione u di (equaz 4.10) solamente sui suoi punti di contatto. Se, per fissare le idee, supponiamo che tutti i punti adiacenti del grafo distino 1, nei punti di contatto si può dire che, in un certo senso, la u è al più convessa come $|f|/\lambda$. Basti pensare che, per lo meno in casi semplici, (come ad esempio operatori puramente di secondo ordine), l'equazione (equaz 4.10) ci dice che la derivata seconda in x è almeno $f(x)/\lambda$. Essendo la derivata seconda negativa nei punti di contatto, questo ci dice che il suo modulo è al più $|f|/\lambda$. In questo modo abbiamo un controllo sulla convessità di u, nel senso che in un punto di contatto u non può essere più convessa del cono di vertice $(x, |f(x)|/\lambda)$ e base $B(x, 1)$.

Abbiamo allora un controllo dall'alto della misura della mappa normale in x, del tipo

$$|\chi_u(x)| \leq \left| B(0, \frac{|f(x)|}{\lambda}) \right|,$$

il che ci permette di sfruttare il corollario corollario mappa normale 4.1.7, ottenendo un controllo dell'estremo superiore in termini della norma L^n di f.

Per misurare la parte non bilanciata dell'operatore dato dalla (equaz 4.10), (che, per ipotesi, è dato solo dalla parte al primo ordine), porremo da ora in poi

$$\overline{\mathbf{b}}(x) = \sum_{y \sim x} \mathbf{b}(x,y) \frac{y-x}{h(x,y)}. \tag{4.12}$$

parte non bilanciata

Supporremo naturalmente che siano valide tutte le condizioni esposte in (COND 4.11), ed in base alla definizione (estremi di L 4.6), porremo

$$\overline{a} \leq \Lambda, \qquad \overline{b} + |c| \leq M. \tag{4.13}$$

LIM

Teorema 4.2.1. *(Stima A.-B.-P.)*

ABP *Sia u una funzione del grafo soddisfacente la diseguaglianza (equaz 4.10) in Ω. Allora*

$$\max_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + C \operatorname{diam} \Omega \|f\|_{L^n(\Gamma_u^+)},$$

dove C è una costante positiva che dipende solamente da n, λ_0 e $\|\overline{\mathbf{b}}\|_{L^n(\Gamma_u^+)}$.

Dim Notiamo innanzitutto che possiamo supporre $\max_{\partial\Omega} u \leq 0$ e $\max_{\Omega} u > 0$, (altrimenti l'enunciato è ovvio). L'obbiettivo è stimare $\chi_u(x)$ per $x \in \Gamma_u^+$ ed utilizzare poi il corollario corollario mappa normale 4.1.7. Sia allora x un punto di contatto per u. Per l'osservazione invarianze mappa normale 4.1.6, possiamo stimare $\chi_{u+P_w}(x)$ invece di $\chi_u(x)$. Sia quindi w un qualunque vettore di $\chi_u(x)$, e definiamo

$$v(y) = u(x) - w \cdot (y - x).$$

In questo modo, per l'osservazione invarianze mappa normale 4.1.6 $0 \in \chi_v(x)$ e quindi x è un punto di massimo per v. Abbiamo allora

$$v(x) - v(y) \geq 0 \quad \forall y \in \Omega.$$

Vediamo allora che equazione soddisfa v; sfruttando il bilanciamento della parte principale, si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}(v)(x) &= \mathbb{L}(u)(x) - \mathbb{L}(w \cdot (y-x))(x) \\
&\geq f(x) - \sum_{y \sim x} \mathbf{b}(x,y) w \cdot \frac{y-x}{h(x,y)} \\
&\geq f(x) - w \cdot \overline{\mathbf{b}}(x) = \tilde{f}(x).
\end{aligned}$$

Notiamo che $Dv(x, y) \leq 0$ e che quindi, per l'uniforme monotonia e la positività di $\mathbb{L}$,

$$\begin{aligned} -\mathbb{L}(v)(x) &= \sum_{y \sim x} (\mathbf{a}(x, y) + h(x, y)\mathbf{b}(x, y)) \frac{(v(x) - v(y))}{h(x, y)^2} - c(x)v(x) \\ &\geq \lambda_0 \frac{(v(x) - v(y))}{h(x, y)^2}. \qquad (4.14) \end{aligned}$$

magg

In conclusione abbiamo ottenuto che

$$0 \leq v(x) - v(y) \leq h(x, y)^2 \frac{\tilde{f}(x)}{\lambda_0}.$$

Questo ci dice che, per l'osservazione 4.1.6, il sopragradiente di v in x è contenuto in quello del cono di vertice $(x, h^2 \tilde{f}(x)/\lambda_0)$ e base $B(x, \rho(x))$.
Abbiamo quindi ottenuto che

$$|\chi_u(x)| = |\chi_v(x)| \leq \omega_n \left(c \frac{\tilde{f}(x)}{\lambda_0} \rho(x) \right)^n, \tag{4.15}$$

stima misura mappa normale

dove si è posto (vedi definizione 4.1.1) $c = \epsilon_0 / h$. Il teorema è quindi dimostrato nel caso $\overline{\mathbf{b}} = 0$, applicando semplicemente il corollario 4.1.7. Per quel che riguarda il caso generale, definiamo, per $\mu \in \mathbb{R}^+$ da scegliere a posteriori, la funzione

$$g(p) = \left(\|w\|^{n/(n-1)} + \mu^{n/(n-1)} \right)^{1-n}.$$

Osserviamo innanzitutto che per la diseguaglianza di Hölder

$$\left(\frac{\|w\|^{n/(n-1)} + \mu^{n/(n-1)}}{2} \right) \leq \left(\frac{\|w\|^n + \mu^n}{2} \right)^{1/(n-1)},$$

e quindi

$$g(w) \geq 2^{2-n} \left(\|w\|^n + \mu^n \right)^{-1}. \tag{4.16}$$

g maggiore

Per l'osservazione 4.1.6 l'insieme $\chi_u(x)$ è compatto, perciò possiamo scegliere w_x in maniera tale che

$$g(w_x) = \max_{\chi_u(x)} g.$$

Sia ora

$$R = \frac{\max_\Omega u}{\operatorname{diam} \Omega},$$

e consideriamo la palla $B = B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$; per il lemma lemma mappa normale 4.1.6 deve essere $B \subset \chi_u(\mathring{\Omega})$, e quindi per la (stima misura mappa normale 4.15)

$$\begin{aligned}
\int_B g(w)\,dw &\le \int_{\chi_u(\mathring{\Omega})} g(w)\,dw \le \sum_{x\in\Gamma_u^+} g(w_x)\,|\chi_u(x)| \le \\
&\le \omega_n \frac{c^n}{\lambda_0^n} \sum_{x\in\Gamma_u^+} \frac{\left(\overline{\mathbf{b}}(x)\cdot w_x - f(x)\right)^n}{\left(\|w_x\|^{n/(n-1)} + \mu^{n/(n-1)}\right)^{n-1}} \rho(x)^n .
\end{aligned}$$

Stimiamo allora l'ultimo termine; per la diseguaglianza di Hölder,

$$\frac{\|\overline{\mathbf{b}}\|\|w_x\| + |f(x)|}{\|w_x\|^{n/(n-1)} + \mu^{n/(n-1)}} \le \left(\frac{\|\overline{\mathbf{b}}\|^n + |f(x)|^n\,\mu^{-n}}{\|w_x\|^{n/(n-1)} + \mu^{n/(n-1)}}\right)^{1/n},$$

(dove si è considerato come spazio di misura un insieme di due punti di misura rispettivamente $\|w_x\|^{n/(n-1)}$ e $\mu^{n/(n-1)}$). Con una semplice manipolazione si ottiene quindi

$$\int_B g(w)\,dw \le \omega_n \frac{c^n}{\lambda_0^n} \sum_{x\in\Gamma_u^+} \left(\|\overline{\mathbf{b}}(x)\|^n + |f(x)|^n\,\mu^{-n}\right)\rho(x)^n .$$

D'altra parte, per la (g maggiore 4.16), si ha

$$\int_B g(w)\,dw \ge 2^{2-n} \int_B \frac{1}{|w|^n + \mu^n}\,dw = 2^{2-n}\omega_n \log(1 + \frac{R^n}{\mu^n}).$$

In conclusione, unendo le ultime due stime, abbiamo mostrato che

$$\log(1 + \frac{R^n}{\mu^n}) \le 4\left(\frac{c}{2\lambda_0}\right)^n \left(\|\overline{\mathbf{b}}\|^n_{L^n(\Gamma^+)} + \frac{1}{\mu^n}\|f\|^n_{L^n(\Gamma^+)}\right). \qquad (4.17)$$ ultima

Se $f \not\equiv 0$, scegliendo $\mu = \|f\|_{L^n(\Gamma^+)}$, abbiamo:

$$R \le C\left(\exp\left[C\|\overline{\mathbf{b}}\|^n_{L^n(\Gamma^+)}\right] - 1\right)^{1/n} \|f\|_{L^n(\Gamma^+)},$$

(dove C dipende solo da λ_0 e da n); altrimenti, se $f \equiv 0$, basta far tendere μ a zero nella (ultima 4.17), ottenendo semplicemente $R = 0$. Ricordando ora la definizione di R, si ottiene l'enunciato del teorema. □

raffinamento ABP **Osservazione 4.2.1.** Notiamo che ella dimostrazione precedente abbiamo in realtà fatto uso di un ipotesi più debole di quella che la u soddisfi la diseguaglianza (equaz 4.10): ci sarebbe bastato supporre la validità di

$$\mathbb{L}(u)(x) \ge f(x),$$

per i soli $x \in \Gamma_u^+$. Questa osservazione ci sarà utile nella dimostrazione del principio di massimo locale.

Attraverso la stima A.-B.-P., possiamo dimostrare un principio di massimo locale per le soluzioni di (4.10). Daremo solamente il percorso della dimostrazione, rimandando per i calcoli a [23].

PM **Teorema 4.2.2.** *Sia u una funzione soddisfacente la diseguaglianza (4.10) in Ω. Allora per ogni $1 > \sigma > 0$, $R > h_M$ e $x_0 \in \Omega$, tali che*

$$B(x_0, \sigma R) \subset B(x_0, R) \subset \overset{\circ}{\Omega},$$

e per ogni $p > 0$, abbiamo la stima

$$\max_{B_{\sigma R}} \leq C \left(\left(\int_{B_R} (u^+)^p \, d\mu \right)^{1/p} + R \|f\|_{L^n B_R} \right), \tag{4.18}$$ PML

dove si è posto $B_R = B(x_0, R)$ e dove C è una costante che dipende solo dalla struttura dell'operatore $\mathbb{L}$, da σ, p e da R.

Dim Sia $x_M \in B(x_0, \sigma R)$ tale che

$$u(x_M) = \max_{B_{\sigma R}} u.$$

Introduciamo la funzione di troncamento

$$\eta(x) = \left((1 - |x - x_M|^2 / r^2)^+ \right)^\beta \leq 1,$$

per $\beta \geq 2$, e poniamo

$$v = u^+ \eta.$$

Osserviamo che $v \leq u$ e che $v(x_0) = u(x_0)$. Utilizzando il teorema 4.2.1, e l'osservazione 4.2.1, considerando $x \in \Gamma_v^+$; eseguendo i calcoli fatti in [23], teorema 2.2, che qui non riportiamo, si ha

$$\mathbb{L}(v)(x) \leq \eta(x) f(x) - C(\beta) u^+(x) \left(\frac{\overline{a}(x)}{r^2} \eta^{1-2/\beta} + \frac{\overline{b}(x)}{r} \eta^{1-1/\beta} + |c(x)| \, \eta \right).$$

Quindi abbiamo immediatamente, ricordando le condizioni (4.13) e ponendo $B'_r = B(x_M, r)$, la stima

$$\max_{B'_r)} v \leq C(\beta) \left((\Lambda + M r^2) \left(\fint_{B'_r} \eta^{n(1-2/\beta)} (u^+)^n \, d\mu \right)^{1/n} + r \|f\|_{L^n(B'_r)} \right),$$

valida per ogni r tale che $B'_r \subset B_R$. Supponendo allora che $p \le n$, e ponendo $\beta = 2n/p$ si ha allora la stima

$$\max_{B'_r} v \le C(p) \left(C(\mathbb{L}) (\max_{B'_r} v)^{1-p/n} \left(\fint_{B'_r} (u^+)^p \, d\mu \right)^{1/n} + R\|f\|_{L^n(B_R)} \right).$$

Scegliendo quindi $r = (1-\sigma)R$, si ha

$$\max_{B'_r} v \le C(p,\mathbb{L}) \left((1-\sigma)^{-1} (\max_{B'_r} v)^{1-p/n} \left(\fint_{B_R} (u^+)^p \, d\mu \right)^{1/n} + R\|f\|_{L^n(B_R)} \right).$$

Utilizzando infine la diseguaglianza di Young nella forma

$$ab \le \epsilon a^\alpha + \epsilon^{-\beta/\alpha} b^\beta, \qquad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

si ottiene, per $\alpha = n/(n-p)$

$$(\max_{B'_r} v)^{1-p/n} \left(\fint_{B_R} (u^+)^p \, d\mu \right)^{1/n} \le \frac{1}{2} \max_{B'_r} v + 2^{n/p-1} \left(\fint_{B_R} (u^+)^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

da cui la tesi, osservando che

$$\max_{B_{\sigma R}} u = v(x_M) \le \max_{B'_r} v.$$

e che dal caso $p = n$ discendono tutte le diseguaglianze con $p > n$. $\square$

4.3 La diseguaglianza di Harnack

In questa sezione otterremo la diseguaglianza di Harnack per soluzioni di equazioni

$$\mathbb{L}(u) = f.$$

Il percorso che faremo sarà quello di ottenere una stima sulla velocità di decrescenza di $\min_E u$ al diminuire della misura dell'insieme E. Questa stima sarà ottenuta attraverso un confronto fra u ed una funzione opportuna. Utilizzeremo quindi questa stima per applicare un argomento di ricoprimento dovuto a Krilov e Safanov, ottenendo una stima di tipo integrale. Questo tipo di stima si dice diseguaglianza di Harnack debole, che è sostanzialmente una stima dal basso di u in termini delle quantità che compaiono nell'enunciato del teorema 4.2.1. Quando non sarà diversamente specificato supporremo sempre che u sia una funzione positiva soddisfacente la diseguaglianza

$$\mathbb{L}(u) \leq f. \tag{4.19}$$

equaz2

Il primo lemma che diamo ha un'interpretazione molto significativa nel caso in cui si consideri $\mathbb{L}$ come avente solo la parte del secondo ordine. Il fatto che u soddisfi la (4.19) significa che u non è più convessa di f^+. Il lemma che segue asserisce allora che in questo caso il minimo di u, passando da una palla di raggio R ad una di raggio metà, non decresce più di $R^2 f$.

Lemma 4.3.1. *Siano $B_{\sigma R} \subset B_{\tau R} \subset B_R$ palle concentriche con $0 < \sigma < \tau < 1$. Per h_M sufficientemente piccolo si ha*

$$\min_{B_{\tau R}} u \geq \gamma \min_{B_{\sigma R}} u - CR\|f\|_{L^n(B_R)},$$

dove γ e C dipendono solo dalla struttura di $\mathbb{L}$, da σ e da τ.

Dim Possiamo supporre senza perdere in generalità che le palle siano centrate in 0.
Consideriamo ancora la funzione di troncamento

$$\eta(x) = \left((1 - |x|^2 / r^2)^+\right)^\beta \leq 1.$$

Utilizzando l'osservazione 4.1.5 e riconducendoci quindi al caso continuo, con un semplice calcolo si verifica che

$$\mathbb{L}(\eta)(x) \geq 0,$$

per $\sigma R \leq |x| \leq R$ e β sufficientemente grande, (basta $\beta \geq 2(\Lambda + MR)/\sigma^2$).
Poniamo

$$m = \min_{B_{\sigma R}} u,$$

e consideriamo la funzione

$$v = m\eta - u.$$

Osserviamo due cose: innanzitutto

$$\mathbb{L}(v)(x) \geq -\mathbb{L}(u)(x) \geq -f \qquad \text{in } B_R \setminus B_{\sigma R};$$

inoltre, una semplice verifica mostra che

$$v \leq 0 \qquad \text{in } \partial B_R \setminus B_{\sigma R}.$$

Questo ci permette di sfruttare la stima A.-B.-P. 4.2.1 in $B_R \backslash B_{\sigma R}$, ottenendo

$$v \leq CR\|f\|_{L^n(B_R)} \qquad \text{in } B_R \setminus B_{\sigma R},$$

ossia, osservando che $\min_{B_{\tau R}} \eta = (1-\tau^2)^\beta$,

$$u \geq (1-\tau^2)^\beta m - CR\|f\|_{L^n(B_R)} \qquad \text{in } B_{\tau R},$$

che è l'enunciato del lemma.

□

Diamo ora un lemma che ci permette di controllare la decrescita del minimo non in base al diminuire del raggio, ma in base al diminuire della misura dell'insieme sui cui si osserva il minimo. Per comodità supporremo che l'operatore $\mathbb{L}$ abbia termine di primo grado nullo, ossia $c = 0$. Questo non disturberà la dimostrazione dell'Hölderianità di u, purché si sostituisca ad f la funzione $f - cu$.

Lemma 4.3.2. *Siano $B_{\sigma R} \subset B_{\tau R} \subset B_R$ palle concentriche con $0 < \sigma < \tau < 1$. Allora esistono costanti $1 > \delta, \gamma > 0$ e C, dipendenti solo dalla struttra di $\mathbb{L}$, da σ e da τ, tali che, se*

$$e \subset B_{\sigma R} \qquad e \qquad |E| \geq \delta\, |B_{\sigma R}|\,, \tag{4.20}$$

allora

$$\min_{B_{\tau R}} u \geq \gamma \min_E u - CR\|f\|_{L^n(B_R)},$$

Dim Sia $1 > \delta > 0$ da fissare a posteriori, ed $E \subset B_{\sigma R}$ per cui valga la (4.20). Poniamo $m = \min_{B_{\sigma R}} u$ e applichiamo il teorema 4.2.2 alla funzione $v = m - u$ nelle palle $B_{\sigma R}$ e $B_{\sigma R/2}$, per ottenere

$$\max_{B_{\sigma R/2}} v \leq C \left(\fint_{B_{\sigma R}} v^+ \, d\mu + CR\|f\|_{L^n(B_R)} \right).$$

Osserviamo, che essendo $v \leq 0$ su E, si ha

$$\fint_{B_{\sigma R}} v^+ \, d\mu \leq \frac{1}{|B_{\sigma R}|} \int_E v \, d\mu \leq (1-\delta) \max_{B_{\sigma R/2}} v,$$

e quindi

$$m - \min_{B_{\sigma R/2}} u \leq C \left((1-\delta)(m - \min_{B_{\sigma R}} u) + CR\|f\|_{L^n(B_R)} \right).$$

In conclusione, basta scegliere

$$\delta = 1 - \frac{1}{2C},$$

per ottenere

$$\min_{B_{\sigma R/2}} u \geq \frac{m}{2} - CR\|f\|_{L^n(B_R)},$$

da cui segue l'enunciato, applicando il lemma precedente.

$\square$

Passiamo alla dimostrazione di un lemma classico di decomposizione in cubi diadici disgiunti. Qui e nel seguito useremo la seguente notazione: diremo che $Q_r(x)$ è un cubo in G intendendo l'intersezione del grafo immerso con il cubo

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y^i - x^i| \leq r \quad \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

MEAS **Lemma 4.3.3.** *Sia Q_0 un cubo in G e $E \subset Q_0$. Poniamo, per $0 < \delta < 1$*

$$E_\delta = \bigcup_{Q_r(x)} \{Q_{3r}(x) \cap Q_0 \mid |E \cap Q_r(x)| \geq \delta\, |Q_r(x)|\}. \tag{4.21}$$ E

Allora o $E_\delta = Q_0$ o $|E_\delta| \geq \delta^{-1}\,|E|$.

Dim Se $|E \cap Q_0| \geq \delta\,|Q_0|$ abbiamo finito, perché $E_\delta = Q_0$. Altrimenti decomponiamo Q_0 in 2^n cubi diadici disgiunti Q_1^j, con $j = 1, \ldots 2^n$. Procediamo in questo modo: ogni volta che al passo i decomponiamo un cubo Q_i^j, trascuriamo i sottocubi Q_{i+1}^j per cui

$$\left|E \cap Q_{i+1}^j\right| \geq \delta \left|Q_{i+1}^j\right|,$$

e decomponiamo ulteriormente i sottocubi per cui

$$0 < \left|E \cap Q_{i+1}^j\right| < \delta \left|Q_{i+1}^j\right|.$$

Otteniamo così, in un numero finito di passi, la famiglia di cubi disgiunti:

$$\mathcal{F} = \{Q \mid 0 < \left|E \cap Q_{i+1}^j\right| \geq \delta \left|Q_{i+1}^j\right|\}.$$

È chiaro che $E \subset \mathcal{F}$, essendo il grafo bene immerso. Se chiamo $\tilde{Q}$ il predecessore in questo processo di $Q = Q_r(x)$, allora si avrà

$$0 < \left| E \cap \tilde{Q} \right| < \delta \left| \tilde{Q} \right|,$$

ed anche

$$\tilde{Q} \subset Q_{3r}(x).$$

Si ha allora

$$E_\delta \supset \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} \tilde{Q} \supset \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q \supset E,$$

e quindi, essendo la famiglia $\{\tilde{Q} \mid Q \in \mathcal{F}\}$ una famiglia disgiunta

$$|E| \leq \left| E \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} \tilde{Q} \right| \leq \sum_{Q \in \mathcal{F}} \left| E \cap \tilde{Q} \right| \leq \delta \sum_{Q \in \mathcal{F}} \left| \tilde{Q} \right| \leq \delta \left| E_\delta \right|,$$

che è quanto volevasi dimostrare.

$\square$

Possiamo ora dare la cosiddetta diseguaglianza di Harnack debole.

HD **Teorema 4.3.4.** *Per ogni τ sufficientemente piccolo e $B_{\tau R} \subset B_R$, esistono costanti C, $\tilde{p}$ dipendenti solo dalla struttura di $\mathbb{L}$ e da τ, per cui*

$$\left(\fint_{B_{\tau R}} u^{\tilde{p}} \, d\mu \right)^{1/\tilde{p}} \leq C \left(\min_{B_{\tau R}} u + R \|f\|_{L^n(B_R)} \right).$$

Dim Daremo la dimostrazione per cubi di $\mathbb{R}^n$, anzichè per palle. Il caso generale seguirà da argomenti di ricoprimento standard per τ sufficientemente piccolo. Fissiamo un cubo di G, $Q_0 \subset B_{\tau' R} \subset B_R$ e definiamo

$$E^t = \{x \in Q_0 \mid u(x) > t\},$$

per $t > 0$. Sia ora Q_r un cubo di G tale che

$$\left| E^t \cap Q_r \right| \geq \delta \left| Q_r \right|,$$

dove δ è quello dato dal lemma delta 4.3.2. Utilizzando il lemma delta 4.3.2 con τ e σ opportuni, si ha

$$u(x) \geq \gamma t - CR\|f\|_{L^n(B_R)} \qquad \forall x \in Q_0 \cap Q_{3r}.$$

In base alla (4.21), abbiamo allora

$$u(x) \geq \gamma t - CR\|f\|_{L^n(B_R)} \qquad \forall x \in E^t_\delta.$$

Poniamo ora

$$E^t_{j*\delta} = \big(\dots\big(\big(E^t\underbrace{\big)_\delta\big)_\delta\dots\big)_\delta}_{j},$$

ed osserviamo che, per ogni $j \geq 1$, si ha

$$\min_{E^t_{(j+1)*\delta}} u \geq \gamma \min_{E^t_{j*\delta}} u - CR\|f\|_{L^n(B_R)}$$

Sfruttando il lemma 4.3.3, si ottiene

$$E^t_{(j+1)*\delta} = Q_0, \qquad \text{o almeno} \qquad \left|E^t_{(j+1)*\delta}\right| \geq \delta^{-1} E^t_{j*\delta}.$$

Sia dunque $0 \leq s$ il minimo intero non negativo per cui

$$\left|E^t\right| \geq \delta^s \left|Q_0\right|.$$

Applicando un processo induttivo, si ha

$$\min_{E^t_{s*\delta}} u \geq \gamma^s t - \frac{CR}{1-\gamma}\|f\|_{L^n(B_R)}, \qquad \left|E^t_{s*\delta}\right| \geq \delta^{-s}\left|E^t\right| \geq \left|Q_0\right|,$$

e quindi

$$u(x) \geq \gamma^s t - \frac{CR}{1-\gamma}\|f\|_{L^n(B_R)}, \qquad \forall x \in Q_0.$$

Notiamo che, per la definizione di s,

$$s \geq \frac{1}{\log \delta} \log\left(\frac{\left|E^t\right|}{\left|Q_0\right|}\right) \geq s - 1,$$

e quindi

$$t \frac{\left|E^t\right|}{\left|Q_0\right|}^{\log\gamma/\log\delta} \leq \min_{Q_0} u + CR\|f\|_{L^n(B_R)}.$$

L'enunciato segue allora dalla diseguaglianza di Tchebichev

$$\left(\int_{Q_0} u^{\tilde{p}}\, d\mu\right)^{1/\tilde{p}} \leq t\left|E^t\right|^{1/\tilde{p}},$$

applicata per $\tilde{p} = \log\delta/\log\gamma$. $\square$

Diamo ora gli enunciati della diseguaglianza di Harnack e dell'Hölderianità discreta, le cui dimostrazioni sono a questo punto identiche a quelle dei teoremi 3.4.1 e 3.4.2. Il primo teorema è il collegamento fra le due stime 4.2.2 e 4.3.4.

Teorema 4.3.5. *(Diseguaglianza di Harnack)*

Sia u una soluzione positiva in B_R dell'equazione $\mathbb{L}(u) = f$. Allora per τ sufficientemente piccolo, si ha

$$\max_{B_{\tau R}} u \leq C \left(\min_{B_{\tau R}} u + R \|f\|_{L^n(B_R)} \right),$$

dove $C = C(\mathbb{L}, R)$.

Teorema 4.3.6. *Sia u una soluzione in B_R dell'equazione $\mathbb{L}(u) = f$. Allora si ha, per ogni $\rho \leq R$*

$$\operatorname{Osc}(u, \rho) \leq C \left((1 + R^2) \max_{B_R} |u| + R \|f\|_{L^n(B_R)} \right) \cdot \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\alpha}.$$

Dove C e α dipendono da $\mathbb{L}$.

Bibliography

`Ambr-Gamma` [1] L. Ambrosio. *Appunti del Corso sulla Gamma-Convergenza tenuto alla Scuola Normale Superiore*. 1998.

`Aron` [2] D. Aronson. Bounds for fundamental solution of a parabolic equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:890–896, 1967.

`Ausc` [3] P. Auscher. Regularity theorems and heat kernel for elliptic operators. *J. Lond. Math. Soc.*, 54(2):284–296, 1994.

`BS` [4] G. Barles and P. E. Souganidis. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equation. *Asimpt. Anal.*, 4:271–283, 1991.

`Bell` [5] G. Bellettini and A. Coscia. Discrete approximation of a free discontinuity problem. *Numer. Funct. Anal. Optimization*, 15(3-4):201–224, 1994.

`Bill` [6] P. Billingsley. *Probability and Measure*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John-Wiley, 1979.

`BubeS` [7] K. P. Bube and J. C. Strikwerda. Interior regularity estimates for elliptic systems of difference equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20(4):653–670, 1983.

`Caffarelli` [8] X. Caffarelli, L. A. e Cabré. *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, volume 43 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 1995.

`Chung` [9] F. R. K. Chung. *Spectral Graph Theory*, volume 92 of *Regional Conference Series in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 1997.

`Ciarlet` [10] P. G. Ciarlet. *The Finite Elements Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.

CG [11] T. Coulhon and A. Grigoryan. Random walks on graphs with regular volume growth. *G.A.F.A.*, 8:656–701, 1998.

CSC [12] T. Coulhon and L. Saloff-Coste. Isopérimétrie pour les groupes et les variétés. *Rev. Math. Iberoam.*, 11(3):687–726, 1993.

DG [13] E. De Giorgi. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. *Mem. Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 3(3):25–43, 1957.

Del1 [14] T. Delmotte. Inégalité de Harnack elliptique sur le graphes. *Colloq. Math.*, 72(1):19–37, 1997.

Del2 [15] T. Delmotte. Parabolic Harnack inequality and estimates on Markov chains on graphs. *Rev. Math. Iberoam.*, 15(1):181–232, 1999.

figatta [16] A. Figà-Talamanca and M. A. Picardello. *Harmonic Analysis on Free Groups*, volume 87 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, New-York, 1983.

giusti [17] E. Giusti. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Birkhäuser, 1984.

Gobb [18] M. Gobbino. Finite difference approximation of the Mumford-Shah functional. *Commun. Pure appl. math.*, 51(2):197–228, 1998.

Grom [19] M. Gromov. Hyperbolic groups. *Essays in Group Theory*, pages 75–263, 1987. ed. S.M.Gersten, Springer-Verlag.

Kan [20] M. Kanai. Rough isometries and combinatorial approximation of geometries of noncompact Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, 37:391–413, 1985.

KS [21] N. V. Krilov and M. V. Safanov. An estimate of the probability that a diffusion process hits a set of positive measure. *Soviet Math. Dokl.*, 20:253–255, 1979.

TK2 [22] H. J. Kuo and N. S. Trudinger. Discrete methods for fully nonlinear elliptic equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29:123–135, 1992.

TK1 [23] H. J. Kuo and N. S. Trudinger. Positive difference operators on general meshes. *Duke Math. J.*, 83:415–433, 1996.

Lawl [24] G. F. Lawler. Inequality for difference operators coming from random walks with symmetric, spatially inhomogeneous, increments. *Proc. London Math. Soc.*, 63(3):552–568, 1991.

Merk [25] A. B. Merkov. Second-order elliptic equation on graphs. *Math. USSR-Sb*, 5:493–509, 1986.

Mos [26] J. Moser. On Harnack's Theorem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:577–591, 1961.

MW [27] T. Motzkin and W. Wasow. On the approximation of linear elliptic differential equation by difference equation with positive coefficients. *J. Math. Phys.*, 31:253–259, 1952.

Nash [28] J. Nash. Continuity of solution of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math.*, 80:931–954, 1958.

SC [29] L. Saloff-Coste. A note on Poincaré, Sobolev, and Harnack inequalities. *Duke math. J.*, I.M.R.N(2):27–38, 1992.

Soardi [30] P. M Soardi. *Potential Theory on Infinite Networks*, volume 1590 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1994.

var [31] N. Th. Varopoulos. Isoperimetric inequalities and Markov chains. *J. Funct. Anal.*, 63:215–239, 1985.