G. BELLETTINI(*)

Alcuni risultati sulle minime barriere per movimenti geometrici di insiemi

1. Introduzione

Scopo di questa nota è illustrare qualche risultato sulle minime barriere nel senso di De Giorgi [24] applicate a certi movimenti geometrici di insiemi che coinvolgono le curvature.

Consideriamo un insieme $E \subseteq \mathbf{R}^n$ la cui frontiera ∂E sia un'ipersuperficie compatta di classe $\mathcal{C}^\infty$; diciamo che E si evolve secondo la curvatura media se ogni punto di ∂E si muove con una velocità V nella direzione normale uguale a meno la somma κ delle curvature principali di ∂E nel punto in questione,

$$V = -\kappa. \tag{1.1}$$

Per convenzione prendiamo κ non negativa per insiemi convessi e V positiva per insiemi che si espandono. Osserviamo che E e il suo complementare $\mathbf{R}^n \setminus E$ hanno la stessa evoluzione.

Le motivazioni che portano a studiare problemi del tipo (1.1) sono di carattere sia geometrico che fisico. Dal punto di vista geometrico il movimento per curvatura media è legato alle superfici minime dato che la (1.1) si può interpretare come il sistema gradiente associato al perimetro di E. Fisicamente, alcuni problemi di evoluzione di interfacce e di tensione superficiale sono descritti mediante leggi di evoluzione in cui la curvatura media ha un ruolo importante [16].

Un'equazione che generalizza la (1.1) e che compare in certi processi fisici legati alle transizioni di fase è quella che descrive il cosiddetto movimento per curvatura media con termine forzante g, che si scrive come

$$V = -\kappa + g. \tag{1.2}$$

Nella (1.2) il termine g, che è assegnato e rappresenta l'effetto di un campo esterno, dipende dalle variabili spaziali x e temporali t, e dall'insieme E, nel senso che dipende dall'orientazione della frontiera ∂E nel punto $x \in \partial E$ al tempo t. Le due leggi di evoluzione (1.1) e (1.2) sono dunque qualitativamente diverse: in primo luogo la (1.1) è invariante per traslazioni spaziali, mentra la (1.2) in generale non lo è; in secondo luogo, se E evolve secondo la (1.2) allora $\mathbf{R}^n \setminus E$ evolve secondo la (1.2) con $-g$ al posto di g.

Il movimento secondo la curvatura media può essere descritto tramite un'opportuna equazione parabolica non lineare, per la quale si può dimostrare l'esistenza di un'unica soluzione classica per tempi piccoli [6,7,35,40,47,48,49,58]. È utile anche ricordare che tale evoluzione può essere caratterizzata mediante un' equazione differenziale soddisfatta dalla distanza con segno dalla stessa frontiera dell'insieme

(*)Istituto di Matematiche Applicate U. Dini, Università di Pisa, 56126 Pisa. email: bellettini@sns.it

[10]; vale inoltre il principio del confronto, nel senso che se E_1, E_2 sono due insiemi con frontiere compatte e regolari e se E_1 è strettamente contenuto in E_2 allora, finchè siamo in condizioni di regolarità, una tale inclusione resta verificata per gli insiemi in evoluzione.

D'altra parte è ben noto che le ipersuperfici lisce che si evolvono secondo la curvatura media non sempre rimangono regolari ma, dopo un certo tempo finito, possono sviluppare delle singolarità, dove per singolarità intendiamo, ad esempio, la formazione di punti della ipersuperficie in cui la curvatura media non può essere definita in senso classico. Il caso più semplice di singolarità a tempo finito è quello della "sparizione", che si manifesta in tutte le evoluzioni di insiemi compatti: non è difficile verificare che la sfera di raggio R che si evolve secondo la (1.1) al tempo $t = \frac{R^2}{2(n-1)}$ si riduce a un punto. Si possono immaginare esempi più interessanti di singolarità, in cui una componente connessa si divide, a un certo istante, in due componenti connesse; oppure, usando un opportuno termine forzante, si possono costruire situazioni in cui due parti dell'insieme E, inizialmente disgiunte, vengono a contatto.

Tutti questi esempi mostrano la necessità di introdurre definizioni deboli di movimenti geometrici di insiemi, in cui si possa dare comunque un senso all'evoluzione anche dopo il verificarsi di una singolarità. Varie sono state le proposte in questa direzione negli ultimi anni, inserite nell'ambito di teorie diverse, come la teoria geometrica della misura e la teoria delle soluzioni delle equazioni paraboliche nel senso della viscosità.

Tra gli approcci generalizzati considerati nella letteratura matematica segnaliamo: 1) l'approccio di Brakke [14] che studia i movimenti secondo la curvatura media nel contesto della teoria dei varifolds; 2) l'approccio di Evans-Spruck [34,35,36,37], Chen-Giga-Goto [17], Giga-Goto-Ishii-Sato [45], che considerano le linee di livello delle soluzioni, nel senso della viscosità, di alcune equazioni differenziali di tipo parabolico completamente non lineare, ove la nozione di soluzione viscosa usata è quella che risale ai lavori di Crandall e P.-L. Lions [19], P.-L. Lions [61], Jensen [60] (si vedano anche Ohta-Jasnow-Kawasaki [66], Osher-Sethian [67], Ishii [59], Soner [68,69], e Ilmanen [52]); 3) le soluzioni che si ottengono come limiti dell'equazione di reazione-diffusione di Allen-Cahn [10,15,20,21,32,33,54,63] e di una equazione di tipo Allen-Cahn non locale [27,28,29,30,31,50,51]; 4) l'approccio variazionale di Almgren-Taylor-Wang [2] e sue possibili generalizzazioni con il metodo dei movimenti minimizzanti di De Giorgi [3,4,23,39,41,42,43]; 5) il metodo della regolarizzazione ellittica di Ilmanen [55]; 6) il metodo delle set-theoretic subsolutions di Ilmanen [53]; 7) il metodo delle minime barriere di De Giorgi [24]; 8) il metodo della penalizzazione sulle derivate di ordine massimo di De Giorgi [26].

Come già detto all'inizio, lo scopo di questa nota è quello di approfondire l'approccio delle minime barriere. Il metodo delle barriere, data la sua generalità, sembra avere un certo interesse per vari motivi. Da un lato si può pensare di inquadrare in questa teoria molte situazioni diverse non collegate alle evoluzioni di insiemi (si vedano gli Esempi 3.1,3.2). D'altra parte, per quanto riguarda i movimenti geometrici di insiemi, le barriere consentono di definire evoluzioni generalizzate di varietà anche di codimensione arbitraria, come suggerito dallo stesso De Giorgi [24] (si veda [5]). Inoltre, in codimensione uno si può dare la definizione di minima barriera anche per evoluzioni molto generali, come ad esempio per evoluzioni descritte da equazioni con coefficienti non regolari, oppure da equazioni per le quali i coefficienti delle derivate seconde non godano della proprietà di uniforme ellitticità (si veda la Proposizione 4.3).

Nei lavori [12,13], scritti in collaborazione con Maurizio Paolini, sono state studiate alcune proprietà generali delle minime barriere quando la legge di evoluzione è la (1.2). In questo lavoro riprendiamo molte delle considerazioni fatte in [13], per evoluzioni geometriche più generali della (1.2), si veda la (4.1). Le dimostrazioni, se analoghe a quelle di [13], sono omesse.

Il lavoro è organizzato come segue. Nella Sezione 2 introduciamo alcune notazioni. Nella Sezione 3 diamo la definizione astratta di barriera, con dei commenti e due esempi, non collegati alle evoluzioni geometriche. La Sezione 4 è dedicata alle definizioni e proprietà delle minime barriere $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_\star$, $\mathcal{M}^\star$ per i movimenti geometrici. La legge di evoluzione qui dipende dalle curvature principali, da un campo di pressione p e da un termine forzante g (si veda la (4.1)). I motivi per cui vengono introdotte le barriere regolarizzate $\mathcal{M}_\star$, $\mathcal{M}^\star$ sono discussi nella Sezione 4.1. Il Teorema 4.1 mostra la relazione tra il movimento generalizzato di un insieme e quello del suo complementare, e il Teorema 5.1 della Sezione 5 mostra le relazioni che intercorrono tra $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_\star$, $\mathcal{M}^\star$ e una qualsiasi evoluzione di insiemi che verifichi le proprietà di semigruppo e del confronto e che estenda le evoluzioni geometriche regolari. Nella Sezione 6 si mostrano i legami tra le barriere e le soluzioni nel senso della viscosità, seguendo un approccio suggerito in [24]. Nella Sezione 7 discutiamo brevemente quel particolare fenomeno di singolarità del movimento denominato "fattening", che viene definito, alla luce dei risultati precedenti, usando le minime barriere regolarizzate $\mathcal{M}_\star$, $\mathcal{M}^\star$. Nella Appendice si richiama brevemente un teorema di esistenza e unicità locale di soluzioni regolari per l' evoluzione (4.1).

2. Notazioni

Indichiamo con $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$. Dato un insieme $E \subseteq \mathbf{R}^n$, denotiamo con $\mathrm{int}(E)$, $\overline{E}$, e ∂E la parte interna, la chiusura, e la frontiera di E, rispettivamente. Denotiamo con $A(\mathbf{R}^n)$ e $C(\mathbf{R}^n)$ le famiglie degli aperti e dei chiusi di $\mathbf{R}^n$, rispettivamente.

Indichiamo con $\mathrm{Sym}(n)$ lo spazio delle matrici reali simmetriche $n \times n$.

Nel seguito poniamo $I = [t_0, +\infty[$, per un fissato $t_0 \in \mathbf{R}$; $p \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times I))^n$, $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times I)$ sono due funzioni assegnate, $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Come accennato nell'introduzione, p ha il significato di un campo di pressione e g di un termine forzante.

Indichiamo con (a_{ij}) una matrice simmetrica di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times I)$ che soddisfa la condizione di uniforme ellitticità

$$(2.1)\quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq c|\xi|^2 \qquad \forall (x,t) \in \mathbf{R}^n \times I,\ \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\},$$

per una certa costante $c > 0$.

Denotiamo con $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ la classe degli insiemi la cui frontiera sia una ipersuperficie compatta di classe $\mathcal{C}^\infty$; dunque in un intorno di ogni punto $x \in \partial E$, l'insieme

E è il sottografico di una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ rispetto a un opportuno sistema di coordinate ortogonali.

Scegliamo le convenzioni seguenti: se $E \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ allora ∂E è orientata dal vettore unitario normale esterno ν_E; quindi, se d è la funzione distanza con segno da ∂E negativa in E, cioè $d(x) = \mathrm{dist}(x, E) - \mathrm{dist}\,(x, \mathbf{R}^n \setminus E)$, si ha $\nu_E = \nabla d$ su ∂E. La curvatura media moltiplicata per $(n-1)$ di ∂E nel punto $x \in \partial E$, indicata con $\kappa(x)$, coincide con $\Delta d(x)$ [46], ed è non negativa per insiemi convessi.

La derivata di una funzione regolare u rispetto alla coordinata x_i sarà indicata con $\nabla_i u$, e l'Hessiano con $\nabla^2 u = (\nabla_{ij} u)$.

3. Definizioni astratte di barriera e minima barriera

Richiamiamo con alcuni commenti ed esempi la definizione astratta di barriera e minima barriera secondo De Giorgi [24].

Definizione 3.1. *Sia S un insieme e sia $r \subseteq S^2$. Supponiamo che $S = \cap\{E \subseteq S : r \subseteq E^2\}$. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni di una variabile reale che soddisfa la seguente proprietà: per ogni $f \in \mathcal{F}$ esistono due numeri reali a, b tali che $a < b$ e $f : [a,b] \to S$. Diciamo che una funzione ϕ è una barriera associata alla coppia $(r, \mathcal{F})$, e scriveremo $\phi \in \mathcal{B}(r, \mathcal{F})$, se esiste un insieme convesso $J \subseteq I$ tale che $\phi : J \to S$ e, quando a, b, f soddisfano la condizione*

$$[a,b] \subseteq J, \quad f : [a,b] \to S, \quad f \in \mathcal{F}, \qquad (f(a), \phi(a)) \in r,$$

allora

$$(f(b), \phi(b)) \in r.$$

Nella definizione r ha il significato di grafico di una relazione binaria. La condizione $S = \cap\{E : r \subseteq E^2\}$, cioè che S sia l'ambiente di r, si può anche dire come segue: ogni punto di S è o primo o secondo elemento di una coppia appartenente a r, e dunque ogni punto di S è in relazione con qualche elemento di S.

Notiamo che se S ammette un elemento massimo e uno minimo rispetto a r (si veda (3.2)) allora le funzioni identicamente uguali a tale massimo e minimo sono barriere, ma di solito non interessanti. Possono comunque essere utili nella pratica certe barriere indipendenti dal tempo.

Osserviamo infine che se $f : [a,b] \to S$ è un elemento di $\mathcal{F}$, non è detto che f sia una barriera su $[a,b]$.

I seguenti due esempi mostrano una scelta di S, r per costruire barriere per una equazione differenziale ordinaria e per l'equazione del calore.

Esempio 3.1. Sia $\psi \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n))^n$,

$$S = \mathcal{P}(\mathbf{R}^n), \qquad r = \{(A, B) \in S^2 : A \subseteq B\}, \tag{3.1}$$

e diciamo che $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ appartiene a $\mathcal{F}$ se e solo se esiste una funzione $z \in \mathcal{C}^\infty([a,b]; \mathbf{R}^n)$ tale che

$$\dot{z}(t) = \psi(z(t)) \quad \forall t \in [a,b] \quad \text{e} \quad f(t) = \{z(t)\}.$$

Sia A un aperto di $\mathbf{R}^n$; allora la funzione $\phi : I \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ definita da

$$\phi(t) = \{x \in \mathbf{R}^n : \mathrm{dist}(x, A) < t \|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}\}$$

è una barriera associata a $(r, \mathcal{F})$.

Esempio 3.2. Sia S l'insieme costituito da tutte le funzioni da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$, e $r \subseteq S^2$ il grafico della usuale relazione di minore o uguale puntuale tra funzioni,

$$S = \mathbf{R}^{\mathbf{R}^n}, \qquad r = \{(f, g) \in S^2 : f \leq g\}.$$

Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ seguente:

$$f \in \mathcal{F} \iff f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times [a, b]) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n \times [a, b]), \quad \frac{\partial f}{\partial t} - \Delta f \leq 0 \text{ in } \mathbf{R}^n \times [a, b].$$

Si può allora vedere che se $\phi \in \mathcal{B}(r, \mathcal{F})$ e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times [a, b]) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n \times [a, b])$ allora vale $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi \geq 0$ in $\mathbf{R}^n \times [a, b]$.

Per ogni $T \subseteq S$ poniamo

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Minor}(r, T) = \{\eta \in S : (\eta, \chi) \in r \quad \forall \chi \in T\}, \\
&\mathrm{Maior}(r, T) = \{\eta \in S : (\chi, \eta) \in r \quad \forall \chi \in T\}, \\
&\mathrm{Mini}(r, T) = T \cap \mathrm{Minor}(r, T), \qquad \mathrm{Maxi}(r, T) = T \cap \mathrm{Maior}(r, T), \\
&\mathrm{Infer}(r, T) = \mathrm{Maxi}(r, \mathrm{Minor}(r, T)), \qquad \mathrm{Super}(r, T) = \mathrm{Mini}(r, \mathrm{Maior}(r, T)).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Se l'insieme $\mathrm{Infer}(r, T)$ (rispettivamente $\mathrm{Super}(r, T)$) consiste di un solo elemento di S esso viene indicato con r–$\inf T$ (rispettivamente con r–$\sup T$):

$$\begin{aligned}
r\text{–}\inf T = \eta &\iff \{\eta\} = \mathrm{Infer}(r, T), \\
r\text{–}\sup T = \eta &\iff \{\eta\} = \mathrm{Super}(r, T).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Notiamo che se S e r sono come in (3.1), e se $T = \{T_i\}_{i \in \Lambda}$, $T_i \subseteq \mathbf{R}^n$, allora $r-\sup T = \bigcup_{i \in \Lambda} T_i$, r–$\inf T = \bigcap_{i \in \Lambda} T_i$.

Definiamo adesso la minima barriera.

Definizione 3.2. *Sia $\eta \in S$; se esiste una funzione $\sigma : I = [t_0, +\infty[\to S$ definita, per ogni $t \in I$, dalla formula*

$$\sigma(t) = r\text{–}\inf\{\phi(t) : \quad \phi : I \to S,\ \phi \in \mathcal{B}(r, \mathcal{F}),\ (\eta, \phi(t_0)) \in r\}, \tag{3.4}$$

diremo che σ è la minima barriera associata a η, r, $\mathcal{F}$, e scriveremo $\sigma = \mathcal{M}(\eta, r, \mathcal{F}, I)$. ∎

Notiamo che i concetti di barriera e minima barriera sono piuttosto flessibili, dato che si ha libertà nella scelta di $S, r, \mathcal{F}$. Sottolineiamo che, nella pratica, dopo avere scelto $S, r, \mathcal{F}$ per avere la minima barriera la prima cosa da dimostrare è che per ogni $t \in I$ l'insieme r–$\inf\{\phi(t) : \quad \phi : I \to S,\ \phi \in \mathcal{B}(r, \mathcal{F}),\ (\eta, \phi(t_0)) \in r\}$ consiste di un solo elemento di S.

4. Barriere per movimenti geometrici di insiemi

Cominciamo con l'introdurre certe evoluzioni geometriche di insiemi, dipendenti dalle curvature e dal vettore normale, che verrano descritte da una opportuna funzione H.

Se $E(t)$ è una famiglia di insiemi appartenenti alla classe $\mathcal{C}^\infty_b(\mathbf{R}^n)$ parametrizzati da t in modo regolare in un certo intervallo di tempi, e se d indica la distanza con segno da $\partial E(t)$ negativa in $E(t)$, poniamo

$$H(x,t,\nabla d,\nabla^2 d) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\nabla_{ji} d + \sum_{i=1}^{n} p_i(x,t)\nabla_i d + g(x,t). \tag{4.1}$$

Indichiamo con H_- la funzione in (4.1) con $-g$ al posto di g.

Se la matrice $(a_{ij}(x,t))$ è l'identità, allora la funzione H in (4.1) si riduce a

$$H(x,t,\nabla d,\nabla^2 d) = -\Delta d + p\cdot\nabla d + g, \tag{4.2}$$

e dunque in tal caso

$$\frac{\partial d}{\partial t} + H(x,t,\nabla d,\nabla^2 d) = -V - \kappa + p\cdot\nu_{E(t)} + g, \qquad x\in\partial E(t),$$

dato che la velocità di espansione dell'insieme è $-\dfrac{\partial d}{\partial t}$, si confronti con la (1.2).

Nel seguito, per evoluzione geometrica intenderemo sempre l'evoluzione regolata dalla funzione H in (4.1).

Scegliamo nella Definizione 3.1

$$S = \mathcal{P}(\mathbf{R}^n), \qquad r = \{(A,B)\in S^2 : A\subseteq B\}, \tag{4.3}$$

e scegliamo la famiglia $\mathcal{F}$, che indicheremo con $\mathcal{F}_H$, come segue (si veda anche la Proposizione 4.3).

Definizione 4.1. *Siano $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$; una funzione $f:[a,b]\to\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ appartiene alla famiglia $\mathcal{F}_H$ se e solo se sono soddisfatte le tre seguenti condizioni:*
(1) l'insieme $\{(x,t) : a\le t\le b, x\in f(t)\}\subseteq\mathbf{R}^{n+1}$ è chiuso con frontiera compatta;
(2) se $d(\cdot,t)$ indica la distanza con segno dall'insieme $\partial f(t)$ negativa in $f(t)$ per $t\in[a,b]$, allora esiste un aperto $A\subseteq\mathbf{R}^n$ tale che $d\in\mathcal{C}^\infty(A\times[a,b])$ e $\partial f(t)\subseteq A$ per ogni $t\in[a,b]$;
(3) la seguente equazione in d è verificata su $\partial f(t)$:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + H(x,t,\nabla d,\nabla^2 d) = 0 \qquad \forall t\in[a,b],\ \forall x\in\partial f(t). \tag{4.4}$$

Osserviamo che la condizione (2) richiede che l'insieme $f(t)$ appartenga alla classe $\mathcal{C}^\infty_b(\mathbf{R}^n)$ per ogni $t\in[a,b]$; la condizione (3) (insieme con la (2)) implica che $\partial f(t)$ si evolve nel tempo $t\in[a,b]$ in modo regolare secondo la legge geometrica data da H. La famiglia $\mathcal{F}_H$ consiste perciò di tutte le evoluzioni geometriche regolari (localmente nel tempo). Tali evoluzioni hanno il ruolo di funzioni test (o più precisamente di insiemi test) nella Definizione 4.2 di barriera.

Osserviamo che l'evoluzione $\overline{\mathbf{R}^n \setminus f}$ soddisfa le condizioni (1)-(3) della Definizione 4.1 con $-g$ al posto di g, dunque $\overline{\mathbf{R}^n \setminus f} \in \mathcal{F}_{H_-}$.

Si può dimostrare [35,49] che se $E \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ allora E ammette una evoluzione geometrica regolare per tempi piccoli, si veda anche la Appendice.

Nel seguito r sarà sempre il grafico della relazione di inclusione tra insiemi come in (4.3); dunque da ora in poi la ometteremo nelle notazioni.

Quando $(a_{ij}) = \mathrm{Id}$, $p = 0$ e $g = 0$, indicheremo la famiglia $\mathcal{F}_H$ con $\mathcal{F}_0$.

La seguente definizione è conseguenza della Definizione 3.1 e della scelta di S, r fatta in (4.3).

Definizione 4.2. *Una funzione ϕ è una barriera, e scriveremo $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H)$, se e solo se esiste un insieme convesso $J \subseteq I$ tale che $\phi : J \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ e la seguente condizione è soddisfatta: se $f : [a,b] \subseteq J \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ appartiene a $\mathcal{F}_H$ e $f(a) \subseteq \phi(a)$ allora $f(b) \subseteq \phi(b)$.*

Osservazione 4.1. *Se $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ è un elemento della famiglia $\mathcal{F}_H$ allora, dal principio del confronto per le evoluzioni regolari, f è una barriera su $[a,b]$.*

La definizione di minima barriera ricorda la costruzione di tipo Perron, ed è la seguente (per semplicità, ometteremo da ora in poi la dipendenza da I nella notazione della minima barriera).

Definizione 4.3. *Sia $E \subseteq \mathbf{R}^n$ un insieme arbitrario; la minima barriera $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H) : I \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ è definita come*

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H)(t) = \bigcap \{\phi(t) : \quad \phi : I \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n),\ \phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H),\ \phi(t_0) \supseteq E\} \tag{4.5}$$

per ogni $t \in I$.

Osserviamo che la minima barriera (che è stata definita a partire da barriere tutte definite sullo stesso intervallo I) esiste sempre ed è unica. Risulta chiaro che è possibile definire la minima barriera per evoluzioni più generali di quella data da H, purchè la famiglia $\mathcal{F}_H$ degli insiemi test sia non vuota, dunque purchè si abbia a disposizione un risultato di esistenza e unicità locale per le evoluzioni regolari (o per qualche sottoevoluzione regolare, si veda la Proposizione 4.3). Si può anche pensare di modificare la scelta di S in (4.3), prendendo un'altra classe di insiemi (ad esempio la classe $C(\mathbf{R}^n)$ oppure la classe degli insiemi convessi, o una sua sottoclasse).

Proposizione 4.1. *Sia $E \subseteq \mathbf{R}^n$; allora*

(i) $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H)$;

(ii) $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H)(t_0) = E$;

(iii) *se $E, F \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ allora*

$$E \subseteq F \ \Rightarrow\ \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H)(t) \subseteq \mathcal{M}(F, \mathcal{F}_H)(t) \qquad \forall t \in I; \tag{4.6}$$

(iv) *supponiamo che $E \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ e che E ammetta una evoluzione geometrica classica $C_E(t)$ per ogni t in qualche intervallo di tempo $[t_0, t_0 + T]$. Allora $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H)(t) = C_E(t)$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + T]$;*

(v) *se E è tale che int$(E) = \emptyset$ allora $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H)(t) = \emptyset$ per ogni $t > t_0$;*

(vi) *indichiamo per un momento la minima barriera sull'intervallo $I = [t_0, +\infty[$ a partire dall'insieme E al tempo $t \in I$ con $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t)$. Allora vale la proprietà di semigruppo*

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t_2) = \mathcal{M}\left(\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t_1), \mathcal{F}_H, t_1\right)(t_2) \qquad t_0 \le t_1 \le t_2. \tag{4.7}$$

Dimostrazione. Le proprietà (i)-(v) seguono direttamente dalle definizioni, si veda anche [13]. Dimostriamo la (4.7). Prendiamo $t_0 \le t_1$ e definiamo $\phi : [t_0, +\infty[\to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ come

$$\phi(t) = \begin{cases} \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t) & \text{se } t_0 \le t \le t_1, \\ \mathcal{M}\left(\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t_1), \mathcal{F}_H, t_1\right)(t) & \text{se } t > t_1. \end{cases}$$

Allora $\phi(t_0) = E$ dalla (ii), e ϕ è una barriera su $[t_0, +\infty[$. Infatti se $f : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$, $f \in \mathcal{F}_H$, $f(a) \subseteq \phi(a)$ allora, se $[a, b] \subseteq [t_0, t_1]$, abbiamo $f(b) \subseteq \phi(b)$ per la (i); quando $a \ge t_1$, poichè $\phi(t_1) = \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t_1)$, similmente usando la (i) segue che $f(b) \subseteq \phi(b)$. Il caso $a < t_1 < b$ si dimostra in maniera analoga, considerando anche che $f_{|[a,t_1]}, f_{|[t_1,b]} \in \mathcal{F}_H$. Dunque ϕ è una barriera su $[t_0, +\infty[$ e pertanto $\phi(t) \supseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t)$ per ogni $t \ge t_0$, e se $t = t_2$ abbiamo una delle due inclusioni in (4.7). Poniamo adesso $B = \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t_1)$; dobbiamo dimostrare che $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t_2) \supseteq \mathcal{M}(B, \mathcal{F}_H, t_1)(t_2)$. Questo segue dal fatto che $M(E, \mathcal{F}_H, t_0)$ è una barriera su $[t_1, +\infty[$ che al tempo t_1 coincide con B. $\square$

Proposizione 4.2. *Esistono insiemi $E \subseteq \mathbf{R}^n$ per i quali*

$$\mathcal{M}(\mathbf{R}^n \setminus E, \mathcal{F}_{H_-})(t) \neq \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H)(t)$$

per qualche $t \in I$ (si ricordi che H_- è la funzione H con $-g$ al posto di g).

Dimostrazione. Siano $n = 2$, $(a_{ij}) = \mathrm{Id}$, $p = 0$, $g = 0$ (dunque consideriamo la legge di evoluzione (1.1)) e sia $E = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| + |x_2| \le 1\}$. Poichè $\mathbf{R}^n \setminus E$ è aperto, usando l'invarianza per traslazioni si può mostrare che l'insieme $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n \setminus E, \mathcal{F}_0)(t)$ è aperto per ogni $t \ge t_0$. Inoltre, come vedremo dall'Esempio 4.1, si ha che $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0)(t) = \mathcal{M}(\mathrm{int}(E), \mathcal{F}_0)(t)$ per ogni $t > t_0$, dunque $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0)(t)$ è chiuso per ogni $t > t_0$. $\square$

Indichiamo con $\mathcal{B}^c(\mathcal{F}_H)$ la famiglia delle funzioni ψ che hanno le stesse proprietà delle funzioni ϕ nella Definizione 4.2 dove le relazioni $f(a) \subseteq \phi(a)$, $f(b) \subseteq \phi(b)$ sono sostituite da $f(a) \supseteq \psi(a)$, $f(b) \supseteq \psi(b)$, rispettivamente. Se $t \in I$ l'insieme costituito da $\bigcup \psi(t)$, dove $\psi : I \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{B}^c(\mathcal{F}_H)$, $\psi(t_0) \subseteq E$, ha per complementare l'insieme $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n \setminus E, \mathcal{F}_H)(t)$.

Proposizione 4.3. *Consideriamo al posto di $\mathcal{F}_H$ la famiglia che si ottiene dalla Definizione 4.1 sostituendo l'equazione (4.4) con la disequazione (valida su $\partial f(t)$)*

$$\frac{\partial d}{\partial t} + H(x, t, \nabla d, \nabla^2 d) \ge 0 \qquad \forall t \in [a, b], \ \forall x \in \partial f(t). \tag{4.8}$$

Allora la minima barriera che si ottiene a partire da questa nuova famiglia di insiemi test coincide con la (4.5).

Dimostrazione. La (4.8) permette un maggior numero di insiemi test rispetto a $\mathcal{F}_H$, dunque meno barriere rispetto a $\mathcal{B}(\mathcal{F}_H)$, che danno origine a una minima barriera che contiene la (4.5). Dimostriamo l'inclusione opposta. Sia $f_\leq : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ una funzione che verifica le proprietà (1), (2) della Definizione 4.1 e la (4.8), tale che $f_\leq(a) \subseteq \mathcal{M}(E,\mathcal{F}_H)(a)$. Basterà dimostrare che $f_\leq(b) \subseteq \mathcal{M}(E,\mathcal{F}_H)(b)$. L'insieme $\partial f_\leq(s)$ è una ipersuperficie compatta regolare per ogni $s \in [a,b]$, dunque la norma L^∞ della seconda forma fondamentale di $\partial f_\leq(s)$ è limitata uniformemente rispetto a $s \in [a,b]$. Possiamo allora trovare un $\tau > 0$ indipendente da s tale che l'evoluzione geometrica di $f_\leq(s)$ secondo la (4.1) sia classica in $[s, s+\tau] \subseteq [a,b]$. Scriviamo $[a,b] = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} [t_i, t_{i+1}]$ dove $a = t_1 < \cdots < t_{m+1} = b$ e $t_{i+1} - t_i \leq \tau$. Indichiamo con $f^i(t)$ l'evoluzione geometrica secondo la (4.4) dell'insieme $f_\leq(t_i)$ per $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Dal principio del confronto per le evoluzioni regolari si ha $f_\leq(t_{i+1}) \subseteq f^i(t_{i+1})$. Ragionando per induzione su i, si ha $f^i(t_i) \subseteq \mathcal{M}(E,\mathcal{F}_H)(t_i)$ per ogni $i = 1, \ldots, m+1$, e dunque $f_\leq(t_{i+1}) \subseteq \mathcal{M}(E,\mathcal{F}_H)(t_{i+1})$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. Per $i = m$ si ha la tesi. $\square$

La Proposizione 4.3 mostra che la definizione di minima barriera può essere data sostituendo nella Definizione 4.1 la (4.4) con la (4.8) (che geometricamente corrisponde a una contrazione più veloce degli insiemi in evoluzione rispetto alla contrazione data da H); si possono definire dunque minime barriere (senza ottenere un insieme banale) anche per evoluzioni regolate da una funzione H molto generale, dato che è sufficiente trovare qualche sottoevoluzione regolare (locale nel tempo) come in (4.8). È a mia conoscenza aperto il problema dello studio delle proprietà della minima barriera per evoluzioni regolate da funzioni H che siano di tipo antiparabolico in qualche regione. Notiamo che se si considera la (4.8) invece della (4.4) l'Osservazione 4.1 in generale non è più valida; osserviamo anche che se H_1, H_2 sono due funzioni come in (4.1) tali che $H_1 \leq H_2$, allora $\mathcal{M}(E,\mathcal{F}_{H_1})(t) \subseteq \mathcal{M}(E,\mathcal{F}_{H_2})(t)$ per ogni $t \in I$.

Osservazione 4.2. *Accanto alle evoluzioni (4.1) si possono considerare anche evoluzioni non lineari nelle derivate seconde della funzione distanza del tipo seguente. Se $\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione dispari, definita su tutto $\mathbf{R}$, di classe $\mathcal{C}^\infty$, con $\inf_{x\in\mathbf{R}} \theta'(x) > 0$, e d è come nella Definizione 4.1, possiamo considerare funzioni H della forma*

$$-\theta(\Delta d) + \sum_{i=1}^{n} p_i(x,t)\nabla_i d + g(x,t),$$

e definire la minima barriera associata.

4.1. Le minime barriere regolarizzate $\mathcal{M}_\star(E,\mathcal{F}_H)$, $\mathcal{M}^\star(E,\mathcal{F}_H)$.

I seguenti esempi mostrano che la minima barriera $\mathcal{M}(E,\mathcal{F}_H)$ definita in (4.5) è sensibile anche a piccolissime modifiche dell'insieme iniziale E e hanno suggerito, insieme alla Proposizione 4.2, l'introduzione [13] delle minime barriere regolarizzate $\mathcal{M}_\star(E,\mathcal{F}_H)$, $\mathcal{M}^\star(E,\mathcal{F}_H)$ le quali sono "stabili" per operazioni di parte interna e di chiusura (si veda (4.14)) ed hanno un buon comportamento rispetto all'operazione di complementazione (si veda (4.16)).

Esempio 4.1. Siano $n = 2$, $(a_{ij}) = \mathrm{Id}$, $p = 0$, $g = 0$, $E = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$. Allora

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0)(t) = \mathcal{M}(\mathrm{int}(E), \mathcal{F}_0)(t) \qquad \forall t > t_0. \tag{4.9}$$

La dimostrazione di (4.9) si basa sui due fatti seguenti: 1) qualsiasi curva che sia frontiera di un insieme $f(t) \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^2)$, $f(t) \subseteq E$, non può toccare i vertici del quadrato chiuso E; 2) come conseguenza del principio del massimo forte se $F_1, F_2 \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ sono due insiemi distinti, $F_1 \subseteq F_2$, e se indichiamo con $C_{F_1}(t), C_{F_2}(t)$ le evoluzioni classiche di F_1, F_2 per curvatura media, in un certo intervallo di tempi $[t_0, t_0 + T]$, allora $\mathrm{dist}(\partial F_1(t), \partial F_2(t)) > 0$ per ogni $t \in]t_0, t_0 + T]$ (notiamo che è incluso il caso in cui $\partial F_1 \cap \partial F_2$ sia non vuoto, si veda [35]).

In modo simile si può dimostrare l'esempio seguente.

Esempio 4.2. Siano $n = 2$, $(a_{ij}) = \mathrm{Id}$, $p = 0$, $g = 0$, $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, e sia p un punto della frontiera di E. Allora

$$\mathcal{M}(E \setminus \{p\}, \mathcal{F}_H)(t) = \mathcal{M}(\mathrm{int}(E), \mathcal{F}_H)(t) \qquad \forall t > t_0.$$

Tenendo presente anche gli Esempi 4.1, 4.2 definiamo allora le barriere regolarizzate inferiore $\mathcal{M}_\star(E, \mathcal{F}_H)$ e superiore $\mathcal{M}^\star(E, \mathcal{F}_H)$ come segue.

Sia $E \subseteq \mathbf{R}^n$; per ogni $\varrho > 0$ poniamo

$$E_\varrho^- = \mathbf{R}^n \setminus \{x \in \mathbf{R}^n : \mathrm{dist}\,(x, \mathbf{R}^n \setminus E) \leq \varrho\}, \tag{4.10}$$

$$E_\varrho^+ = \{x \in \mathbf{R}^n : \mathrm{dist}(x, E) < \varrho\}, \tag{4.11}$$

e se $t \in I$ definiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\star(E, \mathcal{F}_H)(t) &= \bigcup_{\varrho > 0} \mathcal{M}\left(E_\varrho^-, \mathcal{F}_H\right)(t), \\ \mathcal{M}^\star(E, \mathcal{F}_H)(t) &= \bigcap_{\varrho > 0} \mathcal{M}\left(E_\varrho^+, \mathcal{F}_H\right)(t). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Notiamo che per definire $\mathcal{M}_\star(E, \mathcal{F}_H)$, $\mathcal{M}^\star(E, \mathcal{F}_H)$ è sufficiente definire $\mathcal{M}(\cdot, \mathcal{F}_H)$ sugli insiemi aperti.

Osserviamo che, se $t \in I$, la funzione $\varrho \to \mathcal{M}(E_\varrho^+, \mathcal{F}_H)(t)$ è una funzione monotona crescente, dunque per ogni $0 < \varrho_1 < \varrho_2$ si ha $\mathcal{M}^\star(E_{\varrho_1}^+, \mathcal{F}_H)(t) \subseteq \mathcal{M}_\star(E_{\varrho_2}^+, \mathcal{F}_H)(t)$.

Si possono allora dimostrare le proprietà seguenti [13].

Proposizione 4.4.
(i) per ogni $t \in I$ si ha

$$\mathcal{M}_\star(E, \mathcal{F}_H)(t) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H)(t) \subseteq \mathcal{M}^\star(E, \mathcal{F}_H)(t),$$

e tali inclusioni possono essere strette;

(ii) *se* $A \in A(\mathbf{R}^n)$ *e* $K \in C(\mathbf{R}^n)$, $K \subseteq A$ *e* K *ha frontiera compatta allora*

$$\mathcal{M}^\star(K, \mathcal{F}_H)(t) \subseteq \mathcal{M}\,(A, \mathcal{F}_H)\,(t) \qquad \forall t \in I, \tag{4.13}$$

mentre la (4.13) non vale in generale se $K \subseteq A$ *è solamente chiuso;*

(iii) *se* $C \in C(\mathbf{R}^n)$ *in generale* $\mathcal{M}\,(C, \mathcal{F}_H)\,(t)$ *non è chiuso;*

(iv) *per ogni* $t \in I$ *si ha*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\star\,(E, \mathcal{F}_H)(t) &= \mathcal{M}_\star\,(\mathrm{int}(E), \mathcal{F}_H)\,(t), \\ \mathcal{M}^\star\,(E, \mathcal{F}_H)(t) &= \mathcal{M}^\star\left(\overline{E}, \mathcal{F}_H\right)(t). \end{aligned} \tag{4.14}$$

(v) *se oltre alle ipotesi già fatte su* (a_{ij}), g, p *nella Sezione 2, si ha* $(a_{ij}) \in (L^\infty(\mathbf{R}^n \times I))^{n^2}$, $p \in (L^\infty(\mathbf{R}^n \times I))^n$, $g \in L^\infty(\mathbf{R}^n \times I)$, *ed esistono costanti* A_{ij}, P_i, G *strettamente positive tali che*

$$|a_{ij}(x,t) - a_{ij}(y,t)| \leq A_{ij}|x-y| \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ \forall t \in I,\ \forall i, j = 1, \ldots, n$$

$$|p_i(x,t) - p_i(y,t)| \leq P_i|x-y| \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ \forall t \in I,\ \forall i = 1, \ldots, n$$

$$|g(x,t) - g(y,t)| \leq G|x-y| \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ \forall t \in I,$$

allora per ogni $t \in I$

$$A \in A(\mathbf{R}^n) \Rightarrow \mathcal{M}_\star\,(A, \mathcal{F}_H)(t) = \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H)(t) \in A(\mathbf{R}^n), \tag{4.15}$$

e se $E \subseteq \mathbf{R}^n$

$$\mathcal{M}_\star\,(E, \mathcal{F}_H)(t) \in A(\mathbf{R}^n),$$

$$\mathcal{M}^\star\,(E, \mathcal{F}_H)(t) \in C(\mathbf{R}^n).$$

Vale inoltre il seguente teorema [13].

Teorema 4.1. *Nelle stesse ipotesi su* $(a_{ij}), p, g$ *elencate nel punto (v) della Proposizione 4.4, se* $E \subseteq \mathbf{R}^n$ *ha frontiera limitata si ha*

$$\mathcal{M}_\star(\mathbf{R}^n \setminus E, \mathcal{F}_{H_-})(t) = \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{M}^\star(E, \mathcal{F}_H)(t) \qquad \forall t \in I \tag{4.16}$$

(si ricordi la definizione di H_- *dopo la (4.1), e si confronti con la Proposizione 4.2).*

In [53,55] Ilmanen ha introdotto una evoluzione generalizzata che corrisponde al complementare della (4.5) per gli insiemi E aperti, dunque nello stesso spirito della definizione di minima barriera (applicata al movimento per curvatura media in codimensione uno) data da De Giorgi. Segnaliamo che le evoluzioni generalizzate considerate in [53] sono state applicate a problemi invarianti per traslazioni spaziali, in cui non si deve distinguere tra l'evoluzione di un insieme e quella del suo complementare; non vengono inoltre considerate le evoluzioni regolarizzate inferiore $\mathcal{M}_\star$ e superiore $\mathcal{M}^\star$.

Concludiamo questa sezione mostrando come si può adattare il metodo delle minime barriere al moto per curvatura media di varietà di codimensione qualsiasi in $\mathbf{R}^n$ [24,25]. Tali movimenti sono stati estensivamente studiati in [5].

Sia h un intero con $0 \leq h \leq n$, e prendiamo S e r come in (4.3). Siano $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$; una funzione $f : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ appartiene alla famiglia $\mathcal{F}^h$ se e solo se sono soddisfatte le condizioni (1),(2) della Definizione 4.1 e la seguente disequazione in d è verificata su $\partial f(t)$:

$$\frac{\partial d}{\partial t} \geq \Theta_h[d] \qquad \forall t \in [a, b],\ \forall x \in \partial f(t).$$

La funzione $\Theta_h[d]$ è definita come segue: se indichiamo con γ la forma quadratica

$$\gamma(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \nabla_{ij} d\ \xi_j \xi_i$$

per tutti i vettori $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ortogonali a ∇d, e denotiamo con $\varrho_1 \leq \varrho_2 \leq \cdots \leq \varrho_{n-1}$ gli autovalori di γ, allora

$$\Theta_h[d] = \sum_{i=1}^{h} \varrho_i.$$

Se W è una varietà di codimensione h in $\mathbf{R}^n$, si può definire la sua evoluzione (generalizzata) considerando, per ogni $t \in I$,

$$\mathcal{M}^*(W, \mathcal{F}^h)(t).$$

L'idea della definizione è di considerare i limiti delle evoluzioni dei piccoli intorni tubolari intorno a W, i quali sono ipersuperfici fatte evolvere (per tenere conto solo della geometria di W) con una legge che trascura le $n - 1 - h$ curvature più alte.

5. Confronto tra le minime barriere e una evoluzione astratta per i movimenti geometrici

Come già accennato nell'Introduzione, varie sono state in letteratura le definizioni deboli proposte per trattare i movimenti geometrici di insiemi secondo la curvatura media. Molte di queste evoluzioni generalizzate hanno in comune alcune proprietà, come le proprietà di semigruppo e di confronto, e il fatto di coincidere con il movimento classico qualora quest'ultimo esista. Per questo motivo ci è parso naturale considerare il problema del confronto tra le minime barriere e una evoluzione di insiemi che verifichi le proprietà sopra elencate (una tale evoluzione è stata chiamata comparison flow, si veda la Definizione 5.1). Una risposta a questo problema è data nel Teorema 5.1. Vedremo nella Sezione 6 come utilizzare questo risultato per paragonare le minime barriere con le evoluzioni ottenute a partire dalle soluzioni del movimento intese nel senso della viscosità. Sottolineiamo che il Teorema 5.1 mostra che le barriere regolarizzate $\mathcal{M}_\star$, $\mathcal{M}^\star$ forniscono rispettivamente una limitazione inferiore e una superiore a ogni comparison flow. La dimostrazione del Teorema 5.1 è la stessa che si trova in [13], e ne daremo solo un breve cenno.

Definizione 5.1. *Sia $\mathcal{A}$ un famiglia di insiemi che contiene gli aperti e i chiusi di $\mathbf{R}^n$. Diciamo che R è un comparison flow se valgono le proprietà seguenti. Se $(E,\tau) \in \mathcal{A} \times I$, posto $\zeta = R(E,\tau)$, allora $\zeta : [\tau, +\infty[\to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$, $\zeta(\tau) = E$, e si ha:*

(i) (proprietà di semigruppo) per ogni $A \in \mathcal{A}$ avente frontiera limitata, per ogni $t_0 \le t_1 \le t_2$, se poniamo $B = R(A,t_1)(t_2)$ allora

$$R(A,t_1)(t) = R(B,t_2)(t) \qquad \forall t \in [t_2, +\infty[;$$

(ii) (proprietà del confronto) se $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \subseteq B$ e se $t_1 \in I$, allora $R(A,t_1)(t) \subseteq R(B,t_1)(t)$ per ogni $t \in [t_1, +\infty[$;

(iii) (estensione delle evoluzioni regolari) se $C \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ e se $t_1 \in I$ allora $R(C,t_1)(t)$ coincide con l'evoluzione geometrica regolare di C per ogni istante $t \ge t_1$ per cui tale evoluzione regolare esiste.

Vale allora il risultato seguente.

Teorema 5.1. *Supponiamo che $(a_{ij}), p, g$ verifichino le ipotesi elencate al punto (v) della Proposizione 4.4. Sia $\mathcal{A}$ come nella Definizione 5.1, e sia R un comparison flow. Allora, se $E \subseteq \mathcal{A}$ ha frontiera limitata e se E_ϱ^-, E_ϱ^+ sono definiti come in (4.10) e (4.11) rispettivamente, abbiamo*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_\star(E,\mathcal{F}_H)(t) = \bigcup_{\varrho>0} R(E_\varrho^-, t_0)(t) = \bigcup_{\varrho>0} \overline{R(E_\varrho^-, t_0)(t)} \\
&\subseteq \mathcal{M}(E,\mathcal{F}_H)(t) \subseteq R(E,t_0)(t) \subseteq \overline{R(E,t_0)(t)} \subseteq \bigcap_{\varrho>0} R(E_\varrho^+, t_0)(t) \\
&= \bigcap_{\varrho>0} \overline{R(E_\varrho^+, t_0)(t)} = \mathcal{M}^\star(E,\mathcal{F}_H)(t),
\end{aligned}$$

per ogni $t \in I$.

Cenno della dimostrazione. Quello che di solito accade è che, per sua definizione, la minima barriera è contenuta nelle altre evoluzioni generalizzate, mentre l'inclusione opposta è più delicata. Faremo perciò brevemente vedere che per ogni $t \in I$ e per ogni $\varrho > 0$ si ha

$$\mathcal{M}(E,\mathcal{F}_H)(t) \supseteq R(E_\varrho^-, t_0)(t). \tag{5.1}$$

Poniamo $\phi(t) = \mathcal{M}(E,\mathcal{F}_H)(t)$, $\psi(t) = \mathbf{R}^n \setminus \overline{R(E_\varrho^-, t_0)(t)}$. Allora $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H)$, e si può dimostrare che $\psi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_{H_-})$. Osserviamo che $\mathrm{dist}(\mathbf{R}^n \setminus \phi(t_0), \mathbf{R}^n \setminus \psi(t_0)) = \varrho > 0$. Quello che dobbiamo dimostrare è che, se $t \in I$, allora

$$\mathrm{dist}(\mathbf{R}^n \setminus \phi(t), \mathbf{R}^n \setminus \psi(t)) > 0. \tag{5.2}$$

La dimostrazione della (5.2) si basa su un teorema dimostrato da Ilmanen in [53, 4F] che afferma il fatto seguente. Esiste una famiglia $\{Q_t^\epsilon\}$ di ipersuperfici compatte di classe $\mathcal{C}^\infty$, aventi la norma L^∞ della seconda forma fondamentale uniformemente limitata rispetto a ϵ, che soddisfa

$$\mathrm{dist}(\mathbf{R}^n \setminus \phi(t), Q_t^\epsilon) + \mathrm{dist}(Q_t^\epsilon, \mathbf{R}^n \setminus \psi(t)) \ge \mathrm{dist}(\mathbf{R}^n \setminus \phi(t), \mathbf{R}^n \setminus \psi(t)) - \epsilon. \tag{5.3}$$

Usando allora la (5.3) e le ipotesi fatte su $(a_{ij}), p, g$ si riesce a fare vedere che per dimostrare la (5.2) è sufficiente dimostrarne una versione simile, ma in cui una delle due barriere in (5.2) viene sostituita da una evoluzione regolare. Più precisamente si tratta di dimostrare che se $\phi : I \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H)$, e se $f : [a,b] \subseteq I \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$, $f \in \mathcal{F}_H$, è tale che $f(a) \subseteq \phi(a)$, allora

$$\mathrm{dist}(f(t), \mathbf{R}^n \setminus \phi(t)) \geq \mathrm{dist}(f(a), \mathbf{R}^n \setminus \phi(a)) e^{-M(t-a)} \qquad \forall t \in [a,b], \tag{5.4}$$

dove $M > 0$ è una costante che dipende da A_{ij}, P_i, G. Infine la (5.4) si dimostra come in [13, Lemma 4.2]. $\square$

6. Confronto tra le barriere e le soluzioni viscose

In questa sezione dimostriamo un teorema che è collegato ad una congettura di De Giorgi [24, Conj. 1.1, Rem. 1.3]. Questo risultato mostra il collegamento tra le minime barriere e l'evoluzione generalizzata ottenuta con il metodo della viscosità. Esso è essenzialmente una conseguenza del Teorema 5.1, dato che la soluzione viscosa dà origine a un comparison flow nel senso della Definizione 5.1. Consideremo per semplicità $t_0 = 0$, cioè $I = [0, +\infty[$. In questa sezione supporremo che le funzioni p, g verifichino le ipotesi elencate nel punto (v) della Proposizione 4.4, e che la matrice $(a_{ij}(x,t))$ possa essere fattorizzata come $\Sigma(x,t)\Sigma^t(x,t)$, dove $\Sigma(x,t) = (\Sigma_{ij}(x,t))$ è una matrice reale $n \times n$ che verifica le proprietà

$$\begin{aligned} &\Sigma_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times I) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n \times I) && \forall i,j = 1,\ldots,n, \\ &|\Sigma_{ij}(x,t) - \Sigma_{ij}(y,t)| \leq C_{ij}|x-y| && \forall x,y \in \mathbf{R}^n,\ \forall t > 0, \end{aligned}$$

per certe costanti $C_{ij} > 0$, $i,j = 1,\ldots,n$, e Σ^t indica la matrice trasposta di Σ.

Data la funzione H, definiamo la funzione $\widetilde{H} : \mathbf{R}^n \times I \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \times \mathrm{Sym}(n) \to \mathbf{R}$ come segue:

$$\widetilde{H}(x,t,z,Q) = |z| H\left(x,t,\frac{z}{|z|},\frac{1}{|z|}P_z Q P_z\right), \tag{6.1}$$

dove $P_z = \mathrm{Id} - \dfrac{z \otimes z}{|z|^2}$, e $z \otimes z$ indica la matrice $(z \otimes z)_{ij} = z_i z_j$, $i,j = 1,\ldots,n$. La matrice P_z è dunque la matrice di proiezione ortogonale sul sottospazio ortogonale al sottospazio generato da z.

Lemma 6.1. *Sia $v_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione uniformemente continua, H come in (4.1), e $\widetilde{H}$ come in (6.1). Allora esiste ed è unica la soluzione continua nel senso della viscosità del problema*

$$\begin{cases} v_t = \widetilde{H}(x,t,\nabla v, \nabla^2 v) & \text{in } \mathbf{R}^n \times [0,+\infty[, \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{in } \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{6.2}$$

Dimostrazione. La funzione $\widetilde{H}$ è (fortemente) geometrica [44, Rem. 2.4], e dalla (2.1) segue che $\widetilde{H}$ soddisfa la condizione di degenere ellitticità (si veda [45, p.462]). Inoltre, le ipotesi fatte sopra relativamente a $(a_{ij}), p, g$ permettono di applicare il Teorema 4.9 di [45], che dà la tesi del lemma. $\square$

Vale allora il seguente risultato.

Teorema 6.1. *Sia H come in (4.1), siano S, r come in (4.3), e $\mathcal{F}_H$ come nella Definizione 4.1. Supponiamo che $(a_{ij}), p, g$ verifichino le ipotesi sopra elencate. Sia $v_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione uniformemente continua tale che per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ l'insieme*

$$E_\lambda = \{x \in \mathbf{R}^n : v_0(x) < \lambda\}$$

abbia frontiera limitata. Poniamo poi

$$m(x,t) = \inf\{\lambda \in \mathbf{R} : \mathcal{M}(E_\lambda, \mathcal{F}_H)(t) \ni x\} \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n,\ \forall t \in [0, +\infty[,$$

dove $\mathcal{M}(E_\lambda, \mathcal{F}_H)$ indica la minima barriera come in (4.5).

Sia infine $\widetilde{H}$ come in (6.1) e sia $v : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ l'unica soluzione continua, nel senso della viscosità, del problema (6.2), si veda il Lemma 6.1. Allora per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha

$$\mathcal{M}(E_\lambda, \mathcal{F}_H)(t) = \mathcal{M}_\star(E_\lambda, \mathcal{F}_H)(t) = \{x \in \mathbf{R}^n : v(x,t) < \lambda\}, \tag{6.3}$$

$$m(x,t) = v(x,t) \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n,\ \forall t \in [0, +\infty[, \tag{6.4}$$

$$\mathcal{M}^\star(E_\lambda, \mathcal{F}_H)(t) = \{x \in \mathbf{R}^n : v(x,t) \le \lambda\}, \tag{6.5}$$

dove $\mathcal{M}_\star(E_\lambda, \mathcal{F}_H)$ e $\mathcal{M}^\star(E_\lambda, \mathcal{F}_H)$ sono definiti in (4.12).

In particolare

$$\mathcal{M}^\star(E_\lambda, \mathcal{F}_H)(t) \setminus \mathcal{M}_\star(E_\lambda, \mathcal{F}_H)(t) = \{x \in \mathbf{R}^n : v(x,t) = \lambda\} \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R}. \tag{6.6}$$

Dimostrazione. La prima uguaglianza in (6.3) segue dalla (4.15) poichè v_0 è continua e dunque gli E_λ sono aperti. Sia $\mathcal{A} = A(\mathbf{R}^n) \cup C(\mathbf{R}^n)$; se $A \in A(\mathbf{R}^n)$ ha frontiera limitata, poniamo

$$R(A, t_0)(t) = \{x \in \mathbf{R}^n : w(x,t) < 0\},$$

dove w è l'unica soluzione continua nel senso della viscosità del problema

$$\begin{cases} w_t = \widetilde{H}(x, t, \nabla w, \nabla^2 w) & \text{in } \mathbf{R}^n \times [0, +\infty[, \\ \\ w(x, 0) = \operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(\mathbf{R}^n \setminus A) & \text{in } \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{6.7}$$

Similmente se $C \in C(\mathbf{R}^n)$ ha frontiera limitata, poniamo

$$R(C, t_0)(t) = \{x \in \mathbf{R}^n : w(x,t) \le 0\},$$

dove w è l'unica soluzione continua nel senso della viscosità del problema (6.7) con C al posto di A.

Poichè la soluzione viscosa è unica, R verifica la proprietà di semigruppo (si ragioni come in [34, Th. 5.2]); inoltre R, per le ipotesi fatte su H, verifica il principio del confronto [17,45]. Infine, se $E \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ è un aperto (rispettivamente un chiuso) che ammette una evoluzione regolare in un certo intervallo di tempi $[0,T]$ secondo la (4.4) (con $[0,T]$ al posto di $[a,b]$ e E al posto di $f(a)$), tale evoluzione coincide con quella ottenuta prendendo il sottolivello aperto (rispettivamente chiuso) corrispondente al valore zero della soluzione viscosa (in $[0,T]$) della (6.7) con E al posto di A. Ne consegue che R è un comparison flow su $\mathcal{A}\times I$ (si veda la Definizione 5.1); dunque, se $\lambda \in \mathbf{R}$, dal Teorema 5.1 si ha

$$\mathcal{M}_\star(E_\lambda, \mathcal{F}_H)(t) = \bigcup_{\mu<\lambda} \{x \in \mathbf{R}^n : v(x,t) < \mu\} = \{x \in \mathbf{R}^n : v(x,t) < \lambda\},$$

$$\mathcal{M}^\star(E, \mathcal{F}_H)(t) = \bigcap_{\mu>\lambda} \{x \in \mathbf{R}^n : v(x,t) < \mu\} = \{x \in \mathbf{R}^n : v(x,t) \leq \lambda\},$$

e, in particolare, si ha anche (6.6). Infine, la (6.4) è conseguenza della (6.3). $\square$

7. Il fenomeno del fattening.

In questa sezione discutiamo brevemente il cosiddetto fenomeno del fattening, che è uno dei tipi di singolarità che si possono sviluppare nei movimenti geometrici di insiemi. Questo fenomeno sembra legato al concetto di soluzione viscosa, pur tuttavia si può definire usando le minime barriere (Definizione 7.1). Dal punto di vista delle soluzioni viscose, il fattening si può descrivere come segue: se $E \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ è un insieme aperto, se $v_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è una funzione uniformemente continua tale che $\{x \in \mathbf{R}^n : v_0(x) < 0\} = E$, $\{x \in \mathbf{R}^n : v_0(x) = 0\} = \partial E$, e se $v : \mathbf{R}^n \times [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ indica l'unica soluzione continua nel senso della viscosità del problema (6.2), allora si dice che ∂E sviluppa fattening al tempo $t \in]0,+\infty[$ se l'insieme $\{x \in \mathbf{R}^n : v(x,t) = 0\}$ ha parte interna non vuota. In altre parole se, all'istante t, l'evoluzione generalizzata, in senso viscoso, di ∂E diventa un insieme con parte interna non vuota.

La seguente definizione di fattening, data usando le minime barriere, è motivata dal risultato (6.6) del Teorema 6.1.

Definizione 7.1. *Sia $E \subseteq \mathbf{R}^n$ e $t \in I := [0,+\infty[$. Diciamo che E sviluppa fattening al tempo t se*

$$\mathcal{H}^n \left(\mathcal{M}^\star(E, \mathcal{F}_H)(t) \setminus \mathcal{M}_\star(E, \mathcal{F}_H)(t)\right) > 0,$$

dove $\mathcal{H}^n$ indica la misura di Hausdorff n-dimensionale in $\mathbf{R}^n$.

Mentre è facile esibire condizioni iniziali non regolari per le quali il fenomeno del fattening si verifica istantaneamente [34], meno facile risulta esibire esempi di condizioni iniziali regolari che sviluppano fattening solo dopo un certo tempo finito. In altre parole ci si può chiedere se esistano insiemi iniziali $E \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ che hanno una evoluzione geometrica regolare fino a un tempo $t^* > 0$ e sviluppano fattening al tempo t^*.

Riguardo a questo problema segnaliamo i risultati seguenti. Consideriamo solo la legge di evoluzione (1.2), cioè l'evoluzione per curvatura media con termine forzante g.

(1) se $n = 2$, $E \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^2)$, $g = 0$, allora E non sviluppa fattening [47];
(2) se $n \geq 3$, $E \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n)$, $g = 0$, E strettamente convesso, allora E non sviluppa fattening [49];
(3) se $n = 3$, $g = 0$, i tori (simmetrici rispetto a un asse) non sviluppano fattening [1,20,21,64,65,70];
(4) se $n = 2$ e $g \equiv 1$ si possono esibire esempi di insiemi $E \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^2)$ che sviluppano fattening [11];
(5) se $n = 3$, $g = 0$, e $\alpha \in \mathbf{R}$, la superficie periodica $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : \sin x_1 + \sin x_2 + \sin(\alpha x_3) = 0\}$ non sviluppa fattening [22,71]; non è a me noto il comportamento della superficie $\{x = (x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbf{R}^{2n+1} : \sum_{i=1}^{2n+1} \sin(\alpha_i x_i) = 0\}$, per $\alpha_i \in \mathbf{R}$ (e $g = 0$);
(6) se $n \geq 4$ e $g = 0$ esistono esempi di ipersuperfici di classe $\mathcal{C}^\infty$ non compatte che sviluppano fattening [9];
(7) se $n = 3$ e $g = 0$ esperimenti numerici suggeriscono l'esistenza di una superficie regolare non compatta che sviluppa fattening [8];
(8) se $n = 4$ e $g = 0$ esperimenti numerici [38] suggeriscono che esiste un opportuno toro che sviluppa fattening. Se questa affermazione venisse dimostrata rigorosamente, il toro in questione sarebbe il primo esempio di insieme appartenente a $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n)$, $n > 2$, che sviluppa fattening per l'evoluzione (1.1).
Per altri risultati relativi al fattening si vedano anche [10,34,52,56,57].

Concludiamo brevemente la sezione con qualche commento sul risultato (4). Come già accennato nell'Introduzione, questo risultato fa vedere come le evoluzioni (1.1) e (1.2) siano qualitativamente diverse: in due dimensioni, per il movimento secondo la curvatura media non si sviluppa fattening, ma se si aggiunge un termine forzante anche costante allora la singolarità può comparire.

La costruzione dell'esempio in (4) è basata sulla ricerca di due insiemi connessi limitati E, F con frontiere di classe $\mathcal{C}^\infty$ tali che $\overline{E} \cap \overline{F} = \emptyset$, e per i quali, a un certo istante $t^* \in]0, +\infty[$, si verifichi il comportamento seguente. Le evoluzioni di E e di F secondo la legge

$$V = -\kappa + 1$$

rimangono classiche e disgiunte per $0 < t < t^*$, al tempo t^* si ha un punto di intersezione fra le evoluzioni, e per un certo intervallo di tempi dopo t^*, se si considerassero le evoluzioni *separatamente* di E e di F, tali evoluzioni (regolari) non si intersecherebbero. L'esempio è dunque basato essenzialmente sul fatto che si possono trovare due regioni E, F inizialmente disgiunte, le quali, se fatte evolvere secondo la legge (1.2), non rimangono disgiunte, al contrario di quello che avviene se si considera la legge (1.1).

8. Appendice

In questa appendice accenniamo la dimostrazione del teorema di esistenza e unicità locale per le evoluzioni geometriche (4.4) con H come in (4.2) e (4.1). La linea di dimostrazione è quella di [35] in cui è stata considerata l'evoluzione (1.1) (si veda anche [62]).

Proposizione 8.1. *Sotto le ipotesi su $(a_{ij}), p, g$ fatte nella Sezione 2, l'insieme $E \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ ammette un'evoluzione geometrica classica per tempi piccoli secondo la (4.4) con H come in (4.2) e in (4.1).*

Dimostrazione. Sia Ω un intorno tubolare sufficientemente piccolo di ∂E, in modo che la funzione distanza con segno d da ∂E negativa in E sia di classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Ogni punto $x \in \Omega$ ammette dunque un'unica proiezione y su ∂E, perciò $|y - x| = |d(x)|$, da cui $y = x - d(x)\nabla d(x)$.

Dimostriamo l'asserto per l'evoluzione (4.2), dove $(a_{ij}) = \mathrm{Id}$. Definiamo le funzioni $f : \mathbf{R}^n \times \mathrm{Sym}(n) \to \mathbf{R}$, $f_1 : \Omega \times [0, +\infty[\times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathrm{Sym}(n) \to \mathbf{R}$ come segue:

$$\begin{aligned} &f(\lambda, Q) = \mathrm{tr}(Q(\mathrm{Id} - \lambda Q)^{-1}),\\ &f_1(x, t, \lambda, z, Q) = f(\lambda, Q) + p(x - \lambda z, t) \cdot z + g(x - \lambda z, t). \end{aligned}$$

Consideriamo il problema parabolico non lineare (con condizione al contorno non lineare)

$$\begin{cases} u_t = f_1(x, t, u(x,t), \nabla u(x,t), \nabla^2 u(x,t)) & x \in \overline{\Omega},\ t \geq 0,\\ |\nabla u|^2 = 1 & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0,\\ u(x, 0) = d_0(x) & x \in \overline{\Omega},\ t = 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Grazie al fatto che $E \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ e alle ipotesi fatte su p, g, usando i risultati in [62, 8.5.3] si ottiene che esiste $\tau > 0$ tale che (8.1) ammette un'unica soluzione u di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\Omega \times [0, \tau]$. Poniamo

$$w = |\nabla u|^2 - 1.$$

Come in [35] sarà sufficiente dimostrare che $w \equiv 0$ in $\Omega \times [0, \tau]$. Si ha, usando la convenzione sugli indici ripetuti e indicando con δ_{ij} la delta di Kronecker,

$$\begin{aligned} w_t = 2\nabla_k u \nabla_k u_t = 2\nabla_k u \Big(&\big[f_{Q_{ij}}(u, \nabla^2 u)\nabla_{ijk} u + f_\lambda(u, \nabla^2 u)\nabla_k u\big]\\ &+ \nabla_j p_l(\delta_{jk} - \nabla_k u \nabla_j u - u\nabla_{jk} u)\nabla_l u + p_l \nabla_{lk} u\\ &+ \nabla_j g(\delta_{jk} - \nabla_k u \nabla_j u - u \nabla_{jk} u)\Big)\\ &= f_{Q_{ij}}(u, \nabla^2 u)\nabla_{ij} w - 2 f_{Q_{ij}}(u, \nabla^2 u)\nabla_{ik} u \nabla_{kj} u + 2 f_\lambda(u, \nabla^2 u)|\nabla u|^2\\ &+ 2\nabla_l u \nabla_j p_l\big[-w\nabla_j u - \frac{u}{2}\nabla_j w\big] + p_l \nabla_l w + 2\nabla_j g(-w\nabla_j w - \frac{u}{2}\nabla_j w). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Poichè [35] si ha $f_{Q_{ij}} \nabla_{ij} u \nabla_{jk} u = f_\lambda$, da (8.2) segue

$$\begin{aligned} w_t &= f_{Q_{ij}}(u, \nabla^2 u)\nabla_{ij} w + 2 f_\lambda(u, \nabla^2 u) w\\ &+ 2\nabla_l u \nabla_j p_l\big[-w\nabla_j u - \frac{u}{2}\nabla_j w\big] + p_l \nabla_l w + 2\nabla_j g(-w\nabla_j w - \frac{u}{2}\nabla_j w). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Dalle condizioni al contorno e dalla (8.3) segue che $w \equiv 0$.

Consideriamo brevemente il caso (4.1). Supponiamo per semplicità che $p = 0$, $g = 0$. Ragionando come in [5] si ha che $\nabla^2 d(y) = \nabla^2 d(x)(\mathrm{Id} - d(x)\nabla^2 d(x))^{-1}$. Definiamo la funzione $f : \Omega \times [0, +\infty[\times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathrm{Sym}(n) \to \mathbf{R}$ come segue:

$$f(x, t, \lambda, z, Q) = \mathrm{tr}(a(x - \lambda z, t) Q (\mathrm{Id} - \lambda Q)^{-1}), \tag{8.4}$$

dove $a = (a_{ij})$. Si procede allora come in [35] (si veda anche [62]) per il problema (8.1) con f in (8.4) al posto di f_1. $\square$

Ringraziamenti. Vorrei ringraziare Ennio De Giorgi, Giorgio Fusco e Matteo Novaga per le discussioni avute sull'argomento. Questo lavoro fa parte del progetto "Phase Transition and Surface Tension", contratto CHRX-CT94-0608, programma HCM della Commissione della Comunità Europea.

BIBLIOGRAFIA

1. S. Altschuler, S. Angenent, and Y. Giga, *Mean curvature flow through singularities for surfaces of rotation*, J. Geom. Anal. (to appear).
2. F. Almgren, J.E. Taylor, and L. Wang, *Curvature-driven flows: a variational approach*, SIAM J. Control Optim. **31** (1993), 387–437.
3. L. Ambrosio, *Movimenti minimizzanti*, Atti Accad. Naz. delle Scienze detta dei XL (to appear).
4. L. Ambrosio and A. Braides, *Energies in SBV and variational models in fracture mechanics*, Preprint S.I.S.S.A. 124/95/M, October 1995.
5. L. Ambrosio and H.-M. Soner, *A level set approach to the evolution of surfaces of any codimension*, J. Differential Geom. (to appear).
6. S. Angenent, *Parabolic equations for curves and surfaces Part I. Curves with p-integrable curvature*, Annals of Math. **132** (1990), 451–483.
7. S. Angenent, *Parabolic equations for curves and surfaces. Part II. Intersections, blow-up and generalized solutions*, Annals of Math. **133** (1991), 171–215.
8. S. Angenent, D.L. Chopp, and T. Ilmanen, *A computed example of nonuniqueness of mean curvature flow in* $\mathbf{R}^3$, Comm. Partial Differential Equations (to appear).
9. S. Angenent, T. Ilmanen, and J.J.L. Velazquez, *Nonuniqueness in geometric heat flows*, (to appear).
10. G. Barles, H.-M. Soner, and P.E. Souganidis, *Front propagation and phase field theory*, SIAM J. Control Optim. **31** (1993), 439–469.
11. G. Bellettini and M. Paolini, *Two examples of fattening for the curvature flow with a driving force*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. (9) Mat. Appl. **5** (1994), 229–236.
12. G. Bellettini and M. Paolini, *Teoremi di confronto tra diverse nozioni di movimento secondo la curvatura media*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. (9) Mat. Appl. **6** (1995), 45–54.
13. G. Bellettini and M. Paolini, *Some results on minimal barriers in the sense of De Giorgi applied to driven motion by mean curvature*, Atti Accad. Naz. delle Scienze detta dei XL (to appear).
14. K.A. Brakke, *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*, Princeton University Press, Princeton, 1978.
15. L. Bronsard and R.V. Kohn, *Motion by mean curvature as the singular limit of Ginzburg-Landau dynamics*, J. Differential Equations **90** (1991), 211–237.
16. J.W. Cahn, C.A. Handwerker, and J.E. Taylor, *Geometric models of crystal growth*, Acta Metall. **40** (1992), 1443–1474.
17. Y.G. Chen, Y. Giga, and S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equation*, J. Differential Geom. **33** (1991), 749–786.
18. M.G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), 1–67.
19. M.G. Crandall and P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **227** (1983), 1–42.
20. E. De Giorgi, *Some conjectures on flow by mean curvature*, Methods of real analysis and partial differential equations (M.L. Benevento, T. Bruno, and C. Sbordone, eds.), Liguori, Napoli, 1990.
21. E. De Giorgi, *Congetture sui limiti delle soluzioni di alcune equazioni paraboliche quasi lineari*, Nonlinear Analysis. A Tribute in Honour of G. Prodi, S.N.S. Quaderni, Pisa, 1991, pp. 173–187.
22. E. De Giorgi, *New ideas in calculus of variations and geometric measure theory*, Motion by Mean Curvature and Related Topics, Proc. of the Conference held in Trento, July 20–24, 1992, Walter de Gruyter, Berlin, pp. 63–69.
23. E. De Giorgi, *New problems on minimizing movements*, Boundary value Problems for Partial Differential Equations and Applications 29 (J.-L. Lions, C. Baiocchi, eds.), Masson, Paris, 1993.
24. E. De Giorgi, *Barriers, boundaries, motion of manifolds* (1994), Conference held at Dipartimento di Matematica of Pavia, March 18 (1994)..

25. E. De Giorgi, *Barriere, frontiere, movimenti di varietà* (1994), Proseguimento della prima bozza di Pavia del 19/3/94, Pisa 26/3/94..
26. E. De Giorgi, *Congetture riguardanti alcuni problemi di evoluzione. A paper in honour of J. Nash*, Preprint (1995) (to appear).
27. A. De Masi, E. Orlandi, E. Presutti and L. Triolo, *Motion by curvature by scaling non local evolution equations*, J. Stat. Phys. **73** (1993), 543–570.
28. A. De Masi, E. Orlandi, E. Presutti and L. Triolo, *Uniqueness of the istanton profile and global stability in non local evolution equations*, Rendiconti di Matematica **14** (1994), 693–723.
29. A. De Masi, E. Orlandi, E. Presutti and L. Triolo, *Glauber evolution with Kac potentials. 1. Mesoscopic and macroscopic limits, interface dynamics*, Nonlinearity **7** (1994), 663–696.
30. A. De Masi, E. Orlandi, E. Presutti and L. Triolo, *Glauber evolution with Kac potentials. 2. Fluctuations*, Preprint (1994).
31. A. De Masi, E. Orlandi, E. Presutti and L. Triolo, *Glauber evolution with Kac potentials. 3. Spinodal decomposition*, Preprint (1994).
32. P. De Mottoni and M. Schatzman, *Geometrical evolution of developped interfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).
33. L.C. Evans, H.-M. Soner, and P.E. Souganidis, *Phase transitions and generalized motion by mean curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 1097–1123.
34. L.C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature. I*, J. Differential Geom. **33** (1991), 635–681.
35. L.C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature II*, Trans. Amer. Math. Soc. **330** (1992), 321–332.
36. L.C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature III*, J. Geom. An. **2** (1992), 121–150.
37. L.C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature IV*, J. Geom. An. (to appear).
38. F. Fierro and M. Paolini, *Numerical evidence of fattening for the mean curvature flow*, Mathematical Models and Methods in Applied Sc. (to appear).
39. I. Fonseca and Katsoulakis, *Γ-convergence, minimizing movements and generalized motion by mean curvature*, Differential and Integral Equations **8** (1995), 1619–1656.
40. M. Gage and R.S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Differential Geom. **23** (1986), 69–96.
41. U. Gianazza, M. Gobbino, and G. Savarè, *Evolution problems and minimizing movements*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. (9) Mat. Appl. (1994), 289–296.
42. U. Gianazza and G. Savarè, *Some results on minimizing movements*, Rend. Acc. Naz. Sci. detta dei XL, Mem. Mat. **112** (1994), 57–80.
43. U. Gianazza and G. Savarè, *Abstract evolution equations on variable domains: an approach by minimizing movements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (to appear).
44. Y. Giga and S. Goto, *Motion of hypersurfaces and geometric equations*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 99-111.
45. Y. Giga, S. Goto, H. Ishii, and M.H. Sato, *Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 443–470.
46. D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, SpringerVerlag, Berlin, 1983.
47. M.A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geom. **26** (1987), 285–314.
48. M.A. Grayson, *Shortening embedded curves*, Annals of Math. **129** (1989), 71–111.
49. G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geom. **20** (1984), 237–266.
50. M.A. Katsoulakis and P.E. Souganidis, *Interacting particle systems and generalized mean curvature evolution*, Arch. Rational Mech. Anal. **127** (1994), 133–157.
51. M.A. Katsoulakis and P.E. Souganidis, *Generalized motion by mean curvature as a macroscopic limit of stochastic Ising models with longe range interactions and Glauber dynamics*, Commun. Math. Phys. **169** (1995), 61–97.

52. T. Ilmanen, *Generalized flow of sets by mean curvature on a manifold*, Indiana Univ. Math. J. **41** (1992), no. 3, 671–705.
53. T. Ilmanen, *The level-set flow on a manifold*, Proc. Symp. Pure Math., 54, 1993, pp. 193–204.
54. T. Ilmanen, *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature*, J. Differential Geom. **38** (1993), 417–461.
55. T. Ilmanen, *Elliptic Regularization and Partial Regularity for Motion by Mean Curvature*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **250** (1994), 1–90.
56. T. Ilmanen, *Dynamics of stationary cones*, (to appear).
57. T. Ilmanen, *A strong maximum principle for singular minimal hypersurfaces*, (to appear).
58. R.S. Hamilton, *Harmonic Maps of Manifolds with Boundary*, vol. 471, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1975.
59. H. Ishii, *On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDE's*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 15–45.
60. R. Jensen, *The maximum principle for viscosity solutions of second-order fully nonlinear partial differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **101** (1988), 1–27.
61. P.-L. Lions, *Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, I*, Comm. Partial Differential Equations **8** (1983), 1101-1134.
62. A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Boston, 1995.
63. L. Modica and S. Mortola, *Un esempio di* Γ*-convergenza*, Boll. Un. Mat. Ital. B (5) **14** (1977), 285–299.
64. R. Nochetto, M. Paolini and C. Verdi, *A dynamic mesh method for curvature depending evolving interfaces*, J. Comput. Phys. (to appear).
65. M. Paolini and C. Verdi, *Asymptotic and numerical analyses for the mean curvature flow with a space dependent relaxation parameter*, Asymptotic Anal. **5** (1992), 553–574.
66. T. Ohta, D. Jasnow and K. Kawasaki, *Universal scaling in the motion of random interfaces*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 1223–1226.
67. S. Osher and J. A. Sethian, *Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, J. Computational Phys. **79** (1988), 12–49.
68. H.-M. Soner, *Motion of a set by the curvature of its boundary*, J. Differential Equations **101** (1993), 313–372.
69. H.-M. Soner, *Ginzburg-Landau equation and motion by mean curvature, I: convergence*, J. Geom. An. (to appear).
70. H.-M. Soner and P.E. Souganidis, *Singularities and uniqueness of cylindrically symmetric surfaces moving by mean curvature*, Comm. Partial Differential Equations **18** (1993), 859–894.
71. B. White, *Some questions of De Giorgi about mean curvature flow of triply-periodic surfaces*, Motion by Mean Curvature and Related Topics, Proc. of the Conference held in Trento, July 20–24, 199, Walter de Gruyter, Berlin, pp. 210–213.