Introduzione

L'analisi classica, ha riservato agli spazi di Sobolev una grossa attenzione, e numerosi sono gli approcci a questi spazi che si sono venuti sviluppando nel corso degli anni. Così numerosi che per ogni teorema sugli spazi di Sobolev si trovano in letteratura due o tre dimostrazioni indipendenti. Tutti questi approcci però dipendono in modo essenziale dal concetto di derivata, e quindi dalla struttura vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
Inoltre nella teoria classica degli spazi di Sobolev, la geometria e la natura del dominio, hanno sempre giocato un ruolo fondamentale, distinzioni sono state fatte per spazi di traccia, spazi di Sobolev su varietà, domini con cuspidi ed altro. Si pongono dunque due problemi interessanti: quanto conta veramente la struttura di $\mathbb{R}^n$ nelle varie proprietà degli spazi di Sobolev? È possibile un approccio unificato di tutti i casi che nella teoria classica sono distinti? Nello studio della teoria e nel confronto delle definizioni di spazio di Sobolev su spazio metrico si hanno parziali risposte a queste domande, ed inoltre si chiariscono le relazioni tra le varie proprietà delle funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$.
Nel 1993 è stata proposta da Hajłasz [8] una prima definizione di spazio di Sobolev su spazio metrico a partire dall'osservazione che se Ω è un dominio sufficientemente regolare, e nel secondo capitolo della tesi si chiarirà cosa ciò voglia dire, si ha che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se e solo se esiste $g \in L^p(\Omega)$ tale che la diseguaglianza

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y)|, \tag{1}$$

sia verificata quasi ovunque. Dato quindi uno spazio metrico (X, d) con una misura di Borel μ, si dice che $u \in W^{1,p}(X, d, \mu)$ se $u \in L^p(\mu)$ e vale (1) per un opportuna $g \in L^p(\mu)$, dove il modulo di $x - y$ deve essere ovviamente sostituito da $d(x, y)$. Questa è quella che chiameremo una definizione tipo Lipschitz, dal momento che si può osservare che la definizione di u in $W^{1,p}$ è come quella di funzione lipschitziana a meno di sostituire la costante di Lipschitz con una funzione $g \in L^p$.
A partire da questa definizione in [8] viene sviluppata una principio teoria degli spazi di Sobolev su spazio metrico, si dimostra che sotto una condizione di $s-$regolarità per la misura μ (cfr. definizione 2.4.1) valgono teoremi di immersione uguali a quelli classici, dove però la dimensione dello spazio è sostituita dall'esponente s di $s-$regolarità della misura. Si dimostrano, inoltre, un teorema di approssimazione tipo Lusin con funzioni lipschitziane, ed una diseguaglianza di Poincaré. In molti lavori successivi, per esempio [11], Hajłasz stesso con altri autori studia svariate applicazioni di questi spazi a

regolarità di soluzioni di equazioni ellittiche degeneri, definizione e studio di tracce su insiemi molto irregolari, teoremi di estensione ed altro.
Qualche tempo dopo in un articolo di Franchi, Lu, Wheeden [5] è stata introdotta un'altra definizione di spazio di Sobolev su spazio metrico, e come corollario del teorema principale del lavoro, è stata mostrata l'equivalenza delle due definizioni sotto opportune ipotesi. La definizione in [5] è basata su una famiglia di diseguaglianze di Poincaré locali; infatti si pone:

Definizione 0.0.1 *: Sia (X, d, μ) uno spazio metrico con misura μ di Borel. Diciamo che $u \in L^p(\mu)$ è in $W^{1,p}(X, d, \mu)$ se esiste $g \in L^p(\mu)$ tale che per ogni palla $B(x, r)$ in X vale:*

$$\int_{B(x,r)} |u(x) - u_B| d\mu \leq Cr \int_{B(x,r)} g(x) d\mu \tag{2}$$

dove C è una costante indipendente da u, g, r ed x.

In seguito Hajłasz [10] ha dimostrato in due modi diversi teoremi di immersione per questi spazi, sotto ipotesi sulla geometria delle palle dello spazio metrico, e che la misura abbia una proprietà di doubling (cfr. definizione 3.1.5). È facile dimostrare che gli spazi definiti nel primo modo sono contenuti in quelli definiti nel secondo (Capitolo 2, Teorema 2.2.6). La cosa che distingue in modo profondo la prima e la seconda definizione è che nel caso classico la funzione $|Du|$ verifica la (2) ma non sempre verifica la (1), come mostreremo nel secondo capitolo per una larga classe di funzioni. D'altra parte, da nessuna delle due definizioni sembra che si possa risalire alla definizione di gradiente Du o per lo meno di $|Du|$ per funzioni regolari, ed inoltre in nessuno dei due casi si riescono ad ottenere tutte le proprietà classiche degli spazi di Sobolev su domini di $\mathbb{R}^n$.
L'idea di estendere le tecniche classiche del calcolo delle variazioni a spazi metrici, quindi, non è praticabile, o almeno così pare, a partire da questi spazi che invece si sono rivelati utili nell'estensione e generalizzazione di tecniche tipiche dell'analisi armonica. Nell'ultimo capitolo della tesi, abbiamo così presentato una terza definizione di spazio di Sobolev su spazio metrico, a partire però dal concetto di rilassamento di un funzionale.
Nel caso di spazio metrico, è infatti possibile definire $|\nabla u|$ e quindi $F_p := \int_X |\nabla u|^p d\mu$ per le funzioni in $Lip_{loc}(X, d, \mu)$, per analogia al caso classico si può quindi definire $W^{1,p}(X, d, \mu)$ come dominio del rilassato di F_p rispetto ad un'opportuna topologia τ (che sarà chiarita nel quarto capitolo), e dunque definire il "funzionale di Dirichlet" $\overline{F}_p(u)$ proprio come il rilassato di $F_p(u)$. Si ha poi, che rilassando F_p rispetto a τ si trovi che $F_p(u) = \overline{F}_p(u)$ per ogni

funzione in $Lip^p_{loc}(X,d,\mu) := \{u \in Lip_{loc}(X,d) \cap L^p(\mu) : |\nabla u| \in L^p(\mu)\}$; non è detto però che $\overline{F}_p$ sia locale e ammetta una rappresentazione integrale su tutto lo spazio, ed in questo senso riporteremo dei controesempi nel quarto capitolo.
Anche nel caso di quest'ultima definizione, però, non si riesce a definire il gradiente Du ma solo il suo modulo $|\nabla u|$, che comunque permette di definire l'operatore di Laplace $-\Delta_\mu$ come sottodifferenziale del funzionale $\overline{F}_2(u)$.

Capitolo 1

Spazi di Sobolev e teoria del potenziale

Introduzione:In questo capitolo, presentiamo brevemente, un sunto delle parti più importanti della teoria classica degli spazi di Sobolev, e riportiamo alcune delle diseguaglianze e dei lemmi fondamentali che per la loro natura indipendente dalla struttura di $\mathbb{R}^n$ si sono prestati ad essere estesi a domini metrici qualsiasi.

1.1 Generalità

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto, e sia $1 \leq p \leq +\infty$.

Definizione 1.1.1 : *Una funzione g si dice derivata debole o distribuzionale nella direzione $i-esima$ di $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ se verifica:*

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega g\varphi dx \qquad \forall\varphi \in \mathbf{C}^\infty_c(\Omega).$$

Se $g_1, ...g_N$ sono le derivate deboli di u nelle direzioni $1, ..., N$, il vettore $(g_1, ...g_N)$ si dice gradiente di u e si indica con Du.

Definizione 1.1.2 : *Lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tali che $Du \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$*

Nota: $W^{1,p}(\Omega)$ con la norma:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_1^N \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}$$

è uno spazio di Banach.

Elenchiamo qui di seguito alcuni teoremi della teoria classica degli spazi di Sobolev, per poi concentrare la nostra attenzione sui teoremi di prolungabilità di funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$, di densità di spazi di funzioni continue in $W^{1,p}(\Omega)$, e quindi sul concetto di derivata forte. Problemi, questi ultimi, che ci troveremo ad affrontare in seguito in un ambiente più generale. Per ogni ulteriore dettaglio sulla teoria degli spazi di Sobolev rinviamo ai libri di Adams [2] e di Ziemer [18].

Teorema 1.1.3 *Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach per $1 \leq p \leq +\infty$, è riflessivo per $1 < p < +\infty$, è separabile per $1 \leq p < +\infty$. Lo spazio $W^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert separabile.*

Teorema 1.1.4 *Sia $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p \leq +\infty$. Sono equivalenti:*
(i) $u \in W^{1,p}$
(ii) $\exists$ c costante tale che: $\forall$ $\omega \subset\subset \Omega$ aperto e $h \in \mathbf{R}^N$ con $|h| < dist(\omega, c\Omega)$ si ha: $\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq c|h|$
(iii) $\exists$ c costante :

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq c \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \quad \forall\ \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)\ \forall\ i \in \{1, ..., N\}.$$

Inoltre in (ii) ed (iii) si può scegliere $c = \|Du\|_{L^p(\Omega)}$.

Introduciamo ora il concetto di derivata forte:

Definizione 1.1.5 *: Sia $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, α un multiindice. Si dice che u ha la derivata $\alpha -$ esima forte in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ se esiste una successione $\{u_j\} \subset \mathbf{C}^{|\alpha|}(\Omega)$ tale che: per ogni $A \subset\subset \Omega$*
(i) $u_j \longrightarrow u$ in $L^p(A)$

(ii) $\{D^\alpha u_j\}$ è di Cauchy in $L^p(A)$.

La successione $\{D^\alpha u_j\}$ converge in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ a v_α che si dice derivata forte di ordine α di u.

Se $\varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega)$ si ha:

$$
\begin{aligned}
(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v_\alpha\ \varphi\ dx &= (-1)^{|\alpha|}\lim_{j\to+\infty}\int_\Omega \varphi\ D^\alpha u_j\ dx\\
&= \lim_{j\to+\infty}\int_\Omega u_j\ D^\alpha\varphi\ dx\\
&= \int_\Omega u\ D^\alpha\varphi\ dx
\end{aligned}
$$

Quindi v_α è anche derivata debole di u e, come tale, è unica.

Osservazione: Da quanto appena detto segue:

Teorema 1.1.6 *Condizione necessaria e sufficiente affinchè u abbia derivata* $\alpha -$ *esima forte in* L^p_{loc} *è che per ogni* A *relativamente compatto in* Ω *esista una successione* $\{u_j\}$ *in* $\mathbf{C}^{|\alpha|}(A)$ *che verifichi le condizioni (i) ed (ii) della definizione precedente.*

Teorema 1.1.7 *Le derivate deboli sono anche derivate forti.*

1.2 Teoremi di densitá

Teorema 1.2.1 *(Friedrichs) Sia* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *con* $1 \leq p < \infty$. *Allora esiste* $\{u_n\} \subset \mathbf{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ *tale che:*

(i) $u_n \longrightarrow u$ *in* $L^p(\Omega)$

(ii) $Du_n \longrightarrow Du$ *in* $L^p_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione: Estendiamo u a tutto $\mathbb{R}^N$ ponendola uguale a 0 fuori da Ω e sia $\{\rho_n\}$ una successione di mollificatori. Posto $v_n := \rho_n * u$; si ha $v_n \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $v_n \longrightarrow u$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$.
Dato, ora, ω relativamente compatto in Ω sia $\alpha \in \mathbf{C}^\infty_c(\Omega)$ tale che $\alpha \equiv 1$ in un intorno di ω. Per n abbastanza grande si ha:

$$\rho_n * \alpha u = \rho_n * u \quad in\ \omega$$

e inoltre:

$$\frac{\partial(\rho_n * \alpha u)}{\partial x_i} = \rho_n * \left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}u\right),$$

e di conseguenza

$$\frac{\partial(\rho_n * \alpha u)}{\partial x_i} \longrightarrow \alpha\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}u \quad in\ L^p(\mathbb{R}^N).$$

In particolare

$$\frac{\partial(\rho_n * \alpha u)}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad in\ L^p(\omega).$$

Sia ora $\xi(x) \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\xi(y) = \begin{cases} 1 & in\ B(0,1) \\ 0 & fuori\ da\ B(0,1) \end{cases}$$

Definiamo una successione $\{\xi_n\} \subset \mathbf{C}_c^\infty(\Omega)$ ponendo $\xi_n(x) = \xi(\frac{x}{n})$, e sia $u_n = \xi_n v_n$. Per n abbastanza grande $u_n = v_n$ in Ω e quindi $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $Du_n \to Du$ in $L^p_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$; dal momento che $u_n \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ la dimostrazione è conclusa. □

Teorema 1.2.2 *(Meyers-Serrin) Per ogni $u \in W^{k,p}(\Omega)$ esiste una successione di funzioni $\{u_i\}$ in $\mathbf{C}^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ convergente ad u in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Dimostrazione: Mostriamo che per ogni u in $W^{k,p}(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste w in $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ tale che $\|u - w\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon$. Per il teorema precedente, questa ultima affermazione è vera se u ha supporto compatto contenuto in Ω. Consideriamo allora una generica funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$, e poniamo:

$$\Omega_{(0)} := \emptyset, \quad \Omega_i := \left\{x \in \Omega :\ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\right\},$$

$$A_2 := \Omega_3, \quad A_i := \Omega_{i+1} \backslash \Omega_{i-1} \quad se\ i \geq 3.$$

Gli aperti A_i formano un ricoprimento localmente finito di Ω, quindi esiste $\{\alpha_i\}$ partizione dell'unità subordinata agli A_i e per ogni i si ha

$$\alpha_i u \in W^{k,p} \ \ e \ \ \mathrm{supp}(\alpha_i u) \subset A_i \subset\subset \Omega.$$

Quindi per ogni $i \geq 2$ esiste $\varepsilon_i > 0$ tale che:

$$\mathrm{supp}(\varphi_{\varepsilon_i} * (\alpha_i u)) \subset \Omega_{i+2} \backslash \Omega_{1-2}$$

$$\|(\varphi_\varepsilon * (\alpha_i u) - \alpha_i u)\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \varepsilon 2^{-i}.$$

La funzione $w := \sum_2^\infty \varphi_{\varepsilon_i} * (\alpha_i u)$ è la funzione desiderata. $\square$

In $\mathbb{R}^N$ indichiamo con B^+ l'insieme $B(0,1) \cap \{x_N > 0\}$. Vogliamo ora mostrare un teorema di prolungamento di funzioni u in $W^{1,p}(\Omega)$ quando Ω è un aperto con bordo lipschitziano. Mediante una partizione dell'unità, ricondurremo il problema a quello del prolungamento di una funzione v in $W^{1,p}(B^+)$, e prolungheremo quest'ultima per riflessione ad una funzione V in $W^{1,p}(B)$

Teorema 1.2.3 *Sia v(x) una funzione in $W^{1,p}(B^+)$ e sia*

$$V(x) = \sigma(v)(x) := \begin{cases} v(x) & se\ x \in B^+ \\ v(x_1, ..., -x_N) & se\ x \in B \backslash \overline{B}^+ \end{cases}$$

La funzione V(x) appartiene a $W^{1,p}(B)$.

Dimostrazione: Per il Teorema 1.2.1, esiste una successione $\{v_k\}$ di funzioni lipschitziane in $\overline{B}^+$ che converge a v. Le funzioni $V_k = \sigma(v_k)$ sono lipschitziane in B, convergono a V in $L^p(B)$, e $\{DV_k\}$ è di Cauchy in $L^p(B)$. Se si indica con g il limite di $\{DV_k\}$ si ha:

$$\int_B V D\varphi dx = \lim_{k\to+\infty} \int_B V_k D\varphi dx = \lim_{k\to+\infty} (-1) \int_B DV_k \varphi dx = -\int_B g\varphi dx.$$

quindi $V \in W^{1,p}(B)$ e $g = DV$. $\square$

Teorema 1.2.4 *(del prolungamento) Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ con frontiera lipschitziana. Esiste un aperto Σ con $\Omega \subset\subset \Sigma$ tale che per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste $U \in W_0^{1,p}(\Sigma)$ con $U(x) = u(x)$ in Ω e*

$$\|U\|_{W^{1,p}(\Sigma)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

dove c è una costante che dipende solo da n, p ed Ω.

Omettiamo la dimostrazione che come si già detto è sostanzialmente basata sulla precedente e sull'uso di una partizione dell'unità.

1.3 Teoria del potenziale ed immersioni di Sobolev

I teoremi di immersione di Sobolev, possono essere dimostrati per mezzo di opportune stime del potenziale. In questo paragrafo illustriamo come ciò possa esere fatto attenendoci per questo a Gilbarg-Trudinger [6].

Definizione 1.3.1 *: Dato un numero reale $\mu \in (0,1)$ ed una funzione $f \in L^1(\Omega)$ poniamo :*

$$(V_\mu f)(x) = \int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)} f(y)dy$$

e lo chiamiamo $\mu-$potenziale di Riesz, o, brevemente, potenziale di Riesz.

Si noti che $V_\mu f$ è prodotto di convoluzione di due funzioni in L^1 e quindi è una funzione L^1. Supporremo nel seguito Ω di misura finita e, quando opportuno, $\partial\Omega$ regolare. Indichiamo con ω_n la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$.

Osservazione :

$$V_\mu 1 \leq \frac{\omega_n^{1-\mu}|\Omega|^\mu}{\mu}$$

Infatti sia R tale che $|\Omega| = |B_r(x)| = \omega_n R^n$, si ha:

$$\int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)}dy \leq \int_{B_R(x))} |x-y|^{n(\mu-1)}dy = \frac{\omega_n R^{n\mu}}{\mu} = \frac{\omega_n^{1-\mu}|\Omega|^\mu}{\mu}$$

dove questa ultima diseguaglianza segue dalla simmetria sferica di $|x-y|$e dall'ipotesi $|\Omega| = |B_r(x)|$. Nella nostre ipotesi $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega) \quad \forall\ p \in [1,+\infty]$; ha così senso il seguente:

Lemma 1.3.2 Sia $q \in [1,+\infty]$ tale che

$$0 \leq \delta = \delta(p,q) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \mu$$

Allora l'applicazione $V_\mu : L^p(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ è continua. Inoltre per ogni $f \in L^p(\Omega)$

$$\|V_\mu f\|_{L^q(\Omega)} \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu}|\Omega|^{\mu-\delta}\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dimostrazione : Sia $r \geq 1$ il numero definito da:

$$\frac{1}{r} := 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 1 - \delta(p,q)$$

Si ha allora che posto $h(t) := |t|^{n(\mu-1)}$ per ogni vettore t non nullo di $\mathbb{R}^n$,

$$h(x-y) = |x-y|^{n(\mu-1)} \in L^r(\Omega)$$

e per la stima su $V_\mu(1)$

$$\|h\|_{L^r(\Omega)} \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu}|\Omega|^{\mu-\delta}.$$

Ora:

$$h|f| = h^{\frac{r}{q}} h^{r(1-\frac{1}{p})} |f|^{\frac{p}{q}} |f|^{p\delta}$$

e per le diseguaglianze di Hölder e di Young

$$|V_\mu f(x)|_{L^q(\Omega)} \leq \left\{\int_\Omega h^r(x-y)|f(y)|^p dy\right\}^{\frac{1}{r}} \left\{\int_\Omega h^r(x-y) dy\right\}^{1-\frac{1}{p}} \left\{\int_\Omega |f(y)|^p dy\right\}^{\delta}.$$

In definitiva

$$\begin{aligned} \|V_\mu f\|_{L^q(\Omega)} &\leq \left\{\int_\Omega h^r(x-y)|f(y)|^p dy\right\}^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu}|\Omega|^{\mu-\delta}\|f\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Osserviamo che posto $\mu = 1/n$ nelle ipotesi del lemma precedente si ha $q < p^* := \frac{np}{n-p}$. Come è noto p^* è l' esponente critico per le immersioni di Sobolev.
Nel seguente teorema che fa uso del teorema massimale di Hardy e Littlewood si ottiene una stima più precisa.

Teorema 1.3.3 *Sia $\mu > 0$, $1 < p < +\infty$; $\mu p < 1$ (per esempio se $\mu = 1/n$ allora $p < n$). Allora esiste una costante $C = C(n,p)$ tale che :*

$$\|V_{\mu n}(f)\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{dove } p^* = \frac{np}{n-\mu np}.$$

Dimostrazione: Per $\delta > 0$ la diseguaglianza di Hölder implica che:

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\delta)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n1-\mu}} dy \leq \omega(n-1)\|f\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_\delta^{+\infty} r^{n-1-p^*n(1-\mu)} dr\right)^{1/p^*}$$

e poiché $\mu p < 1$

$$|V_{\mu n}(f)(x)| \leq \left(c\delta^{\mu n} M(f)(x) + \delta^{\mu n - \frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}\right).$$

Se scegliamo

$$\delta = \left(\frac{M(f)(x)}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}\right)^{-\frac{p}{n}}$$

abbiamo

$$V_{\mu n}(f)(x) \leq c[M(f)(x)]^{1-\mu p} \|f\|^{\mu}_{L^p(\Omega)}$$

e

$$\|V_{\mu n}(f)(x)\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c\|f\|^{(\mu p)p^*}_{L^p(\Omega)} \|M(f)\|^p_{L^p(\Omega)}$$

dove con M(f) si è indicata la funzione massimale di f. La dimostrazione è conclusa usando il teorema massimale di Hardy e Littlewood. □

Osservazione : Se $p > \frac{1}{\mu}$, $V_\mu : L^p(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$ con continuità.

Resta così da esaminare il caso $p = 1/\mu$

Lemma 1.3.4 Sia $f \in L^p(\Omega)$, $g = V_{1/p}(f)$. Allora esistono $c_1, c_2 > 0$ tali che

$$\int_\Omega exp\left[\frac{g}{c_1\|f\|_{L^p(\Omega)}}\right]^{p'} dx \leq c_2|\Omega| \quad dove\ p' = \frac{p}{p-1}.$$

Dimostrazione: Sappiamo già che se $q \geq p$

$$\|g\|_{L^q(\Omega)} \leq q^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \omega_n^{1-\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

cosicché:

$$\int_\Omega |g|^q dx \leq q^{1+\frac{q}{p'}} \omega^{\frac{q}{p'}} |\Omega| \|f\|^q_{L^p(\Omega)}.$$

Quindi per $q > p - 1$

$$\int_\Omega |g|^{p'q} dx \leq p'q(\omega_n p'q \|f\|^{p'}_{L^p(\Omega)})^q |\Omega|$$

cosicché, posto $N_0 = [p]$, si ha

$$\int_\Omega \sum_{N_0}^{N} \frac{1}{k!}\left(\frac{|g|}{c_1\|f\|_{L^p(\Omega)}}\right)^{p'k} dx \le p'|\Omega| \sum \left(\frac{p'\omega_n}{c_1^{p'}}\right)^k \frac{k^k}{(k-1)!}.$$

La serie a destra converge ogni volta che $c_1^{p'} > e\omega_n p'$, quindi per il teorema della convergenza la dimostrazione è conclusa. □

Il seguente teorema stabilisce i rapporti tra i teoremi di immersione di Sobolev ed i teoremi sul potenziale fin qui illustrati:

Teorema 1.3.5 *Sia $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$. Allora*

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n}\int_\Omega \frac{(x_i - y_i)D_i u(y)}{|x-y|^n} dy \qquad q.o.\ in\ \Omega$$

Dimostrazione: Supponiamo $u \in C_c^1(\Omega)$ ed estendiamo u a zero fuori di Ω. Per ogni $\omega \in S^{n-1}$ si ha

$$u(x) = -\int_0^{+\infty} D_r u(x + r\omega) dr$$

ed integrando sulla sfera S^{n-1} abbiamo:

$$u(x) = -\frac{1}{n\omega_n}\int_0^{+\infty}\int_{|\omega|=1} D_r u(x+r\omega)drd\omega = \frac{1}{n\omega_n}\int_\Omega \frac{(x_i-y_i)D_i u(y)}{|x-y|^n}dy.$$

Per la continuità del potenziale e la densità di $\mathbf{C}_c^1(\Omega)$ in $W_0^{1,1}(\Omega)$ si ottiene la tesi. □

Osservazione : Abbiamo cosí ottenuto per $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$

$$|u| \le \frac{1}{n\omega_n} V_{\frac{1}{n}}(|Du|) \qquad q.o.\ in\ \Omega.$$

Teorema 1.3.6 *Esistono c_1, c_2 dipendenti solo da n tali che per ogni $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$*

$$\int_\Omega exp\left[\frac{|u|}{c_1\|Du\|_{L^n(\Omega)}}\right]^{\frac{n}{n-1}} dx \le c_2|\Omega|$$

.

Dimostrazione: segue dalla stima dell'osservazione precedente e dal Lemma 1.3.4. $\square$

Lemma 1.3.7 Sia Ω convesso e sia $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Allora:

$$|u - u_\Omega| \leq \frac{d^n}{n|\Omega|} \int_\Omega |x-y|^{1-n} |Du(y)| dy \quad q.o.\ in\ \Omega$$

dove d=diamΩ. (Si noti che il termine a destra è $\frac{d^n}{n|\Omega|} V_{\frac{1}{n}}(|Du|)$.)

Dimostrazione : Per il teorema di Meyers-Serrin basta mostrare che la tesi è vera per $u \in C^1(\Omega) \bigcap W^{1,1}(\Omega)$. Per ogni $x, y \in \Omega$

$$u(x) - u(y) = -\int_0^{|x-y|} D_r u(x + r\omega) dr \quad dove\ \omega = \frac{y-x}{|y-x|}.$$

Integrando su Ω rispetto ad y otteniamo:

$$|\Omega|(u(x) - u_\Omega) = -\int_\Omega dy \int_0^{|x-y|} D_r u(x + r\omega) dr$$

e scrivendo

$$V(x) = \begin{cases} |D_r u(x)| & se\ x \in \Omega \\ 0 & se\ x \notin \Omega \end{cases}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} |u(x) - u_\Omega| &\leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{|x-y|<d} dy \int_0^{+\infty} V(x + r\omega) dr = \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_0^{+\infty} \int_{|\omega|=1} \int_0^\delta V(x + r\omega) \rho^{n-1} d\rho d\omega dr = \\ &= \frac{d^n}{n|\Omega|} \int_0^{+\infty} \int_{|\omega|=1} V(x + r\omega) d\omega dr = \\ &= \frac{d^n}{n|\Omega|} \int_\Omega |x-y|^{1-n} |D_r u(y)| dy. \end{aligned}$$

$\square$

Proviamo ora un teorema di immersione di Morrey:

Teorema 1.3.8 *Sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$. Allora $u \in C^\gamma(\overline{\Omega})$ dove $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$. Inoltre, per ogni palla B di raggio R*

$$osc_{\Omega \cap B} \leq C R^\gamma \|Du\|^p_{L^p(\Omega)} \quad dove\ C = C(n,p)$$

Dimostrazione: Utilizzando le stime precedenti per $\Omega = B,\ q = +\infty,\ \mu = 1/n$, abbiamo:

$$|u(x) - u_B| \leq c(n,p)R^\gamma \|Du\|^p_{L^p(\Omega)} \quad q.o.\ in\ -(\Omega \cap B),$$

quindi:

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_B| + |u(y) - u_B| \leq 2C(n,p)R^\gamma \|Du\|^p_{L^p(\Omega)} \quad q.o.\ in\ \Omega.$$

□

Gli ultimi risultati possono essere riassunti come segue:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega) & per\ p < n \\ L^\varphi(\Omega)\ \ dove\ \varphi = exp(|t|^{\frac{n}{n-1}}) - 1 & se\ p = n \\ C^{1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega}) & per\ n < p. \end{cases}$$

Possiamo poi ricavare:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} \|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad per\ u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ 1 \leq p < +\infty$$

e per Ω convesso e $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{\omega_n}{|\Omega|}\right)^{1-\frac{1}{n}} (diam(\Omega))^n \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

1.4 Compattezza delle immersioni

Teorema 1.4.1 *Lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ si immerge con compattezza in:*

$(i)\ L^q(\Omega)\ \ \forall\ q < \frac{np}{n-p}\ se\ p < n$
$(ii)\ C^{0,\alpha}(\Omega)\ con\ \alpha = 1 - \frac{n}{p}\ \ se\ n < p$

Dimostrazione : (ii) segue dalla stima di Morrey vista precedentemente e dal teorema di Ascoli Arzelá.
Proviamo ora (i) per $q = 1$.
Sia $A \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ limitato. Possiamo supporre $A \subset \mathbf{C}^1_c(\Omega)$ *e* $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1\ \ \forall\ u \in A$.

Per ogni $h \in \mathbb{N},\ h > 0$, definiamo $A_h = \{u_h | u \in A\}$ dove con u_h indichiamo la regolarizzata $h-$esima di u.
(a) A_h è precompatto in $L^1(\Omega)$, infatti
se $u \in A$,

$$|u_h(x)| \leq \int_{|z|<1} |\rho(z)||u(x+hz)|dz \leq sup\ (\rho\|u\|_{L^1(\Omega)})$$

e

$$|Du_h(x)| \leq \int_{z\leq 1} |D\rho(z)||u(x+hz)|dz \leq sup\ (|D\rho|\|u\|_{L^1(\Omega)}).$$

quindi A_h è limitato ed equicontinuo in $C^0(\overline{\Omega})$, quindi è precompatto in $C^0(\Omega)$ e $L^1(\Omega)$
(b) per $u \in A$ posto $\omega = z/|z|$

$$\begin{aligned} |u(x) - u_h(x)| &\leq \int_{|z|\leq 1} |\rho(z)||u(x) - u(x-hz)|dz \\ &\leq \int_{|z|\leq 1} \rho(z) \int_0^{h(z)} |D_r u(x+r\omega)|drdz, \end{aligned}$$

e integrando in x:

$$\int_\Omega |u(x) - u_h(x)|dx \leq h \int_\Omega |Du(x)|dx \leq h.$$

Quindi u_h é uniformemente vicina ad u in $L^1(\Omega)$ e dunque A è precompatto.
In conclusione: per $1 < q < \frac{np}{n-p}$ abbiamo la stima per

$$\lambda + (1-\lambda)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) = \frac{1}{q}$$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|^{\lambda}_{L^1(\Omega)} \|u\|^{(1-\lambda)}_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leq \|u\|^{\lambda}_{L^1(\Omega)} (c\|Du\|_{L^p(\Omega)})^{1-\lambda}$$

da cui segue immediatamente la tesi. $\square$

Capitolo 2

Una definizione tipo Lipschitz di spazio di Sobolev su spazio metrico

Introduzione: In questo capitolo prendiamo in esame la definizione di spazio di Sobolev su spazio metrico proposta nel 1993 da Hajłasz;
Esponiamo la teoria di questi spazi, e presentiamo un certo numero di esempi che ci permettono di fare un confronto con il caso classico e di individuare i pregi ed alcuni difetti di questa definizione.

È noto che se Ω è un aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, $W^{1,\infty}(\Omega)$ è composto dalle funzioni lipschitziane, quindi è abbastanza immediato dare una definizione di $W^{1,\infty}$ su spazio metrico (X, d) ; Dovremo però, naturalmente, prendere in considerazione (X, d, μ), dove, μ indica una misura di Borel sullo spazio metrico (X, d), e poi più avanti considerare il caso in cui μ e d hanno un qualche rapporto che riproduce il concetto di dimensione in ambiente più generale.

2.1 Caratterizzazione tipo Lipschitz

Ricordiamo:

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \ : \ Df \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)\}$$

$$L^{1,p}(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega) \ : \ Df \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)\}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto ed $1 \leq p \leq +\infty$

Per il Lemma 1.3.7 in $L^{1,p}(Q)$, (dove Q è un cubo di $\mathbb{R}^n$), vale:

$$|u(x) - u_Q| \leq c \int_Q \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy.$$

Per ogni $x, y \in Q$ possiamo considerare un sottocubo $\bar{Q}$ tale che $x, y \in \bar{Q}$ e $diam \bar{Q} \approx |x-y|$

Lemma 2.1.1 *Se $0 < \alpha < d$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e per ogni $\delta > 0$ si ha :*

$$\int_{|x-y| \leq \delta} |f(y)||x-y|^{\alpha - d} dy \ \leq A\delta^\alpha M(f)(x)$$

dove f è una funzione in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ ed $M(f)$ indica la funzione massimale di f .

Dimostrazione : Si ha infatti

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y| \leq \delta} |f(y)||x-y|^{\alpha - d} dy &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\delta 2^{-n-1} \leq |x-y| < \delta 2^{-n}} |f(y)||x-y|^{\alpha - \delta} dy \\
&\leq A \sum_{n=0}^{+\infty} (\delta 2^{-n})^\alpha (\delta^{-n})^{-d} \int_{|x-y| \leq \delta 2^- n} |f(y)| dy \\
&\leq A\delta^\alpha M(f)(x) \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n\alpha}.
\end{aligned}$$

□

Usando il Lemma 2.1.1 per ogni $u \in W^{1,p}(Q)$ si ha

$$\int_{B(x,R)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \leq CRM_R(|Du|)(x)$$

dove $M_R(g) := M_R g := \sup\limits_{r<R} \fint_{B(x,r)} |g(y)| dy$. Ne deduciamo:

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_{\overline{Q}}| + |u(y) - u_{\overline{Q}}| \\
&\leq c|x-y|(M_{|x-y|}|Du|(x) + M_{|x-y|}|Du|(y)).
\end{aligned}$$

Per il teorema massimale di Hardy e Littlewood, se $p \in (1, +\infty)$ l'operatore massimale manda L^p in sè con continuità, e quindi: se u è una funzione in $L^{1,p}(\Omega)$ (Dove Ω e tutto lo spazio oppure e un limitato con bordo lipschitziano) esiste una funzione $g \in L^p(\Omega), \quad g \geq 0$ che verifica:

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y)) \qquad \textit{per q.o. } x, y \in \Omega$$

Il seguente teorema completa la caratterizzazione:

Teorema 2.1.2 *Sia u una funzione misurabile in Ω dove Ω è tutto $\mathbb{R}^n$ oppure è un limitato con bordo lipschitziano, $1 < p \leq \infty$. Allora $u \in L^{1,p}(\Omega)$ se e solo se esiste una funzione $g \geq 0$, $g \in L^p(\Omega)$ che verifica:*

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y)) \qquad \textit{per q.o. } x, y \in \Omega \tag{2.1}$$

Dimostrazione: Ci resta da mostrare ($\Longleftarrow$) Mostriamo che se vale la diseguaglianza (2.1) , allora esiste $h \in L^p(\Omega)$ nonnegativa tale che :

$$|\frac{\partial u}{\partial x_i}[\varphi]| := | - \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx| \leq \int |\varphi| h dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ integrando sulla palla $B(x, \varepsilon)$ la diseguaglianza (2.1) due volte si ottiene:

$$\fint_B |u - u_B| dx \leq C\varepsilon \fint_B g dx.$$

Sia $\psi \in C_c^\infty(B(0,1))$ tale che $\int \psi dx = 1$, definiamo una successione di mollificatori a partire da ψ ponendo: $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(\frac{x}{\varepsilon})$. Abbiamo :

$$\int u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\psi_\varepsilon * u) dx = - \lim_{\varepsilon \to 0} \int \varphi(\frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} * u) dx,$$

e poichè la derivata di ψ_ε è a media nulla :

$$(u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i})(x) = (u - u_{B(x,\varepsilon)}) * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i})(x)$$

$$|u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i}|(x) \leq c \int_B |u - u_b| \varepsilon^{-n-1} dx \leq c \fint_b g dx.$$

Quindi:

$$|\int u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx| \leq \int |\varphi| M g dx.$$

Essendo, per il teorema massimale, $Mg \in L^p(\Omega)$, la dimostrazione è conclusa.

$\square$

La seguente osservazione ci sarà utile in seguito:

Osservazione 2.1.3 *dalla precedente dimostrazione si deduce:*
(a) $(\Longleftarrow)$ *vale per ogni dominio* Ω
(b) Se Ω *è limitato con bordo lipschitziano* $L^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$ *come insiemi.*

2.2 Definizioni e prime proprietà

Definizione 2.2.1 *Sia* (X, d, μ) *uno spazio metrico* (X, d) *di diametro finito dotato di una misura di Borel finita e positiva* μ, *e sia* $p \in (1, +\infty]$. *Definiamo gli spazi di Sobolev* $L^{1,p}(X, d, \mu)$ *e* $W^{1,p}(X, d, \mu)$ *come segue:*

$$\begin{aligned} L^{1,p}(X,d,\mu) &= \{u : X \longrightarrow \mathbb{R} \; misurabili \; tali \; che \; \exists g \in L^p(\mu) \\ &\quad\; verificante \; (2.1) \; per \; \mu - q.o. \; x, y \in X\} \end{aligned}$$

$$W^{1,p}(X,d,\mu) = \{u \in L^{1,p}(X,d,\mu) | u \in L^p(\mu)\}$$

Come si può notare la definizione di funzione in $W^{1,p}(X, d, \mu)$ è simile a quella di funzione lipschitziana, a meno di sostituire la costante di Lipschitz con una funzione g in L^p.

Teorema 2.2.2 *Se* $1 < p < +\infty$ *allora per ogni* u *in* $L^{1,p}(X, d, \mu)$ *esiste un unica* g *in* $L^p(X, d, \mu)$ *di norma minima che verifica la diseguaglianza (2.1) .*

Definizione 2.2.3 *Se* u *appartiene a* $L^{1,p}(X, d, \mu)$ *definiamo la seminorma:*

$$\|u\|_{1,p} := \inf \|g\|_{L^p}$$

dove l'estremo inferiore è considerato sull'insieme delle funzioni per cui vale (2.1).

Lemma 2.2.4 *Si ha* $L^{1,p}(X, d, \mu) = W^{1,p}(X, d, \mu)$.

Dimostrazione: L'inclusione di $W^{1,p}(X, d, \mu)$ *in* $L^{1,p}(X, d, \mu)$ è evidente. Sia ora $u \in L^{1,p}(X, d, \mu)$ e sia $y \in X$ con $g(y) < +\infty$. Abbiamo

$$|u(x)| \leq |u(x) - u(y)| + |u(y)| \leq (diam X)(g(x) + g(y)) + |u(y)|$$

per cui $u \in L^p(\mu)$ e la dimostrazione è conclusa. $\square$

Teorema 2.2.5 *$W^{1,p}(X,d,\mu)$ è uno spazio di Banach con la norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \|u\|_{1,p}.$$

Dimostrazione: Sia u_n una successione di Cauchy in $W^{1,p}$, e supponiamo che $u_n \longrightarrow u$ in L^p. Mostriamo che $u \in W^{1,p}$ e che la convergenza ad u è in questo ultimo spazio. Sia u_{n_i} una successione estratta tale che $\|u_{n_{i+1}} - u_{n_i}\|_{W^{1,p}} < 2^{-i}$. Quindi u_{n_i} converge ad u puntualmente quasi ovunque, ed esistono $g_i \in L^p$ tali che :

$$|(u_{n_{i+1}} - u_{n_i})(x) - (u_{n_{i+1}} - u_{n_i})(y)| \leq d(x,y)(g_i(x) + g_i(y))$$

e $\|g_i\|_{L^p} \leq 2^{-i}$. Se scegliamo $h = \sum_1^{+\infty} g_i$ allora $\|h\|_{L^p} \leq 1$.
Ne segue che per $j > i$:

$$|(u_{n_j} - u_{n_i})(x) - (u_{n_j} - u_{n_i})(y)| \leq d(x,y)(\sum_{k=i}^{\infty} g_k(x) + \sum_{k=i}^{\infty} g_k(y)).$$

Passando al limite su j si ha che $u \in L^{1,p} = W^{1,p}$ e per la convergenza della serie a destra si ha $u_{n_i} \longrightarrow u$ in $L^{1,p}$. Poiché la successione di partenza è di Cauchy la dimostrazione è conclusa. □

Mostriamo ora una diseguaglianza di tipo Poincaré.

Teorema 2.2.6 *Se $u \in W^{1,p}(X,d,\mu)$ allora si ha:*

$$\|u - u_X\|_{L^p} \leq 2(diam X)\|u\|_{L^{1,p}}.$$

Dimostrazione: Sia g tale da verificare (2.1) e tale che:
$\|g\|_{L^p} \leq (1+\varepsilon)\|u\|_{L^{1,p}}$. Si ha

$$|u(x) - u(y)| \leq d(x,y)(g(x) + g(y)) \leq (diam\ X)(g(x) + g(y))$$

quindi

$$\begin{aligned}
|u(x) - \fint_X u d\mu| &\leq \fint_X |u(x) - u(y)| d\mu(y) \leq (diam\ X)(g(x) + \fint_X g d\mu) \\
&\leq (diam\ X)(g(x) + (\fint_X g^p d\mu)^{1/p}, \\
\|u - u_X\|_{L^p} &\leq 2(diam\ X)\|g\|_{L^p} \leq 2(1+\varepsilon)(diam\ X)\|u\|_{L^{1,p}}.
\end{aligned}$$

□

2.3 Approssimazione con funzioni regolari

Il seguente teorema fornisce un risultato di approssimazione di funzioni $W^{1,p}(X,d,\mu)$ con funzioni regolari:

Teorema 2.3.1 *Se $u \in W^{1,p}(X,d,\mu)$ dove $p \in (1,+\infty)$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione h lipschitziana tale che:*

$$(1)\mu(\{x|u(x) \neq h(x)\}) < \varepsilon$$

$$(2)\|u-h\|_{W^{1,p}} < \varepsilon.$$

Dimostrazione: Sia $E_\lambda := \{x|\ |u(x)| \leq \lambda\ e\ g(x) \leq \lambda\}$ dove g è come nella definizione di $\|u\|_{L^{1,p}}$. Poiché u e g appartengono ad L^p si ha $\lambda^p\mu(X\setminus E_\lambda) \longrightarrow 0$ quando $\lambda \to \infty$. La funzione $u|_{E_\lambda}$ è lipschitziana con costante di Lipschitz 2λ, possiamo estendere quindi tale funzione ad una nuova funzione $\overline{u_\lambda}$ lipschitziana su tutto X con la stessa costante di Lipschitz 2λ. Possiamo poi modificare $\overline{u}$ ponendo:

$$u_\lambda = (sgn\overline{u})min\{|\overline{u}|, \lambda\}$$

evidentemente u_λ è lipschitziana di costante 2λ, coincide con u su E_λ, e si ha $|u_\lambda| \leq \lambda$. Inoltre

$$\mu(\{x|u(x) \neq u_\lambda(x)\}) \leq \mu(X \setminus E_\lambda) \longrightarrow 0 \quad se\ \lambda \to \infty,$$

quindi resta da dimostrare che u_λ tende a u in $W^{1,p}(X,d,\mu)$. Abbiamo:

$$\|u-u_\lambda\|_{L^p}^p = \int_{X\setminus E_\lambda} |u-u_\lambda|^p d\mu \leq 2^{p-1}(\int_{X\setminus E_\lambda} |u|^p d\mu + \lambda^p\mu(X \setminus E_\lambda)) \to 0.$$

Sia ora

$$g_\lambda = \begin{cases} 0 & per\ x \in E_\lambda \\ g(x)+3\lambda & per\ x \in X \setminus E_\lambda; \end{cases}$$

si ha che :

$$|(u-u_\lambda)(x) - (u-u_\lambda)(y)| \leq d(x,y)(g_\lambda(x)+g_\lambda(y)),$$

e quindi la tesi segue dal fatto che $\|g_\lambda\|_{L^p} \to 0$. □

2.4 Teoremi di immersione

I teoremi di immersioni classici dipendono, almeno nella loro versione più nota, dalla dimensione; così è necessario introdurre una condizione che ci permetta di riprodurre in un contesto metrico le condizioni sotto cui valgono i teoremi di immersione.

Definizione 2.4.1 *Diciamo che (X, d, μ) è $s - regolare$ $(s > 0)$ rispetto a μ se X è di misura finita, di diametro finito ed esiste una costante b positiva tale che per ogni $x \in X$ e per ogni $r \leq diamX$ valga:*

$$br^s < \mu(B(x, r))$$

Diciamo che uno spazio metrico è $s - regolare$ se è $s - regolare$ rispetto alla misura di Hausdorff H^s. Riporteremo in seguito vari esempi riguardo al concetto di spazio metrico $s - regolare$.

Teorema 2.4.2 *Sia $u \in W^{1,p}(X, d, \mu)$ e sia (X, d, μ) $s - regolare$. Allora si ha*

(1) Se $p < s$ allora $u \in L^{p^*}(X, d, \mu)$ dove $p^* = \frac{sp}{s-p}$. Inoltre

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C(\frac{\|u\|_{L^p}}{diamX} + \|u\|_{L^{1,p}})$$

e quindi

$$\|u - u_X\|_{L^{p^*}} \leq C' \|u\|_{L^{1,p}}.$$

(2) Se $p = s$ allora esistono due costanti positive C_1, C_2 tali che:

$$\fint_X exp\left(C_1 \frac{\mu(X)^{\frac{1}{s}} |u - u_X|}{diamX \|u\|_{L^{1,p}}}\right) d\mu \leq C_2.$$

(3) Se $s < p$ allora:

$$\|u - u_X\|_{L^\infty} \leq C\mu(X)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{p}} \|u\|_{L^{1,p}}$$

e quindi

$$|u(x) - u(y)| \leq C\mu(X)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{p}} \|u\|_{L^{1,p}}.$$

Dimostrazione: Sia g una funzione come nella definizione di $\|u\|_{L^{1,p}}$ tale che $\|g\|_{L^p} \simeq \|u\|_{L^{1,p}}$. (Con $u \simeq v$ si intende che esiste una costante c positiva tale che : $v/c \leq u \leq cv$). Sia $E_k := \{x | g(x) \leq 2^k\}$ *dove* $k \in \mathbb{Z}$. Abbiamo:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{kp}\mu(E_k \setminus E_{k-1}) \simeq \int_X g^p d\mu < +\infty.$$

Posto $a_k = \sup\limits_{E_k} |u|$ stimeremo ora a_k in termini di a_{k-1}. Consideriamo la palla $B(x,r)$ di raggio $r = c\mu(X \setminus E_{k-1})^{1/s}$ allora, per la
$s - regolarità$, $\mu(B(x,r)) \geq \mu(X \setminus E_{k-1}) \implies \exists \overline{x} \in B(x,r) \cap E_{k-1}$. Ora, poiché $u|_{E_k}$ è lipschitziana di costante 2^{k+1}, troviamo :

$$|u(x)| \leq |u(x)-u(\overline{x})|+|u(\overline{x})| \leq d(x,\overline{x})2^{k+1}+a_{k-1} \leq c\mu(X\setminus E_{k-1})^{\frac{1}{s}}2^{k+1}+a_{k-1}$$

e quindi per la diseguaglianza di Chebyschev,

$$\mu(X \setminus E_{k-1}) \leq \frac{c}{2^{kp}}\|g\|^p_{L^p}$$

da cui :

$$a_k \leq c2^{k(1-\frac{p}{s})}\|g\|^{\frac{p}{s}}_{L^P} + a_{k-1}. \tag{2.2}$$

Da questa diseguaglianza segue che u è rispettivamente p^* integrabile, esponenzialmente integrabile o essenzialmente limitata. Otterremo ora stime più precise a seconda dei rapporti tra p ed s.
Possiamo suppore $g > 0$ ovunque (a meno di sostituire g con $g + \|g\|_{L^p}$).
Sia $b_k = \inf\limits_{E_k} |u|$; si ha $b_k \leq \|u\|_{L^p}\mu(E_k)^{-1/p}$. Poichè $0 < g$ ovunque, allora esiste una costante k_0 tale che $\mu(E_{k-1}) < \mu x/2 < \mu(E_{k_0})$ così che $\mu(X)/2 < \mu(X \setminus E_{k_0-1})$. Quindi per la diseguaglianza di Chebyshev

$$2^{(k_0-1)p}\mu(X \setminus E_{k_0-1}) \leq \|g\|^p_{L^p}.$$

quindi

$$2^{k_0} \leq c\|g\|_{L^p}\mu(X)^{\frac{1}{p}}$$

Poiché $u|_{E_k}$ è lipschitziana di costante 2^{k+1} allora

$$\begin{aligned} a_{k_0} &\leq \|u\|_{L^p}\mu(E_{k_0})^{\frac{-1}{p}} + C(diamX)\|g\|_{L^p}\mu(X)^{\frac{-1}{p}} \\ &\leq C'\mu(X)^{\frac{-1}{p}}(\|u\|_{L^p} + (diamX)\|g\|_{L^p}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

<u>**Caso $p < s$:**</u>
Dalla stima 2.2 e dalla monotonia di a_k si ha che :

$$
\begin{aligned}
a_k &\le c\|g\|_{L^p}^{\frac{p}{s}}\Big(\sum_{i=-\infty}^{k} 2^{i(1-\frac{p}{s})}\Big) + a_{k_0} \\
&\le c'\|g\|_{L^p}^{\frac{p}{s}} 2^{k(1-\frac{p}{s})} + a_{k_0}
\end{aligned}
$$

quindi:

$$
\begin{aligned}
\int_X |u|^{p^*} d\mu &\le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{p^*} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) \\
&\le c(\|g\|^{p^* \frac{p}{s}} \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{kp}\mu(E_k \setminus E_{k-1})\Big) + a_{k_0}^{p^*}\mu(X)),
\end{aligned}
$$

e poiché per la s-regolarità $\mu(X) > c(diam(X))^s$, allora segue che

$$
\|u\|_{L^{p^*}} \le c((diam X)^{-1}\|u\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}).
$$

Caso $p = s$:

A meno di riscalare, possiamo assumere $\mu(X) = 1$ e $diam(X) = 1$. È sufficiente provare che $\int_X exp(C_1|u|)d\mu \le C_2$ dove $u \in W^{1,s}(X, d, \mu)$ è tale che $\int_X u d\mu = 0, \|u\|_{L^{1,s}} = 1$. Segue da (2.2) che $a_k \le \overline{C}k + a_0$ per $k \ge 0$. Sia C_1 costante tale che $exp(C_1\overline{C}) = 2^s$. Abbiamo

$$
\int_X exp(C_1|u|)d\mu = \int_{E_0} exp(C_1|u|)d\mu + \int_{X\setminus E_0} exp(C_1|u|)d\mu;
$$

$$
\int_{E_0} exp(C_1|u|)d\mu \le e^{C_1 a_0}\mu(X) = e^{C_1 a_0};
$$

$$
\begin{aligned}
\textstyle\int_{X\setminus E_0} exp(C_1|u|)d\mu &\le \sum_{k=1}^{+\infty} e^{C_1(\overline{c}k + a_0)}\mu(E_k \setminus E_{k-1}) \\
&= e^{C_1 a_0}\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{ks}\mu(E_k \setminus E_{k-1}) \\
&= Ce^{C_1 a_0};
\end{aligned}
$$

quindi è sufficiente dimostrare che a_0 è limitato da una costante universale (che dipende da s e b). Se $k_0 \ge 0$ allora da (2.3) e dal Teorema 2.2.6 segue :

$$
a_0 \le a_{k_0} \le c.
$$

Se $k_0 < 0$ allora segue dalla definizione di k_0 che:

$$
\frac{1}{2} = \frac{\mu(X)}{2} \le \mu(E_{k_0}) \le \mu(E_0)
$$

quindi

$$a_0 \leq b_0 + 2diam(X) \leq \|u\|_{L^s}\mu(E_0)^{-\frac{1}{s}} + 2diamX < c.$$

<u>**Caso** $s < p$**:**</u>
Possiamo supporre che: $\int_X u d\mu = 0$. Dalle stime (2.2) e successive segue che

$$a_k \leq C\|g\|_{L^p}^{\frac{p}{s}}(\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} 2^{k(1-\frac{p}{s})}) + a_{k_0} \leq C'\mu(X)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}}\|g\|_{L^p} + a_{k_0}$$

Per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Ora per il Teorema 2.2.6, la stima (2.3) e la $s-$regolaritá, abbiamo:

$$a_{k_0} \leq C\mu(X)^{\frac{-1}{p}}(diamX)\|g\|_{L^p} \leq C'\mu(X)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}}\|g\|_{L^p}$$

con ciò concludiamo la prima parte.
La seconda diseguaglianza segue dall'osservazione che:

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_X| + |u_X - u(y)|.$$

□

2.5 Esempi ed applicazioni

Lo stesso Hajłasz in collaborazione con vari altri autori, ha presentato negli ultimi anni varie possibili applicazioni degli spazi di che abbiamo preso in esame. In questo paragrafo presentiamo applicazioni a spazi di Sobolev con peso, teoremi di immersione per domini irregolari, teoremi di traccia e di estensione. Inoltre, presentiamo esempi di vari domini che abbiano o siano privi delle proprietà di cui abbiamo parlato in questo capitolo.

Dalla lettura dei paragrafi precedenti, sorgono spontanee due domande: La prima è: Detta $A(u)$ la classe di funzioni g che verificano (2.1) con u fissata, che rapporto c' è tra $|Du|$ e $A(u)$ nel caso classico?
La seconda domanda è: Se come spazio metrico consideriamo Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea e come misura la misura di Lebesgue H^n, che rapporto c' è tra $W^{1,p}(\Omega, |\ |, H^n)$ e $W^{1,p}(\Omega)$?
I due esempi che seguono riguardano la prima domanda.

Esempio 2.5.1 *$|Du|$ può non appartenere ad $A(u)$*

Sia $\Omega = (0,1)$ consideriamo la seguente funzione affine a tratti e quindi in $W^{1,p}(\Omega)$:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in (0, \frac{1}{3}] \\ -3x+2 & se\ x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

è chiaro che comunque si consideri una coppia di punti nel primo e nel terzo intervallo la diseguglianza 2.1 non può essere verificata da $|Du|$ che quindi non appartiene ad $A(u)$.
Naturalmente questo esempio si può generalizzare determinando una classe di funzioni che si ottengono "incollando" funzioni affini a tratti in modo da restare in $W^{1,p}$, per le quali $|Du|$ non appartiene ad $A(u)$.

Esempio 2.5.2 *$|Du|$ può appartenere ad $A(u)$ ma non minimizzare la norma in tale insieme.*

Sia Ω come nell'esempio precedente, consideriamo la funzione $u(x) = x$ si ha chiaramente che $|Du| \in A(u)$, ma si ha che anche $\frac{1}{2}|Du|$ appartiene a tale classe.

Osservazione 2.5.3 *In realtà si può dimostrare che in $\mathbb{R}^n$, per ogni g in $A(u)$ vale $|Du| \leq 2\sqrt{n}g$.*

Per quello che riguarda la seconda domanda, sui rapporti tra $W^{1,p}(\Omega, |\ |, H^n)$ e $W^{1,p}(\Omega)$, la questione è molto complessa, di sicuro vale il seguente risultato.

Teorema 2.5.4 *$W^{1,p}(\Omega, |\ |, H^n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ per ogni aperto Ω di $\mathbb{R}^n$*

Dimostrazione: Segue dal Teorema 2.1.2 . □

Esempio 2.5.5 *Esistono domini per cui $W^{1,p}(\Omega, |\ |, H^n) \neq W^{1,p}(\Omega)$.*

Sia $\Omega = (0, 1) \cup (1, 2)$ ed u la funzione che vale 0 tra 0 ed 1, e vale 1 tra 1 e 2, chiaramente la u appartiene a tutti gli spazi di Sobolev classici, ma non appartiene a $W^{1,2}(\Omega, |\ |, H^1)$ in quanto: Sia g tale da verificare

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y)) \quad q.o. - \Omega$$

dividendo ambo i membri per $|x - y|$ si ha facilmente che g non può appartenere ad L^2.

Il seguente teorema fornisce un importante esempio:

Teorema 2.5.6 *Se Ω è un aperto con bordo lipschiziano allora vale:*

$$W^{1,p}(\Omega, |\ |, H^n) = W^{1,p}(\Omega)$$

e

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(M(|Du|)(x) + M(|Du|)(y))$$

Dimostrazione: Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si può vedere che esiste una costante L che dipende solo da Ω tale che per ogni coppia di punti $x, y \in \Omega$ esiste una mappa $L-$bilipschitziana $T : B(0, |x - y|) \to \Omega$ tale che $x, y \in T(B(0, |x - y|))$. Se $B \subset \mathbb{R}^n$ è una palla, allora vale la diseguaglianza:

$$|w(x) - w_B| \leq C(n) \int_B \frac{|Dw(z)|}{|x - z|^{n-1}} dz \tag{2.4}$$

per ogni $z \in W^{1,1}(B)$ e quasi ogni $x \in B$.
Sia $B = B(0, |x-y|)$ e $A = T(B)$. Applicando (2.4) a $w = u \circ T$ e cambiando variabile si ottiene:

$$|u(x) - (u \circ T)_B| \leq C(n) L^{2n} \int_A \frac{Du(z)}{|x - z|^{n-1}} dz$$

per quasi ogni $x \in A$. Da qui la conclusione con i calcoli più volte visti.

$\square$

Osserviamo che in realtà vale il più generale risultato, di dimostrazione leggermente più difficile

Lemma 2.5.7 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato con bordo lipschitziano e $0 \leq \lambda < 1$. Allora esistono delle costanti C_1 e C_2 tali che per ogni $u \in W^{1,1}(\Omega)$ la diseguaglianza*

$$|u(x) - u(y)| \leq C_1 |x - y|^{1-\lambda} (M^{\lambda}_{C_2|x-y|} |Du|(x) + M^{\lambda}_{C_2|x-y|} |Du|(y)) \tag{2.5}$$

vale quasi ovunque. Qui $M^{\lambda}_R g(x) := \sup\limits_{r<R} r^{\lambda} ⨍_{B(x,r)} |g(z)| dz$ è l'operatore massimale frazionario, ed abbiamo posto $|Du| = 0$ fuori da Ω.

Omettiamo la dimostrazione che può essere trovata in Hajłasz [11].
I domini con bordo lipschitziano , non solo non esauriscono la classe dei domini per cui gli spazi di Sobolev che stiamo considerando coincidono con quelli classici, ma costituiscono forse la parte meno interessante; il seguente esempio mostra un'applicazione del teorema appena visto.

Esempio 2.5.8 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio tale che $\partial\Omega$ abbia un numero finito di cuspidi esterne di andamento polinomiale, allora $W^{1,p}(\Omega, |\ |, H^n) = W^{1,p}(\Omega)$*

Facciamo la dimostrazione per un caso particolare cui ci si riconduce per mezzo di un cambiamento di variabile ed una partizione dell'unità.
Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ tali\ che : x \in (-1,1) \ ed \ \sqrt{|x|} < y < 1\}$. Consideriamo $(x,y) \ ed \ (x_1,y_1) \ \in \Omega$, supponiamo $y = min\{y, y_1\}$ e poniamo $\varepsilon = \frac{y}{2}$. Il dominio $\Omega_1 := \{(x,y) \in \Omega \ tali\ che\ \varepsilon < y\}$ è un domino con bordo lipschitziano contenuto in Ω. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ allora $u \in W^{1,p}(\Omega_1)$ e quindi $|u(x,y) - u(x_1,y_1)| \leq |(x,y)-(x_1,y_1)|(M_{diam(\Omega_1)}(|Du|)(x,y)+M_{diam(\Omega_1)}(|Du|)(x_1,y_1))$, ma $M_{diam(\Omega_1)} \leq M_{diam(\Omega)}$ e quindi $u \in W^{1,p}(\Omega, |\ |, H^n)$. $\square$

Da questo ultimo esempio si deduce che possiamo ricavare i teoremi di immersione per domini con cuspidi di andamento polinomiale dai teoremi di immersione presentati nella precedente sezione di questo capitolo, ossia che questa definizione di spazio di Sobolev permette di dimostrare allo stesso tempo teoremi di immersione per domini tradizionalmente trattati in modo separato, semplificando notevolmente i calcoli nel caso dei domini con cuspidi.

Osservazione 2.5.9 *La $s-$regolarità di un dominio con cuspide dipende dalla dimensione dello spazio e dall'andamento della cuspide, come si deduce dal seguente esempio.*

Esempio 2.5.10 *Un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tale che $(\Omega, |\ |, H^2)$ non è $s-$regolare per alcun $s > 0$.*

Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ il seguente dominio con cuspide (di andamento esponenziale):

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ |y| < exp(-\frac{1}{x^2})\}.$$

In modo analogo a quanto fatto nell'esempio precedente si può dimostrare che in questo caso $W^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega, |\ |, H^2)$, con facili conti, stimando opportuni integrali si può vedere che la misura H^2 non è $s-$regolare per nessun s. Osserviamo infatti che per questo dominio non valgono immersioni di Sobolev non banali (con non banale si intende $W^{1,p} \hookrightarrow L^q$ con $p < q$).

Un altra applicazione della teoria di questi spazi, è agli spazi di Sobolev con peso ω di Muckenhoupt, che rientrano in questo tipo di spazi grazie al teorema di Muckenhoupt che dimostra che l'operatore massimale è limitato in $L^p(\omega)$. Per i particolari rinviamo ad Hajłasz [8].

Il teorema di Gagliardo sulle tracce dice che se $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ è una varietà $(n-1)-$dimensionale sufficientemente regolare, e $1 < p < \infty$ allora esistono un operatore di traccia ed uno di estensione

$$T : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(M^{n-1})$$

$$E : W^{1-\frac{1}{p},p}(M^{n-1}) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

dove $W^{1-\frac{1}{p},p}(M^{n-1})$ è costituito dalle u tali che:

$$\|u\|_S^p = \int_{M^{n-1}} \int_{M^{n-1}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+p-2}} dxdy < \infty.$$

Teorema 2.5.11 *Se Ω è un dominio con bordo lipschitziano, allora:*

$$W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \subset W^{1,p}(\partial\Omega, |\ |^{1-\frac{1}{p}}, H^{n-1}) \subset W^{1-\frac{1}{p-\varepsilon},p-\varepsilon}(\partial\Omega)$$

per ogni $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione: Mostriamo prima la seconda inclusione. Se u appartiene a $W^{1,p}(\partial\Omega, |\ |^{1-\frac{1}{p}}, H^{n-1})$, allora esiste $g \in L^p(\partial\Omega)$ tale che

$$|u(x) - u(y)| \leq (g(x) + g(y))|x-y|^{1-\frac{1}{p}}$$

per quasi ogni $x, y \in \partial\Omega$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-\varepsilon}}{|x-y|^{n+p-\varepsilon-2}} dxdy &\leq C \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{g(x)^{p-\varepsilon} + g(y)^{p-\varepsilon}}{|x-y|^{n-1-\frac{\varepsilon}{p}}} dxdy \\ &= 2C\int_{\partial\Omega}(\int_{\partial\Omega} \frac{dx}{|x-y|^{n-1-\frac{\varepsilon}{p}}})g(y)^{p-\varepsilon}dy \ \cdot \\ &\leq C' \int_{\partial\Omega} g(y)^{p-\varepsilon} dy < +\infty \end{aligned}$$

Per quello che riguarda la prima inclusione sia $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. Dobbiamo cercare una buona g in $L^p(\partial\Omega)$. Fissiamo $0 \leq \lambda < 1$. Siano $x, y \in \partial\Omega$. Consideriamo una palla B_R con raggio R tale che x ed y le appartengano, $R \equiv |x-y|$ e $R \leq 2|x-y|$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_{B_R}| + |u(y) - u_{B_R}| \\ &\leq 2|x-y|^{1-\lambda}(G^\lambda_{|x-y|}u(x) + G^\lambda_{|x-y|}u(y)), \end{aligned}$$

dove

$$G_s^{\lambda}u(x) := sup\left\{\frac{|u(x) - u_{B_r}|}{r^{1-\lambda}} : x \in B_r, r \leq 2s\right\}$$

e la media u_B è intesa rispetto alla misura $(n-1)-$dimensionale ristretta al bordo di Ω. Sia $h = diam(\Omega)$. Per $\lambda = \frac{1}{p}$ abbiamo

$$|u(x) - u(y)| \leq 2|x-y|^{1-\frac{1}{p}}(G_h^{1/p}u(x) + G_h^{1/p}u(y)).$$

Ora è sufficiente mostrare che $G_h^{1/p}$ è in L^p. Per $x \in \partial\Omega$ con $G_h^{1/p}u(x) < \infty$, esiste una palla B_r con $x \in B_r$ ed $r \leq 2h$, tale che

$$G_h^{1/p}u(x) \leq 2\frac{|u(x) - u_{B_r}|}{r^{1-\frac{1}{p}}} \leq (\int_{\partial\Omega}\frac{|u(x) - u(z)|^p}{|x-z|^{p+n-2}}dz)^{\frac{1}{p}},$$

dove si è usato $|x - z| \leq 2r$ per $z \in B_r$ e la diseguaglianza di Hölder. □

Enunciamo qui di seguito dei teoremi di traccia e di estensione senza però riportare la dimostrazione che impegnerebbe un certo numero di pagine. Le dimostrazioni possono essere trovate in Hajłasz [11].

Supponiamo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$, e $K \subset \Omega$ sia un compatto, μ una misura di Borel finita su K e $0 \leq \lambda < 1$. Se per ogni $h > 0$

$$M_h^{\lambda} : L^p(\Omega) \to L^q(K, \mu) \tag{2.6}$$

è un operatore continuo, allora la diseguaglianza (2.5) implica immediatamente $u \in W^{1,q}(K, |\ |^{1-\lambda}, \mu)$ e quindi porta all'operatore di traccia

$$Tr : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,q}(K, |\ |^{1-\lambda}, \mu).$$

Vari teoremi classici garantiscono un immersione del tipo (2.6), e quindi permetterebbero di dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2.5.12 *Se $0 < \lambda < 1$, $1 < (n-d)/\lambda < p < n/\lambda$ e μ è una misura di Borel con supporto in un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$, tale che $\mu(B(x, R)) \leq CR^d$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $R > 0$, allora esiste un operatore di traccia limitato*

$$Tr : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{1,\frac{dp}{n-\lambda p}}(K, |\ |^{1-\lambda}, \mu).$$

Il teorema precedente non riguarda il caso $\lambda = 0$ che è preso in considerazione nel seguente:

Teorema 2.5.13 *Se $1 < p \le +\infty$ e μ è una misura di Borel con supporto in un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$, tale che $\mu(B(x,R)) \le CR^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $R > 0$, allora esiste un operatore di traccia limitato*

$$Tr : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{1,p}(K, |\ |^{1-1/p}, \mu).$$

Al contrario dei teoremi di traccia classici questi ultimi due non coinvolgono la geometria dell'insime K, ma solo proprietà della misura, di conseguenza, si hanno teoremi di traccia per qualsiasi compatto K, pagando il prezzo di una caratterizzazione meno precisa nei casi classici. Osserviamo inoltre che la definizione degli spazi di traccia è dello stesso tipo di quella degli spazi di cui si vogliono studiare le tracce.
Supponiamo μ sia una misura di Borel finita con supporto in un insieme compatto $K \subset \mathbb{R}^n$, $0 \le \lambda < 1$e $1 < q, r < +\infty$. Vogliamo costruire un operatore di estensione

$$Ext : W^{1,r}(K, |\ |^{1-\lambda}, \mu) \to W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$$

sotto opportune condizioni su μ, λ, q ed r. Costruiremo l'operatoreExt come segue. Ad ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ associamo un $\tilde{x} \in K$ tale che $|x - \tilde{x}| = dist(x, K)$. Si consideri una decomposizione di Whitney di $\mathbb{R}^n \setminus K$. Se x è un angolo di un cubo della decomposizione di Whitney, allora poniamo

$$\tilde{u}(x) = \fint_{B(\tilde{x}, |x-\tilde{x}|) \cap K} u(z) d\mu(z).$$

Allora $\tilde{u}$ è definita in un numero finito di punti di ogni cubo di Whitney Q denoteremo questo insieme finito con $V(Q)$ ed estenderemo $\tilde{u}$ linearmente in ciascun Q in questo modo la funzione che risulta è continua in $\mathbb{R}^n \setminus K$. Sia $D = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{N_k} Q_j^k$ dove la lunghezza del lato di Q_j^k è 2^{-k}. Fissata $\varphi \in C_c^\infty(D \bigcup K)$ con $\varphi|_K = 1$. Ora definiamo

$$Ext\ u(x) = \begin{cases} u(x) & se\ x \in K \\ \varphi(x)\tilde{u}(x) & se\ x \in \mathbb{R}^n \setminus K. \end{cases}.$$

Si noti che se $|K| = 0$, allora è sufficiente porre $Ext\ u(x) = \varphi(x)\tilde{u}(x)$.

Teorema 2.5.14 *Supponiamo che μ sia una misura di Borel finita, con supporto in un insieme compatto $K \subset \mathbb{R}^n$, e sia $d-$regolare ($d > 0$), ossia*

$$\mu(B(x,R) \cap K) \ge CR^d,$$

ogniqualvolta $x \in K$ ed $R \le diamK$. Supponiamo che $|K| = 0$ e $0 \le \lambda < 1$.

1. Se $r > 1$ ed $n - d > \lambda r$, allora

$$Ext : W^{1,r}(K, |\ |^{1-\lambda}, \mu) \to W^{1,r}(\mathbb{R}^n)$$

è un operatore continuo.

2. Supponiamo che esista $C \geq 1$ ed $s < n$ tali che $N_k \leq C2^{ks}$ per ogni $k \geq 0$. Se $q \leq r$ e $n - s - q(\lambda - (s-d)/r) > 0$, allora

$$Ext : W^{1,r}(K, |\ |^{1-\lambda}, \mu) \to W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$$

è un operatore continuo.

Nota: esistono classi di domini di definizione più complicati di quelli presi in considerazione, per i quali valgono teoremi analoghi a quelli enunciati in questo ultimo paragrafo, per questi si rimanda a Hajłasz [11].

Capitolo 3

Una definizione di spazio di Sobolev su spazio metrico via diseguaglianza di Poincaré

Introduzione: Il verificare la diseguaglianza di Poincaré è certamente una delle proprietà fondamentali delle funzioni che appartengono ad uno spazio di Sobolev. In questo capitolo presentiamo una definizione di spazio di Sobolev su spazio metrico, basata su una famiglia di diseguaglianze di tipo Poincaré, e facciamo dei confronti tra questa definizione, quella del capitolo 2, e gli spazi di Sobolev classici su $\mathbb{R}^N$.
Presentiamo inoltre un breve confronto tra i vari tipi di rapporto misura-metrica che ci aiuterà a capire quando e perchè spazi definiti in modo diverso coincidono o non coincidono.

3.1 Definizioni e Preliminari

Definizione 3.1.1 *: Sia (X, d, μ) uno spazio metrico con misura μ di borel. Diciamo che $u \in L^p(\mu)$ è in $W^{1,p}(X, d, \mu)$ se esiste $g \in L^p(\mu)$ tale che per ogni palla $B(x, r)$ in X vale:*

$$\int_{B(x,r)} |u(x) - u_B| d\mu \leq Cr \int_{B(x,r)} g(x) d\mu$$

C costante indipendente da u, g, r ed x.

Come per gli spazi definiti da Hajłasz e presi in considerazione nel capitolo precedente, i teoremi più consistenti su tali spazi necessiteranno di ipotesi su un qualche rapporto tra la misura e la distanza. Qui di seguito definiamo

(o ridefiniamo) quelli che verranno presi in considerazione in seguito e ne analizziamo i rapporti.
Nel seguito supporremo sempre (X, d, μ) uno spazio metrico con misura μ di Borel, inoltre ogni volta che considereremo $diamX$ supporremo tale numero finito.

Definizione 3.1.2 *: Sia $s > 0$. la misura μ si dice $s-$regolare se per ogni palla $B(x, r)$ in X si ha:*

$$cr^s \leq \mu(B(x, r))$$

dove c è una costante indipendente da r ed x.

Osservazione 3.1.3 *La costante c della definizione precedente si può immaginare dipendente da s, vedremo più avanti che esistono misure $s-$regolari per vari s con costanti diverse.*

Definizione 3.1.4 *: Sia $s > 0$. La misura μ si dice strettamente $s-$regolare se per ogni palla $B(x, r)$ in X vale:*

$$cr^s \leq \mu(B(x, r)) \leq Cr^s.$$

Definizione 3.1.5 *: La misura μ si dice doubling rispetto a d se esiste una costante C_d positiva tale che per ogni $x \in X$ e per ogni $r < diamX$ vale:*

$$\mu(B(x, 2r) \leq C_d \mu(B(x, r)).$$

Mostreremo che:

$$\begin{array}{lll} \mu \ doubling & \Rightarrow strettamente\ s-regolare & \Rightarrow s-regolare \\ s-regolare & \not\Rightarrow\ strettamente\ s-regolare & \not\Rightarrow doubling. \end{array}$$

Teorema 3.1.6 *Se μ è doubling di costante C allora μ è strettamente δ_0-regolare dove $\delta_0 = log_2 C$.*

Dimostrazione: Abbiamo $\mu(B(x,2r)) \leq C\mu(B(x,r))$, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(B(x,2^n r)) \leq C^n \mu(B(x,r))$$

e dunque:

$$\mu(X) = \mu(B(x, \frac{diamX}{r} r)) \leq C^k \mu(B(x,r))$$

dove r è minore del diametro di X e dove, $2^k \geq \frac{diamX}{r}$ e cioé $k \geq log_2 \frac{diamX}{r}$ cosiché

$$\mu(X) \leq C^{log_2(\frac{diamX}{r})} \mu(B(x,r)).$$

Posto $\delta_0 = log_2 C$ si ha che per ogni $\delta > \delta_0$

$$\mu(X) \leq 2^{\delta log_2(\frac{diamX}{r})} \mu(B(x,r)) = 2^{log_2(\frac{diamX}{r})^\delta} \mu(B(x,r))$$

e quindi:

$$(\frac{r}{diamX})^\delta \mu(X) \leq \mu(B(x,r))$$

cioé μ è δ-regolare per ogni $\delta \geq \delta_0$ e la costante di $\delta-$regolarità è $\frac{\mu(X)}{(diamX)^\delta}$. Inoltre

$$\begin{aligned} \mu(B(x,r)) &= \mu(B(x,1r)) \leq C^{log_2 r} \mu(B(x,1)) = 2^{log_2 r^{\delta_0}} \mu(X) \\ &\leq r^{\delta_0} \mu(B(x,1)) \leq r^{\delta_0} \mu(X) \end{aligned}$$

□

Osservazione 3.1.7 *Dalle definizioni date segue immediatamente che ogni misura μ strettamente s-regolare è $s-$regolare.*

Esempio 3.1.8 *Esistono misure μ $s-$regolari che non sono strettamente s-regolari.*

Definiamo in $\mathbb{R}^2$ $\ d\mu(x) = e^{|x|} dx$;
la misura μ è chiaramente 2-regolare, ma supponiamo che per qualche k positivo si abbia: $Cr^k \geq \mu(B(x,r))$, allora si avrebbe:

$$\mu(B(x,r)) = \int_{B(x,r)} e^{|y|} dy \geq \pi r^2 e^{|x|-r}$$

ossia

$$Cr^{k-2}e^r \geq e^{|x|}$$

per ogni x e per ogni r, il che è falso.

Osservazione 3.1.9 *Dall'esempio appena illustrato e dalla proposizione precedente segue che esistono misure $s-$regolari che non sono doubling.*

La seguente proprietà, di natura strettamente metrica, ci permetterà di dimostrare dei teoremi di immersione per gli spazi di Sobolev che stiamo considerando.
Sia (X, d) uno spazio metrico, λ *ed* M due costanti positive,

Definizione 3.1.10 *Sia (X, d) uno spazio metrico, λ ed M due costanti positive. Diciamo che $\Omega \subset X$ soddisfa la condizione di catena*
$C(\lambda, M)$ se esiste una palla $B_0 \subset \Omega$ tale che per ogni x in Ω esiste una successione infinita di palle $\{B_n\}$ detta catena, con le seguenti proprietà:
1. $\lambda B_i \subset \Omega$ per $i = 0, 1, ...$ e B_i è centrata in x definitivamente.
2. Per $i \geq 0$ il raggio r_i di B_i soddisfa: $2^{-i}/M \leq R_i/diam\Omega \leq 2^{-i}M$.
3. Per ogni $i \geq 0$ esiste una palla $R_i \subset B_i \cap B_{i+1}$ e $B_i \cup B_{i+1} \subset MR_i$.

Esempio 3.1.11 *:*
(a) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto regolare soddisfa la condizione di catena per ogni $\lambda \geq 1$
(b) Se (X, d) è uno spazio metrico tale che i chiusi e limitati sono compatti, e d è la distanza geodetica, cioè per ogni $a, b \in X$ si ha

$$d(a, b) = \inf\{\text{lunghezza delle curve continue da } a \text{ a } b\},$$

allora X verifica la condizione di catena $C(\lambda, M)$ per ogni $\lambda \geq 1$ con M che dipende da λ.

3.2 Teoremi di immersione

Teorema 3.2.1 *Sia $\Omega \subset X$, supponiamo Ω verifichi la condizione di catena $C(\lambda, M)$, supponiamo μ sia doubling in Ω, (con ciò si intende: $\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x,r))$ se $x \in \Omega$ e $r \leq 5 diam\Omega$).*
Supponiamo che $g \in L^p(\Omega, \mu)$, con $g \geq 0$, $p \in (1, +\infty)$, $u \in L^1_{loc}(\Omega, \mu)$ siano tali che valga:

$$\fint_B |u - u_B| d\mu \leq C_1 r \left(\fint_{\lambda B} g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1}$$

se $\lambda B \subset \Omega$ ed r è il raggio di B. Allora esistono $k > 0$ che dipende solo da p e dalla costante di doubling e C_2 che dipende da C_1, C, p, k, λ, M tali che u verifica

$$\left(\fint_\Omega |u - u_\Omega|^{kp} d\mu\right)^{\frac{1}{kp}} \leq C_2 (diam\Omega) \left(\fint_\Omega g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Inoltre, se $kp < 1$ possiamo sostituire u_Ω con u_{B_0}.

Dimostrazione:È sufficiente supporre $u_{B_0} = 0$ e stimare $(\fint_\Omega |u|^{kp})^{\frac{1}{kp}}$. Sia $x \in A_t = \{|u| > t\}$ un punto di Lebesgue per u. Sia $B_0, B_1, ...$ una catena assegnata in x. Abbiamo $|u_{B_j}| \to |u(x)| > t, u_{B_0} = 0$. Usando la condizione di doubling e la diseguaglianza (3.1) si ha

$$\begin{aligned} t &\leq |u(x) - u_{B_0}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} (|u_{B_i} - u_{R_i}| + |u_{B_{i+1}} - u_{R_i}|) = \\ &\leq C \sum_{i=0}^{\infty} \fint_{B_i} |u - u_{B_i}| d\mu \leq C \sum_{i=0}^{\infty} r_i \left(\fint_{\lambda B_i} g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Sia $\varepsilon > 0$. Allora

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i \left(\fint_{\lambda B_i} g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq Ct = Ct \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i\varepsilon} \geq Ct (diam\Omega)^{-\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} r_i^{\varepsilon}.$$

Quindi esiste un termine nella prima somma che è maggiore o uguale del corrispondente termine nella seconda somma. Combinando questo fatto con il fatto che per un certo C che non dipende da i, $\lambda B_i \subset B(x, Cr_i)$, ed usando la proprietà di doubling, concludiamo che esiste $r_x > 0$ con

$$(diam\Omega)^{p\varepsilon} \int_{B(x, r_x) \cap \Omega} g^p d\mu \geq C t^p r_x^{p(\varepsilon - 1)} \mu(B(x, r_x)).$$

Come già visto un iterazione della condizione di doubling implica che: $\mu(B(x,r)) \geq 2^{-\delta} \mu(\Omega) (\frac{r}{diam\Omega})^{\delta}$ per ogni $\delta \geq \delta_0$, $x \in \Omega$ ed $r < diam\Omega$. Possiamo supporre che $0 < \varepsilon < 1$, così $p(\varepsilon - 1) < 0$. Allora

$$\mu(\Omega)^{p(\varepsilon-1)/\delta}(diam\Omega)^p \int_{B(x,r_x)\cap\Omega} g^p d\mu \geq Ct^p \mu(B(x,r_x))^{1+(p(\varepsilon-1)/\delta)}. \tag{3.2}$$

Applicando un lemma di ricoprimento di tipo Vitali otteniamo una collezione di palle, a due a due disgiunte, $B_{x_i} = B(x_i, r_{x_i}), i = 1, 2, 3, \ldots$ con $A_t \subset \cup_{i=1}^{\infty} 5B_{x_i}$. Possiamo assumere che $\delta > p$ e quindi $0 < (\delta + p(\varepsilon - 1))/\delta < 1$. Ora la proprietà di doubling e (3.2) danno:

$$\begin{aligned} \mu(A_t)^{1+(p(\varepsilon-1)/\delta)} &\leq C \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_{x_i})^{1+(p(\varepsilon-1)/\delta)} \\ &\leq Ct^{-p} L \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_{x_i}\cap\Omega} g^p d\mu \leq Ct^{-p} L \int_{\Omega} g^p d\mu. \end{aligned}$$

dove $L = (diam\Omega)^p \mu(\Omega)^{p(\varepsilon-1)/\delta}$. Quest'ultima stima può essere riscritta nella forma

$$\mu(A_t) \leq \overline{CL} \left(t^{-p} \|g\|_p^p\right)^k d\mu,$$

dove si è posto $\frac{1}{1+(p(\varepsilon-1)/\delta)} = k$, (quindi $k > 1$), e poi

$$\mu(A_t) \leq \overline{CL} t^{-kp} (\|g\|_p)^{kp} d\mu,$$

quindi è una stima debole di tipo (p, kp), dunque, per il teorema di Marcinkiewitz, questa stima implica una stima forte di tipo (p, kp). La dimostrazione è conclusa. $\square$

Osservazione 3.2.2 *Posto $\delta_0 = \log_2 C$ si ha inoltre:*

(1) *Se $\delta_0 = p$ integrabilità esponenziale.*
(2) *Se $\delta_0 < p$ continuità Hölderiana.*

Si trovano cioè le stesse immersioni già trovate per gli spazi definiti nel primo capitolo.

Se invece che ad una condizione di tipo $C(\lambda, M)$, fossimo interessati ad una condizione del tipo esaminato precedentemente, vale il seguente teorema:

Teorema 3.2.3 *Se μ è doubling e vale (3.1) per ogni $B \subset X$, allora vale anche:*

$$(\fint_B |u - u_B|^{kp} d\mu)^{\frac{1}{kp}} \leq Cr(\fint_{2B} g^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

dove $k > 1$ dipende solo da C.

3.3 Osservazioni e confronti

Il teorema sulla diseguaglianza di tipo Poincaré del capitolo precedente chiarisce che la definizione presa in considerazione in questo capitolo è più generale di quella di Hajłasz presa in considerazione nel capitolo precedente. Vorremo ora vedere alcune condizioni sotto cui gli spazi definiti nei due modi coincidono.

Teorema 3.3.1 *Siano ν, μ due misure doubling sullo spazio metrico (X, d). Sia B_0 una palla, $\tau > 1$, $\varepsilon > 0$, e supponiamo che per ogni palla $B \subset \tau B_0$ valga:*

$$\frac{1}{\nu(B)} \int_B |f - f_{B,\nu}| d\nu \leq Cr(B) \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g(f)| d\mu \tag{3.3}$$

dove f è una funzione lipschitziana in τB_0, e per tutte le palle $\tilde{B}, B$ con, $\tilde{B} \subset B \subset \tau B_0$ si abbia:

$$\mu(B) \geq c \left(\frac{r(\tilde{B})}{r(B)} \right)^{1+\varepsilon} \mu(\tilde{B}). \tag{3.4}$$

Allora per $\nu -$ q.o. $x \in B_0$ vale:

$$|f(x) - f_{B_0,\nu}| \leq C \int_{\tau B_0} |g(f)| \frac{d(x, y)}{\mu(B(x, d(x, y)))} d\mu(y) \tag{3.5}$$

Con $f_{B_0,\nu} := \nu(B_0)^{-1} \int_{B_0} f d\nu$.

Dimostrazione: Per ipotesi, per un fissato τ e tutte le palle $B \subset \tau B_0$

$$\frac{1}{\nu(B)} \int_B |f - f_B| d\nu \leq C \frac{r(B)}{\mu(B)} \int_B |g(f)| d\mu$$

dove per semplicità abbiamo scritto f_B in luogo di $f_{B,\nu}$. Sia $x \in B_0$. Esiste una costante η indipendente da x e da B_0 tale che $B(x, \eta r(B_0)) \subset \tau B_0$:

infatti è sufficiente scegliere η tale che $1+\eta<\tau$ poiché se $y\in B(x,\eta r(B_0))$, allora

$$\begin{aligned} d(x_{B_0},y) &\leq d(x_{B_0},x)+d(x,y)\\ &\leq r(B_0)+\eta r(B_0)=(1+\eta)r(B_0)\\ &< \tau r(B_0). \end{aligned}$$

Denotiamo $B(x,\eta r(B_0)):=B_1$. Allora $r=r(B_1)=\eta r(B_0)$. Ora

$$|f(x)-f_{B_0}|\leq|f(x)-f_{B_1}|+|f_{B_1}-f_{B_0}|. \tag{3.6}$$

Per il secondo termine nel lato destro di (3.6), abbiamo

$$\begin{aligned} |f_{B_1}-f_{B_0}| &\leq |f_{B_1}-f_{\tau B_0}|+|f_{B_0}-f_{\tau B_0}|\\ &\leq \frac{1}{\nu(B_1)}\int_{B_1}|f(y)-f_{\tau B_0}|d\nu(y)+\frac{1}{\nu(B_0)}\int_{B_0}|f(y)-f_{\tau B_0}|d\nu(y)\\ &\leq \left(\frac{1}{\nu(B_1)}+\frac{1}{\nu(B_0)}\right)\int_{\tau B_0}|f(y)-f_{\tau B_0}|d\nu(y)\\ &\quad \text{poichè } \mathrm{B_1,B_0}\subset\tau\mathrm{B_0}\\ &\leq \frac{C}{\nu(\tau B_0)}\int_{\tau B_0}|f-f_{\tau B_0}|d\nu\\ &\quad \text{poichè } \nu \text{ è doubling ed } \mathrm{r(B_1),r(B_0)}\cong\mathrm{r(\tau B_0)}\\ &\leq C\frac{r(\tau B_0)}{\mu(\tau B_0)}\int_{\tau B_0}|g(f)|d\mu \qquad \text{per l'ipotesi 3.3}\\ &\leq C\int_{\tau B_0}|g(f)(y)|\frac{d(x,y)}{\mu(B(x,d(x,y))}d\mu(y) \end{aligned}$$

come desiderato, poiché se $y\in\tau B_0$ allora $d(x,y)<2r(\tau B_0)\cong r(B_0)$, e allora possiamo applicare 3.4, con $B=\tau B_0$ e $\tilde{B}=B(x,(\tau-1)d(x,y)/2\tau)$, ed usando la proprietà di doubling di μ otteniamo:

$$\frac{r(\tau B_0)}{\mu(\tau B_0)}\leq C\frac{d(x,y)}{\mu(B(x,d(x,y))}.$$

Per il primo termine sul lato destro di (3.6), possiamo assumere che $\lim_{s\to 0}f_{B(x,s)}=f(x)$. Allora abbiamo:

$$|f(x)-f_{B_1}| \;=\; |f(x)-f_{B(x,r)}|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_{B(x,r2^{-k-1})} - f_{B(x,r2^{-k})}| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\nu(B(x,r2^{-k-1})} \int_{B(x,r2^{-k-1})} |f(y) - f_{B(x,r2^{-k})}| d\nu(y) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{\nu(B(x,r2^{-k}))} \int_{B(x,r2^{-k})} |f(y) - f_{B(x,r2^{-k})}| d\nu(y) \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r2^{-k}}{\mu(B(x,r2^{-k})} \int_{B(x,r2^{-k})} |g(f)(y)| d\mu(y) \\
&\quad \text{per l' ipotesi (3.3)} \\
&= C \int_B |g(y)| \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r2^{-k}}{\mu(B(x,r2^{-k})} \chi_{\{y: d(x,y) < r2^{-k}\}}(y) \right\} d\mu(y).
\end{aligned}
$$

Se $d(x,y) < r2^{-k}$, allora per l'ipotesi (3.4) abbiamo :

$$
\frac{r2^{-k}}{\mu(B(x,r2^{-k}))} \leq C \left(\frac{d(x,y)}{r2^{-k}} \right)^{\varepsilon} \frac{d(x,y)}{\mu(B(x,d(x,y))}.
$$

così la somma tra parentesi è al più:

$$
\sum_{\{k \geq 0 : 2^k \leq r d(x,y)^{-1}\}} \left(\frac{2^k d(x,y)}{r} \right)^{\varepsilon} \frac{d(x,y)}{\mu(B(x,d(x,y)))} \leq C \frac{d(x,y)}{\mu(B(x,d(x,y)))}
$$

Con C indipendente da x e y. Combinando le due stime si ottiene il teorema. □

Dal teorema si ottiene il seguente risultato.:

Teorema 3.3.2 *Sia (X, d, μ) uno spazio metrico dotato di misura doubling μ tale che vale (3.4), allora, la condizione*

$$
\int_B |u(x) - u_B| d\mu(y) \leq Cr \int_B g(y) d\mu(y)
$$

per $u, g \in L^p(\mu)$ e per ogni $d-$palla $B = B(x,r)$ dove g è una funzione che dipende da u ma non da B, implica

$$
|u(x) - u(y)| \leq d(x,y)(g(x) + g(y)) \quad q.o. - X. \tag{3.7}
$$

Dimostrazione: Per il Teorema 3.3.1, (3.7) implica che per $\mu - q.o.\ y \in B$ si abbia:

$$
\begin{aligned}
|u(y)-u_B| &\leq C\int_{\tau B}\frac{g(y)d(y,z)}{\mu(B(y,d(y,z)))}d\mu(z) \leq C\int_{(\tau+1)B(y,r)}\frac{g(z)d(y,z)}{\mu(B(y,d(y,z)))}d\mu(z)\\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{0}\int_{2^{k-1}(\tau+1)r\leq d(z,y)<2^k(\tau+1)r}\frac{g(z)d(y,z)}{\mu(B(y,d(y,z)))}d\mu(z)\\
&\leq Cr\sum_{k=-\infty}^{0}2^k \fint_{B(y,2^k(\tau+1)r)} g(z)d\mu(z)\\
&\leq CrMg(y),
\end{aligned}
$$

dove Mg indica, come sempre, la funzione massimale di Hardy e Littlewood. Quindi per $x, y \in X$ possiamo applicare la precedente stima alla palla $B = B(x, 2d(x, y))$ si ottiene:

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &\leq |u(x)-u_B|+|u(y)-u_B|\\
&\leq Cd(x,y)\{Mg(x)+Mg(y)\},
\end{aligned}
$$

e quindi vale (3.7). $\square$

Osservazione 3.3.3 *Abbiamo così dimostrato che se (X, d, μ) è uno spazio metrico dotato di una misura doubling tale che vale (3.4), allora gli spazi di Sobolev su spazio metrico definiti nel Capitolo 2 coincidono con quelli definiti in questo capitolo.*

Capitolo 4

Una definizione di spazio di Sobolev mediante funzionale rilassato

Introduzione: In questo capitolo proponiamo, a partire da alcuni esempi su domini classici, una definizione di spazio di Sobolev su spazio metrico come dominio del funzionale rilassato di un opportuno funzionale definito su L^p. Presentiamo prima le nozioni generali di base sul rilassamento, e poi alcuni esempi che illustrano la natura del funzionale che prenderemo in considerazione e di questi spazi di Sobolev.

4.1 Generalità sul rilassamento

Per i risultati di questo paragrafo facciamo riferimento a Buttazzo [4]. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia F un funzionale da X in $\overline{\mathbb{R}}$.

Definizione 4.1.1 *Il funzionale $\Gamma(\tau^-)F$, definito da*

$$\Gamma(\tau^-)F(x) := \sup\{G(x) : \ G \text{ è } \tau - s.c.i.,\ G \leq F\}$$

si dice funzionale rilassato di F.

Teorema 4.1.2 *Alcune proprietà di $\Gamma(\tau^-)F$:*
i) $\Gamma(\tau^-)F$ *è* $\tau - s.c.i.$;

ii) $\Gamma(\tau^-)F(x) = \liminf_{y \to x} F(y) =$
$$= \min\{\liminf_{i \in I} F(x_i) : (x_i)_{i \in I} \text{ è un net } \tau - \text{convergente a } x\};$$

iii) $\inf\{F(y) : y \in X\} \leq \Gamma(\tau^-)F(x) \leq F(x)$*; in particolare:*

$$\inf\{F(y) : y \in X\} = \inf\{\Gamma(\tau^-)F(y) : y \in X\};$$

iv) se F *è* $\tau -$ *coercivo, anche* $\Gamma(\tau^-)F$ *lo è;*

v) per ogni $G : X \to \mathbb{R}$ $\tau -$ *continuo si ha* $\Gamma(\tau^-)[F+G] = \Gamma(\tau^-)F + G$ *;*

vi) se $\{x_n\} \subset X$ *è una successione minimizzante di* F $\tau-$*convergente a* $x \in X$*, allora* x *è un punto di minimo per* $\Gamma(\tau^-)F$*.*

Dimostrazione:
i) Discende dal fatto che il sup di funzioni $s.c.i.$ è a sua volta $s.c.i.$.
ii) Segue dal fatto che il funzionale $x \to \liminf\limits_{y\to x} F(y)$ è $\tau - s.c.i.$, è $\leq F$ e per ogni G $\tau - s.c.i.$ con $G \leq F$ si ha $G(x) = \liminf\limits_{y\to x} G(y) \leq \liminf\limits_{y\to x} F(y)$.
iii) È sufficiente osservare che il funzionale costante $x \to \inf\{F(y), y \in Y\}$ è $\tau - s.c.i.$ ed è $\leq F$.
iv) Per ipotesi, per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste un compatto $K_t \subset \Omega$ tale che

$$\{x \in X : F(x) \leq t\} \subseteq K_t;$$

dunque, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in X : \Gamma(\tau^-)F(x) \leq t\} \subseteq K_{t+1}.$$

Infatti, se x è tale che $\Gamma(\tau^-)F(x) \leq t$, allora per ogni U intorno di x esiste $y \in U$ tale che $F(y) \leq t+1$, cioè ogni intorno U di x verifica $U \cap K_{t+1} \neq \emptyset$. Quindi, dal momento che K_{t+1} è chiuso, si ha $x \in K_{t+1}$.
v) Si ha

$$\begin{aligned}\Gamma(\tau^-)[F+G](x) &= \liminf_{y\to x}[F(y)+G(y)] = \\ &= \liminf_{y\to x} F(y) + \lim_{y\to x} G(y) = \Gamma(\tau^-)F(x) + G(x).\end{aligned}$$

vi) Sia $\{x_n\}$ una successione minimizzante per F $\tau-$convergente a x;

$$\begin{aligned}\Gamma(\tau^-)F(x) &\leq \liminf_{n\to\infty} \Gamma(\tau^-)F(x_n) \leq \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} F(x_n) = \inf_X F(x) = \inf_X \Gamma(\tau^-)F(x).\end{aligned}$$

□

Per una topologia τ indichiamo con τ_{seq} la sua versione sequenziale, cioè la più fine topologia che abbia le stesse successioni convergenti di τ.

Il funzionale $\Gamma((\tau_{seq})^-)F$ si indica anche con $\Gamma_{seq}(\tau^-)F$. Esso è molto utile qualora si abbia a che fare con le topologie deboli su spazi di Lebesgue o di Sobolev.
Poiché per definizione τ_{seq} è una topologia più fine o uguale a τ, si ha sempre $\Gamma(\tau^-)F \leq \Gamma_{seq}(\tau^-)F$. Si presentano poi di frequente casi in cui vale l'uguaglianza: $\Gamma(\tau^-)F = \Gamma_{seq}(\tau^-)F$. Consideriamo ora alcuni di questi casi.

Teorema 4.1.3 *Sia X uno spazio di Banach e sia $F : X \to \mathbb{R}$ un funzionale convesso. Supponiamo che sia soddisfatta una di queste due ipotesi:*
i) X' è separabile; $\tau =$ topologia debole su X
ii) $X = V'$ con V spazio di Banach separabile; $\tau =$ topologia debole$-*$ su X.
Allora $\Gamma(\tau^-)F = \Gamma_{seq}(\tau^-)F$.

Dimostrazione:la nostra tesi é: $\Gamma(\tau^-)F \geq \Gamma_{seq}(\tau^-)F$, per cui basta dimostrare che $\Gamma_{seq}(\tau^-)F$ è $\tau - s.c.i.$. Lo facciamo solo nel caso i) dal momento che l'altro è analogo.
Dal momento che F è convesso, anche $\Gamma_{seq}(\tau^-)F$ lo è. Inoltre $\Gamma_{seq}(\tau^-)F$, essendo $\tau_{seq} - s.c.i.$, risulta s.c.i. anche rispetto alla topologia della norma. Poiché, per il Teorema di Hahn-Banach, un funzionale convesso e fortemente s.c.i. è anche debolmente s.c.i., segue la tesi. $\square$

Teorema 4.1.4 *Supponiamo che il punto $x \in X$ abbia un sistema fondamentale di τ intorni numerabile. Allora:*

$$\begin{aligned}&\Gamma(\tau^-)F(x) = \Gamma_{seq}(\tau^-)F(x) = \\ &= \min\{\liminf_{n\to+\infty} F(x_n) : \{x_n\} \text{ successione } \tau - \text{convergente a } x\}.\end{aligned}$$

Dimostrazione: Sia

$$S_\tau F(x) := \inf\{\liminf_{n\to+\infty} F(x_n) : \ \{x_n\} \text{ successione } \tau - \text{convergente a } x\}.$$

Poiché $\Gamma(\tau^-)F(x) \leq S_\tau F(x)$, per avere l'uguaglianza basta mostrare che vale anche la diseguaglianza opposta: facciamo vedere che esiste una successione $\{x_n\}$ $\tau-$-convergente ad x tale che

$$\liminf_{n\to+\infty}\{F(x_n)\} \leq \Gamma(\tau^-)F(x).$$

Se il secondo membro è $+\infty$, la diseguaglianza è ovvia. Altrimenti, preso un sistema fondamentale numerabile e decrescente di $\tau-$intorni di x in X, per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo $x_n \in U_n$ tale che

$$F(x_n) \leq \frac{1}{n} + \Gamma(\tau^-)F(x).$$

Passando al lim inf si ottiene la tesi.
Infine il fatto che l'estremo inferiore nella definizione di S_τ è in realtà un minimo, può essere dimostrato con un processo di diagonalizzazione. □

Un problema della tipico della teoria del rilassamento che coinvolgeremo più avanti è quello della rappresentazione integrale di $\Gamma(\tau^-)F$, dove $F : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$ è un funzionale integrale su un sottospazio di L^p al di fuori del quale vale $+\infty$.
Nel seguito, quando la notazione non darà luogo ad equivoco, indicheremo $\Gamma(\tau^-)F$ con $\overline{F}$.
Riportiamo qui di seguito due esempi che illustrano l'idea che cercheremo poi di estendere a domini metrici.

Esempio 4.1.5 Sia $X = L^2(\Omega)$ e sia τ la topologia forte di L^2, e sia $F : X \to [0, +\infty]$ il funzionale definito da

$$F(u) = \begin{cases} \int_\Omega |Du|^2 dx & \textit{se } u \in \mathbf{C}^1(\Omega) \\ +\infty & \textit{altrimenti.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Il funzionale F può essere esteso, col metodo del rilassamento, ad un nuovo funzionale $\Gamma(\tau^-)F$ il cui dominio è lo spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$. Usando, infatti, il teorema di Meyers-Serrin otteniamo che

$$H^1(\Omega) = \{u \in X : \Gamma(\tau^-)F(u) < +\infty\}$$

$$\Gamma(\tau^-)F(u) = \begin{cases} \int_\Omega |Du|^2 dx & \textit{se } u \in H^1(\Omega) \\ +\infty & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Consideriamo ora, con la stessa scelta di X e di τ, il funzionale a "traccia nulla"

$$F_0(u) = \begin{cases} \int_\Omega |Du|^2 dx & \textit{se } u \in \mathbf{C}_0^1 \\ +\infty & \textit{altrimenti.} \end{cases} \tag{4.2}$$

In questo caso otteniamo per la stessa via

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in X : \Gamma(\tau^-)F_0(u) < +\infty\}$$

$$\Gamma(\tau^-)F_0(u) = \begin{cases} \int_\Omega |Du|^2 dx & \textit{se } u \in H_0^1(\Omega) \\ +\infty & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempio 4.1.6 Sia $X = L^1(\Omega)$, sia τ la topologia forte di L^1, e sia $F : X \to [0, +\infty]$ il funzionale definito da

$$F(u) = \begin{cases} \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2} dx & se\ u \in \mathbf{C}^1(\Omega) \\ +\infty & altrimenti. \end{cases}$$

In questo caso, il metodo del rilassamentoci porta ad introdurre lo spazio di funzioni a variazioni limitata in Ω

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) : Du \text{ è una misura con variazione totale finita in } \Omega\}.$$

È ben noto che lo spazio $\mathbf{C}^1(\Omega)$ non è denso in $BV(\Omega)$ rispetto alla norma di BV

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega |Du|$$

(in effetti la chiusura di $\mathbf{C}^1(\Omega)$ rispetto a questa norma è $W^{1,1}(\Omega)$); Ciononostante è possibile provare che $\mathbf{C}^1(\Omega)$ è denso in $BV(\Omega)$ rispetto alla distanza

$$d(u, v) = \|u - v\|_{L^1(\Omega)} + |\int_\Omega |Du| - \int_\Omega |D||,$$

e questo ci permette di trovare

$$BV(\Omega) = \{u \in X : \Gamma(\tau^-)F(u) < +\infty\}$$

$$\Gamma(\tau^-)F(u) = \begin{cases} \int_\Omega \sqrt{1 + |R(Du)|^2} dx + |S(Du)|(\Omega) & se\ u \in BV(\Omega) \\ +\infty & altrimenti, \end{cases}$$

dove $Du = R(Du)dx + S(Du)$ è l'usuale decomposizione di Lebesgue della misura Du in una parte assolutamente continua $R(Du)dx$ ed una parte singolare $S(Du)$ rispetto alla misura di Lebesgue, e $|S(Du)|(\Omega)$ indica la variazione totale di $S(Du)$ in Ω.

Nell' Esempio 4.1.5 abbiamo considerato il rilassato di F rispetto alla topologia forte L^p. Questa scelta non è in realtà la migliore, come vedremo più avanti.

4.2 Motivazioni e definizioni.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, ed $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione in $\mathbf{C}^1(\Omega)$; allora si ha

$$|Du| = \lim_{r\to 0} \sup_{y_1 \neq y_2 \in B(x,r)} \frac{|u(y_1) - u(y_2)|}{|y_1 - y_2|}.$$

Infatti si ha :

$$|u(y_1) - u(y_2)| \leq |Du(\xi)||y_1 - y_2| \quad \xi \in [y_1, y_2]$$

quindi

$$\frac{|u(y_1) - u(y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq |Du(\xi)| \quad \xi \in B(x, r)$$

e passando al sup e quindi al limite si conclude.
Più in generale però vale:

Teorema 4.2.1 *(di differenziabilità quasi ovunque.) Sia $u \in W^{1,p}_{loc}$ con $n < p \leq +\infty$. Allora u è differenziabile quasi ovunque in Ω e la sua derivata coincide q.o. con la derivata debole.*

Dimostrazione: Supponiamo in un primo momento $n < p < +\infty$; Per il Lemma 1.3.8 data $v \in \mathbf{C}^1(\Omega)$ vale la stima di Morrey

$$|v(x) - v(y)| \leq cr^{1-n/p}(\int_{B(x,r)} |Dv(z)|^p dz)^{1/p} \ \ per\ y \in B(x, r).$$

Per approssimazione, tale stima vale q.o. anche per funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$.
Scegliamo $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Il Teorema di Lebesgue implica che per q.o. $x \in \Omega$

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |Du(x) - Du(z)|^p dz = 0. \tag{4.3}$$

Fissiamo un x per cui valga (4.3), e nella stima di Morrey scegliamo $v(y) = u(y) - u(x) - Du(x)(y - x)$ ed $r = |x - y|$.
Abbiamo

$$\begin{aligned} |u(y) - u(x) - Du(x)(y - x)| \ & \leq cr^{1-n/p}(\int_{B(x,r)} |Du(x) - Du(z)|^p dz)^{1/p} \leq \\ & \leq cr(\fint_{B(x,r)} |Du(x) - Du(z)|^p dz)^{1/p} = \\ & = o(r) = o(|x - y),\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione per $n < p < +\infty$. Per $p = +\infty$ osserviamo che

$$W^{1,\infty}_{loc}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}_{loc}(\Omega) \quad \forall\, q < +\infty.$$

$\square$

Corollario 4.2.2 *(Teorema di Rademacher) Se u è localmente lipschitziana in Ω, allora u è differenziabile q.o. in Ω.*

Osservazione 4.2.3 Sia x come nel teorema di differenziabilità quasi ovunque, $u \in Lip_{loc}(\Omega),\ r > 0$, siano $y_1, y_2 \in B(x,r)$, si ha:

$$|u(y_1) - u(y_2) - Du(x)(y_1 - y_2)| = |u(y_1) - u(y_2) - Du(x)(y_1 - x + x - y_2)| \leq$$

$$|u(y_1) - u(x) - Du(x)(y_1 - x)| + |u(x) - u(y_2) - Du(x)(x - y_2)| = o(r),$$

quindi anche per funzioni lipschitziane (localmente) vale :

$$|Du| = \lim_{r \to 0} \sup_{y_1 \neq y_2 \in B(x,r)} \frac{|u(y_1) - u(y_2)|}{|y_1 - y_2|},$$

per q.o. $x \in \Omega$.

Alla luce delle ultime osservazioni definiamo

Definizione 4.2.4 *Sia (X,d) uno spazio metrico, data $u \in Lip_{loc}(X,d)$ definiamo*

$$p_{r,u}(x) = \sup_{y_1 \neq y_2 \in B(x,r)} \frac{|u(y_1) - u(y_2)|}{d(y_1, y_2)}.$$

Definizione 4.2.5 *Sia (X,d) uno spazio metrico, data $u \in Lip_{loc}(X,d)$ definiamo*

$$|\nabla u|(x) = \lim_{r \to 0} p_{r,u}(x).$$

Ciò ha senso in quanto per ogni $u \in Lip_{loc}(X,d),\ p_{r,u}(x)$ è una funzione crescente di r.

Lemma 4.2.6 *Sia (X,d,μ) uno spazio metrico dotato di una misura di Borel, e sia $u \in Lip_{loc}(X,d)$, allora per ogni $r > 0$ $p_{r,u}$ è una funzione s.c.i. su X.*

Dimostrazione: Sia $\{x_n\} \subset X: \; x_n \to x$, vogliamo mostrare che $p_{r,u}(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} p_{r,u}(x_n)$.
Supponiamo per assurdo che $\liminf_{n\to+\infty} p_{r,u}(x_n) < p_{r,u}(x)$, a meno di rinormalizzare possiamo supporre $\liminf_{n\to+\infty} p_{r,u}(x_n) = 0$ e $p_{r,u} = 1$.
Ora, $p_{r,u}(x) = 1$ vuol dire che: $\forall \varepsilon > 0, \; \exists y_1, y_2 \in B(x,r)$:

$$\frac{|u(y_1) - u(y_2)|}{d(y_1,y_2)} > 1 - \varepsilon,$$

ma $y_1, y_2 \in B(x_n, r)$ definitivamente, quindi $p_{r,u}(x_n) > 1 - \varepsilon$ definitivamente, il che è assurdo. $\square$

Lemma 4.2.7 *Sia (X,d,μ) uno spazio metrico dotato di una misura di Borel, e sia $u \in Lip_{loc}(X,d)$, allora $|\nabla u|$ è una funzione $\mu-$misurabile.*

Dimostrazione: Per la definizione, ed il Lemma 4.2.6, $|\nabla u|$ è estremo inferiore di una famiglia di funzioni semicontinue, dunque è misurabile. $\square$

Siamo ora in grado di dare le nostre definizioni principali.

Definizione 4.2.8 *Sia (X,d,μ) uno spazio metrico dotato di una misura di Borel μ. Definiamo $F_p : Lip_{loc}(X,d) \to \overline{\mathbb{R}}$ come segue*

$$F_p(u) = \int_X |\nabla u|^p d\mu$$

Definizione 4.2.9 *Sullo spazio $Lip^p_{loc}(X,d,\mu) := \{u \in Lip_{loc}(X,d) \cap L^p(\mu) : |\nabla u| \in L^p(\mu)\}$ definiamo la norma*

$$\|u\|_{1,p} = (\|u\|^p_{L^p} + \int_X |\nabla u|^p d\mu)^{1/p}.$$

Definizione 4.2.10 *Chiamiamo $W^{1,p}(X,d,\mu)$ il completamento di $Lip^p_{loc}(X,d,\mu)$ rispetto alla norma $\|u\|_{1,p}$, ed indichiamo con $\tilde{\| \, \|}$ la norma indotta sul completamento.*

Osservazione 4.2.11 *Per definizione* $W^{1,p}(X,d,\mu)$ *è uno spazio di Banach.*

Osservazione 4.2.12 *Le ultime definizioni possono essere date a partire da* $Lip_c(X,d)$ *arrivando ad una definizione di* $W_0^{1,p}$ *e della relativa norma.*

Prolunghiamo F_p a tutto $W^{1,p}(X,d,\mu)$ ponendolo uguale a $+\infty$ sulle funzioni che non sono localmente lipschitziane.

Definizione 4.2.13 *Sia* $\overline{F}_p$ *il funzionale rilassato di* F_p *rispetto alla topologia forte di* $W^{1,p}(X,d,\mu)$.

Abbiamo

Teorema 4.2.14 *Per ogni* $u \in W^{1,p}(X,d,\mu)$

$$\overline{F}_p(u) = (\|\tilde{u}\| - \|u\|_{L^p})^p.$$

Dimostrazione: Si ha che $\forall u \in W^{1,p}(X,d,\mu)$, $\forall u_n \to u$ fortemente in $W^{1,p}(X,d,\mu)$

$$\liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq (\|\tilde{u}\| - \|u\|_{L^p})^p$$

equivale al fatto che per ogni successione in $Lip_{loc,p}(X,d,\mu)$ che converge fortemente ad u si verifichi

$$\liminf_{n\to\infty} \|\tilde{u_n}\| = \|\tilde{u}\|,$$

il che è vero per definizione della norma del completamento.
D'altronde, se consideriamo $\{u_n\} \subset Lip_{loc,p}(X,d,\mu)$ e convergente ad u, abbiamo

$$\liminf_{n\to\infty} F(u_n) = \liminf_{n\to\infty} (\|\tilde{u_n}\| - \|u_n\|_{L^p})^p = (\|\tilde{u}\| - \|u\|_{L^p})^p.$$

La dimostrazione è conclusa. □

Il seguente esempio chiarisce la scelta di rilassare F_p rispetto alla topologia forte in $W^{1,p}(X,d,\mu)$ piuttosto che alla topologia forte L^p come nell'Esempio 4.1.5.

Esempio 4.2.15 Sia $X = [0,1]$, $\mu = \mathbf{1}_C H^{\log 3/\log 2}$, $d = |\ |$ dove con C abbiamo indicato l'insieme di Cantor. In questo caso si verifica:

$$\overline{F}_p^{L^p} = 0$$

infatti, consideriamo $u \in Lip(X,d)$, costruiamo una successione $\{u_n\}$ di funzioni lipschitziane, tale che: $u_n \to u$ uniformemente su C (e dunque in $L^p(\mu)$) e $F_p(u_n) = 0$ per ogni n. Consideriamo a questo scopo la costruzione classica di C fatta eliminando da $[0,1]$, per passi successivi il complementare di C. Sia $C_{i,n}$ l' intervallo $i-$esimo del passo $n-$esimo della costruzione, definiamo u_n ponendo $u_n(x) = \inf\limits_{C_{i,n}} u$ se $x \in C_{i,n}$ e congiungendo linearmente questi pezzi. L'uniforme continuità di u garantisce le convergenza desiderata. Inoltre è chiaro dalla costruzione che ciascuna u_n ha derivata non nulla solo sul complementare di C, quindi $F_p(u_n) = 0$.
Al contrario

$$\overline{F}_p^{W^{1,p}} \neq 0,$$

in quanto questo ultimo funzionale coincide con F_p sulle funzioni lipschitziane.

Questo esempio mette in luce un fenomeno, (che potremmo chiamare " di molteplicità del gradiente") che ora illustreremo con più cura.
Sia $\{u_n\}$ una successione di Cauchy in $W^{1,p}(X,d,\mu)$ fi funzioni u_n localmente lipchitziane.
Si ha che $\{u_n\}$ è di Cauchy in $L^p\mu$ e $\{|\nabla u_n|\}$ è di Cauchy in $L^p\mu$, quindi il limite di $\{u_n\}$ può essere rappresentato da una coppia $(u,v) \in L^p(\mu)xL^p(\mu)$ e si potrebbe dire che "v è il gradiente di u" se non fosse che nell' esempio precedente si ha che: posto $u(x) = x$, tanto la coppia $(u,1)$, tanto la coppia $(u,0)$ sono, in questo senso, in $W^{1,p}$. Il seguente esempio chiarisce ulteriormente questo fenomeno ed il fatto che senza opportune ipotesi sulla misura μ il funzionale F_p non è locale; più avanti vedremo che un effetto di questa fatto è la mancanza di rappresentazione integrale per il rilassato $\overline{F}_p$.

Esempio 4.2.16 Sia $X = [-2,2]$, $\mu = H^1|_{[-2,-1]\cup[1,2]} + H^0|_{\{1,-1\}}$ consideriamo

$$u(x) = 0$$

$$v(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \in [-2,-1] \cup [1,2] \\ x+1 & se\ x \in (-1,0) \\ -x+1 & se\ x \in (0,1) \end{cases}$$

è chiaro che $u(x) = v(x)$ q.o. ma:

$$F_p(u) = 0$$

$$F_p(v) = \int_{\{-1\}} 1d\ H^0|_{\{1,-1\}} + \int_{\{1\}} 1d\ H^0|_{\{1,-1\}} = 2$$

Questo ultimo esempio mette in luce che il fenomeno di molteplicità del gradiente è dovuto al fatto che, per una funzione localmente lipschitziana, la definizione di $|\nabla u|$ non tiene conto della misura μ o del rapporto tra metrica e misura.
Si avrà così:

Esempio 4.2.17 Sia $S \subset \mathbb{R}^n$ una varietà $(n-1)-$dimensionale con bordo ∂S

$$W^{1,p}(S, |\ |, H^{n-1}|_S) = W^{1,p}(S)$$

mentre
$W^{1,p}(\mathbb{R}^n, |\ |, H^{n-1}|_S)$ non è uguale a $W^{1,p}(S)$.

Volendo evitare quest'ultima distinzione si potrebbe sostituire nella definizione di $p_{r,u}$ e $|\nabla u|$, il sup con supess, in questo modo verrebbe a cadere l'Esempio 4.2.16. Il passaggio da sup a supess è sensato, anche per un altro motivo, ossia che in $\mathbb{R}^n$ la definizione di Du distribuzionale, è legata strettamente con la misura, oltre che con la distanza.

Osserviamo che a differenza degli spazi presi in considerazione nei capitoli 2 e 3, quelli appena definiti sono dotati in modo naturale di un "funzionale di Dirichlet" $\overline{F}_p$.
Osserviamo, inoltre, che $\overline{F}_p$ è convesso, in quanto sulle funzioni localmente lipschitziane coincide con F_p che è convesso.
Questa ultima osservazione ci permette di definire il $(p, X, \mu) -$ *laplaciano* nel seguente modo.

Definizione 4.2.18 *Definiamo su* $W^{1,p}(X, d, \mu)$ *l'operatore* $-\Delta_p$ *nel seguente modo:*

$$< -\Delta_p u, v > := < \frac{1}{p}\partial\overline{F}_p(u), v > \qquad \forall v \in W^{1,p}.$$

Dove ∂ rappresenta il sottodifferenziale di un'applicazione convessa definito da

$$\partial\overline{F}_p(u) := \{f \in (W^{1,p})' : \ f(w-u) \leq \overline{F}_p(w) - \overline{F}_p(u) \quad \forall w \in W^{1,p}\}.$$

Una volta definiti gli spazi di Sobolev, si presentano spontanee alcune questioni:
1) Vale ed eventualmente che forma assume una generalizzazione della diseguaglianza di Poincaré ?
2) Il funzionale $\overline{F_p}$ ammette una rappresentazione integrale?
3) In che relazione sta questo spazio con quelli definiti nei capitoli precedenti?
4) Valgono dei teoremi di immersione non banali?
In seguito cercheremo di fare chiarezza su questi problemi, su alcune loro formulazioni equivalenti, sui loro legami con le proprietà del funzionale F_p, e sulle loro interconnessioni.

4.3 La diseguaglianza di Poincaré

Una delle proprietà fondamentali delle funzioni che appartengono ad uno spazio di Sobolev classico è il verificare la diseguaglianza di Poincaré.
Le funzioni in $W^{1,p}(X, d, \mu)$ soddisfano un analoga diseguaglianza?
In questa sezione ci proponiamo di riformulare questo problema in vari modi ed in termini di diverse grandezze legate al funzionale $\overline{F_p}$.
È ben noto che nel caso classico valgono i seguenti risultati

Teorema 4.3.1 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e limitato, con bordo lipschitziano. Esiste una costante c che dipende solo da $\Omega, p,$ ed n tale che per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si abbia*

$$\int_\Omega |u - u_\Omega|^p dx \leq c \int_\Omega |Du|^p dx. \tag{4.4}$$

Teorema 4.3.2 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, allora esiste una costante c che dipende solo da $p,$ ed Ω tale che per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ vale*

$$\int_\Omega |u|^p dx \leq c \int_\Omega |Du|^p dx. \tag{4.5}$$

Segue dagli Esempi 4.1.5 e 4.1.6 che le formulazioni delle diseguaglianze (4.4) e (4.5) su spazio metrico sono rispettivamente:

$$\int_X |u - u_X|^p dx \le c\overline{F_p}(u), \quad per\ u \in W^{1,p}((X,d,\mu)), \tag{4.6}$$

e

$$\int_\Omega |u|^p dx \le c\overline{F_p}(u), \quad per\ u \in W_0^{1,p}((X,d,\mu)). \tag{4.7}$$

Nel caso di spazio metrico mensurale, queste diseguaglianze non sono più necessariamente vere, anche se lo spazio è connesso e molto regolare da un punto di vista geometrico.

Esempio 4.3.3 *Un (X,d,μ) su cui non vale la diseguaglianza di Poincaré.*

Poniamo $X = [-3,3],\ E = [-1,1] \cup [-3,-2] \cup [2,3],\ d(x,y) = |x-y|$
$d\mu = 1_E dx$

$$u(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \in [-3,-2] \cup [2,3] \\ x+2 & se\ x \in [-2,-1] \\ 1 & se\ x \in [-1,1] \\ -x+2 & se\ x \in [1,2]. \end{cases}$$

Chiaramente $u \in Lip_0(X,d)$ e dunque sia in $W_0^{1,p}((X,d,\mu))$, ma non verifica la diseguaglianza (4.5), infatti

$$\int_X |u'|^p d\mu = 0,$$

mentre

$$\int_X |u|^p d\mu = 1.$$

Se consideriamo invece la funzione

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & se\ x \in [-3,-2] \cup [2,3] \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & se\ x \in [-2,-1] \\ 1 & se\ x \in [-1,1] \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & se\ x \in [1,2]. \end{cases}$$

si ha $v \in Lip(X,d)$ e dunque in $W^{1,p}((X,d,\mu))$, ma non verifica la diseguaglianza (4.4), infatti

$$\int_X |v'|^p d\mu = 0,$$

mentre

$$\int_X |v - v_X|^p d\mu \neq 0.$$

Osservazione 4.3.4 *Perché valga (4.6) è sufficiente che* $\forall u \in Lip_{loc}(X, d)$ *valga*

$$\int_X |u - u_X|^p d\mu \leq c \int_X |\nabla u|^p d\mu.$$

Infatti, il funzionale a sinistra della diseguaglianza è continuo su $W^{1,p}((X, d, \mu))$ e dunque la diseguaglianza è mantenuta per passaggio al rilassato.
Per lo stesso motivo si ha

Osservazione 4.3.5 *Perché valga (4.7) è sufficiente che per ogni* $u \in Lip_0(X, d)$ *valga*

$$\int_X |u|^p d\mu \leq c \int_X |\nabla u|^p d\mu.$$

Queste ultime osservazioni, sono fatte nell'ottica della teoria generale che riportiamo di seguito e per la quale rimandiamo a [17].

Sia (M, F, ν) uno spazio di misura. E sia $W_0^{1,p}(M, \nu)$ un insieme di funzioni con le seguenti proprietà:
a) $W_0^{1,p}(M, \nu)$ è chiuso per composizione con funzioni in

$$N = \{f \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}) : f(0) = 0, f' \textit{ è limitata e di segno costante}\}.$$

b) Esiste un'applicazione $|D| : W_0^{1,p}(M, \nu) \to L^p(M, \nu)$ tale che

$$\frac{1}{d}(\int |Df \circ \varphi|^p d\nu)^{1/p} \leq (\int |f'(\varphi)|^p |D\varphi|^p d\nu)^{1/p} \leq d(\int |Df \circ \varphi|^p d\nu)^{1/p}, \quad (4.8)$$

per una fissata costante $d > 0$, e per ogni $f \in N$. Si è usata la notazione $|D\varphi| = |D|\varphi$.
Data $\varphi \in W_0^{1,p}(M, \nu)$ sia μ_φ la misura finita definita da

$$d\mu_\varphi = |D\varphi|^p d\nu,$$

μ_φ^* la misura distribuzione di φ rispetto a μ_φ, ossia:

$$\mu_\varphi^*(E) = \mu(\varphi^{-1}(E)),$$
cosicché $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)d\mu_\varphi^*(t) = \int g(\varphi)d\mu_\varphi$, per ogni g boreliana.
Sia infine $\overline{\mu}_\varphi^*$ la parte assolutamente continua di $\mu_\varphi^*(t)$.

Teorema 4.3.6 *Se* $1 \leq p \leq q < \infty$ *e* $\varphi \in W_0^{1,p}(M,\nu)$, *allora*

$$\left(\int |u|^q d\nu\right)^{1/q} \leq c\left(\int |Du|^p d\nu\right)^{1/p},$$

per qualche $c > 0$ *ed ogni* $u = f \circ \varphi$, $f \in N$, *se e solo se*

$$\sup_{r\neq 0}\left(\nu\left(\frac{\varphi}{r} \geq 1\right)\right)^{1/q} \left|\int_0^r \overline{\mu}_\varphi^*(t)^{-1/p-1}dt\right|^{1/p'} = b < +\infty.$$

Dimostrazione: La dimostrazione può essere trovata in Stredulinsky [17].

Se $H \subset W_0^{1,p}(M,\nu)$ e H è chiuso per composizione con $f \in N$, allora per $A \subset M$ sia

$$C_{H,p}(A) = \inf\left\{\int |D\varphi|^p d\nu : \varphi \in H,\ \varphi \geq 1 \ in \ A\right\}.$$

Teorema 4.3.7 *Se* $1 \leq p \leq q < \infty$, *allora*

$$\left(\int |u|^q d\nu\right)^{1.q} \leq c\left(\int |Du|^p d\nu\right)^{1/p},$$

per qualche $c > 0$ *ed ogni* $u \in H$ *se e solo se*

$$\nu^{1/q}(A) \leq bC_{H,p}^{1/p}(A)$$

per qualche $b > 0$ *e per ogni* $A = \{\frac{\varphi}{r} \geq 1\},\ \varphi \in H,\ r \neq 0.$

Dimostrazione: La dimostrazione può essere trovata in Stredulinsky [17].

Sia $W^{1,p}(M,\nu)$ un insieme di funzioni con le seguenti proprietà
a) $W^{1,p}(M,\nu)$ è chiuso per composizione con funzioni in

$$N' = \{f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}) : f' \ \textit{è limitata e di segno costante}\}.$$

b) Esiste un'applicazione $|D| : W_0^{1,p}(M,\nu) \to L^p(M,\nu)$ tale che vale la diseguaglianza (4.8).

Teorema 4.3.8 *Se $1 \leq p \leq q < \infty$ e $\varphi \in W^{1,p}(M.\nu)$, allora*

$$(\int(\int |u(x)-u(y)|d\nu(y))^q d\nu(x))^{1/q} \leq c_1(\int |Du|^p d\nu)^{1/p}$$

per qualche $c_1 > 0$ e per ogni $u = f \circ \varphi,\ f \in N'$ se e solo se

$$\sup_{r,\psi=\pm\varphi} \nu^{1/q}(\psi \leq r)(\int_r^\infty (\frac{\lambda^p(\{\psi \geq t\})}{\overline{\mu}^*_\varphi(t)})^{1/(p-1)} dt)^{1/p'} = b_1 < \infty. \tag{4.9}$$

Se $\nu(M) = 1$ e $\varphi \in L^1(M, \nu)$, allora

$$(\int |u(x) - \int u(y)d\nu(y)|^q d\nu(x))^{1/q} \leq c_2(\int |Du|^p d\nu)^{1/p},$$

per qualche $c_2 > 0$ e per ogni $u = f \circ \varphi,\ f \in N'$ se e solo se vale (4.9).
Si sono usate le convenzioni $0\infty = 0$ e per $\nu^p/\overline{\mu}^*_\varphi$ $\frac{0}{0} = 0$ e $\frac{\infty}{\infty} = 0$.

Dimostrazione: La dimostrazione può essere trovata in Stredulinsky [17].

Se $H \subset W^{1,p}(M, \nu)$ e H è chiuso per composizione con $f \in N'$, allora per $A \subset M$ sia

$$\overline{C}_{H,p}(A) = \inf\{\int |D\varphi|^p d\nu : \varphi \in H \cap L^1(M, \nu),\ \varphi \geq 1 \text{ in } A \text{ e } \int \varphi d\nu = 0\},$$

e

$$\overline{C'}_{H,p}(A) = \inf\{\int |D\varphi|^p d\nu : \varphi \in H \cap L^1(M, \nu),\ \varphi \leq 0 \text{ in } A \text{ e } \int \varphi d\nu = 1\}.$$

Nel seguente teorema si supporrà che se $\varphi \in H$, allora

$$\nu\{\varphi \geq t\}) < \infty \quad \text{per } t > 0. \tag{4.10}$$

Se (4.10) non vale, la tesi vale ancora a meno di sostituire $\overline{C}_{H,p}(A)$ *ed* $\overline{C'}_{H,p}(A)$ con opportune funzioni di insieme.

Teorema 4.3.9 *Se $1 \leq p \leq q < \infty$ e vale (4.10), allora*

$$(\int(\int |u(x)-u(y)|d\nu(y))^q d\nu(x))^{1/q} \leq c_1(\int |Du|^p d\nu)^{1/p}$$

per qualche $c_1 > 0$ e per ogni $u = f \circ \varphi,\ f \in N'$ se e solo se

$$\nu^{1/q}(A) \leq b_1 \overline{C'}^{1/p}_{H,p}(A) \tag{4.11}$$

per qualche $b_1 > 0$ ed ogni insieme $A = \{\varphi \leq 0\}$, $\varphi \in H$.
Se $\nu(M) = 1$ e $H \subset L^1(M, \nu)$, allora

$$\left(\int |u(x) - \int u(y) d\nu(y)|^q d\nu(x)\right)^{1/q} \leq c_2 \left(\int |Du|^p d\nu\right)^{1/p},$$

per qualche $c_2 > 0$ ed ogni $u \in H$ se e solo se

$$\nu^{1/q}(A) \leq b_2 \overline{C}^{1/p}_{H,p}(A)$$

per qualche $b_2 > 0$ ed ogni insieme $A = \{\varphi < 0\}$, $\varphi \in H$, se e solo se, poi, vale (4.11), dal momento che

$$\frac{1}{d^p} \overline{C}_{H,p}(A) \leq \overline{C'}_{H,p} \leq d^p \overline{C}_{H,p}(A).$$

Dimostrazione: La dimostrazione può essere trovata in Stredulinsky [17].

Per cercare di ricondursi a questa teoria è necessario restringersi a $Lip_0(X, d)$ ed a $Lip^p_{loc}(X, d)$ mediante le Osservazioni 4.3.4 e 4.3.5, in quanto non è detto, e lo vedremo più avanti, che l'operatore $|\nabla|$ammetta un prolungamento a tutto $W^{1,p}(X, d, \mu)$ o a $W^{1,p}_0(X, d, \mu)$.
Mostriamo ora, che l'operatore $|\nabla|$ su $Lip_{loc}(X, d, \mu)$ verifica la diseguaglianza (4.8). Facciamo questa verifica nel caso di $Lip_0(X, d, \mu)$ considerato che per Lip^p_{loc} è analoga. Abbiamo

$$\begin{aligned}
|\nabla(f \circ u)|(x) &= \lim_{r \to 0} \sup_{y_1 \neq y_2 \in B(x,r)} \frac{|f(u(y_1)) - f(u(y_2))|}{d(y_1, y_2)} = \\
&= \lim_{r \to 0} \sup_{y_1 \neq y_2 \in B(x,r)} |f'(\xi) \frac{u(y_1) - u(y_2)}{d(y_1, y_2)}| \\
&= \lim_{r \to 0} \sup_{y_1 \neq y_2 \in B(x,r)} |f'(\xi)| |\frac{u(y_1) - u(y_2)}{d(y_1, y_2)}| \\
&= |f'(u(x))| |\nabla u|(x).
\end{aligned}$$

Quindi la diseguaglianza (4.8) è immediata.

4.4 Rappresentazione integrale

Nell'ultima parte del paragrafo precedente, abbiamo considerato la possibilità di restringersi a $Lip_{loc}(X, d, \mu)$ e $Lip_0(X, d, \mu)$ per dimostrare la diseguaglianza di Poincaré, in quanto senza ipotesi aggiuntive sullo spazio metrico mensurale, non è detto che l'operatore $|\nabla|$ ammetta un prolungamento a tutto lo spazio di Sobolev.

Uno dei problemi più complessi ed importanti della teoria del rilassamento è infatti quello della rappresentazione integrale del funzionale rilassato.
Il seguente esempio che si trova in Bouchitte, Buttazzo, Seppecher [3], mostra che il funzionale $\overline{F}_p$ di cui che abbiamo parlato nel paragrafo precedente può non ammettere una rappresentazione integrale.

Esempio 4.4.1 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, sia Γ una curva $\mathbf{C}^\infty$ semplice, con estremi x_1 ed x_2. Consideriamo un numero reale $p > 1$, la funzione*

$$a(x) = |x - x_1|^q + |x - x_2|^q \quad (q < p - n),$$

una funzione positiva ed H^1-misurabile $\quad b : \Gamma \to \mathbb{R}$, e la misura $\mu = a(x)H^n|_\Omega + b(x)H^1|_\Gamma$.
In questo caso si trova che, detto $\mathcal{F}$ il rilassato di F_p rispetto alla topologia debole di $W^{1,p}(\Omega)$, si ha

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega a(x)|Du|^p dx + |u(x_1) - u(x_2)|^p (\int_\Gamma b(x)^{1/(1-p)} dH^1)^{1-p}.$$

Osserviamo che dal momento che F_p è convesso, per il teorema di Hahn-Banach il suoi rilassati forte e debole coincidono, dunque $\overline{F}_p$ non ammette rappresentazione integrale.

Bibliografia

[1] Adams, R.A. *A trace inequality for generalized potentials.* Studia Math., **48** (1973), 99-105

[2] Adams, R.A. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York 1975

[3] Bouchitte, G., Buttazzo, G., Seppecher, P. *Energies with Respect to a Measure and Applications to Low Dimensional Structures.* Calculus of Variations and Partial Differential Equations, (in stampa)

[4] Buttazzo, G. *Semicontinuity, relaxation and integral rapresentation in the calculus of variations.* Pitman Research Notes in Mathematics Series **207**, Longaman Scientific and Technical, Harlow 1989

[5] Franchi, B., Lu, G., Wheeden, L. *A relationship between Poincaré type inequalities and rapresentation formulas in spaces of homogeneous type.* (Preprint)

[6] Gilbarg, D., Trudinger, N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin 1983

[7] Hajłasz, P. *Geometric approach to Sobolev spaces and badly degenerated elliptic equations.* The proceedings of Banach Center Minisemester: Nonlinear Analysis and Applications. (N.Kenmochi, M.Niezgódka, PStrzelecky, eds.) GAKUTO Internetional Series; Mathematical Sciences and Applications, vol. **7** , (to appear)

[8] Hajłasz, P. *Sobolev Spaces on an Arbitrary Metric Space.* Potential Analysis (to appear) (Preprint 1993)

[9] Hajłasz, P., Koskela, P. *Isoperimetric Inequalities and Imbedding Theorems in Irregular Domains.* Journal of London mathematical Society, (to appear)

[10] Hajłasz, P., Koskela, P. *Sobolev meets Poincaré.* C. R. Acad. Sci. Paris, **320**, Série I, 1211-1215, 1995

[11] Hajłasz, P., Martio, O. *Traces of Sobolev funtions on fractal type sets and characterization of extension domains.* Journal of Functional Analysis, (to appear)

[12] Hedberg, L. *On certain convolution inequalities.* Proc. Amer. Math. Soc. **36** (1972), 505-510

[13] Kufner, A., John, O., Fučik, S. *Function Spaces.* Noordoff International Publishing, Leyden, 1977.

[14] Maz'ya, W. *Sobolev Spaces.* Springer-Verlag, Berlin 1985

[15] Semmes, S. *Sobolev and Poincaré inequalities on general spaces via quantitative topology.* (Preprint)

[16] Stein, E. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton Univ. Press, 1970

[17] Stredulinsky, E.W. *Weighted Inequalities and Degenerate Elliptic Partial Differential Equations.* Lect. Not. in Math. **1074** Springer-Verlag , Berlin 1984

[18] Ziemer, W. *Weakly Differentiable Functions.* Springer-Verlag, Berlin 1989.