

SUL PROBLEMA DELLA GITTATA OTTIMALE 2

In questo articolo ci proponiamo di proseguire l'analisi fatta in [3]. In particolare ci soffermeremo su alcune proprietà di simmetria del problema della gittata ottimale. L'analisi svolta ci consentirà un breve cenno al caso in cui si consideri la resistenza dell'aria, con una piccola escursione su alcuni aspetti più o meno recenti della ricerca scientifica su questo tema.

1. GITTATA E PROBLEMA INVERSO

Un proiettile viene sparato da una quota y_0 rispetto ad un fissato sistema di riferimento. Sia v_0 il modulo della velocità iniziale, e siano v_x e v_y le componenti della velocità iniziale, che supponiamo positive. La gittata è la distanza \mathcal{G} dall'origine degli assi del punto (quello di ascissa positiva) in cui la traiettoria del proiettile interseca l'asse delle ascisse. Come è ben noto, si veda anche [3], trascurando la resistenza dell'aria, la traiettoria del proiettile è data dalla parabola di equazione

$$y = -\frac{g}{2v^2}x^2 + \frac{w}{v}x + y_0,$$

dove si è indicato $v = v_x$ e $w = v_y$. Il problema della gittata ottimale si traduce pertanto nel seguente problema di ottimizzazione:

$$\text{Massimizzare } \left\{ \mathcal{G}(v, w) = \frac{1}{g} \left(vw + v\sqrt{w^2 + 2gy_0} \right) : v \geq 0, w \geq 0, v^2 + w^2 = v_0^2 \right\}.$$

In [3] abbiamo dimostrato che la gittata massima è pari a $\mathcal{G}_M = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}{g}$. Nel caso in cui $y_0 = 0$, ciò corrisponde ad un angolo di tiro pari a $\frac{\pi}{4}$, mentre nel caso generale corrisponde ad un angolo $\theta < \frac{\pi}{4}$. Come problema inverso possiamo chiederci: fissato un certo valore \mathcal{G} della gittata, qual è l'angolo che la realizza? In altre parole, ci stiamo chiedendo con quale angolo di tiro il proiettile arriva a coprire la distanza desiderata.

Caso $y_0 = 0$. In questo caso il problema inverso della gittata corrisponde a risolvere il seguente sistema

$$(1) \quad \begin{cases} 2vw = g\mathcal{G} \\ v^2 + w^2 = v_0^2. \end{cases}$$

Dal punto di vista geometrico, tale problema inverso corrisponde alla determinazione delle intersezioni tra un ramo di iperbole e una circonferenza (si veda la Figura 1). Dunque, se \mathcal{G} non è troppo grande, ci saranno due soluzioni del problema inverso, simmetriche rispetto alla bisettrice del primo quadrante $w = v$. Pensando la gittata come funzione dell'angolo, ciò significa che per ogni $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$ si ha $\mathcal{G}(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \mathcal{G}(\frac{\pi}{4} + \alpha)$. Inoltre, la gittata massima possibile corrisponde al caso in cui iperbole e circonferenza sono tangenti. In altre parole, l'angolo che realizza la massima gittata è l'unico angolo per cui il problema inverso ammette un'unica soluzione.

Tali considerazioni si giustificano abbastanza agevolmente con un pò di algebra.

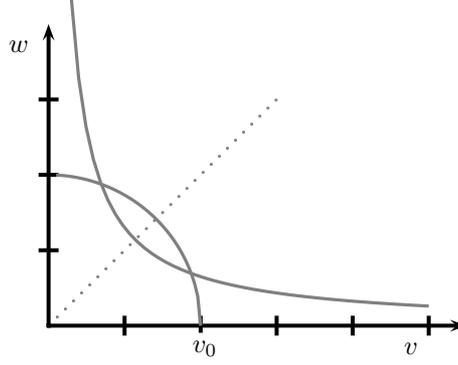


FIGURA 1. Problema inverso della gittata

Infatti, dal sistema (1) ricaviamo

$$vw = \frac{\mathcal{G}g}{2} \Rightarrow v\sqrt{v_0^2 - v^2} = \frac{\mathcal{G}g}{2} \Rightarrow v^2(v_0^2 - v^2) = \frac{\mathcal{G}^2g^2}{4} \Rightarrow v^4 - v_0^2v^2 + \frac{\mathcal{G}^2g^2}{4} = 0.$$

Posto $s = v^2$, le soluzioni del problema inverso si trovano risolvendo l'equazione di secondo grado $s^2 - v_0^2s + \frac{\mathcal{G}^2g^2}{4} = 0$. Il discriminante di tale equazione è $\Delta = v_0^4 - \mathcal{G}^2g^2$. Pertanto il problema inverso ammette un'unica soluzione se e soltanto se $\mathcal{G} = \frac{v_0^2}{g}$, ovvero in corrispondenza del valore massimo della gittata. Per $\mathcal{G} < \frac{v_0^2}{g}$ otteniamo

$$s_1 = \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - \mathcal{G}^2g^2}}{2}, \quad s_2 = \frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - \mathcal{G}^2g^2}}{2}$$

da cui si ottengono le due soluzioni (ci interessano solo quelle positive)

$$v_1 = \sqrt{\frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - \mathcal{G}^2g^2}}{2}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - \mathcal{G}^2g^2}}{2}}.$$

Dalla seconda equazione del sistema (1) ricaviamo

$$w_1^2 = v_0^2 - v_1^2 = v_0^2 - \frac{1}{2} \left(v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - \mathcal{G}^2g^2} \right) = \frac{1}{2} \left(v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - \mathcal{G}^2g^2} \right).$$

Allo stesso modo si trova

$$w_2^2 = \frac{1}{2} \left(v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - \mathcal{G}^2g^2} \right).$$

Pertanto, si riconosce che $(v_1, w_1) = (w_2, v_2)$, e quindi le soluzioni del problema inverso corrispondono a punti simmetrici rispetto alla retta $w = v$.

Caso $y_0 > 0$. In [3] abbiamo verificato che la gittata massima corrisponde ad un angolo minore di $\frac{\pi}{4}$. Pertanto, ci aspettiamo che in generale sarà $\mathcal{G}(\frac{\pi}{4}-\alpha) \neq \mathcal{G}(\frac{\pi}{4}+\alpha)$. In effetti possiamo enunciare il seguente

Teorema 1. *Per ogni $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}]$ si ha $\mathcal{G}(\frac{\pi}{4}-\alpha) > \mathcal{G}(\frac{\pi}{4}+\alpha)$.*

Dimostrazione. Intanto osserviamo che $\mathcal{G}(\frac{\pi}{4}) = \mathcal{G}(u_0, u_0)$ con $u_0 = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$. Fissato $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}]$ abbiamo che

$$\mathcal{G}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \mathcal{G}\left(u_0 + \varepsilon, \sqrt{v_0^2 - (u_0 + \varepsilon)^2}\right)$$

per un certo $\varepsilon \in]0, v_0 - u_0]$. Per simmetria avremo allora che

$$\mathcal{G}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \mathcal{G}\left(\sqrt{v_0^2 - (u_0 + \varepsilon)^2}, u_0 + \varepsilon\right).$$

Allora possiamo valutare che

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)^2 - \mathcal{G}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)^2 = \\ & = \frac{1}{g^2}(u_0 + \varepsilon)^2 [v_0^2 - (u_0 + \varepsilon)^2 + 2gy_0] - [v_0^2 - (u_0 + \varepsilon)^2] [(u_0 + \varepsilon)^2 + 2gy_0]. \end{aligned}$$

Ricordando che $u_0^2 = \frac{v_0^2}{2}$, si ottiene

$$\mathcal{G}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)^2 - \mathcal{G}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)^2 = \frac{1}{g} [4y_0(u_0 + \varepsilon)^2 - 2y_0v_0^2] = \frac{1}{g}(8y_0u_0\varepsilon + 4y_0\varepsilon^2) > 0.$$

□

Per quanto riguarda il problema inverso, ci aspettiamo questa volta una situazione più complicata. In effetti, per ragioni di continuità, ogni gittata intermedia tra quella nulla e quella massima è realizzata da almeno un angolo di tiro. Tuttavia, per gittate piccole ci aspettiamo che il problema inverso abbia un'unica soluzione, come difatti accade per la gittata nulla che è realizzata in corrispondenza dell'unica soluzione $(0, v_0)$. Inoltre, anche la simmetria sottostante, qualora ci sia, sarà più sottile. In effetti, elevando al quadrato l'equazione

$$\frac{1}{g} \left(vw + v\sqrt{w^2 + 2gy_0} \right) = \mathcal{G}$$

si ottiene

$$\mathcal{G}^2 g^2 + v^2 w^2 - 2g\mathcal{G}vw = v^2(w^2 + 2gy_0) \Rightarrow \mathcal{G}^2 g^2 - 2g\mathcal{G}vw = 2gy_0 v^2 \Rightarrow 2\mathcal{G}vw = \mathcal{G}^2 g - 2y_0 v^2.$$

Ancora quadrando e ricordando che $w^2 = v_0^2 - v^2$, si ottiene l'equazione

$$(2) \quad 4(y_0^2 + \mathcal{G}^2)v^4 - 4\mathcal{G}^2(gy_0 + v_0^2)v^2 + g^2\mathcal{G}^4 = 0,$$

che ammette soluzione se e soltanto se $\mathcal{G} \leq \frac{1}{g}v_0\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}$. Naturalmente, tali operazioni di quadratura sono ammissibili se valgono le condizioni:

$$(3) \quad \mathcal{G} \geq \frac{vw}{g}, \quad \mathcal{G}^2 \geq \frac{2y_0v}{g}.$$

Poichè (si veda [3])

$$\text{Max} \left\{ \frac{vw}{g} : v, w \geq 0, v^2 + w^2 = v_0^2 \right\} = \frac{v_0^2}{2g}$$

e $v \in [0, v_0]$, le condizioni (3) sono senz'altro soddisfatte per

$$\mathcal{G} \geq \mathcal{G}_m := \text{Max} \left(\frac{v_0^2}{2g}, \frac{v_0}{g} \sqrt{2y_0g} \right).$$

Osservato che $\mathcal{G}_m \leq \mathcal{G}_M := \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}$, allora per $\mathcal{G} \in [\mathcal{G}_m, \mathcal{G}_M[$ il problema inverso ammette due soluzioni e la gittata massima corrisponde al valore $\frac{1}{g}v_0\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}$ per il quale il problema inverso ammette un'unica soluzione in tale intervallo. Inoltre, risolvendo la (2) si trova

$$v_1^2 = \mathcal{G}^2 \frac{v_0^2 + gy_0 + \sqrt{v_0^4 + 2gy_0v_0^2 - g^2\mathcal{G}^2}}{2(y_0^2 + \mathcal{G}^2)}, \quad v_2^2 = \mathcal{G}^2 \frac{v_0^2 + gy_0 - \sqrt{v_0^4 + 2gy_0v_0^2 - g^2\mathcal{G}^2}}{2(y_0^2 + \mathcal{G}^2)}.$$

Ponendo

$$a = \frac{\mathcal{G}^2(gy_0 + v_0^2)}{y_0^2 + \mathcal{G}^2}$$

si ottiene $v_1^2 + v_2^2 = a$, da cui seguono

$$w_1^2 = v_0^2 - v_1^2 = v_0^2 + v_2^2 - a \Rightarrow w_1^2 - v_2^2 = v_0^2 - a,$$

$$w_2^2 = v_0^2 - v_2^2 = v_0^2 + v_1^2 - a \Rightarrow w_2^2 - v_1^2 = v_0^2 - a.$$

Pertanto, i punti di coordinate (v_2, w_1) e (v_1, w_2) , corrispondenti alle soluzioni del problema inverso, stanno sull'iperbole di equazione $w^2 - v^2 = v_0^2 - a$. Dunque, partendo da un punto di coordinate (v_1, w_1) , si può costruire geometricamente l'altra soluzione (v_2, w_2) che realizza la stessa gittata come suggerito in figura (2).

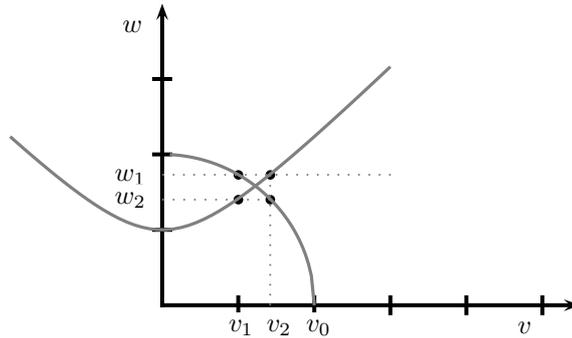


FIGURA 2. Simmetria nel caso $y_0 > 0$.

2. LUOGO DEI PUNTI DI MASSIMA ALTEZZA.

Un'altra proprietà importante, ma forse poco conosciuta, è che i punti di massima altezza stanno tutti su di una ellisse (si veda [2]). Infatti, i punti di massima altezza sono i vertici della traiettoria parabolica di coordinate $(x_m, y_m) = (\frac{vw}{g}, \frac{w^2}{2g} + y_0)$. Verifichiamo che esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$(4) \quad \frac{x_m^2}{a^2} + \frac{(y_m - c)^2}{b^2} = 1.$$

Sviluppando il primo membro della (4) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{v^2 w^2}{a^2 g^2} + \frac{1}{b^2} \left(\frac{w^4}{4g^2} + y_0^2 + c^2 + \frac{w^2 y_0}{g} - \frac{w^2 c}{g} - 2y_0 c \right) &= 1 \Leftrightarrow \\ w^2 \left(\frac{v^2}{a^2 g^2} + \frac{w^2}{4b^2 g^2} + \frac{y_0}{b^2 g} - \frac{c}{b^2 g} \right) &= \frac{b^2 - y_0^2 - c^2 + 2y_0 c}{b^2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Tale equazione dovrà essere soddisfatta quali che siano $v, w \geq 0$ tali che $v^2 + w^2 = v_0^2$. A tal fine potremo scegliere i coefficienti a, b, c nel modo seguente

$$\begin{cases} a^2 = 4b^2 \\ 4gc = v_0^2 + 4gy_0 \\ b^2 = y_0^2 + c^2 - 2y_0 c. \end{cases}$$

Notevole è il fatto che l'eccentricità dell'ellisse è pari a $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, e quindi risulta indipendente dalle condizioni iniziali del moto del proiettile.

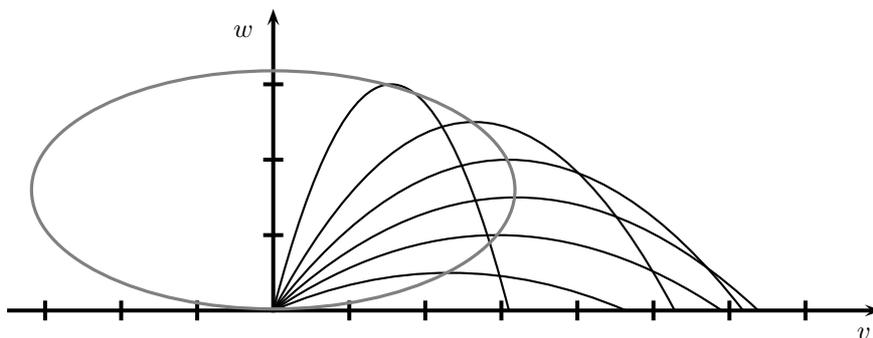


FIGURA 3. i moti parabolici corrispondono alle condizioni $y_0 = 0$ e $v_0 = 8$.

3. RESISTENZA DEL MEZZO

Nel caso in cui non si possa trascurare la resistenza del mezzo in cui il proiettile si muove, le cose si complicano molto. In prima approssimazione si può considerare una forza di attrito proporzionale alla velocità. Le equazioni differenziali che descrivono il moto diventano

$$(5) \quad \begin{cases} mx''(t) = -kx'(t) \\ my''(t) = -mg - ky'(t) \end{cases}$$

con le condizioni iniziali

$$(x(0), y(0)) = (0, y_0), \quad (x'(0), y'(0)) = (v, w).$$

Queste equazioni si risolvono in maniera standard producendo le soluzioni

$$(6) \quad x(t) = \frac{m}{k}v \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right), \quad y(t) = \frac{m}{k} \left(\frac{m}{k}g + w\right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{m}{k}gt + y_0.$$

La gittata si ottiene determinando un $\bar{t} \geq 0$ tale che $y(\bar{t}) = 0$ e poi sostituendo nell'espressione della $x(t)$. Purtroppo però, questa operazione non dà luogo ad una espressione esplicita per la gittata. Nei lavori [7, 8] è proposta una espressione della gittata mediante la funzione W di Lambert (è una funzione di variabile complessa) che permette tra le altre cose di dedurre parecchie proprietà interessanti del problema. Si può intuire allora che scegliendo espressioni più elaborate, e più realistiche, della forza di attrito le cose si complicano notevolmente.

Naturalmente, la traiettoria non è più parabolica. In effetti, dalla prima equazione della (6) si ottiene $t = -\frac{m}{k} \log \left(1 - \frac{kx}{mv}\right)$. Sostituendo nella seconda equazione della (6) si ottiene l'espressione della traiettoria

$$y(x) = \frac{1}{v} \left(\frac{m}{k}g + w\right) x + \frac{gm^2}{k^2} \log \left(1 - \frac{kx}{mv}\right) + y_0.$$

La gittata è in questo caso considerevolmente minore rispetto a quella che si avrebbe nel vuoto. Possiamo giustificare questo fatto trascurando la forza di attrito nella direzione verticale. In tal caso l'espressione della $y(t)$ diventa l'usuale parabola

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + wt + y_0.$$

Allora si trova

$$y(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{w + \sqrt{w^2 + 2gy_0}}{g} \Rightarrow$$

$$\mathcal{G}(v, w) = \frac{mv}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{mg}(w + \sqrt{w^2 + 2gy_0})}\right).$$

Dalla disuguaglianza $1 - e^{-x} \leq x$ valida per ogni $x \geq 0$ si ottiene

$$\mathcal{G}(v, w) \leq \frac{mv}{k} \left(\frac{k(w + \sqrt{w^2 + 2gy_0})}{mg}\right) = \frac{v}{g} (w + \sqrt{w^2 + 2gy_0}) = \mathcal{G}_{\text{vuoto}}(v, w).$$

La gittata massima, anche nel caso $y_0 = 0$, si raggiunge per un angolo minore di $\frac{\pi}{4}$ di cui però non è nota una espressione esplicita. In effetti si può dimostrare (si veda [4, 5, 7]) che $\mathcal{G}(\frac{\pi}{4} - \alpha) > \mathcal{G}(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ per ogni $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$. Anche al problema inverso non è stata data ancora una risposta completamente soddisfacente. In definitiva, riteniamo che quello della gittata ottimale costituisca un ottimo esempio di problema utile per apprezzare il gusto dell'impresa scientifica, sia dal punto di vista teorico che da quello applicativo.

Luca Granieri
Dipartimento di Matematica
Politecnico di Bari
`granieriluca@libero.it`

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Tilak de Alwis, Projectile Motion with Arbitrary Resistance, *College Math Journal*: Vol. 26, Num. 5 (1995), Pag. 361-367.
- [2] J.L. Fernandez-Chapou, L. Salas-Brito, C.A. Vargas, An elliptic property of parabolic trajectories, disponibile on-line su arXiv:physics.
- [3] Luca Granieri, Sul problema della gittata ottimale, *Archimede* Num. 3 (2008), Pag. 139-145.
- [4] C.W. Groetsch and Barry Cipra, Halley's Comment: Projectiles With Linear Resistance, *Mathematics Magazine*: Vol. 70, Num. 4 (1997), Pag. 273-280.
- [5] C.W. Groetsch, Halley's Gunnery Rule, *College Math Journal*: Vol. 28, Num. 1 (1997), Pag. 47-50.
- [6] C.W Groetsch, *Inverse problems*. AMS, Washington DC, 1999.
- [7] Daniel A. Morales, Exact expression for the range and the optimal angle of a projection with linear drag, *Canadian Journal of Physics* **83** (2005), Pag. 67-83.
- [8] Edward W. Packel and David S. Yuen, Projectile Motion with Resistance and the Lambert W Function, *College Mathematics Journal*, Vol. 35, Num. 5 (2004), Pag. 337-350.