Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 1995/1996

Tesi di Laurea

Problemi di ottimizzazione di forma su classi di insiemi convessi

Candidato

Paolo Guasoni

Relatore

Chiar. mo Prof. Giuseppe Buttazzo

Controrelatore

Chiar. mo Prof. Franco Flandoli

Typeset in LaTeX 2_ε, versione 1/12/1995,
con estensioni $\mathcal{AMS}$-LaTeX, versione 1.2
e packages babel, graphicx
Bibliografia generata con BibTeX
Calcoli e grafici elaborati con *Mathematica*™, versione 2.2
Figure ottenute con XFIG 2.1
Stampato con una Apple LaserPro

Indice

Introduzione **5**

1 Preliminari **9**
1.1 Spazi di Sobolev . . . 9
1.2 Funzioni convesse e concave . . . 12
1.3 Metodi diretti . . . 15
1.4 Rilassamento . . . 16
1.5 Γ-convergenza . . . 18
1.6 Teoria della misura . . . 20
1.7 Misure di Young . . . 24
1.8 Misure di Hausdorff . . . 25
1.9 Funzioni BV ed insiemi di perimetro finito . . . 26

2 Il problema in forma cartesiana **29**
2.1 Il modello . . . 29
2.2 Il problema asintotico . . . 31
2.3 Il teorema di esistenza . . . 33
2.4 Varianti del problema . . . 34

3 Il problema in forma parametrica **37**
3.1 Il modello . . . 37
3.2 Un teorema di Reshetnyak . . . 38
3.3 Il teorema di esistenza . . . 43
3.4 Ottimizzazione rispetto alla sezione . . . 46

4 Proprietà dei profili ottimali **49**
4.1 Il caso radiale . . . 49
4.2 La pendenza . . . 67
4.3 La zona piatta . . . 69
4.4 Il comportamento su $\partial\Omega$ . . . 75
4.5 Questioni di unicità e radialità . . . 77
4.6 Il problema asintotico . . . 82
4.7 Problemi aperti . . . 86

Bibliografia **89**

Introduzione

Il problema di trovare il profilo di sezione fissata che oppone la minima resistenza al movimento in un fluido può forse essere considerato il primo del Calcolo delle Variazioni, dall'introduzione del calcolo differenziale. Fu infatti pubblicato per la prima volta nel 1685 da Newton, parecchi anni prima che Johann Bernoulli risolvesse il classico problema della *brachistocrona*, nel 1696. Nei *Principia Mathematica* Newton scriveva:

> *Se in un mezzo rarefatto, costituito da eguali particelle disposte liberamente a eguali distanze l'una dall'altra, si muovono un globo e un cilindro, di egual diametro e con egual velocità nella direzione dell'asse del cilindro, allora la resistenza del globo sarà la metà di quella del cilindro. [...] Riconosco che questa proposizione non sarà senza applicazione nella costruzione di navi.*

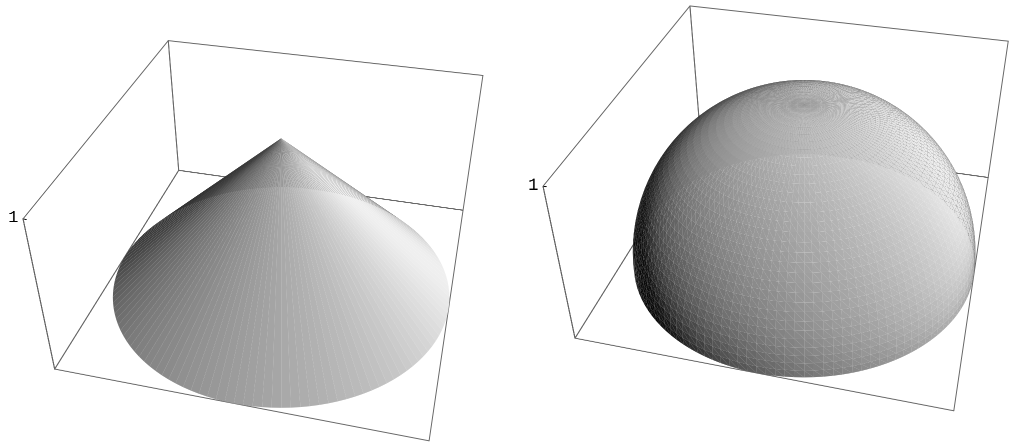
Il modello di Newton consisteva sostanzialmente nel supporre che la resistenza al moto fosse dovuta alla somma degli impulsi ceduti dalle particelle al solido nella direzione di scorrimento (vedere la figura 2.1). Supponendo che il profilo sia descritto da una funzione $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, che lo scorrimento sia verticale, e che ogni particella urti al più una sola volta, il problema si riduce a minimizzare l'integrale:

$$F(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \, \mathrm{d}x \; . \tag{0.1}$$

Nei casi citati da Newton si vede facilmente che, se Ω ha area 1, la sfera ha una resistenza relativa (detta CX in gergo automobilistico) di $\frac{1}{2}$, mentre il cilindro di 1. Altri profili di resistenza relativa $\frac{1}{2}$ sono illustrati nelle figure 0.1 e 0.2.

Per quanto il modello di Newton non tenga conto di tutti gli effetti determinati dalla viscosità, dalla turbolenza e dall'interazione tra le particelle del fluido, si è visto che descrive abbastanza bene i risultati sperimentali in alcuni casi specifici (vedere Funk [13], Miele [25] o Hayes & Probstein [17]), come ad esempio nel caso di profili affusolati, di moto in un fluido a bassa viscosità, nei casi di velocità basse o, per ragioni completamente diverse, nel caso di velocità molto elevate.

Figura 0.1:



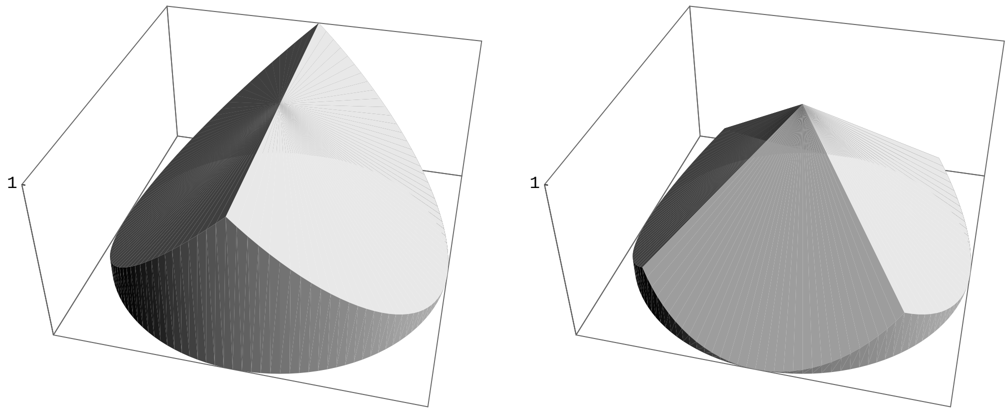
Finora la maggior parte della letteratura su questo argomento ha preso in considerazione il caso radiale del problema, in cui si suppone che Ω sia un cerchio e si restringe la ricerca del minimo alle sole funzioni a simmetria cilindrica e radialmente decrescenti. In questo caso, il funzionale (0.1) diventa, in coordinate polari:

$$F(u) = 2\pi \int_0^R \frac{r}{1 + |u'(r)|^2} \, \mathrm{d}r \ , \tag{0.2}$$

e, una volta fissata l'altezza massima del profilo, è possibile trovare la soluzione esplicitamente in forma parametrica (vedi figura 0.3). Contrariamente a ciò che suggerirebbe il senso comune, si vede che tale soluzione, descritta da una funzione concava, presenta sempre una zona piatta, sulla quale la pendenza è sempre uguale a 1, mentre nei pressi della base la pendenza resta sempre limitata.

Recentemente, nei lavori di Buttazzo & Kawohl [8] e Buttazzo, Ferone & Kawohl [7] è stato affrontato il caso generale, in cui Ω può essere un convesso qualsiasi ed i profili in competizione non devono rispettare vincoli di simmetria. In questo contesto non è comunque ancora chiaro quale sia la classe di funzioni più opportuna su cui studiare il problema. Infatti, se in [7] si trovano teoremi di esistenza nelle classi di funzioni concave e subarmoniche, è pur vero che il problema sarebbe ben posto su una classe più ampia di profili, che comprende tutti quelli per cui ogni particella può compiere al massimo un solo urto. In questo caso, tuttavia, si vede facilmente che il funzionale non gode di buone proprietà di compattezza e semicontinuità, nemmeno prendendo in considerazione le sole funzioni radiali, per cui in questo ambiente più generale il problema dell'esistenza rimane aperto.

Figura 0.2:



Noi concentreremo l'attenzione sul caso di corpi convessi, che ci consentirà di generalizzare l'esistenza del minimo e di determinare alcune caratteristiche dei profili ottimali.

Nel capitolo 1 richiamiamo brevemente i risultati di analisi funzionale e teoria della misura utilizzati nel seguito, rimandando alla bibliografia per le dimostrazioni.

Nel capitolo 2 esponiamo dettagliatamente il problema di Newton nella sua forma originale, per profili cartesiani, ottenendo un teorema di esistenza per sezioni di base di forma non necessariamente convessa.

Il capitolo 3 affronta il problema dell'esistenza del minimo nella classe dei corpi convessi qualsiasi, non necessariamente esprimibili come grafici cartesiani di funzioni (come ad esempio una sfera). Anche se continueremo ad utilizzare il metodo diretto del calcolo delle variazioni, l'ambientazione del problema cambierà nettamente, in quanto sfrutteremo alcuni strumenti di teoria geometrica della misura ed un risultato di continuità sullo spazio delle misure, dimostrato per la prima volta da Reshetnyak.

Insieme al teorema di esistenza viene presentata una dimostrazione semplificata del teorema di Reshetnyak, che rappresenta l'elemento cruciale per ottenere l'esistenza del minimo. Al termine del capitolo si vedrà inoltre che l'impostazione parametrica consente anche di ottenere sotto opportuni vincoli l'esistenza di una sezione ottimale per il problema in forma cartesiane descritto precedentemente.

Nel capitolo 4 studiamo le caratteristiche dei profili di resistenza minima di cui si è stabilita l'esistenza. In particolare, vedremo che molte caratteristiche osservate nel caso radiale continueranno a rimanere valide, benchè nel caso generale il minimo radiale non sarà più ottimale: più precisamente, si vedrà con un controesempio costruito con profili "a cacciavite" (vedi figura 0.4) che la figura con sezione di base circolare che offre resistenza minima non è tra quelle a simmetria cilindrica.

La tesi si conclude con alcune congetture sulle proprietà dei profili, accompagnate dalle ragioni euristiche che le rendono plausibili.

Figura 0.3: Profilo radiale ottimale

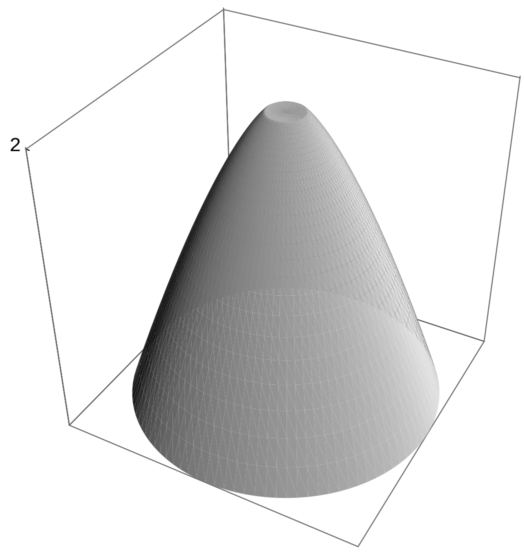
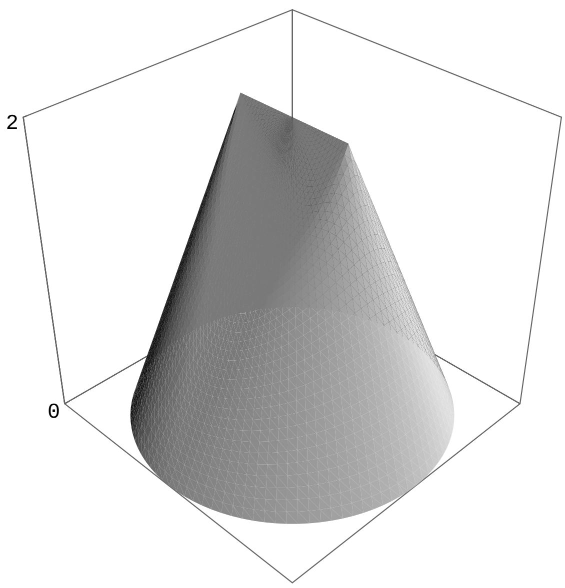


Figura 0.4: Profilo "a cacciavite", di resistenza inferiore



Capitolo 1

Preliminari

Richiamiamo in questo capitolo alcuni concetti di analisi funzionale e di teoria della misura utilizzati nel seguito. Per brevità ci limiteremo a dare le definizioni e a citare gli enunciati, mentre le dimostrazioni saranno rimandate alla bibliografia.

1.1 Spazi di Sobolev

Definizioni 1.1.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq 1$, $p, p' \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

- Definiamo lo spazio di Sobolev
$$W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : \nabla^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ per } 0 \leq |\alpha| \leq m\} ,$$
dove α è un multi indice e le derivate $\nabla^\alpha u$ vanno intese nel senso delle distribuzioni.
Allo spazio $W^{m,p}(\Omega)$ è associata la norma
$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|\nabla^\alpha u\|_{L^p} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{se } 1 \leq p \leq \infty$$
$$\|u\|_{m,\infty} = \sup_{0 \leq \alpha \leq m} \{\|\nabla^\alpha u\|_{L^\infty}\} \qquad \text{se } p = \infty .$$
- Si definisce $H^{m,p}(\Omega)$ come la chiusura di $\{u \in C^m(\Omega),\ \|u\|_{m,p} < +\infty\}$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p}$.
- $W_0^{m,p}(\Omega)$ indica la chiusura di C_0^∞ in $W^{m,p}(\Omega)$.
- $W^{-m,p'}(\Omega)$ sarà il duale di $W_0^{m,p}(\Omega)$.
- $W_{\text{loc}}^{m,p}(\Omega) \equiv \bigcap_{K \subset\subset \Omega} W^{m,p}(K)$.

Valgono le seguenti proprietà:

Teorema 1.1.2 *$W^{m,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach, separabile per $1 \leq p < \infty$ e riflessivo per $1 < p < \infty$.*

Dalla definizione precedente risulta immediatamente che per ogni p, m si ha $H^{m,\infty}(\Omega) \subset W^{m,\infty}(\Omega)$. L'uguaglianza è stabilita dal seguente risultato fondamentale:

Teorema 1.1.3 (Meyers e Serrin) *Sia $1 \leq p < \infty$. Allora*

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega) \ .$$

Osservazione 1.1.4. Il teorema precedente non vale nel caso $p = \infty$, per cui si ha l'inclusione stretta $H^{m,\infty}(\Omega) \subsetneq W^{m,\infty}(\Omega)$, poichè le funzioni di $H^{m,\infty}(\Omega)$ sono di classe $C^m(\Omega)$.

Dal momento che i teoremi di immersione dipendono fortemente dalla regolarità di $\partial\Omega$, diamo le seguenti

Definizioni 1.1.5. Diremo che un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

- ha la *proprietà del cono* se esiste un cono finito C tale che ogni punto $x \in \Omega$ è il vertice di un cono finito $C_x \subset \Omega$ congruente a C.
- ha la *proprietà di Lipschitz locale forte* se esistono $\delta, M > 0$, un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_i\}$ di $\partial\Omega$, e per ogni U_j una funzione f_j di $n-1$ variabili, in modo che valgano le seguenti condizioni

  1. Esiste $R \in \mathbb{N}$ per cui ogni famiglia di $R+1$ insiemi U_j ha intersezione vuota.
  2. Per ogni coppia di punti $x, y \in \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$ tale che $|x - y| < \delta$ esiste j tale che:
  $$x, y \in \{x \in U_j : \mathrm{dist}(x, \partial U_j) > \delta\} \ .$$
  3. Ogni funzione f_j è M-lipschitziana, cioè
  $$|f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) - f(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})| \leq M|(\xi_1 - \eta_1, \dots, \xi_{n-1} - \eta_{n-1})| \ .$$
  4. Esiste un sistema di coordinate cartesiane $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ in U_j per cui l'insieme $\Omega \cap U_j$ è rappresentato della disuguaglianza
  $$\xi_{j,n} < f_j(\xi_{j,1}, \dots, \xi_{j,n-1}) \ .$$

Osservazione 1.1.6. Se Ω è limitato, le condizioni sopra equivalgono alla locale lipschitzianità di $\partial\Omega$.

Definizioni 1.1.7. Per ogni intero positivo j e per ogni $\lambda \in (0,1]$ poniamo

$$\begin{aligned} C^j_B(\Omega) =& \{u \in C^j(\Omega) : \sup_{x\in\Omega} |\nabla^\alpha u(x)| < \infty \text{ per } |\alpha| \le j\} \\ C^{j,\lambda}(\Omega) =& \{u \in C^j(\Omega) : \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|\nabla^\alpha u(x) - \nabla^\alpha u(y)|^\lambda}{|x-y|} < \infty \text{ per } |\alpha| \le j\} \ . \end{aligned}$$

Si pone inoltre per convenzione $C^{j,0}(\Omega) = C^j(\Omega)$.

Enunciamo ora i teoremi di immersione e di immersione compatta (per le dimostrazioni vedere Adams [1]):

Teorema 1.1.8 (Sobolev) *Siano $m, j \in \mathbb{N}$ e sia $k = m - \frac{n}{p}$. Se Ω ha la proprietà del cono, allora si hanno le seguenti immersioni:*

$$\begin{array}{lll} W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega) & p \le q \le p\left(1 + \dfrac{m}{-k}\right) & \textit{se } k < 0 \\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega) & p \le q < \infty & \textit{se } k = 0 \\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega) & & \textit{se } k > 0 \ , \end{array}$$

Inoltre, se Ω ha la proprietà di Lipschitz locale forte,

$$\begin{array}{lll} W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}) & 0 < \lambda \le k & \textit{se } 0 < k < 1 \\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}) & 0 < \lambda < 1 & \textit{se } k = 1 \\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}) & 0 < \lambda \le 1 & \textit{se } k = 1 \textit{ e } p = 1 \ . \end{array}$$

Teorema 1.1.9 (Rellich-Kondrachov) *Siano $m, j \in \mathbb{N}$, con $m \ge 1$ e sia $k = m - \frac{n}{p}$. Se Ω ha la proprietà del cono e $\Omega_0 \subset \Omega$ è un aperto limitato, allora si hanno le seguenti immersioni compatte:*

$$\begin{array}{lll} W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0) & 1 \le q \le p\left(1 + \dfrac{m}{-k}\right) & \textit{se } k < 0 \\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0) & 1 \le q < \infty & \textit{se } k = 0 \\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega_0) & & \textit{se } k > 0 \\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0) & 1 \le q \le \infty & \textit{se } k > 0 \ . \end{array}$$

Inoltre, se Ω ha la proprietà di Lipschitz locale forte,

$$\begin{array}{lll} W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega_0}) & & \textit{se } k > 0 \\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega_0}) & 0 < \lambda < k & \textit{se } 0 < k < 1 \ . \end{array}$$

Citiamo infine il celebre risultato di Rademacher sulla differenziabilità delle funzioni lipschitziane:

Teorema 1.1.10 (Rademacher) *Sia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione lipschitziana. Allora f è differenziabile in quasi ogni $x \in D$.*

1.2 Funzioni convesse e concave

In questa sezione richiamiamo alcuni risultati fondamentali sulle funzioni convesse. Per le dimostrazioni vedere Dacorogna [9]

Definizioni 1.2.1. Sia X uno spazio topologico. Una funzione $F : X \to \mathbb{R}$ è detta

- *Semicontinua inferiormente (s.c.i.)* se per ogni $x \in X$ si ha
$$F(x) \leq \liminf_{y \to x} F(y) \ ,$$
- *Semicontinua inferiormente per successioni* se per ogni $x \in X$ e per ogni successione $x_k \to x$ si ha
$$F(x) \leq \liminf_{x_k \to x} F(x_k) \ .$$

Definizioni 1.2.2. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $E \subset X$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

- E si dice *convesso* se
$$\lambda x + (1-\lambda)y \in E \qquad \forall x, y \in E, \lambda \in [0,1] \ .$$
- Un insieme convesso E sarà inoltre *strettamente convesso* in un punto $x \in \partial E$ se esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x tale che, se $\lambda \in [0,1]$
$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \partial E \quad \Longrightarrow \quad y \in \{0,1\} \qquad \forall \lambda \in \partial E \cap \mathcal{U} \ ,$$
con un abuso di linguaggio, diremo invece che uno spazio vettoriale V è *strettamente convesso* se il disco unitario $\{x \in V : |x| \leq 1\}$ è strettamente convesso in ogni punto della frontiera.
- Dato un insieme E, si dice *involucro convesso* di E il più piccolo convesso che contiene E.
- f si dice *convessa* se
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall x, y \in X, \lambda \in [0,1] \ .$$
- Analogamente, f si dice *concava* se
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall x, y \in X, \lambda \in [0,1] \ .$$
- Il *dominio* di f è l'insieme
$$\mathrm{dom}\, f \equiv \{x \in X : f(x) < +\infty\} \ .$$

- L'*epigrafico* di f è definito come

$$\text{epi } f \equiv \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\} \ .$$

- Il *sottografico* o *ipografico* di f è definito come

$$\text{ipo } f \equiv \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\} \ .$$

Proposizione 1.2.3 *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) f *è convessa (concava)*

ii) epi f *è convesso* (ipo f *è convesso)*

iii) Esiste una famiglia di funzioni affini $\{f_i\}_{i \in I}$ *tale che*

$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) \qquad \left(f(x) = \inf_{i \in I} f_i(x) \right) \ .$$

Inoltre, se f è convessa (concava), allora i sottolivelli (sopralivelli) di f sono convessi. In generale non vale il viceversa.

Corollario 1.2.4 *Se f e g sono convesse (concave), allora $f \vee g$ è convessa ($f \wedge g$ è concava).*

In generale non è detto che componendo funzioni convesse si ottenga una funzione convessa, tuttavia vale la seguente

Proposizione 1.2.5 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e convessa (concava) e g convessa (concava). Allora $f \circ g$ è convessa (concava).*

Teorema 1.2.6 (Disuguaglianza di Jensen) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $u \in L^1(\Omega)$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa. Allora*

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x) \, \mathrm{d}x \right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(u(x)) \, \mathrm{d}x \ ,$$

dove $|\Omega|$ indica la misura di Lebesgue di Ω.

Teorema 1.2.7 *Siano $X_1, \ldots, X_n$ spazi di Banach e sia $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \overline{\mathbb{R}}$ convessa in ogni variabile, con $f \not\equiv +\infty$. Allora*

i) Se f è limitata in un intorno di x, allora f è continua in x.

ii) Se $X_1, \ldots, X_n = \mathbb{R}$, allora f è localmente lipschitziana nei punti interni del suo dominio.

Definizioni 1.2.8. Sia X uno spazio vettoriale, X^* il suo duale e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forma bilineare canonica su $X \times X^*$. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

i) La funzione $f^* : X^* \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definita da

$$f^*(x^*) \equiv \sup_{x \in X} \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}$$

è detta *coniugata*, o *polare* di f.

ii) La funzione $f^{**} : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definita da

$$f^{**}(x) \equiv \sup_{x^* \in X^*} \{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\}$$

è detta *biconiugata*, o *bipolare* d f.

iii) La funzione $Cf : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definita da

$$Cf \equiv \sup\{g \leq f : g \text{ convessa}\}$$

è detta *inviluppo convesso* della f.

Teorema 1.2.9 *Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora*

i) f^* è convessa e s.c.i.

ii) Se f è convessa e s.c.i, allora $f^* \not\equiv +\infty$

iii) In generale

$$f^{**} \leq Cf \leq f \ ,$$

e se f è convessa e s.c.i, allora

$$f^{**} = Cf = f \ .$$

In particolare se f assume solo valori finiti allora $f^{**} = Cf$.

iv) In generale

$$f^{***} = f \ .$$

Definizione 1.2.10. Sia X uno spazio di Banach e $f : X \to \mathbb{R}$. Definiamo la *derivata di Gâteaux* di f nel punto x e nella direzione y il limite, se esiste

$$f'(x, y) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(x + \varepsilon y) - f(x)}{\varepsilon} \ .$$

Una funzione f è detta *differenziabile secondo Gâteaux* in x se il limite precedente esiste per ogni $y \in X$. Si definisce

$$\langle f'(x), y \rangle \equiv f'(x, y) \ .$$

Teorema 1.2.11 *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ differenziabile secondo Gâteaux. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) *f è convessa (concava).*

ii) *Per ogni $x, y \in X$*

$$f(y) \geq f(x) + \langle y - x, f'(x) \rangle \qquad \Big(f(y) \leq f(x) + \langle y - x, f'(x) \rangle \Big) \ .$$

iii) *Per ogni $x, y \in X$*

$$\langle y - x, f'(y) - f'(x) \rangle \geq 0 \qquad \Big(\langle y - x, f'(y) - f'(x) \rangle \leq 0 \Big) \ .$$

Teorema 1.2.12 *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ differenziabile secondo Gâteaux e convessa. Allora*

$$f(x) + f^*(f'(x)) = \langle x, f'(x) \rangle \qquad \forall x \in X \ .$$

Terminiamo con il teorema di Carathéodory, che generalizza l'ultima parte della proposizione 3:

Teorema 1.2.13 (Carathéodory) *Sia $M \subset \mathbb{R}^n$. Allora l'involucro convesso di M è uguale all'insieme*

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, \ x_i \in M, \ \lambda_i \geq 0 \text{ con } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\} \ .$$

Corollario 1.2.14 *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ e Cf definita come sopra. Allora*

$$Cf(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) : \ x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, \ \lambda_i \geq 0 \text{ con } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\} \ .$$

1.3 Metodi diretti

Vediamo acune varianti del medoto diretto del Calcolo delle Variazioni, che consente di dimostrare l'esistenza di minimi senza utilizare l'equazione di Eulero-Lagrange, ma cercando sull'insieme delle funzioni una topologia rispetto alla quale si abbia contemporaneamente la compattezza sequenziale delle successioni minimizzanti e la semicontinuità sequenziale del funzionale.

Definizioni 1.3.1. Sia X uno spazio topologico.

i) Si dice che una funzione $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è *coerciva* (*coerciva per successioni*) se per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste un insieme K_t compatto (compatto per successioni) tale che

$$\{x : \ F(x) \leq t\} \subset K_t$$

è compatto (compatto per successioni).

ii) Una famiglia di funzioni $F_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, con $i \in I$, si dice *equicoerciva* (*equicoerciva per successioni*) se per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste un insieme K_t compatto (compatto per successioni) tale che

$$\bigcup_{i \in I} \{x : \ F_i(x) \leq t\} \subset K_t \ .$$

Proposizione 1.3.2 *Sia X uno spazio topologico e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) *f è s.c.i.*

ii) epi *f è chiuso.*

iii) *I sopralivelli $\{x \in X : f(x) > t\}$ sono aperti per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

iv) *I sottolivelli $\{x \in X : f(x) \leq t\}$ sono chiusi per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

Per le funzioni s.c.i. vale un risultato analogo al teorema di Weierstraß per le funzioni continue:

Teorema 1.3.3 *Sia X uno spazio topologico compatto (compatto per successioni) e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione s.c.i. (s.c.i. per successioni). Allora f ha un punto di minimo su X.*

Il teorema precedente viene spesso usato nella forma seguente:

Teorema 1.3.4 (Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni) *Sia X uno spazio topologico e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione s.c.i. e coerciva. Allora f ha un punto di minimo su X.*

Spesso, tuttavia, gli insiemi di definizione sono spazi di Banach, per cui si utilizza il seguente corollario:

Corollario 1.3.5 *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funzione tale che:*

i) *f è s.c.i. rispetto alla topologia debole*

ii) $\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = +\infty$

Allora f ammette almeno un punto di minimo su X.

1.4 Rilassamento

Nello studio di problemi di minimo accade spesso di non avere la semicontinuità inferiore del funzionale, mentre la coercività è garantita. In questi casi è utile considerare le soluzioni del funzionale rilassato, per poi confrontarle con quelle del problema originale. Qui ci limitiamo a citare alcune proprietà fondamentali. Per le dimostrazioni rimandiamo a [5].

Definizione 1.4.1. Sia X uno spazio topologico ed $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Per ogni $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ poniamo

$$\mathcal{S}_F = \left\{ G : \ G : X \to \overline{\mathbb{R}}, \ G \text{ s.c.i.}, \ G \leq F \right\} .$$

Si definisce allora il *rilassato* di F, e si indica con $\overline{F}$, il funzionale

$$\overline{F}(x) = \sup_{G \in \mathcal{S}_F} G(x) .$$

Osservazione 1.4.2. Il rilassato di F è sempre s.c.i., visto che $\overline{F}$ è inviluppo superiore di funzioni s.c.i.

Proposizione 1.4.3 *Se per ogni $x \in X$ esiste un sistema di intorni numerabile (1^o assioma di numerabilità), allora $\overline{F}$ è caratterizzato dalla seguenti proprietà:*

i) Per ogni successione $x_h \to x$ si ha

$$\overline{F}(x) \leq \liminf_{h \to \infty} (x_h) .$$

ii) Per ogni $x \in X$ esiste una successione $x_h \to x$ tale che

$$\overline{F}(x) = \lim_{h \to \infty} F(x_h) .$$

Proposizione 1.4.4 *Se $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è coerciva, allora:*

i) $\overline{F}$ è coerciva e quindi, per l'osservazione 1.4.2 ammette minimo.

ii) $\inf F = \min \overline{F}$

iii) Se $x_h \to x$ è una successione minimizzante per F, allora x è un punto di minimo per $\overline{F}$. Inoltre, se X soddisfa il 1^o assioma di numerabilità, per ogni x punto di minimo di $\overline{F}$ esiste $x_h \to x$ successione minimizzante per F.

Dato un funzionale integrale F, è interessante sapere se $\overline{F}$ è un funzionale integrale ed eventualmente il suo legame con la formula esplicita di F.

Il seguente teorema fornisce la soluzione in un caso particolarmente significativo:

Teorema 1.4.5 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana e tale che*

i) $0 \leq f(x,\xi) \leq a(x) + b|\xi|^p$, *con* $a \in L^1(\Omega)$ *e* $b \in \mathbb{R}$.

ii) per ogni $x \in \Omega$ *la funzione* $\xi \mapsto f(x,\xi)$ *è s.c.i.*

Allora se $F : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *è definita da*

$$F(u) = \int_\Omega f(x, \nabla u(x))\, \mathrm{d}x \ ,$$

il rilassato di F *nella topologia debole di* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *è dato da*

$$\overline{F}(u) = \int_\Omega f^{**}(x, \nabla u(x))\, \mathrm{d}x \ ,$$

dove f^{**} *indica l'inviluppo convesso di* f *rispetto a* ξ.

1.5 Γ-convergenza

Presentiamo ora le definizioni e i principali risultati sulla Γ-convergenza, che consente di stabilire la convergenza dei minimi e dei punti di minimo di una successione di funzionali F_h che converge ad un funzionale F. Per le dimostrazioni rimandiamo a [22].

Definizioni 1.5.1. Sia X uno spazio topologico ed $F_h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una successione di funzioni. Definiamo

$$\left(\Gamma\!-\liminf_{h\to\infty} F_h\right)(x) = \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{I}(x)} \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in\mathcal{U}} F_h(y)$$
$$\left(\Gamma\!-\limsup_{h\to\infty} F_h\right)(x) = \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{I}(x)} \limsup_{h\to\infty} \inf_{y\in\mathcal{U}} F_h(y) \ ,$$

dove $\mathcal{I}(x)$ è la famiglia degli intorni di x. Diciamo che F_h *Γ-converge* a F in x se si ha

$$\left(\Gamma\!-\liminf_{h\to\infty} F_h\right)(x) = \left(\Gamma\!-\limsup_{h\to\infty} F_h\right)(x) \ .$$

In tal caso il valore comune si indicherà con

$$\left(\Gamma\!-\lim_{h\to\infty} F_h\right)(x) \ .$$

Proposizione 1.5.2 *Valgono le seguenti proprietà:*

i) *Se F_h Γ-converge a F, allora F è s.c.i.*

ii) *Se per ogni h, $F_h = F$, allora $\Gamma-\lim\limits_{h\to\infty} F_h = \overline{F}$.*

iii) *Se $F_h \le G_h$ per ogni h, allora*

$$\begin{aligned} \Gamma-\liminf_{h\to\infty} F_h &\le \Gamma-\liminf_{h\to\infty} G_h \\ \Gamma-\limsup_{h\to\infty} F_h &\le \Gamma-\limsup_{h\to\infty} G_h \ . \end{aligned}$$

iv) *Se $F_h \to F$ uniformemente su X, allora $\Gamma-\lim\limits_{h\to\infty} F_h = \overline{F}$.*

v) *Se F_h è crescente in h, allora $\Gamma-\lim\limits_{h\to\infty} F_h = \sup\limits_h \overline{F}_h$.*

vi) *Se $F_h \downarrow F$, allora $\Gamma-\lim\limits_{h\to\infty} F_h = \overline{F}$.*

vii) *Se F_h Γ-converge a F e G_h Γ-converge a G, allora*

$$\begin{aligned} \Gamma-\liminf_{h\to\infty}(F_h + G_h) &\ge \Gamma-\liminf_{h\to\infty} F_h + \Gamma-\liminf_{h\to\infty} G_h \\ \Gamma-\limsup_{h\to\infty}(F_h + G_h) &\le \Gamma-\limsup_{h\to\infty} F_h + \Gamma-\limsup_{h\to\infty} G_h \ . \end{aligned}$$

Spesso risulta utile la seguente caratterizzazione sequenziale:

Proposizione 1.5.3 *Se X verifica il 1^o assioma di numerabilità, allora:*

$$\begin{aligned} \left(\Gamma-\liminf_{h\to\infty} F_h\right)(x) &= \min\left\{\liminf_{h\to\infty} F_h(x_h) : \ x_h \to x\right\} \\ \left(\Gamma-\limsup_{h\to\infty} F_h\right)(x) &= \min\left\{\limsup_{h\to\infty} F_h(x_h) : \ x_h \to x\right\} \ . \end{aligned}$$

Il seguenti teoremi stabiliscono la convergenza dei minimi e dei punti di minimo di una successione di funzionali Γ-convergenti:

Teorema 1.5.4 *Supponiamo che esista un insieme σ-compatto $K \subset X$ tale che per ogni h*

$$\inf_{x\in X} F_h(x) = \inf_{x\in K} F_h(x) \ .$$

Allora $\Gamma-\liminf\limits_{h\to\infty} F_h$ ammette minimo in X e si ha

$$\min_{x\in X}\left(\Gamma-\liminf_{h\to\infty} F_h\right)(x) = \liminf_{h\to\infty}\inf_{x\in X} F_h(x) \ .$$

Se inoltre F_h Γ-converge ad F, allora anche F ammette minimo e si ha

$$\min_{x\in X} F = \lim_{h\to\infty}\inf_{x\in X} F_h(x) \ .$$

Teorema 1.5.5 *Supponiamo che F_h Γ-converga ad F. Per ogni h sia x_h un punto di minimo di F_h in X. Se x è un punto di accumulazione per $\{x_h\}$, allora x è un punto di minimo di F in X e si ha*

$$F(x) = \limsup_{h\to\infty} F_h(x_h) \ .$$

Se inoltre $\{x_h\}$ converge a x in X, allora x è un punto di minimo di F in X e si ha

$$F(x) = \lim_{h\to\infty} F_h(x_h) \ .$$

Quando $\{F_h\}$ è equicoerciva e si ha l'unicità del punto di minimo, il teorema precedente ammette una forma più forte:

Teorema 1.5.6 *Supponiamo che $\{F_h\}$ sia equicoerciva e Γ-converga ad una funzione F avente in X un unico punto di minimo x_0. Per ogni h sia x_h un punto di minimo di F_h in X. Allora*

$$x_h \to x \qquad e \qquad F_h(x_h) \to F(x_0) \ .$$

1.6 Teoria della misura

Richiamiamo alcuni strumenti di teoria della misura utili in seguito nello studio del problema in forma parametrica.

Definizioni 1.6.1. Sia Ω un insieme non vuoto e E uno spazio vettoriale normato di dimensione finita.

- Diremo che una famiglia $\mathcal{F}$ di parti di Ω è una *σ-algebra* se gode delle seguenti proprietà:

  i) $\Omega \in \mathcal{F}$.

  ii) $B \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad \Omega \setminus B \in \mathcal{F}$.

  iii) $\{B_h\}_{h\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\bigcup_{h\in\mathbb{N}} B_h \in \mathcal{F}$.

- Si dice *misura* una funzione $\mu : \mathcal{F} \to E$ numerabilmente additiva, cioè tale che per ogni famiglia numerable di insiemi disgiunti $\{B_h\} \in \mathcal{F}$ si abbia

  $$\mu\Big(\bigcup_h B_h\Big) = \sum_h \mu(B_h) \ .$$

  Se $E = \mathbb{R}^n$, con $n > 1$, μ si dirà *misura vettoriale*, mentre se $E = \mathbb{R}$ e $\mu(B) > 0$ per ogni B, μ si dirà *misura positiva*.

- Una misura positiva μ si dice limitata se $\mu(\Omega) < \infty$.
- Una misura positiva $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice *probabilità* se $\mu(\Omega) = 1$, *sottoprobabilità* se $\mu(\Omega) \leq 1$. Denoteremo con $\mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathcal{SP}(\Omega)$ rispettivamente gli insiemi delle probabilità e delle sottoprobabilità su Ω.
- Si indica con δ_x la misura positiva definita per ogni $B \subset \Omega$ da

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin B \end{cases} .$$

  δ_x è detta *delta di Dirac* concentrata nel punto x.
- La terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ di un insieme Ω, di una σ-algebra $\mathcal{F}$ su Ω e di una misura $\mu : \mathcal{F} \to E$ si dice *spazio misurabile* o *spazio di misura*.

Osservazione 1.6.2. Se $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di σ-algebre su Ω, allora anche $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ è una σ-algebra su Ω, quindi ha senso parlare della più piccola σ-algebra che contiene una famiglia di parti di Ω.

Definizioni 1.6.3. Sia Ω uno spazio metrico localmente compatto e separabile,

- Indichiamo con $\mathcal{B}(\Omega)$ la σ-algebra dei *Boreliani* di Ω, vale a dire la più piccola σ-algebra che contiene tutti gli aperti di Ω.
- Una misura definita su un σ-algebra $\mathcal{F}$ si dice *di Borel* se $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{F}$.
- Una misura μ si dice *regolare internamente* se per ogni $B \in \mathcal{B}(S)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K_\varepsilon \subset B$ tale che $\mu(B \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.
- Indichiamo con $\mathcal{M}(\Omega, E)$ l'insieme delle le misure di Borel su Ω a valori in E e con $\mathcal{M}^+(\Omega)$ l'insieme delle misure di Borel positive su Ω.
- Per ogni $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, E)$ ed ogni boreliano $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ si definisce la *variazione* di μ come

$$|\mu|(B) = \sup_{\{B_n\}\in\mathfrak{P}(B)} \sum_n |\mu(B_n)| ,$$

  dove $\mathfrak{P}(B)$ rappresenta la famiglia delle partizioni numerabili di B. Poniamo inoltre

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega) .$$

Osservazione 1.6.4. È facile vedere che $|\mu|$ è una misura di Borel positiva e che $|\mu|(\Omega) = \|\mu\|$ induce su $\mathcal{M}(\Omega, E)$ una struttura di spazio di Banach.

Definizioni 1.6.5. Sia λ una misura e μ una misura positiva.

- Si dice che λ è *assolutamente continua* rispetto a μ, scrivendo $\lambda << \mu$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\mu(B) < \delta \Longrightarrow |\lambda|(B) < \varepsilon \ .$$

- Si dice che λ è *singolare* rispetto a μ, scrivendo $\lambda \perp \mu$, se esiste $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ tale che

$$\mu(B) = 0 \text{ e } \lambda(\Omega \setminus B) = 0 \ .$$

Si ha il seguente teorema di rappresentazione:

Teorema 1.6.6 (di Radon-Nikodym) *Sia λ una misura e μ una misura positiva. Allora esistono una funzione $f \in L^1(\Omega, \mu, E)$ ed una misura λ^s tali che*

$$\lambda = f\mu + \lambda^s \qquad e \qquad \lambda^s \perp \mu \ .$$

Se $\lambda << \mu$, f si indica con $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}$ e si chiama la derivata di Radon-Nikodym di λ rispetto a μ.

Osservazione 1.6.7. In particolare, si avrà sempre che $\mu << |\mu|$ e quindi il teorema 1.6.6 implica che $\mu = \nu_\mu |\mu|$, per una opportuna funzione di Borel ν_μ. Dal momento che $|\nu_\mu \mu| = |\nu_\mu||\mu|$, per $|\mu|$-q.o. x si ha $\nu_\mu(x) \in S_E$, dove S_E indica la sfera unitaria di E, cioè l'insieme $\{x \in E : |x| = 1\}$.

Definizione 1.6.8. Per ogni $\phi : \Omega \mapsto E'$, dove E' è il duale di E, definiamo l'integrale rispetto a μ come

$$\int_\Omega \phi \ \mathrm{d}\mu \equiv \int_\Omega \langle \phi(x), \nu_\mu(x) \rangle \ \mathrm{d}|\mu|(x) \ .$$

Se $E = \mathbb{R}^p$, si ha inoltre

$$\int_\Omega \phi \ \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{p} \int_\Omega \phi_i(x) \ \mathrm{d}\mu_i \ .$$

Indicando con $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ la chiusura di $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ rispetto alla norma L^∞, ad ogni misura $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, E)$ associamo il funzionale lineare $L_\mu : C_0(\Omega, E) \mapsto \mathbb{R}$ definito dall'applicazione:

$$\phi \mapsto \int_\Omega \phi \ \mathrm{d}\mu \ .$$

Questa funzione risulta essere un'isometria surgettiva di $\mathcal{M}(\Omega, E)$ nel duale di $C_0(\Omega, E)$ grazie al seguente

Teorema 1.6.9 (Riesz) *Per ogni funzionale L nel duale di $C_0(\Omega, E)$ esiste unica una misura $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, E)$ tale che*

$$L(\phi) = \sum_{i=1}^{p} \int_{\Omega} \phi_i(x) \, \mathrm{d}\mu_i \ ,$$

inoltre $\|L\| = |\mu|(\Omega)$.

Identificando $\mathcal{M}(\Omega, E)$ con il duale di $C_0(\Omega, E)$ abbiamo dunque una naturale topologia debole*.

Definizione 1.6.10. Sia μ_h una successione di misure in $\mathcal{M}(\Omega, E)$. Si dirà che $\mu_h \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ se i funzionali indotti L_{μ_h} convergono a L_μ nella topologia debole*, cioè

$$\lim_{h\to\infty} \sum_{i=1}^{p} \int_{\Omega} \phi_i(x) \, \mathrm{d}\mu_{h,i} = \sum_{i=1}^{p} \int_{\Omega} \phi_i(x) \, \mathrm{d}\mu_h \qquad \forall \phi \in C_0(\Omega, E) \ .$$

Se $\mu_h \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$, per il teorema di Banach-Steinhaus si ha che $\sup_h |\mu_h|(\Omega) < \infty$. Il viceversa è vero a meno di sottosuccessioni per il teorema di Banach-Alaoglu. Abbiamo inoltre la semicontinuità inferiore della funzione $\mu \mapsto |\mu|(\Omega)$.

Teorema 1.6.11 *Siano $\mu_h \in \mathcal{M}(\Omega, E)$ tali che la successione $|\mu_h|(\Omega)$ è limitata. Allora*

i) A meno di sottosuccessioni, si ha $\mu_h \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ per qualche μ.

ii) Se $\mu_h \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ e $|\mu_h| \to \sigma$, si ha $|\mu| \leq \sigma$ e

$$\lim_{h\to\infty} \mu_h(E) = \mu(E) \ ,$$

per ogni insieme di Borel $E \subset\subset \Omega$ tale che $|\sigma|(\partial E) = 0$.

iii) Se le misure sono positive, allora $\mu_h \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ implica

$$\liminf_{h\to\infty} \mu_h(A) \geq \mu(A) \qquad \forall \text{ aperto } A \subset \Omega$$
$$\limsup_{h\to\infty} \mu_h(K) \leq \mu(K) \qquad \forall \text{ compatto } K \subset \Omega \ .$$

Definizione 1.6.12. Sia μ_h una successione di misure in $\mathcal{M}(\Omega, E)$. Si dice che μ_h *converge in variazione* a μ se $\mu_h \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ e $\lim_{h\to\infty} \|\mu_h\| = \|\mu\|$.

Osservazione 1.6.13. Poichè in dimensione finita tutte le norme sono topologicamente equivalenti, la convergenza debole* o la convergenza forte di misure non dipendono dalla norma di E. La convergenza in variazione invece dipende dalla norma scelta su E.

1.7 Misure di Young

Definizioni 1.7.1. In questa sezione $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sarà uno spazio misurabile e S uno spazio metrizzabile σ-compatto (cioè unione numerabile di compatti) e localmente compatto.

- Data una funzione $f : \Omega \to S$, si ha su S la σ-algebra canonica
$$\mathcal{S} = \{B \subset S : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} ,$$
su cui è definita la *misura immagine* ν
$$\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)) \qquad \forall B \in \mathcal{S} .$$
Questa definizione è inoltre valida anche quando $\mathcal{S}$ sia una σ-algebra generica su S rispetto alla quale f risulti misurabile.

- Indichiamo con $\mathcal{Y}(\Omega, \mu, S)$ l'insieme delle misure positive su $\Omega \times S$ le cui immagini mediante la proiezione su Ω sono uguali a μ. In altre parole,
$$\nu \in \mathcal{Y}(\Omega, \mu, S) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu(B \times S) = \mu(B) \qquad \forall B \in \mathcal{F} .$$

$\mathcal{SY}(\Omega, \mu, S)$ denoterà invece l'insieme delle misure positive su $\Omega \times S$ le cui proiezioni su Ω sono minori o uguali a μ, cioè
$$\nu \in \mathcal{SY}(\Omega, \mu, S) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu(B \times S) \leq \mu(B) \qquad \forall B \in \mathcal{F} .$$

- Sia $u : \Omega \to S$ una funzione misurabile. La *misura di Young* associata a u è la misura immagine di μ rispetto all'immersione di Ω in $\Omega \times S$ data da $x \mapsto (x, u(x))$.

- Una famiglia $(\lambda_x)_{x \in \Omega}$, con $\lambda_x \in \mathcal{SP}(S)$, si dice *misurabile* se le applicazioni $x \mapsto \lambda_x(B)$ sono misurabili per ogni $B \in \mathcal{B}(S)$.

Enunciamo ora i due risultati fondamentali che, nel caso $\Omega = \mathbb{R}^n$, $S = \mathbb{R}^m$ e μ e ν siano assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue, si riducono al teorema di Fubini-Tonelli:

Teorema 1.7.2 (Fubini generalizzato) *Se $(\lambda_x)_{x \in \Omega}$ è una famiglia misurabile di $\mathcal{SP}(S)$ e μ è una misura positiva limitata su $(\Omega, \mathcal{F})$, allora è definita su $(\Omega \times S, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(S))$ la misura ν, tale che*
$$\nu(B) = \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{S} \chi_B(x, \xi) \lambda_x(\mathrm{d}\xi) \right) \mu(\mathrm{d}x) .$$
Inoltre, per ogni funzione $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(S)$-misurabile e positiva o ν-integrabile $\psi : \Omega \times S \to \overline{\mathbb{R}}$, si ha
$$\int\limits_{\Omega \times S} \psi \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{S} \psi(x, \xi) \lambda_x(\mathrm{d}\xi) \right) \mu(\mathrm{d}x) .$$

Teorema 1.7.3 (di disintegrazione delle misure) *Sia S uno spazio metrizzabile separabile, $\nu \in \mathcal{SY}(\Omega, \mu, S)$ una misura limitata e la cui proiezione su S è di Radon. Allora esiste ed è unica (a meno di uguaglianza μ-q.o.) una famiglia misurabile di sottoprobabilità di Radon $(\lambda_x)_{x\in\Omega}$ tale che*

$$\nu(B) = \int_\Omega \left(\int_S \chi_B(x,\xi)\lambda_x(\mathrm{d}\xi) \right) \mu(\mathrm{d}x) \qquad \forall B \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(S) \ .$$

1.8 Misure di Hausdorff

Le misure di Hausdorff consentono di precisare e generalizzare le nozioni intuitive di "lunghezza", "area" e "volume" per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. L'utilità di queste misure dipende dal fatto che la loro definizione è del tutto indipendente da parametrizzazioni locali e da ipotesi di regolarità sui bordi degli insiemi.

Definizioni 1.8.1. Per ogni $k \geq 0, \varepsilon > 0$, e $E \subset \mathbb{R}^n$, poniamo

$$\mathcal{H}^k_\varepsilon(E) = \inf \left\{ \omega_k \sum_{i=1}^\infty 2^{-k}\mathrm{diam}(B_i)^k : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_i, \mathrm{diam}(B_i) < \varepsilon \right\} \ ,$$

dove la quantità ω_k è definita tramite la funzione Γ di Eulero:

$$\omega_k = \frac{(\Gamma(1/2))^k}{\Gamma(1+k/2)} \qquad \text{e} \qquad \Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1}e^{-s} \ \mathrm{d}s \ .$$

Per la non decrescenza di $\mathcal{H}^k_\varepsilon(E)$ rispetto ad ε, possiamo quindi definire la *misura di Hausdorff k-dimensionale* di E come:

$$\mathcal{H}^k(E) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{H}^k_\varepsilon(E) \ .$$

Si noti che per k intero ω_k coincide con la misura di Lebesgue della palla unitaria di $\mathbb{R}^k$, e che E può essere un sottoinsieme qualsiasi di $\mathbb{R}^n$, non necessariamente Boreliano e nemmeno misurabile secondo Lebesgue.

Proposizione 1.8.2 *Valgono le seguenti proprietà:*

i) *Le $\mathcal{H}^k$ sono misure di Borel, e funzioni subadditive sulle parti di $\mathbb{R}^n$.*

ii) *$\mathcal{H}^k$ è identicamente nulla per $k > n$ e coincide con la misura che conta i punti per $k = 0$.*

iii) *Se $k > k' \geq 0$, allora*

$$\mathcal{H}^k(B) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}^k(B) = +\infty \ .$$

iv) *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ è una funzione lipschitziana, si ha*

$$\mathcal{H}^k(f(B)) \leq M^k \mathcal{H}^k(B) \ ,$$

ove M è la costante di Lipschitz di f.

v) *Per ogni insieme $B \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $\varepsilon > 0$ si ha*

$$|B| = \mathcal{H}^k_\varepsilon(B) = \mathcal{H}^k(B) \ .$$

Definizione 1.8.3. Si definisce *dimensione di Hausdorff* di $A \subset \mathbb{R}^n$ il numero

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{k \geq 0 : \mathcal{H}^k(A) = 0\} \ .$$

1.9 Funzioni BV ed insiemi di perimetro finito

Definizione 1.9.1. Sai $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $u \in L^1_{\text{loc}}$. Poniamo

$$|Du| = \sup\left\{ \int_\Omega u \ \text{div} g \ \mathrm{d}x : g \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^n), \ |g| \leq 1 \right\} .$$

Definiamo lo spazio delle funzioni a *variazione limitata* in Ω come

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : |Du|(\Omega) < +\infty \right\} ,$$

dotato della norma

$$\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + |Du| \ .$$

Analogamente, poniamo

$$BV_{\text{loc}}(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : |Du|(K) < +\infty \quad \forall K \subset\subset \Omega \right\} .$$

Proposizione 1.9.2 *$BV(\Omega)$ è uno spazio di Banach, nè riflessivo, nè separabile.*

Vediamo ora alcune utili caratterizzazioni delle funzioni BV.

Proposizione 1.9.3 *Sia $u \in L^1$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) $u \in BV(\Omega)$

ii) Esiste una misura vettoriale Du, con $|Du|(\Omega) \leq M$, che rappresenti la derivata di u nel senso delle distribuzioni, cioè tale che

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \phi \, \mathrm{d}D_i u \ .$$

iii) Esiste una successione $u_h \subset C^\infty(\Omega)$ tale che $\|u_h - u\|_{L^1(\Omega)}$ tende a zero e

$$\limsup_{h \to +\infty} \int_\Omega |\nabla u_h| \, \mathrm{d}x \leq L < +\infty \ .$$

Inoltre, le più piccole costanti M e L coincidono con $|Du|(\Omega)$.

Grazie ai teoremi di immersione siamo in grado di ottenere proprietà di integrabilità per le funzioni BV e per le loro tracce.

Teorema 1.9.4 *Valgono le seguenti immersioni continue:*

$$\begin{aligned} BV(\Omega) &\hookrightarrow L^p(\Omega) \\ BV(\Omega) &\hookrightarrow L^1(\partial\Omega) \ . \end{aligned}$$

Inoltre la seguente immersione risulta compatta

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega) \ .$$

Teorema 1.9.5 (di compattezza) *Per ogni costante $C \geq 0$ l'insieme*

$$\{u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : |Du|(\Omega) \leq C\} \ ,$$

è compatto nella convergenza $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Il ruolo delle funzioni BV in Teoria Geometrica della Misura discende dal collegamento che c'è tra il perimetro di un insieme e la variazione della sua funzione caratteristica:

Definizione 1.9.6. Sia $E \in \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile secondo Lebesgue. Il *perimetro* di E in Ω è definito come

$$P(E, \Omega) = |D\chi_E|(\Omega) \ .$$

Diremo che E *ha perimetro finito* in Ω se $P(E, \Omega) < +\infty$.

Teorema 1.9.7 (Formula di coarea) *Per ogni $u \in L^1(\Omega)$ si ha*

$$|Du|(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{u > t\}, \Omega) \; \mathrm{d}t \; .$$

In particolare, se $u \in BV(\Omega)$, allora $\{u > t\}$ ha perimetro finito in Ω per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$.

Definizioni 1.9.8. Sie $E \in \mathbb{R}^n$ un insieme di perimetro finito in Ω. Si dice *frontiera* di E in Ω l'insieme

$$\partial E = \{x \in \Omega : 0 < |E \cap B_\rho(x)| < \omega_n \rho^n \quad \forall \rho > 0\} \; ,$$

dove ω_n è la misura della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$. Definiamo la *frontiera ridotta* di E l'insieme

$$\mathcal{F}E = \{x \in \partial E, \; \exists \nu_E(x) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{D\chi_E(B_\rho(x))}{|D\chi_E|(B_\rho(x))}, \; |\nu_E(x)| = 1\} \; .$$

La funzione ν_E è detta *normale interna generalizzata* ad E.

Definizione 1.9.9. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di Borel. E si dice *numerabilmente $\mathcal{H}^k$-rettificabile* se esiste una successione Γ_h di varietà Lipschitziane di dimensione k tale che

$$\mathcal{H}^k\left(E \setminus \bigcup_{h=0}^{\infty} \Gamma_h\right) = 0 \; .$$

E sarà *$\mathcal{H}^k$-rettificabile* se è numerabilmente $\mathcal{H}^k$-rettificabile e $\mathcal{H}^k(E) < +\infty$.

Abbiamo il seguente teorema fondamentale, dovuto a De Giorgi [11]:

Teorema 1.9.10 *Sia E un insieme di perimetro finito in Ω. Allora $\mathcal{F}E$ è un insieme $\mathcal{H}^k$-rettificabile, $\partial E = \overline{\mathcal{F}E}$ e le misure $|D\chi_E|$ e $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{F}E$ coincidono.*

Capitolo 2

Il problema in forma cartesiana

In questo capitolo svolgeremo lo studio del problema della resistenza minima nel caso in cui il profilo dell'oggetto sia descritto da una funzione $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nella sezione 2.1 verrà descritto nei dettagli il modello utilizzato da Newton e si vedranno le ragioni che portano a cercare il minimo nello spazio delle funzioni concave. La sezione successiva è invece dedicata al teorema di esistenza, e alle possibili estensioni della classe delle funzioni concave.

2.1 Il modello

Il modello usato da Newton per definire la resistenza può essere descritto come segue: sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e supponiamo che il profilo dell'oggetto sia descritto da una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Immaginiamo che il fluido sia composto da tante particelle che si muovono ortogonalmente a Ω con la stessa velocità, e che ogni particella urti *elasticamente* ed *una sola volta* contro il profilo, trascurando gli effetti dovuti all'attrito e alla turbolenza.

Come si vede dalla figura 2.1, l'impulso che ogni particella cede al corpo è proporzionale a $\sin^2\theta$, dove θ è l'angolo di incidenza della particella. Scrivendo $\sin^2\theta$ come $\frac{1}{1+|\nabla u|^2}$ ed integrando su tutto Ω, si ottiene per la resistenza la seguente espressione, valida a meno di costanti di proporzionalità dipendenti dalla velocità del fluido e dalla sua densità:

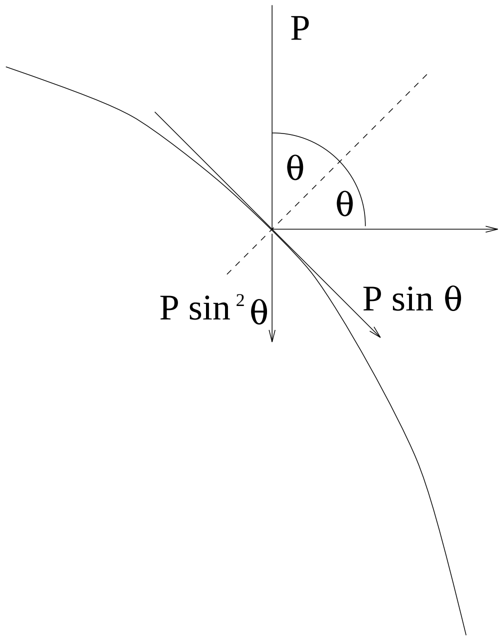
$$F(u) = \int_\Omega \frac{1}{1+|\nabla u|^2}\,\mathrm{d}x \ . \tag{2.1}$$

Vediamo ora in quale classe di funzioni è ragionevole cercare il minimo del funzionale F. Chiaramente sarà necessaria l'equilimitatezza dellla classe, altrimenti, ponendo

$$u_h = hu_0 \ ,$$

si otterrebbe $\lim_{h\to\infty} F(u_h) = 0$ per ogni funzione u_0 non costante, mentre è evidente che il funzionale F non si annulla per nessuna funzione u. Tuttavia

Figura 2.1: Il modello di Newton



anche un vincolo del tipo

$$0 \leq u \leq M$$

non darebbe l'esistenza del minimo, in quanto, presa una funzione w definita su $\mathbb{R}^n$ e tale che $0 \leq w \leq M$ e posto (vedi figura 2.2) $u_h(x) = w(hx)$, si avrebbe

$$F(u_h) = \frac{1}{h^n} \int_{h\Omega} \frac{1}{1 + h^2 |\nabla w|^2} \, \mathrm{d}x \ ,$$

e dunque, se ad esempio w è periodica e non costante, $\lim_{h\to\infty} F(u_h) = 0$. Si noti inoltre che per funzioni qualsiasi il numero di urti delle particelle può essere maggiore di uno, mentre nel modello abbiamo preso in considerazione solo un urto tra la particella di fluido ed il corpo.

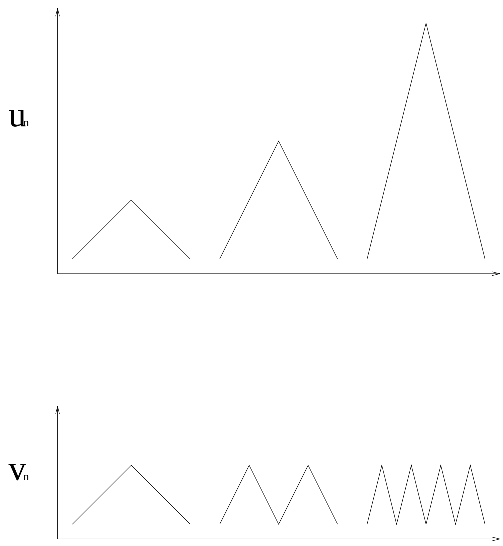
Un modo possibile di risolvere questi problemi, come vedremo nella prossima sezione, è quello di imporre la condizione di concavità dei profili, cercando il minimo nella classe

$$C_M = \{u : 0 \leq u \leq M, \ u \text{ concava}\} \ .$$

Le funzioni concave, infatti, godono della proprietà che ogni particella urta il profilo una sola volta. Per ogni $M > 0$ otterremo così almeno una soluzione u_M per il problema:

$$\min \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \, \mathrm{d}x : u \in C_M \right\} \ . \tag{2.2}$$

Figura 2.2: Successione minimizzante



In [7] si possono vedere le estensioni del teorema di esistenza alle classi delle funzioni subarmoniche e quasiconcave. Noi preferiremo concentrarci sul caso convesso, che ci consentirà di di ottenere informazioni supplementari sulle proprietà del minimo.

2.2 Il problema asintotico

Dal momento che il modello di Newton è adatto a studiare profili molto allungati, può essere interessante chiedersi quale sia il comportamento asintotico dei profili ottimali u_M per $M \to \infty$. Un procedimento possibile consiste nel normalizzare le funzioni u, ponendo $v = \frac{u}{M}$ per ogni $u \in C_M$. La resistenza viene allora definita dal funzionale dipendente da M

$$F_M(v) = \int\limits_\Omega \frac{1}{1 + M^2|\nabla v|^2} \, \mathrm{d}x \ .$$

Dal momento che minimizzare F_M equivale a minimizzare $M^2 F_M$, consideriamo i funzionali

$$G_M(v) = F_M(v) = \int\limits_\Omega \frac{M^2}{1 + M^2|\nabla v|^2} \, \mathrm{d}x = \int\limits_\Omega \frac{1}{\frac{1}{M^2} + |\nabla v|^2} \, \mathrm{d}x \ ,$$

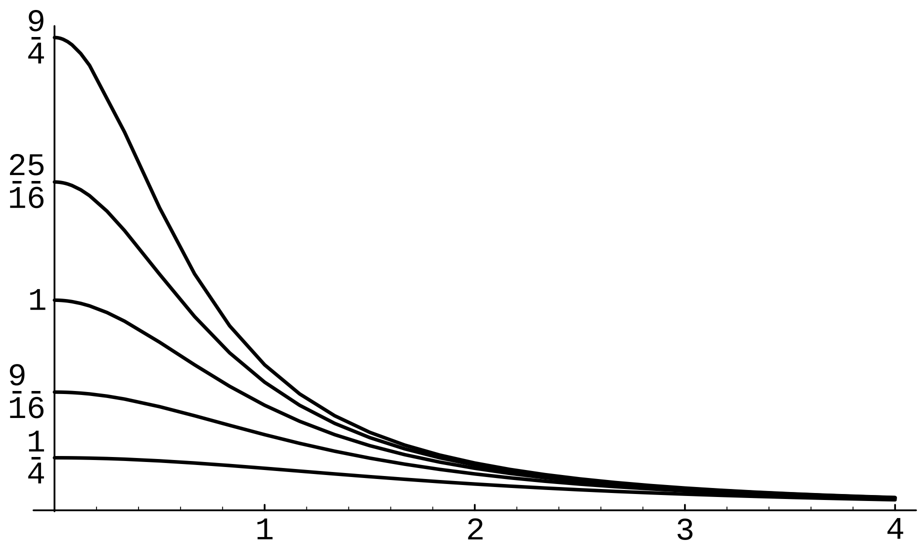
Per $M \to \infty$ otteniamo il funzionale limite

$$G_\infty(v) = \int\limits_\Omega \frac{1}{|\nabla v|^2} \, \mathrm{d}x \ ,$$

che, come verrà dimostrato nel teorema 2.3.1, avrà almeno una soluzione concava u_∞.

I funzionali G_M formano una famiglia crescente in M (vedi figura 2.3) quindi Γ-convergono a G_∞ per la proposizione 1.5.2. Dal teorema 1.5.4 segue che i punti di minimo v_M di F_M, che coincidono con quelli di G_M, convergono a punti di minimo v_∞ di G_∞ nella topologia forte di $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Figura 2.3:



Nello studio delle soluzioni, sarà inoltre opportuno considerare i seguenti parametri:

- per ogni u, definiamo la *resistenza relativa* (detta CX in gergo automobilistico)
$$C_0(u) \equiv \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \frac{1}{1+|\nabla u|^2}\, \mathrm{d}x \ ,$$
- per ogni famiglia $\{u_M\}$, dette $\{v_M\}$ le corrispondenti normalizzate definiamo la *resistenza asintotica*
$$D_0\{u_M\} \equiv \lim_{M\to\infty} \frac{M^2}{|\Omega|} F_M(u_M) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{|\Omega|} G_M(v_M) \ .$$
In particolare, se $u_M \to u$ in $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, allora
$$D_0\{u_M\} = \frac{1}{|\Omega|} G_\infty(u) \ ,$$
e
$$F(u_M) \sim \frac{1}{M^2} G_\infty(u) \ .$$

2.3 Il teorema di esistenza

Sia Ω un convesso aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$, e sia $M > 0$. Consideriamo funzionali F del tipo:

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u) \, dx \; , \tag{2.3}$$

dove $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ è una funzione boreliana non negativa. La buona definizione dei funzionali segue dalla locale lipschitzianità delle funzioni concave e dal teorema 1.1.10. Per dimostrare il teorema di esistenza seguiremo Buttazzo e Kawohl [7]

Teorema 2.3.1 *Sia $f(x, \cdot, \cdot)$ semicontinua inferiormente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ per q.o. $x \in \Omega$. Allora per ogni $M > 0$ il problema:*

$$\min_{u \in C_M} F(u) \; , \tag{2.4}$$

ammette almeno una soluzione.

L'esistenza del minimo dipende dal seguente risultato di compattezza (vedere Marcellini [21]):

Lemma 2.3.2 *Per ogni $M > 0$ e ogni $p < +\infty$ la classe C_M è compatta nella topologia forte di $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia u_h una successione di elementi di C_M. Dimostriamo che si può estrarre una sottosuccessione u_{h_k} tale che $u_{h_k} \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_{h_k} \to \nabla u$ in $L^p(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Per la locale lipschitzianità delle u_h si ha che:

$$\forall h \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega \quad \exists C_{h,\Omega'} \quad \forall x, y \in \Omega' \qquad |u_h(x) - u_h(y)| \le C_{h,\Omega'} |x - y| \; .$$

Grazie alla concavità e alla equilimitatezza di u_h, la scelta delle costanti di lipschitzianità può essere fatta indipendentemente da h: infatti $C_{h,\Omega'} \le \frac{M}{dist(\Omega', \partial\Omega)}$. Su ogni Ω', dunque, la successione u_h è equilipschitziana ed equilimitata, e quindi compatta uniformemente per il teorema di Ascoli-Arzelà, e per diagonalizzazione si può estrarre una sottosuccessione (che per brevità denoteremo ancora con u_h) che converge puntualmente a una certa $u \in C_M$. Con il teorema di Lebesgue della convergenza dominata si conclude che $u_h \to u$ in $L^p(\Omega)$.

Resta ora da dimostrare che $\nabla u_h(x) \to \nabla u(x)$ in $L^p(K)$ per ogni $K \subset\subset \Omega$. Ancora una volta, grazie alla equilimitatezza dei gradienti ∇u_h sarà sufficiente dimostrare la convergenza quasi ovunque. Sia $x \in \Omega$ un punto in cui u e tutte le u_h sono differenziabili. Per la concavità delle funzioni $t \mapsto u_h(x + te_k)$ si ha per ogni $k \in \{1 \dots n\}$ e per ogni $\varepsilon > 0$

$$\frac{u_h(x + \varepsilon e_k) - u_h(x)}{\varepsilon} \le \nabla_k u_h(x) \le \frac{u_h(x - \varepsilon e_k) - u_h(x)}{-\varepsilon} \; .$$

Passando al limite per $h \to +\infty$ si ottiene

$$\frac{u(x+\varepsilon e_k)-u(x)}{\varepsilon} \le \liminf_{h\to+\infty} \nabla_k u_h(x) \le$$
$$\le \limsup_{h\to+\infty} \nabla_k u_h(x) \le \frac{u(x-\varepsilon e_k)-u(x)}{-\varepsilon} \ .$$

Infine, mandando ε a 0, si ha che $\nabla u_h(x) \to \nabla u(x)$ e quindi la tesi. □

Siamo ora in grado di dimostrare l'esistenza del minimo in C_M:

Dimostrazione del teorema 2.3.1 Per il lemma 2.3.2 sarà sufficiente dimostrare la semicontinuità inferiore del funzionale F nella topologia forte di $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Questa però segue dal lemma di Fatou, infatti se $u_h \to u$ in $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, allora si può estrarre una sottosuccessione (denotata ancora con u_h) tale che $(u_h, \nabla u_h) \to (u, \nabla u)$ q.o. in Ω. Dunque:

$$F(u) \le \int_\Omega \liminf_{h\to\infty} f(x, u_h, \nabla u_h)\ \mathrm{d}x \le$$
$$\le \liminf_{h\to\infty} \int_\Omega f(x, u_h, \nabla u_h)\ \mathrm{d}x = \liminf_{h\to\infty} F(u_h)\ . \quad \square$$

2.4 Varianti del problema

È possibile studiare il problema di Newton sostituendo il vincolo $u \le M$ sull'altezza del profilo con limitazioni sull'area o sul volume. In tal caso si cercherà il minimo nelle classi

$$C_A = \left\{u:\ u \text{ concava},\ u \ge 0,\ \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \le A\right\}\ ,$$

oppure

$$C_V = \left\{u:\ u \text{ concava},\ u \ge 0,\ \int_\Omega u\ \mathrm{d}x \le V\right\}\ .$$

Anche in questi casi è possibile ottenere un teorema di esistenza.

Corollario 2.4.1 *Sia $f(x,\cdot,\cdot)$ semicontinua inferiormente su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ per q.o. $x \in \Omega$. Allora per ogni $A \ge |\Omega|$ e $V \ge 0$ i problemi:*

$$\min_{u\in C_A} F(u) \qquad e \qquad \min_{u\in C_V} F(u)\ , \tag{2.5}$$

ammettono almeno una soluzione.

Dimostrazione. Basta far notare che sia C_A che C_V sono compatti in $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. In primo luogo notiamo che entrambe le classi sono contenute in un opportuno C_M. Infatti, se $M = \sup_\Omega u$, il sottografico di u, essendo convesso, deve contenere un cono di base Ω e vertice ad altezza M. Per $u \in C_A$, si ottiene:

$$A \geq \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \geq \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\ \mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}M|\partial\Omega|\ ,$$

e quindi $C_A \subset C_M$ per $M = \frac{2A}{|\partial\Omega|}$. Per $u \in C_V$ invece

$$V \geq \int_\Omega u\ \mathrm{d}x \geq \frac{1}{3}M|\Omega|\ ,$$

e quindi $C_V \subset C_M$ per $M = \frac{3V}{|\Omega|}$.

Se $u_h \in C_M$, a meno si sottosuccessioni possiamo supporre che $u_h \to u$ q.o., ma allora i volumi convergono per il teorema di Lebesgue della convergenza dominata

$$\int_\Omega u_h\ \mathrm{d}x \to \int_\Omega u\ \mathrm{d}x\ ,$$

e quindi C_V è compatto. Inoltre, come si vedrà dal lemma 3.3.3, detti E_h i sottografici di u_h,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to\infty}\left(\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u_h|^2}\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u_h\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}\right) &= \\ = \lim_{h\to\infty}\mathcal{H}^n(\partial E_h) = \mathcal{H}^n(\partial E) &= \\ = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}\ ,\end{aligned}$$

e quindi anche C_A è compatto. □

Il teorema 2.3.1 può essere esteso in modo da comprendere il caso fisicamente rilevante in cui Ω sia un aperto non convesso. Al fine di trovare una nozione analoga a quella di convessità per aperti generici, introduciamo l'insieme

$$D_M = \{u : 0 \leq u \leq M, u \text{ convessa su ogni convesso } E \subset \Omega\}\ .$$

Vale allora il seguente teorema:

Teorema 2.4.2 *Sia $f(x,\cdot,\cdot)$ semicontinua inferiormente su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ per q.o. $x \in \Omega$. Allora per ogni $M > 0$ il problema:*

$$\min_{u\in D_M} F(u)\ , \tag{2.6}$$

ammette almeno una soluzione.

Dimostrazione. La semicontinuità si dimostra come nel teorema 2.3.1, quindi è sufficiente dimostrare la compattezza. A tale scopo, per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$, ricopriamo Ω' con una famiglia di palle $\{B_x\}_{x\in\Omega}$ di raggio inferiore a $\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Per la compattezza di $\overline{\Omega'}$, estraiamo un ricoprimento finito $\{B_h\}_{h\in\mathbb{N}}$. Su ogni B_h vale la locale lipschitzianità delle u_h e indichiamo con L_h la relativa costante di Lipschitz. Sarà quindi sufficiente prendere $\max_h L_h$ per ottenere l'equilipschitzianità delle u_h. La dimostrazione procede quindi esattamente come nel lemma 2.3.2. $\square$

Capitolo 3

Il problema in forma parametrica

Vediamo in questo capitolo come sia possibile impostare il problema di Newton in un contesto molto più generale di quello cartesiano, in cui il profilo di ogni oggetto deve essere il grafico di una funzione. Il funzionale che descrive la resistenza, finora definito sullo spazio delle funzioni concave, sarà esteso alla famiglia degli insiemi convessi, su cui otterremo un altro teorema di esistenza. La tecnica usata sarà come prima il metodo diretto, che richiederà un risultato di Reshetnyak di continuità per funzionali definiti sullo spazio delle misure.

3.1 Il modello

Sia E un insieme convesso. Se E è il sottografico di una funzione concava u, abbiamo visto che la resistenza è data da

$$F(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \, \mathrm{d}x \, . \tag{3.1}$$

Indicando con $\nu(x)$ la normale esterna a E nel punto x, si ha che

$$\nu = \frac{(-\nabla u, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + |\nabla u|^2} = \frac{1}{\nu_{n+1}} \, ,$$

e quindi la resistenza diventa

$$F(u) = \int_{\Omega} \nu_{n+1}^2 \, \mathrm{d}x = \int_{\operatorname{graf} u} \nu_{n+1}^3 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial E} (\nu_{n+1}^+)^3 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \, ,$$

dove nell'ultima uguaglianza la parte positiva consente di trascurare l'integrale lungo $\partial E \setminus \operatorname{graf} u$. Per la locale lipschitzianità dei convessi, la normale esterna

ν è definita per quasi ogni punto della forntiera ∂E, quindi l'espressione precedente ha senso per ogni convesso E, e possiamo definire il nuovo funzionale come

$$F(E) = \int_{\partial E} (\nu_{n+1}^{+})^3 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \ .$$

È ora opportuno chiedersi quali vincoli si debbano imporre alla famiglia dei convessi tra cui cercare il minimo, al fine di non banalizzare il problema. Più precisamente, dovremo ottenere l'esistenza del minimo evitando che si abbia $\inf F(E) = 0$. A tale scopo, considereremo le seguenti classi:

$$C_{A,Q} = \{E \text{ convesso: } K \subset E \subset Q\} \tag{3.2}$$

$$C_{V,Q} = \{E \text{ convesso: } E \subset Q,\ |E| > V\} \ , \tag{3.3}$$

dove K e Q sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{n+1}$ limitati e con misura positiva, V è un numero reale positivo. Il funzionale F allora si può scrivere, grazie al teorema 1.9.10, nella forma

$$F(E) = \int_{\partial E} (\nu_{n+1}^{+})^3 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = \int_{Q} (\nu_{n+1}^{+})^3 \, \mathrm{d}|D\chi_E| \ ,$$

dove

$$\nu = -\frac{\mathrm{d}D\chi_E}{\mathrm{d}|D\chi_E|}$$

e $D\chi_E$ rappresenta la derivata nel senso delle distribuzioni della funzione caratteristica di E. Pertanto si può pensare che F sia definito, invece che sulla classi $C_{A,Q}$ e $C_{V,Q}$, sulle seguenti classi di misure:

$$\Gamma_{A,Q} = \big\{\mu \in \mathcal{M}(Q, \mathbb{R}^{n+1}) : \mu = D\chi_E,\ E \in C_{A,Q}\big\}$$

$$\Gamma_{V,Q} = \big\{\mu \in \mathcal{M}(Q, \mathbb{R}^{n+1}) : \mu = D\chi_E,\ E \in C_{V,Q}\big\} \ .$$

In questo contesto si potrà applicare il teorema dimostrato nella prossima sezione.

3.2 Un teorema di Reshetnyak

In questa sezione verrà dimostrato il teorema di Reshetnyak, che fornisce la semicontinuità nel problema di Newton in forma parametrica. La dimostrazione originale di Reshetnyak richiedeva solo concetti elementari di teoria della misura, tuttavia risulta piuttosto laboriosa. Noi abbiamo preferito seguire un altro approccio, più semplice, ma che utilizza il teorema di disintegrazione e le idee che stanno alla base delle misure di Young. La dimostrazione verrà spezzata in vari lemmi, alcuni dei quali sono semplici proposizioni di teoria della misura che in questo contesto vale la pena dimostrare.

Teorema 3.2.1 (Reshetnyak) *Sia E uno spazio vettoriale normato strettamente convesso di dimensione finita, $f : \Omega \times S_E \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Allora il funzionale $F : \mathcal{M}(\Omega, E) \to \mathbb{R}$ definito da*

$$F(\mu) = \int_\Omega f(x, \nu_\mu(x)) \, \mathrm{d}|\mu|(x) \ ,$$

è continuo rispetto alla convergenza in variazione.

Osservazione 3.2.2. Il teorema precedente ammette diverse varianti: ad esempio, se si è interessati alla sola semicontinuità inferiore del funzionale F, sarà sufficiente avere f s.c.i. e limitata.

Se si ammette invece che le μ_n convergano semplicemente nella topologia debole* ma non necessariamente in variazione, si dovrà avere f s.c.i., positiva e tale che $|y| f(x, \frac{y}{|y|})$ sia convessa su E per ogni $x \in \Omega$.

Nel primo caso la dimostrazione è del tutto analoga alla seguente, mentre nel secondo cambia completamente.

Per dimostrare il teorema avremo bisogno i alcuni lemmi e delle seguenti

Definizioni 3.2.3. Definiamo le due funzioni canoniche T e U

$$\mathcal{M}(\Omega, E) \xrightarrow{T} \mathcal{M}^+(\Omega \times S_E) \xrightarrow{U} \mathcal{M}(\Omega, E) \ ,$$

ponendo per ogni $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, E)$

$$T\mu(B) = \int_B \delta_{\nu_\mu(x)} \, \mathrm{d}|\mu| \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\Omega \times S_E) \ ,$$

e per ogni $\tau \in \mathcal{M}^+(\Omega \times S_E)$, usando la disintegrazione di τ (vedi teorema 1.7.3),

$$U\tau(B) = \int_B \left(\int_{S_E} \Pi_{S_E} \, \mathrm{d}\tau_x \right) \mathrm{d}\Pi_\Omega(\tau) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\Omega) \ ,$$

dove Π_Ω e Π_{S_E} rappresentano rispettivamente le proiezioni di $\Omega \times S_E$ su Ω e su S_E. Si vede facilmente che le definizioni date sopra equivalgono alle seguenti:

$$T\mu(B) = |\mu| \Big(\{x \in X : \big(x, \nu_\mu(x)\big) \in B\} \Big) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\Omega \times S_E) \ ,$$
$$U\tau(B) = \int_{B \times S_E} \Pi_{S_E} \, \mathrm{d}\tau \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\Omega) \ .$$

Nel linguaggio delle misure di Young (vedere ad esempio [35] e [37]), l'applicazione T manda μ nella misura di Young $T\mu \in \mathcal{Y}(\Omega, |\mu|, S_E)$ associata alla funzione ν_μ. Viceversa U manda τ, inteso come elemento di $\mathcal{Y}(\Omega, |\tau|, S_E)$, nella misura vettoriale $U\tau$ avente come densità la funzione che associa ad x la media di τ sulla fibra di x rispetto alla proiezione Π_{S_E}.

Proposizione 3.2.4 *Valgono le seguenti proprietà:*

i) T *è un'isometria.*

ii) $U \circ T \equiv \mathrm{Id}_{\mathcal{M}(\Omega,E)}$*, mentre* $(T \circ U)(\tau) = \tau$ *se* τ *è nell'immagine di* T*.*

iii) Per ogni $\psi : \Omega \times S_E \to \mathbb{R}$ *boreliana vale la seguente identità:*

$$\int_{\Omega \times S_E} \psi(x,y)\ \mathrm{d}T\mu(x,y) = \int_\Omega \psi(x, \nu_\mu(x))\ \mathrm{d}|\mu|(x)\ .$$

Dimostrazione. Si vede subito che T è un'isometria, infatti $\|T\mu\| = |\mu|(\Omega) = \|\mu\|$. Inoltre la iii) segue dalla definizione di T, quindi

$$UT\mu(B) = \int_{B \times S_E} y\ \mathrm{d}T\mu(x,y) = \int_B \nu_\mu(x)\ \mathrm{d}|\mu|(x) = \mu(B)\ ,$$

e dunque $U \circ T \equiv \mathrm{Id}_{\mathcal{M}(\Omega,E)}$. Ne segue che se $\tau = T\mu$, allora $\|U\tau\| \geq \|\tau\|$. Dal momento che U è una proiezione, dovrà essere $\|U\| \leq 1$ e quindi U è un'isometria ristretta all'immagine di T. $\square$

Osservazione 3.2.5. Si noti che T è iniettiva ma non surgettiva, mentre U è surgettiva ma non iniettiva, quindi $U \circ T \equiv \mathrm{Id}_{\mathcal{M}(\Omega,E)}$ ma $T \circ U \not\equiv \mathrm{Id}_{\mathcal{M}^+(\Omega \times S_E)}$.

Lemma 3.2.6 *Sia* μ_n *una successione di misure in* $\mathcal{M}(\Omega, E)$ *che converge in variazione a* μ*. Allora le misure positive* $|\mu_n|$ *convergono in variazione a* $|\mu|$*.*

Dimostrazione. Le misure $|\mu_n|$ formano evidentemente una successione limitata, quindi a meno di sottosuccessioni si ha che $|\mu_n| \stackrel{*}{\rightharpoonup} \lambda$, per qualche misura positiva λ. Sarà sufficiente dimostrare che $\lambda = |\mu|$. Presa $\phi \in C_0(\Omega, \mathbb{R})$ positiva, e $\psi \in C_0(\Omega, E')$ tale che $\phi(x) \geq |\psi(x)|$ si ha

$$\int_\Omega \phi\ \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi\ \mathrm{d}|\mu_n| \geq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi\ \mathrm{d}\mu_n = \int_\Omega \psi\ \mathrm{d}\mu\ ,$$

ma allora, fissata ϕ, si ha che

$$\int_\Omega \phi\ \mathrm{d}\lambda \geq \sup_{\substack{\psi \in C_0(\Omega,E') \\ |\psi| \leq \phi}} \int_\Omega \psi\ \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \phi\ \mathrm{d}|\mu|\ ,$$

e pertanto si ottiene che $\lambda(B) \geq |\mu|(B)$ per ogni B aperto e quindi per ogni B boreliano, ma per ipotesi abbiamo che $\|\lambda\| \leq \liminf_n \|\mu_n\| = \|\mu\|$, dunque $\lambda = |\mu|$. $\square$

Lemma 3.2.7 *Supponiamo che $\mu_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} \mu$ e che $T\mu_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} \tau$. Allora $\|\mu\| \leq \|\tau\|$ e, se E è strettamente convesso, l'uguaglianza vale se e solo se $\tau = T\mu$.*

Dimostrazione. Si ha che:

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{\phi \in C_0(\Omega,\mathbb{R}) \\ |\phi| \leq 1}} \int_\Omega \phi(x)\ \mathrm{d}|\mu|\ ,$$

$$\|\tau\| = \sup_{\substack{\psi \in C_0(\Omega \times S_E,\mathbb{R}) \\ |\psi| \leq 1}} \int_{\Omega \times S_E} \psi(x,y)\ \mathrm{d}|\tau|\ .$$

Dal momento che per ogni $\phi \in C_0(\Omega \times S_E, \mathbb{R})$ si può ottenere una $\psi \in C_0(\Omega, \mathbb{R})$ tale che $\psi(x,y) = \phi(x)$, si ha una naturale inclusione delle funzioni test di μ in quelle di τ. Ne segue che $\|\mu\| \leq \|\tau\|$.

Rimane da dimostrare che se E è strettamente convesso l'uguaglianza vale se e solo se $\tau = T\mu$. Infatti, supponiamo che

$$\int_{\Omega \times S_E} \psi(x,y)\ \mathrm{d}\tau(x,y) = \int_{\Omega \times S_E} \psi(x,y)\ \mathrm{d}T\mu(x,y) \qquad \forall \psi \in C_0(\Omega \times S_E, \mathbb{R})\ .$$

Dal teorema di disintegrazione e dalla definizione di $T\mu$ si ottiene che

$$\int_\Omega \left(\int_{S_E} \psi(x,y)\ \mathrm{d}\lambda_x(y) \right) \mathrm{d}|\mu|(x) = \int_\Omega \psi(x, \nu_\mu(x))\ \mathrm{d}|\mu|(x) \quad \forall \psi \in C_0(\Omega \times S_E, \mathbb{R})\ ,$$

dove la famiglia di misure $\{\lambda_x\}$ è data da $\frac{\mathrm{d}\tau(x,y)}{\mathrm{d}x}$. Dovremo quindi avere che

$$\int_{S_E} \psi(x,y)\ \mathrm{d}\lambda_x(y) = \psi(x, \nu_\mu(x)) \qquad \text{per } |\mu|\text{-q.o. } x \in \Omega\ .$$

In particolare, per $\psi(x,y) = y_i$ con $i \in \{1..k\}$, dove k è la dimensione di E, si ottiene

$$\int_{S_E} y\ \mathrm{d}\lambda_x(y) = \nu_\mu(x) \qquad \text{per } |\mu|\text{-q.o. } x \in \Omega\ . \tag{3.4}$$

Se non fosse $\lambda_x = \delta_{\nu_\mu(x)}$, si avrebbe

$$\int_{S_E} y\ \mathrm{d}\lambda_x(y) = \nu_\mu(x)|\lambda_x|(\nu_\mu(x)) + \int_{S_E \setminus \{\nu_\mu(x)\}} y\ \mathrm{d}\lambda_x(y)\ ,$$

con $|\lambda_x|(S_E \setminus \{\nu_\mu(x)\}) > 0$. Detto L il funzionale lineare su E che ad ogni y associa la componente del vettore y lungo $\nu_\mu(x)$, per la stretta convessità di E abbiamo che

$$L(y) < 1 \qquad \forall y \in S_E \setminus \{\nu_\mu(x)\}\ ,$$

da cui, ricordando che $|\lambda_x|(\nu_\mu(x)) + |\lambda_x|(S_E \setminus \{\nu_\mu(x)\}) = 1$,

$$\begin{aligned} L\Big(\int_{S_E} y \, \mathrm{d}\lambda_x(y)\Big) =& L\Big(\nu_\mu(x)|\lambda_x|(\nu_\mu(x)) + \int_{S_E\setminus\{\nu_\mu(x)\}} y \, \mathrm{d}\lambda_x(y)\Big) = \\ =& |\lambda_x|(\nu_\mu(x)) + \int_{S_E\setminus\{\nu_\mu(x)\}} L(y) \, \mathrm{d}\lambda_x(y) < \\ <& |\lambda_x|(\nu_\mu(x)) + |\lambda_x|(S_E \setminus \{\nu_\mu(x)\}) = 1 \ . \end{aligned}$$

Ma per la (3.4) deve essere

$$L\Big(\int_{S_E} y \, \mathrm{d}\lambda_x(y)\Big) = 1 \ ,$$

quindi $\lambda_x = \delta_{\nu_\mu(x)}$ per $|\mu|$-q.o. $x \in \Omega$. $\square$

Lemma 3.2.8 *Sia E strettamente convesso. Se $\mu_n \to \mu$ in variazione, allora $T\mu_n \to T\mu$ in variazione.*

Dimostrazione. A meno di sottosuccessioni si ha che $T\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \tau$, quindi per la proposizione 3.2.4

$$\|\mu\| = \liminf_{n\to\infty} \|\mu_n\| = \liminf_{n\to\infty} \|T\mu_n\| \geq \|\tau\| \ ,$$

ma per il lemma 3.2.7 $\|\mu\| \leq \|\tau\|$, quindi $\|\mu\| = \|\tau\|$. Sempre per il lemma 3.2.7, $\tau = T\mu$ e $T\mu_n \to T\mu$ in variazione. $\square$

Lemma 3.2.9 *Sia μ_n una successione di misure in $\mathcal{M}(\Omega, E)$ che converge in variazione a μ. Allora si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu_n = \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu \ ,$$

per ogni funzione $\phi : \Omega \to E'$ continua e limitata.

Dimostrazione. Per ogni ε, sia $K_\varepsilon \subset \Omega$ un compatto tale che $|\mu(\Omega \setminus K_\varepsilon)| < \varepsilon$ e $\psi_\varepsilon \in C_0(\Omega, E')$ una funzione a valori in $[0, 1]$ e uguale a 1 su K_ε. Di conseguenza si avrà

$$\int_\Omega \psi_\varepsilon \, \mathrm{d}|\mu| > \|\mu\| - \varepsilon \ .$$

Allora, se C è una costante tale che $|\phi| < C$, abbiamo che

$$\Big|\int_\Omega (1 - \psi_\varepsilon)\phi \, \mathrm{d}\mu_n\Big| < C\Big(\|\mu_n\| - \int_\Omega \psi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu_n\Big) \ ,$$

e

$$\left| \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu_n - \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_\Omega \psi_\varepsilon \phi \, \mathrm{d}\mu_n - \int_\Omega \psi_\varepsilon \phi \, \mathrm{d}\mu \right| + \left| \int_\Omega (1-\psi_\varepsilon)\phi \, \mathrm{d}\mu_n - \int_\Omega (1-\psi_\varepsilon)\phi \, \mathrm{d}\mu \right| ,$$

quindi

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu_n - \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu \right| \leq 2C\left(\|\mu\| - \int_\Omega \psi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu \right) < 2C\varepsilon \ .$$

Facendo tendere ε a zero si ottiene la tesi. □

Dimostrazione del teorema 3.2.1. Per i lemmi 3.2.6 e 3.2.8, se $\mu_n \to \mu$ in variazione, anche $T\mu_n \to T\mu$ in variazione. Inoltre, per il lemma 3.2.9

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\times S_E} f(x,y) \, \mathrm{d}T\mu_n(x,y) = \int_{\Omega\times S_E} f(x,y) \, \mathrm{d}T\mu(x,y) \ .$$

In definitiva

$$\lim_{n\to\infty} F(\mu_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x,\nu_{\mu_n}(x)) \, \mathrm{d}|\mu_n|(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\times S_E} f(x,y) \, \mathrm{d}T\mu_n(x,y) =$$

$$= \int_{\Omega\times S_E} f(x,y) \, \mathrm{d}T\mu(x,y) = \int_\Omega f(x,\nu_\mu(x)) \, \mathrm{d}|\mu|(x) = F(\mu) \ ,$$

ed il teorema è dimostrato. □

3.3 Il teorema di esistenza

Vediamo ora come dal teorema 3.2.1 è possibile ottenere un risultato di esistenza per il problema di Newton in forma parametrica nella classe (3.2) e nella classe (3.3). Come già anticipato, anche qui useremo il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni, quindi abbiamo bisogno del seguente lemma di compattezza:

Lemma 3.3.1 *Le classi $\Gamma_{A,Q}$ e $\Gamma_{V,Q}$ sono compatte nella convergenza in variazione.*

La dimostrazione richiede, a sua volta, alcuni lemmi:

Lemma 3.3.2 *Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ due convessi n-dimensionali, con $A \subset B$. Allora $H^{n-1}(\partial A) \leq H^{n-1}(\partial B)$ e l'uguaglianza vale se e solo se $A = B$.*

Dimostrazione. Sia $P : \partial B \to \partial A$ la proiezione sul convesso $\overline{A}$, che manda ogni punto di ∂B nel punto di ∂A di minima distanza. É noto che (vedere ad esempio Brezis [3], proposizione V.3), che P è lipschitziana di costante 1. Per le proprietà delle misure di Hausdorff (vedere ad esempio Rogers [31], teorema 29), otttteniamo la disuguaglianza

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial A) = \mathcal{H}^{n-1}(P(\partial B)) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial B) \ .$$

Infine, se per assurdo fosse $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B)$ e $A \neq B$, si potrebbe trovare un iperpiano S tangente ad A tale che, indicando con S^+ il semispazio delimitato da S e contenente A, si avrebbe

$$B \setminus S^+ \neq \emptyset \ .$$

É facile vedere che $B \setminus S$ contiene un aperto, così che

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(\partial A) \leq & \mathcal{H}^{n-1}\left(\partial(B \cap S^+)\right) = \\ = & \mathcal{H}^{n-1}(\partial B) - \mathcal{H}^{n-1}\left(\partial B \setminus S^+\right) + \mathcal{H}^{n-1}(S \cap B) < \mathcal{H}^{n-1}(\partial B) \ , \end{aligned}$$

mentre si era supposto $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B)$. □

Lemma 3.3.3 *Siano $E_h, E \subset \mathbb{R}^n$ convessi limitati, con $E_h \to E$ in $L^1(\Omega)$. Allora si ha che $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E_h) \to \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$.*

Dimostrazione. La tesi è banalmente verificata nel caso che E sia di dimensione inferiore a n, quindi basta esaminare il caso $\dim_{\mathcal{H}} E = n$. Dalla convergenza in $L^1(\Omega)$ di E_h ad E segue che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_\varepsilon : h > h_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad E_h \subset E + B(0, \varepsilon) \ .$$

Quindi, dal lemma 3.3.2, otteniamo, per $h > h_\varepsilon$,

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial E_h) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial(E + B(0, \varepsilon))) \ ,$$

passando al limite

$$\limsup_{h \to \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_h) \leq \limsup_{h \to \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial(E + B(0, \varepsilon))) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E) \ ,$$

ma, per il lemma di Fatou,

$$\liminf_{h \to \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_h) \geq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E) \ ,$$

e la dimostrazione è completa. □

Dimostrazione del lemma 3.3.1. Poniamo

$$C_Q = \{E \text{ convesso} : E \subset Q\} ,$$

e analogamente

$$\Gamma_Q = \{\mu \in \mathcal{M}(Q, \mathbb{R}^{n+1}) : \mu = D\chi_E,\ E \in C_Q\} ,$$

Sia E un generico elemento di C_Q. Abbiamo, per la formula di coarea (1.9.7) e per il lemma 3.3.2,

$$\begin{aligned} |D\chi_E|(Q) = \int_0^1 P(\{\chi_E > t\}, Q)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)\ \mathrm{d}t = \\ = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial Q) \ , \end{aligned}$$

e quindi la classe C_Q forma un insieme limitato di $BV(Q)$, mentre Γ_Q è limitata in $\mathcal{M}(Q, \mathbb{R}^{n+1})$. Presa una successione E_n di convessi contenuti in Q, possiamo dunque supporre a meno di sottosuccessioni che $D\chi_{E_n} \overset{*}{\rightharpoonup} D\chi_E$ e, grazie al teorema di compattezza per funzioni BV 1.9.5, che $E_n \to E$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(Q)$. Visto che Q è limitato, ne segue la convergenza $L^1(Q)$. Ma per il lemma 3.3.3 e la formula di coarea,

$$\lim_{h\to\infty} |D\chi_{E_n}|(\Omega) = \lim_{h\to\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_n) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E) = |D\chi_E|(\Omega) ,$$

e quindi abbiamo la compattezza rispetto alla convergenza in variazione per la classe Γ_Q. Dal momento che le classi $\Gamma_{A,Q}$ e $\Gamma_{V,Q}$ sono chiuse rispetto alla convergenza in variazione, ne segue che anch'esse sono compatte. □

Siamo ora pronti a dimostrare il teorema di esistenza:

Teorema 3.3.4 *Sia $f : \Omega \times S^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Per ogni convesso $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ poniamo*

$$F(E) = \int_{\partial E} f(x, \nu(x))\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} .$$

Allora i problemi di minimo

$$\min_{E\in C_{A,Q}} F(E) \qquad e \qquad \min_{E\in C_{V,Q}} F(E) , \tag{3.5}$$

ammettono almeno una soluzione.

Dimostrazione. Segue direttamente dal lemma 3.3.1, che fornisce la compattezza delle classi $\Gamma_{A,Q}$ e $\Gamma_{V,Q}$, e dal teorema 3.2.1, che assicura la continuità del funzionale. Si ha inoltre che $F(E) > 0$ per ogni $E \in \Gamma_{A,Q}$ e ogni $E \in \Gamma_{V,Q}$, quindi i minimi sono non banali. □

3.4 Ottimizzazione rispetto alla sezione

In questa sezione ci occupiamo di trovare, sotto opportuni vincoli, la forma ottimale dell'aperto Ω per cui la corrispondente soluzione del problema di Newton nella classe C_M offra la minima resistenza. Vedremo che per dimostrare il teorema di esistenza sarà conveniente utilizzare l'impostazione parametrica vista nelle sezioni precedenti.

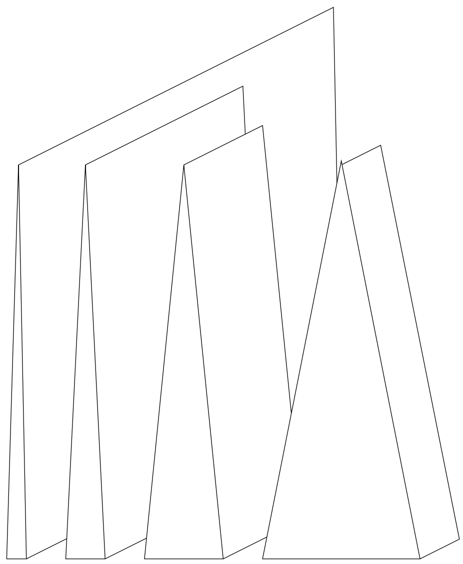
Per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convesso possiamo risolvere il problema di Newton associato a Ω nella classe C_M. Per quanto dimostrato nel capitolo 2 sappiamo che questo problema ammette almeno una soluzione in questa classe. Indichiamo con R_Ω il minimo del funzionale in questa classe. Ci chiediamo ora se abbia senso cercare di minimizzare R_Ω in funzione di Ω. È chiaro che il problema, così come è stato enunciato finora, è banalmente risolto dall'insieme vuoto, che fornisce resistenza nulla. Per dare un senso al discorso imponiamo dunque che gli insiemi Ω ammissibili soddisfino il vincolo di area $|\Omega| \geq A$. Questa condizione, tuttavia, si vede che non è sufficiente a garantire l'esistenza del minimo, in quanto è possibile costruire successioni minimizzanti nel seguente modo: su una successione di rettangoli Ω_h, di area A fissata e aventi un lato di lunghezza h, si costruiscono delle funzioni a "cuneo" u_h, in modo che la "lama" sia disposta lungo il lato maggiore (figura 3.1).

Per ogni h la resistenza vale

$$F(u_h) = A\frac{1}{1+\left(\frac{2Mh}{A}\right)^2} \ ,$$

e quindi, per $h \to \infty$

Figura 3.1:



$$\lim_{h\to\infty} F(u_h) = 0 \ ,$$

il che prova che non esiste, senza imporre ulteriori vincoli, la sezione di base Ω ottimale. Sia dunque $Q \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato che contenga almeno un convesso Ω di misura positiva. Consideriamo la classe

$$S_A = \{\Omega \subset Q : \Omega \text{ convesso}, |\Omega| \geq A\} \ .$$

Vediamo che in questa classe abbiamo l'esistenza di un Ω ottimale.

Teorema 3.4.1 *Il problema*

$$\min_{\Omega\in S_A} R_\Omega \ ,$$

ammette almeno una soluzione. Inoltre, se Ω_{opt} è una soluzione, $|\Omega_{opt}| = A$.

Dimostrazione. Per ogni $\Omega \in S_A$ sia u_Ω una soluzione del problema di Newton nella classe C_M, e indichiamo con E_Ω il sottografico di u. La classe di convessi $\{E_\Omega : \Omega \in S_A\}$ è chiusa e contenuta in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in Q,\ y \in [0, M]\}$ quindi, per il lemma 3.3.1, è compatto rispetto alla convergenza in variazione. Presa una successione minimizzante u_h, possiamo supporre, a meno di sottosuccessioni, che $E_{\Omega_h} \to E_{\Omega_{\rm opt}}$ e quindi che $\Omega_h \to \Omega_{\rm opt}$. Per ogni aperto $\Omega' \subset\subset \Omega_{\rm opt}$, le restrizioni a Ω' delle u_h formeranno definitivamente una successione di funzioni concave, quindi per il lemma 2.3.2 a meno di sottosuccessioni possiamo supporre che $u_h \to u$ in $W^{1,p}_{\rm loc}(\Omega)$. L'esistenza del minimo segue dal teorema 2.3.1.

Inoltre, se si avesse $|\Omega_{\rm opt}| > A$, allora si potrebbe trovare un profilo di resistenza inferiore considerando la restrizione del profilo ottimale su Ω ad un qualsiasi convesso $\Omega' \subset \Omega_{\rm opt}$, con $A < |\Omega'| < |\Omega_{\rm opt}|$. $\square$

Osservazione 3.4.2. Nella proposizione 3.4.1 l'ipotesi di convessità delle sezioni di base Ω non è facilmente eliminabile come nel teorema 2.3.1, in quanto si sfrutta la compattezza della classe dei convessi, che non si ha per insiemi generici.

Osservazione 3.4.3. Si può restringere ulteriormente S_A, aggiungendo il vincolo che tutti i convessi della classe contengano un insieme fissato C, con $|C| \leq A$. In tal caso si ottiene un risultato analogo al teorema 3.4.1 per la classe

$$S_{A,C} = \{\Omega \in S_A : \ \Omega \supset C\} \ .$$

Capitolo 4

Proprietà dei profili ottimali

In questo capitolo studieremo la forma delle soluzioni del problema di Newton nella classe C_M. La discussione partirà dal caso radiale, storicamente risolto per primo. Vedremo poi che alcune proprietà del profilo radiale ottimale si generalizzano del tutto o parzialmente a domini qualsiasi.

Infine si vedrà che se Ω è un cerchio allora la soluzione radiale non coincide con quella nella classe C_M: un esempio di funzione concava di resistenza inferiore al minimo radiale fornirà la dimostrazione di questo fatto. Da questo seguirà immediatamente anche la non unicità del minimo.

4.1 Il caso radiale

Consideriamo ora il caso in cui Ω sia la palla unitaria $B(0, R)$ e cerchiamo il minimo del funzionale (2.1) tra le funzioni della forma $u(|x|)$ con u decrescente come funzione di $|x|$. L'esistenza del minimo in questa classe è stata dimostrata per la prima volta da Kneser [19], anche se la formula esplicita della soluzione era già stata congetturata dallo stesso Newton (vedere ad esempio Goldstine [15] o Tonelli [34]). Noi seguiremo la dimostrazione di Marcellini [21], che ha il vantaggio di garantire la concavità del minimo e la validità dell'equazione di Eulero. Si procede scrivendo il funzionale in coordinate polari:

$$F(u) = 2\pi \int_0^R \frac{r}{1 + |u'(r)|^2} \, \mathrm{d}r \ ,$$

il problema allora diventa:

$$\min \left\{ \int_0^R \frac{r}{1 + |u'(r)|^2} \, \mathrm{d}r : u \text{ decrescente, } 0 \leq u \leq M \right\} . \tag{4.1}$$

Utilizzando le funzioni $v(t) = u^{-1}(M-t)$, il problema (4.1) può essere riscritto nella forma classica:

$$\min \left\{ \int_0^M \frac{vv'^3}{1+v'^2}\, \mathrm{d}r : v \text{ crescente}, \ v(0)=0, v(M)=R \right\} . \tag{4.2}$$

Osserviamo inoltre che il funzionale (4.1) è definito per qualsiasi funzione decrescente, anche se discontinua, come

$$\int_0^R \frac{r}{1+u_a'^2}\, \mathrm{d}r \ ,$$

dove u_a' è la parte assolutamente continua della misura u', rispetto alla misura di Lebesgue; analogamente, in (4.2) una generica funzione crescente v dà il valore

$$\int_0^M \frac{vv_a'^3}{1+v_a'^2}\, \mathrm{d}r + \int_{[0,M]} v\, \mathrm{d}v'_s \tag{4.3}$$

dove v_s' è la parte singolare della misura v' rispetto alla misura di Lebesgue e il secondo integrale del primo membro va interpretato nel senso di BV. Si vede facilmente che per ogni v crescente la funzione

$$\tilde{v}(r) = \|v'_s\| + \int_0^r v'_a\, \mathrm{d}r \tag{4.4}$$

offre una resistenza inferiore, quindi è sufficiente restringere la ricerca del minimo allo spazio delle funzioni crescenti aventi al più un salto nell'origine. In tal caso, posto $r_0 = \liminf_{r\to 0^+} v(r) = \|v'_s\|$, la 4.4 vale

$$\frac{r_0^2}{2} - \int_0^M \frac{vv'_a}{1+v_a'^2}\, \mathrm{d}r \ .$$

In generale, dato un funzionale

$$F(v) = \int_a^b f(x,u,u')\, \mathrm{d}x \ ,$$

definito sullo spazio

$$\mathcal{W}_p = \left\{ u \in W^{1,p}(a,b) : \ u(a) \geq A, \ u(b) \leq B, \ u' \geq 0 \text{ q.o.} \right\} ,$$

stabiliremo l'esistenza del minimo per il funzionale

$$\overline{F}(u) = \inf_{\{u_k\}} \left\{ \liminf_{k\to\infty} F(u_k) : \{u_k\} \subset \mathcal{W}_p, \ u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}_{\mathrm{loc}} \right\} ,$$

definito sulla chiusura di $\mathcal{W}_p$ (nella topologia forte o debole indifferentemente)

$$\overline{\mathcal{W}}_p = \left\{ u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(a,b) : \ u(a) \geq A, \ u(b) \leq B, \ u' \geq 0 \text{ q.o.} \right\} .$$

A tale scopo, citiamo il seguente teorema di rappresentazione (si veda [2], teorema 2.4):

Teorema 4.1.1 *Sia $f(x,s,\xi)$ una funzione di Carathéodory, convessa in $\xi \geq 0$ e tale che soddisfi le seguenti ipotesi:*

Esistono $K \geq 0$, funzioni convesse $h(\xi)$, $a(x,s)$ e $b(x,s)$ tali che, per ogni $x \in [a,b]$, $s \in \mathbb{R}$ e $\xi \geq 0$

$$a(x,s)h(\xi) - K \leq f(x,s,\xi) \leq a(x,s)h(\xi) + b(x,s) \tag{4.5a}$$

$$h(\xi) \geq 0 \tag{4.5b}$$

$$a(x,s) \geq 0 \ . \tag{4.5c}$$

Allora, per ogni $u \in \overline{\mathcal{W}}_p$,

$$\overline{F}(u) = \int_a^b f(x,u,u') \, \mathrm{d}x + \tilde{h} \left\{ \int_A^{u(a)} a(a,s) \, \mathrm{d}s + \int_{u(b)}^{B} a(b,s) \, \mathrm{d}s \right\} , \tag{4.6}$$

dove $\tilde{h}(\xi) = \lim\limits_{\xi \to \infty} \dfrac{h(\xi)}{\xi}$.

Diamo ora un risultato di esistenza per il problema

$$\min \left\{ \overline{F}(u) : u \in \overline{\mathcal{W}}_p \right\} . \tag{4.7}$$

Sottolineiamo che non ci sono ipotesi di convessità o coercività su f.

Teorema 4.1.2 *Sia $f(x,s,\xi)$ una funzione che soddisfa le (4.5) e tale che:*

i) *f^{**} ammetta derivate parziali continue f^{**}_s, $f^{**}_{\xi x}$, $f^{**}_{\xi s}$.*

ii) *La funzione convessa $h(\xi)$ in (4.5) sia definita per ogni $\xi \in \mathbb{R}$.*

iii) *Esista un esponente $p \geq 1$, una funzione $M : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e una costante positiva L tale che, per ogni $\delta, r > 0$:*

$$|f^{**}_s(x,s,\xi)| \leq M(\delta,r)(1+|\xi|^p) \quad \forall (x,s,\xi) \in [a+\delta, b-\delta] \times [-r,r] \times \mathbb{R} \tag{4.8a}$$

$$h(\xi) \leq L(1+|\xi|^p) \ . \tag{4.8b}$$

Supponiamo inoltre che per ogni $(x,s) \in (a,b) \times \mathbb{R}$ e $\xi \geq 0$ la funzione

$$\varphi(x,s,\xi) = f^{**}_s - f^{**}_{\xi x} - \xi f^{**}_{\xi s} \ , \tag{4.9}$$

abbia un segno ben definito ($\varphi \geq 0$ o $\varphi \leq 0$). Allora il problema (4.7) ha una soluzione u_0 che appartiene a $W^{1,p}_{\text{loc}}(a,b)$ e soddisfa la stima

$$|u_0'(x)| \leq \frac{2}{\delta} \max\{|A|,|B|\} \qquad \forall x \in [a+\delta, b-\delta] \quad \forall \delta \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right) \ . \tag{4.10}$$

Inoltre, se $\varphi \geq 0$*, allora* u_0 *assume il valore al contorno* $u_0(a) = A$ *mentre se* $\varphi \leq 0$*, allora* $u_0(b) = B$*.*

Infine, se $\tilde{h}(\xi) = \lim_{\xi\to\infty} \frac{h(\xi)}{\xi} = +\infty$ *(e* $a(x,\cdot)$ *è positiva q.o. per* $x = a$ *e* $x = b$*) allora si ha contemporaneamente* $u_0(a) = A$*,* $u_0(b) = B$ *e* u_0 *minimizza anche* F*.*

Osservazione 4.1.3. Se f é della forma

$$f(x,s) = a(x,s)g(\xi) + b(x,s) \ , \tag{4.11}$$

(o, nel caso di f generale, se ξ_0 definito sotto non dipende da x,s) allora l'ipotesi che φ in (4.9) abbia un segno ben definito può essere sostituita dalla condizione che

$$\varphi_0(x,s,\xi) = f_s - f_{\xi x} - \xi f_{\xi s} \ ,$$

abbia un segno ben definito. In effetti, se $f(x,s,\xi) > f^{**}(x,s,\xi)$, poichè f^{**} è lineare in ξ in un intorno $\mathcal{U}$ di (x,s,ξ), esiste ξ_0 tale che

$$f^{**}(x,s,\xi) = f(x,s,\xi) + f_\xi(x,s,\xi)(\xi - \xi_0) \qquad \forall (x,s,\xi) \in \mathcal{U} \ .$$

In $\mathcal{U}$ allora abbiamo

$$\begin{aligned}\varphi(x,s,\xi) =& f_s^{**} - f_{\xi x}^{**} - \xi f_{\xi s}^{**} = \\ =& f_s(x,s,\xi_0) + f_{\xi s}(x,s,\xi_0)(\xi - \xi_0) - f_{\xi x}(x,s,\xi_0) - \xi f_{\xi s}(x,s,\xi_0) = \\ =& \varphi_0(x,s,\xi_0) \ .\end{aligned}$$

Notiamo inoltre che se $f(x,s,\xi)$ è della forma (4.11) allora nel teorema 4.1.2 è sufficiente supporre che $g(\xi)$, $a(x,s)$, $b(x,s)$ siano funzioni di classe C^1.

Per dimostrare il teorema 4.1.2 utilizzeremo un metodo sviluppato da Botteron & Marcellini [2] per il caso convesso. La condizione in (4.9) che φ abbia un segno ben definito é simile all'ipotesi considerata per la prima volta da Raymond (si vedano i teoremi 3.3 e 6.11 in [26]).

Dimostrazione del teorema 4.1.2. In primo luogo estendiamo f^{**} per $\xi < 0$ con

$$f^{**}(x,s,\xi) = f^{**}(x,s,0) + f^{**}(x,s,0)\xi \qquad \xi < 0 \ .$$

In questo modo, come nell'osservazione 4.1.3 (sostituendo f^{**} a f), possiamo vedere che la condizione che $\varphi(x,s,\xi)$ in (4.9) abbia un segno definito è soddisfatta anche per $\xi < 0$ e quindi per ogni (x,s,ξ). Per ogni $\varepsilon \in (0,1]$ e $k > 0$ introduciamo le notazioni

$$g^{\varepsilon,k}(x,s,\xi) = \alpha_k * f^{**}(x,s,\xi) + k(\xi^-)^q + \varepsilon(1+\varepsilon^2)^{\frac{q}{2}} \ , \tag{4.12}$$

dove $q = \max\{p,3\}$, $\xi^- = -\min\{\xi,0\}$, $\alpha(\xi)$ è un mollificatore positivo a supporto compatto in $[-1,1]$ e infine $\alpha_k(\xi) = k\alpha(k\xi)$. Il problema

$$\min\left\{ G^{\varepsilon,k}(u) = \int_a^b g^{\varepsilon,k}(x,u,u')\ \mathrm{d}x : u \in W^{1,q}(a,b),\ u(a)=A,\ u(b)=B \right\}\ ,$$

ha una soluzione $u_{\varepsilon,k} \in W^{1,q}(a,b)$. Usando le proprietà di regolarità di $u_{\varepsilon,k}$ del lemma 4.5, poichè $u_{\varepsilon,k} \in C^2$, posiamo scrivere l'equazione di Eulero nella forma

$$g^{\varepsilon,k}_{\xi\xi} u''_{\varepsilon,k} = g^{\varepsilon,k}_{s} - \left(g^{\varepsilon,k}_{\xi x} + g^{\varepsilon,k}_{\xi s} u'_{\varepsilon,k} \right) = \alpha_k * f^{**}_s - \left(\alpha_k * f^{**}_{\xi x} + u'_{\varepsilon,k}\alpha_k * f^{**}_{\xi s} \right)\ .$$

Se poniamo $L(r) = \sup\left\{ \left| f^{**}_{\xi s}(x,s,\xi) \right| : x \in [a,b],\ \left|s\right| \le r,\ \left|\xi\right| \le r \right\}$, allora, per tali valori di x, s, ξ abbiamo

$$\begin{aligned}
&\left| \xi\alpha_k * f^{**}_{\xi s} - \alpha_k * (\xi f^{**}_{\xi s}) \right| = \\
&\qquad = \left| \xi \int_{\mathbb{R}} \alpha_k(t) f^{**}_{\xi s}(x,s,\xi - t)\ \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} \alpha_k(t)(\xi - t) f^{**}_{\xi s}(x,s,\xi - t)\ \mathrm{d}t \right| \le \\
&\qquad \le L(r+1) \int_{\mathbb{R}} \alpha_k(t)|t|\ \mathrm{d}t = \frac{L(r+1)}{k} \int_{\mathbb{R}} \alpha(t)|t|\ \mathrm{d}t \le \\
&\qquad \le \frac{L(r+1)}{k} \int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\ \mathrm{d}t = \frac{L(r+1)}{k}\ .
\end{aligned}$$

Per $r \ge \sup\limits_{k>0} \left\{ \left\| u'_{\varepsilon,k} \right\|_{L^\infty(a,b)}, \left\| u_{\varepsilon,k} \right\|_{L^\infty(a,b)} \right\}$ otteniamo

$$\left| g^{\varepsilon,k}_{\xi\xi} u''_{\varepsilon,k} - \alpha_k * \left(f^{**}_s - f^{**}_{\xi x} - u'_{\varepsilon,k} f^{**}_{\xi s} \right) \right| \le \frac{L(r+1)}{k}\ . \tag{4.13}$$

Introduciamo per ora l'ulteriore ipotesi che $\varphi(x,s,\xi)$ in (4.9) abbia un segno strettamente definito per ogni x, s, ξ. Per l'addendo $\varepsilon(1+\xi^2)^{\frac{q}{2}}$ abbiamo $g^{\varepsilon,k}_{\xi\xi} > 0$. Poichè α_k è un mollificatore positivo e $\|u'_{\varepsilon,k}\|_{L^\infty(a,b)}$, $\|u_{\varepsilon,k}\|$ sono limitate uniformemente in k, per k sufficientemente grande il segno di $u''_{\varepsilon,k}$ in (4.13) è lo stesso di $\varphi(x, u_{\varepsilon,k}, u'_{\varepsilon,k}) = f^{**}_s - f^{**}_{\xi x} - u'_{\varepsilon,k} f^{**}_{\xi s}$. Quindi $u_{\varepsilon,k}$ è o convessa o concava in $[a,b]$.

Consideriamo il caso $\varphi > 0$, che corrisponde a $u_{\varepsilon,k}$ convessa. Poichè il rapporto incrementale di $u_{\varepsilon,k}$ è crescente, per ogni $x \in (a,b)$ abbiamo

$$\frac{u_{\varepsilon,k}(a) - u_{\varepsilon,k}(x)}{a-x} \le u'_{\varepsilon,k}(x) \le \frac{u_{\varepsilon,k}(b) - u_{\varepsilon,k}(x)}{b-x} \ .$$

Ora, se $a+\delta \le x \le b-\delta$, con $\delta \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ otteniamo

$$|u'_{\varepsilon,k}(x)| \le \frac{2}{\delta} \|u_{\varepsilon,k}\|_{L^\infty(a,b)} \qquad \forall x \in [a+\delta, b-\delta] \ . \tag{4.14}$$

Per $\varepsilon \in (0,1]$ fissato $u_{\varepsilon,k}$ è limitato in $W^{1,\infty}(a,b)$ uniformemente in k (si veda lemma 4.1.4, qui è sufficiente sapere che $u_{\varepsilon,k}$ è limitato in $W^{1,q}(a,b)$; per $k \to \infty$, a meno di sottosuccessioni $u_{\varepsilon,k}$ converge ad una funzione u_ε nella topologia debole* di $W^{1,\infty}(a,b)$ e nella topologia forte di $L^\infty(a,b)$. Quindi, per la (4.14) e per la semicontinuità inferiore di $k \to \|u'_{\varepsilon,k}\|_{L^\infty_{a+\delta,b-\delta}}$

$$\left|u'_{\varepsilon,k}(x)\right| \le \frac{2}{\delta} \left\|u_{\varepsilon,k}\right\|_{L^\infty(a,b)} \qquad \forall x \in [a+\delta, b-\delta] \quad \forall \delta \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right) \ . \tag{4.15}$$

Poichè, come risulterà da (4.22), $k\|[u'_{\varepsilon,k}]^-\|^q_{L^q(a,b)}$ è limitato, $u'_{\varepsilon,k} \to 0$ fortemente in $L^q(a,b)$ e quindi $u_\varepsilon \ge 0$ q.o. in $[a,b]$. Ne segue che u_ε è crescente in $[a,b]$ e limitata in $L^\infty(a,b)$ indipendentemente da ε, in quanto $A = u_\varepsilon(a) \le u_\varepsilon(x) \le u_\varepsilon(b) = B$ per ogni $x \in [a,b]$.

Per la (4.15), per $\varepsilon \to 0$, a meno di sottosuccessioni $u_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u_0$ in $W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(a,b)$ per qualche $u_0 \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(a,b)$ che soddisfa la stima (4.10). Dimostriamo che u_0 è il punto di minimo che stiamo cercando, prima facendo vedere che u_ε è soluzione del problema

$$\min \left\{ \int_a^b g^\varepsilon(x,u,u')\ \mathrm{d}x : u \in W^{1,q}(a,b),\ u(a) = A,\ u(b) = B,\ u' \ge 0 \text{ q.o.} \right\} \ , \tag{4.16}$$

dove

$$g^\varepsilon(x,s,\xi) = f^{**}(x,s,\xi) + \varepsilon(1+\xi^2)^{\frac{q}{2}} \ .$$

In effetti, visto che $u'_{\varepsilon,k}$ è limitata in $L^\infty(a+\delta, b-\delta)$ uniformemente in k e che $\alpha_k * f^{**}$ converge a f^{**} uniformemente sui compatti di $[a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, abbiamo

$$\lim_{k\to\infty} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left\{ \alpha_k * f^{**}(x, u_{\varepsilon,k}, u'_{\varepsilon,k}) - f^{**}(x, u_{\varepsilon,k}, u'_{\varepsilon,k}) \right\} \mathrm{d}x = 0 \ .$$

Quindi, per semicontinuità inferiore dell'integrale, per ogni $v \in W^{1,q}(a,b)$ tale che $v(a) = A$, $v(b) = B$ e $v' \geq 0$ q.o. in $[a,b]$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{a+\delta}^{b-\delta} g^{\varepsilon}(x, u_{\varepsilon}, u'_{\varepsilon})\ \mathrm{d}x &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_{a+\delta}^{b-\delta} g^{\varepsilon}(x, u_{\varepsilon,k}, u'_{\varepsilon,k})\ \mathrm{d}x = \\
&= \liminf_{k\to\infty} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left(\alpha_k * f^{**}(x, u_{\varepsilon,k}, u'_{\varepsilon,k}) + \varepsilon(1 + {u'_{\varepsilon,k}}^2)^{\frac{q}{2}}\right)\ \mathrm{d}x \leq \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} G^{\varepsilon,k}(u_{\varepsilon,k}) \leq \liminf_{k\to\infty} G^{\varepsilon,k}(v) = \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{a}^{b} \left(\alpha_k * f^{**}(x, v, v') + \varepsilon(1 + {v'}^2)^{\frac{q}{2}}\right)\ \mathrm{d}x = \\
&= \int_{a}^{b} g^{\varepsilon}(x, v, v')\ \mathrm{d}x\ .
\end{aligned}$$

Per $\delta \to 0$, dal teorema della convergenza monotona vediamo che u_{ε} è una soluzione di (4.16). Per ogni $u \in \overline{\mathcal{W}}_p$, analogamente a (4.1.3) definiamo

$$\overline{G}(u) = \inf_{\{u_k\}} \left\{ \liminf_{k\to\infty} \int_{a}^{b} f^{**}(x, u, u')\ \mathrm{d}x : \{u_k\} \subset \mathcal{W}_p,\ u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}_{\mathrm{loc}} \right\}\ .$$

Per il teorema 4.1.1 possiamo rappresentare $\overline{G}(u)$ nella forma:

$$\overline{G}(u) = \int_{a}^{b} f^{**}(x, u, u')\ \mathrm{d}x + \tilde{h}\left(\int_{A}^{u(a)} a(a,s)\ \mathrm{d}s + \int_{u(b)}^{B} a(b,s)\ \mathrm{d}s \right)\ . \tag{4.17}$$

Per la definizione di $\overline{G}$, per ogni $v \in \mathcal{W}_p = \mathcal{W}_p \cap W^{1,q}(a,b)$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\overline{G}(u_0) &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{b} f^{**}(x, u_{\varepsilon}, u'_{\varepsilon})\ \mathrm{d}x \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{b} g^{\varepsilon}(x, u_{\varepsilon}, u'_{\varepsilon})\ \mathrm{d}x \leq \\
&\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{b} g^{\varepsilon}(x, v, v')\ \mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f^{**}(x, v, v')\ \mathrm{d}x = \overline{G}(v)\ .
\end{aligned}$$

Quindi $\overline{G}(u_0) \leq \overline{G}(v)$ per ogni $v \in \mathcal{W}_q$. Di nuovo dalla definizione di $\overline{G}$ e dalla sua continuità in $W^{1,p}(a,b)$ otteniamo anche $\overline{G}(u_0) \leq \overline{G}(v)$ per ogni $v \in \overline{\mathcal{W}}_p$, quindi u_0 minimizza (4.17). Per avere che u_0 minimizza anche (4.6), basta mostrare che

$$f(x,u_0(x),u_0'(x)) = f^{**}(x,u_0(x),u_0'(x)) \qquad \text{q.o. in } [a,b] \ . \tag{4.18}$$

Poichè u_0 è o convessa o concava in $[a,b]$, l'insieme $I = \{x \in [a,b] : u_0'(x) = 0\}$ è un intervallo, su cui vale la (4.18), poichè $f(x,s,0) = f^{**}(x,s,0)$. Se, ad esempio, u_0 è concava in $[a,b]$ e $I = [a,b]$ per qualche $x_0 \in [a,b]$, allora $u_0'(x) \geq u_0'(x_1) > 0$ per ogni $x \leq x_1 < x_0$ e nell'insieme u_0 risolve l'equazione di Eulero in (a,x_1) nella forma debole e anche (si veda [26] teorema 1.10.1) nella forma:

$$f_\xi^{**}(x,u_0(x),u_0'(x)) = \int\limits_a^x f_s^{**}(t,u_0(t),u_0'(t))\ \mathrm{d}t + \mathrm{cost} \ . \tag{4.19}$$

Essendo $u_0'(x)$ monotona, è anche continua q.o. in (a,x_1). Supponiamo che in un punto $x \in (a,x_1)$ di continuità di $u_0'(x)$, si abbia

$$f(x,u_0(x),u_0'(x)) \neq f^{**}(x,u_0(x),u_0'(x)) \ .$$

Usando il fatto che f^{**} è lineare in un intorno di $\xi = u_0'(x)$, e quindi f_ξ^{**} è indipendente da ξ, derivando in x entrambi i membri di (4.19) si ottiene

$$f_{\xi x}^{**}(x,u_0(x),u_0'(x)) + u_0'(x) f_{\xi s}^{**}(x,u_0(x),u_0'(x)) = f_s^{**}(x,u_0(x),u_0'(x)) \ ,$$

ma questo contrasta con l'ipotesi che in (4.9) $\varphi \neq 0$ per $\xi > 0$, quindi vale la (4.18) e u_0 minimizza (4.6). Per quanto riguarda i valori al contorno di u_0, se il problema è coercivo, nel senso che $\tilde{h}(\xi) = \lim_{\xi\to\infty} = +\infty$ e $a(x,s)$ è positivo q.o. in $x = a$ e $x = b$, allora $\overline{F}(u_0) < +\infty$ implica che $u(a) = A$ e $u(b) = B$. Infine, se $\varphi > 0$ ($\varphi < 0$), u_ε è crescente e convessa (concava) in $[a,b]$ per ogni $\varepsilon > 0$, allora u_ε assume i valori al contorno $u_\varepsilon(a) = A$, $u_\varepsilon(b) = B$ e converge puntualmente a u_0 in (a,b). Allora u_0 assume almeno un valore al contorno grazie al lemma 4.1.5. La dimostrazione del teorema 4.1.2 è così completa sotto l'ipotesi supplementare che $\varphi(x,s,\xi)$ abbia un segno strettamente definito.

Nel caso generale si procede per approssimazione, ad esempio, attraverso l'integrando

$$f^\varepsilon(x,s,\xi) = f(x,s,\xi) + \varepsilon e^{\pm s}$$

dove $\varepsilon \in (0,1]$ e il segno $\pm$ è stato scelto in accordo con il segno di φ. Allora

$$\varphi_\varepsilon(x,s,\xi) = f_s^{**} - f_{\xi x}^{**} - \xi f_{\xi s}^{**} \pm \varepsilon e^{\pm s} = \varphi(x,s,\xi) \pm \varepsilon e^{\pm s} \ ,$$

ha un segno strettamente definito. Per la parte precedente della dimostrazione, per ogni ε esiste u_ε che minimizza il funzionale (4.6) con f sostituito da f^ε.

Il punto di minimo u_ε, o è convesso in $[a,b]$, se $\varphi \geq 0$, o è concavo se $\varphi \leq 0$, inoltre $A \leq u^\varepsilon(x) \leq B$ per ogni $x \in [a,b]$. Grazie al lemma 4.1.6 possiamo estrarre una sottosuccessione, che indicheremo ancora con u_ε, che converge a una funzione u_0 nella topologia forte di $W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(a,b)$. Il funzionale (4.6) è semicontinuo inferiormente nella topologia forte di $W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(a,b)$. Analogamente alla prima parte della dimostrazione, possiamo passare al limite per $\varepsilon \to 0$, ottenendo che u_0 è una soluzione del problema (4.6). $\square$

Dimostriamo ora i lemmi utilizzati nel corso della dimostrazione del teorema precedente:

Lemma 4.1.4 *Per ogni $\varepsilon \in (0,1]$ e $k > 0$ la funzione $u_{\varepsilon,k}$ è di classe $C^2[a,b]$ e soddisfa l'equazione di Eulero nella forma forte:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g^{\varepsilon,k}_\xi(x,u_{\varepsilon,k},u'_{\varepsilon,k})\right) = g^{\varepsilon,k}_s(x,u_{\varepsilon,k},u'_{\varepsilon,k}) \ . \tag{4.20}$$

Inoltre, per ogni $\varepsilon \in (0,1]$ fissato, $\|u'_{\varepsilon,k}\|_{L^\infty(a,b)}$ è uniformemente limitata in k.

Dimostrazione. Per le ipotesi (4.5a), (4.8b), per $|s| \leq r$ abbiamo

$$\begin{aligned} -K \leq f^{**}(x,s,\xi) \leq f(x,s,\xi) \leq \\ \leq a(x,s)(1+|\xi|^p) + b(x,s) \leq M(r)(1+|\xi|^p) \ , \end{aligned}$$

dove $M(r) = \max\left\{a(x,s) + |b(x,s)| : x \in [a,b], s \in [-r,r]\right\}$. Ne segue (vedere la formula 2.11 in [20]) che per qualche costante c_1 si ha

$$|f^{**}_\varepsilon(x,s\xi)| \leq c_1 M(r)(1+|\xi|^{p-1}) \qquad \forall (x,s,\xi) \quad |s| \leq r \ , \tag{4.21}$$

e quindi $g^{\varepsilon,k}$ in (4.12) soddisfa le condizioni naturali di crescita delle derivate $g^{\varepsilon,k}_\xi$ e $g^{\varepsilon,k}_s$ (prendendo in considerazione anche l'ipotesi (4.8)). Poichè $g^{\varepsilon,k} \in C^2$, per un argomento classico (vedere Morrey [26], teorema 1.10.1), $u_{\varepsilon,k} \in C^2$ e risolve l'equazione di Eulero (4.20). Per $\varepsilon > 0$ fissato $u_{\varepsilon,k}$ è limitata in $W^{1,q}(a,b)$ uniformemente in k; infatti, consideriamo la funzione $v(x)$ con pendenza costante $v' = \frac{B-A}{b-a}$. Poichè $[v']^- = 0$ e $\varepsilon \leq 1$, per (4.5), (4.8), (4.12) esistono costanti c_2, c_3 tali che

$$\begin{aligned} \varepsilon\left\|u'_{\varepsilon,k}\right\|^q_{L^q(a,b)} + k\left\|[u'_{\varepsilon,k}]^-\right\|_{L^q(a,b)} - K(b-a) \leq G^{\varepsilon,k}(u_{\varepsilon,k}) \leq \\ \leq G^{\varepsilon,k}(v) \leq c_2 \int_a^b \left\{1+|v'|^q\right\} \mathrm{d}x = c_3 < +\infty \ . \end{aligned} \tag{4.22}$$

Per il teorema di immersione $u_{\varepsilon,k}$ è limitata anche in $L^\infty(a,b)$ per ogni $\varepsilon > 0$. Ora possiamo ottenere una limitazione per la norma C^1 di $u_{\varepsilon,k}$ uniformemente in k. Integrando ambo i membri della (4.20) e usando la condizione di crescita (4.8a), esistono costanti c_4, $c_5(\varepsilon)$, $c_6(\varepsilon)$ tali che

$$\left|g_\xi^{\varepsilon,k}(x,u_{\varepsilon,k},u'_{\varepsilon,k})\right| = \left|c_4 + \int_a^X g_s^{\varepsilon,k}(x,u_{\varepsilon,k}(t),u'_{\varepsilon,k}(t))\ \mathrm{d}t\right| \leq$$

$$\leq c_5 \int_a^b \left\{1 + |u_{\varepsilon,k}(t)|^q + |u'_{\varepsilon,k}(t)|^q\right\}\ \mathrm{d}t \leq c_6\ . \quad (4.23)$$

Per il termine $\varepsilon(1+\xi^2)^{\frac{q}{2}}$ abbiamo $g_{\xi\xi}^{\varepsilon,k} > \varepsilon q$. Allora, per ogni ξ_1, ξ_2:

$$\left|g_\xi^{\varepsilon,k}(x,s,\xi_1) - g_\xi^{\varepsilon,k}(x,s,\xi_2)\right| \geq \varepsilon q\left|\xi_1 - \xi_2\right|\ .$$

Quindi, per $\xi_1 = u'_{\varepsilon,k}$ e $\xi_2 = 0$ e $s = u_{\varepsilon,k}$, per la (4.23) e la (4.21) esiste una costante $c_7(\varepsilon)$ tale che

$$\varepsilon q\left|u'_{\varepsilon,k}\right| \leq \left|g_\xi^{\varepsilon,k}(x,u_{\varepsilon,k},u'_{\varepsilon,k})\right| + \left|g_\xi^{\varepsilon,k}(x,u_{\varepsilon,k},0)\right| \leq c_7 \qquad \forall k > 0\ .$$

□

Lemma 4.1.5 *Siano u_ε funzioni reali definite in $[a,b]$ tali che, per $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \to u_0$ per ogni $x \in (a,b)$. Se u_ε è crescente e convessa (concava) in $[a,b]$, allora $u_\varepsilon(x)$ converge anche in $x = a$ (in $x = b$) per ogni ε e*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(a) \ = \ u_0(a) \ \equiv \ \inf_{x\in(a,b)} u_0(x) \qquad \left(\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(b) = u_0(b) \equiv \sup_{x\in(a,b)} u_0(x)\right)\ .$$

Dimostrazione. Consideriamo per semplicità il caso convesso. Prima estendiamo u_0 in $x = a$ definendo $u_0(a) = \inf_{x\in(a,b)} u_0(x)$. Per la sua monotonicità, u_0 si scopre essere continua in $x = a$. Per ogni $x \in (a,b)$, la convessità di u_ε dà:

$$u_\varepsilon\left(\frac{a+x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[u_\varepsilon(a) + u_\varepsilon(x)\right]\ .$$

Ne segue che

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(a) \geq \liminf_{\varepsilon\to 0}\left[2u_\varepsilon\left(\frac{a+x}{2}\right) - u_\varepsilon(x)\right] = 2u_0\left(\frac{a+x}{2}\right) - u_0(x)\ ,$$

e, per $x \to a^+$, $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(a) \geq u_0(a)$. Poichè $u_\varepsilon(x)$ è crescente, per $x \in (a,b)$ abbiamo

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(a) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x) = u_0(x)\ ,$$

e, per $x \to a^+$ si ottiene $\limsup_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(a) \leq u_0(a)$. □

Lemma 4.1.6 *Siano u_ε funzioni convesse in un aperto convesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitate in $L^\infty(\Omega)$ uniformemente in ε. Allora esiste una sottosuccessione di u_ε che converge nella topologia forte di $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$. La stessa conclusione vale se $u_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$ è separatamente convessa o concava rispetto a ogni componente x_i, per $i = 1, \ldots, n$.*

Dimostrazione. Per non appesantire la notazione consideriamo il caso $n = 1$. Nel caso generale si segue lo stesso procedimento separatamente per ogni derivata parziale.

Poichè il rapporto incrementale di u_ε è crescente, per $a < x_1 < x < x_2 < b$ abbiamo

$$\frac{u_\varepsilon(x_1) - u_\varepsilon(x_i)}{x_1 - x} \leq u'_{\varepsilon,k}(x) \leq \frac{u_\varepsilon(x_2) - u_\varepsilon(x)}{x_2 - x} \ . \tag{4.24}$$

Quindi, come in (4.14), per ogni $\delta \in (0, \frac{b-a}{2})$ otteniamo una limitazione per $\|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(a+\delta,b-\delta)}$ uniforme in ε. Per il teorema di Ascoli-Arzelà abbiamo la relativa compattezza in $C^0(a, b)$. Indicando con u_0 la funzione limite, per $\varepsilon \to 0$ dalla (4.24) segue che

$$\frac{u_0(x_1) - u_0(x)}{x_1 - x} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} u'_{\varepsilon,k}(x) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} u'_{\varepsilon,k}(x) \leq \frac{u_0(x_2) - u_0(x)}{x_2 - x} \ . \tag{4.25}$$

La funzione u_0, essendo convessa, è differenziabile q.o. in (a, b). In ogni $x \in (a, b)$ dove esiste $u'_0(x)$, ponendo $x_1 = x^-$ e $x_2 = x^+$ in (4.25), si ottiene $u'_0(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} u'_\varepsilon(x)$. Poichè la successione $u'_\varepsilon(x)$ è localmente limitata, per il teorema di Lebesgue della convergenza dominata otteniamo la convergenza di u_ε in $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per ogni $p < +\infty$. □

Corollario 4.1.7 *Il funzionale di Newton*

$$\overline{F}(u) = \pi u(a)^2 + 2\pi \int_a^b u \frac{(u')^3}{1 + (u')^2} \, \mathrm{d}x \ , \tag{4.26}$$

ammette almeno una soluzione u_0 nell'insieme

$$\{u \in W^{1,1}(a, b) : \ u(a) \geq 0, \ u(b) = B, \ u' \geq 0 \ q.o.\} \ ,$$

per $B > 0$. Tale soluzione è concava e soddisfa la condizione $0 \leq u'_0(x) \leq 1$ q.o. in $[a, b]$.

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene come conseguenza del teorema generale 4.1.2, anche se il risultato di questa applicazione è classico (vedere ad esempio Tonelli (147, sezione 140). La funzione $f(s, \xi) = 2\pi s \frac{\xi^3}{1+\xi^2}$ soddisfa la

(4.5) con $a(x,s) = 2\pi s$, visto che $h(\xi) = g^{**}(\xi)$, dove $g(\xi) = \frac{\xi^3}{1+\xi^2}$. Inoltre $f^{**}(s,\xi) = 2\pi s h(\xi)$ e la (4.8) vale con $p = 1$. Poichè

$$\varphi_0 = f_s - \xi f_{\xi s} = -\frac{2\pi\xi^3}{(1+\xi^2)^2} < 0 \qquad \forall \xi > 0 \ ,$$

allora, per $\xi > 0$, $\varphi = f_s^{**} - \xi f_{\xi s}^{**} < 0$ (vedere osser (4.1.3), comunque da un calcolo diretto si può vedere che $f_s^{**} - \xi f_{\xi s}^{**} = -\pi$ per ogni $\xi > 1$). Per il teorema 4.1.2 esiste quindi una funzione $u_0 \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(a,b)$ (e inoltre $u_0 \in W^{1,1}(a,b)$, poichè $u_0(a) \geq 0$, $u_0(b) \leq B$, $u_0' \geq 0$ q.o.) che minimizza $\overline{F}$ in (4.6). Che u_0 è inoltre una soluzione di $\overline{F}$ in (4.26) segue dal fatto che $u_0(b) = B$ (per il teorema 4.1.2, poichè $\varphi < 0$), $a(x,s) = 2\pi s$ e $\tilde{h} = 1$. Infine $u_0'(x) \leq 1$ q.o. in $[a,b]$, poichè u_0 soddisfa (4.18) e $f(s,\xi) = f^{**}(s,\xi)$ se e solo se $s = 0$ o $0 \leq \xi \leq 1$. $\square$

Abbiamo quindi dimostrato che il problema (4.1) ammette una soluzione, che è concava e risolve l'equazione di Eulero-Lagrange

$$ru' = C(1 + u'^2)^2 \qquad \text{in } \{u' \neq 0\} \ , \tag{4.27}$$

per un'opportuna costante $C \leq 0$, quindi i problemi di minimizzazione nelle classi di funzioni concave e decrescenti ammettono le stesse soluzioni.

Il minimo dovrà inoltre soddisfare le condizioni

$$u(0) = M \qquad u(R) = 0 \ , \tag{4.28}$$

infatti, se almeno una di queste fosse violata, la funzione

$$u_\varepsilon = (1+\varepsilon)\big(u(r) - u(R)\big) \ ,$$

offrirebbe una resistenza minore, per qualche $\varepsilon > 0$. Per le (4.28) si possono distinguere due casi

- $u'(0) < 0$
- $u'(0) = 0$

Se fosse $u' < 0$ allora dalla (4.27) si otterrebbe $C = 0$, da cui $u'(r) = 0$ per ogni $r \in [0,R]$, che è assurdo. Abbiamo dunque $u'(0) = 0$, quindi per le (4.28) dovrà esistere almeno un punto angoloso $r_0 \in (0,R)$, tale che $u'_-(r_0) = 0$ e $u'_+(r_0) < 0$. Per la concavità di u, in (r_0, R) dovrà valere l'equazione di Eulero che, posto $t = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$, diventa:

$$r = -\frac{C}{2}\frac{(1+t^2)^2}{t} \ ,$$

e dalla relazione $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -t\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ si ottiene

$$u(t) = C\left(\frac{3}{4}t^4 + t^2 - \log t\right) + K \ ,$$

per cui l'equazione parametrica del profilo ottimale è:

$$\begin{cases} r(t) = -C\dfrac{(1+t^2)^2}{2t} \\ u(t) = C\left(\dfrac{3}{4}t^4 + t^2 - \log t\right) + K \end{cases} .$$

Imponendo le condizioni $u(r_0) = M$ e $u(R) = 0$ si determinano le costanti C e K, ottenendo

$$u_M(r) = M \qquad \forall r \in [0, r_0] \ ,$$

e in forma parametrica

$$\begin{cases} r_M(t) = \dfrac{r_0}{4t}(1+t^2)^2 \\ u_M(t) = M - \dfrac{r_0}{4}\left(-\dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{4}t^4 + t^2 - \log t\right) \end{cases} \qquad \forall t \in [1, T] \ ,$$

dove r_0 e T sono tali che

$$\begin{cases} r_M(1) = r_0 \\ u_M(1) = M \end{cases} \quad \begin{cases} r_M(T) = R \\ u_M(T) = 0 \end{cases} ,$$

Intuitivamente r_0 rappresenta il raggio della zona piatta del profilo, mentre T è la pendenza nei punti di $\partial\Omega$. Indicando con g la funzione strettamente crescente

$$g(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}\left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{4}t^4 + t^2 - \log t\right) \qquad \forall t \geq 1 \ ,$$

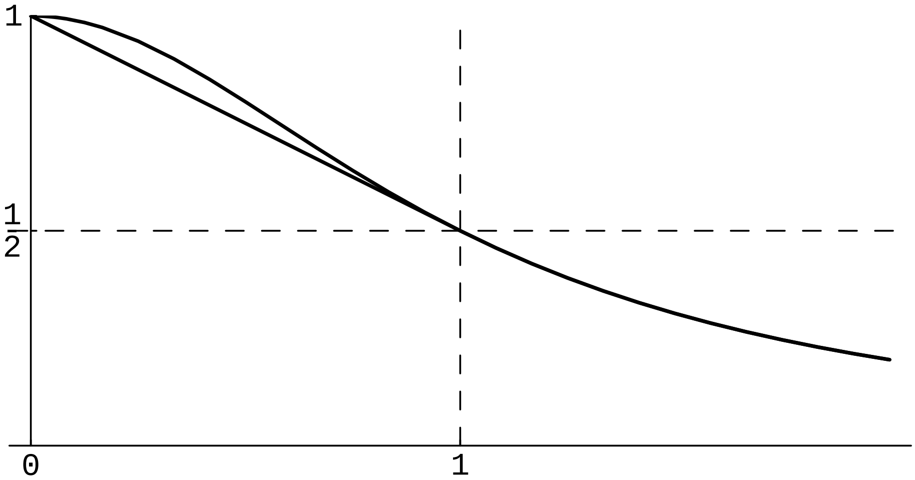
si ha

$$T = g^{-1}\left(\frac{M}{R}\right) \qquad r_0 = \frac{4RT}{(1+T^2)^2} \ ,$$

È interessante notare che $|u'(r)| > 1$ per ogni $r > r_0$ e che $|u'(r_0^+)| = 1$. In effetti, come Newton aveva già osservato, se $-1 \leq u' \leq 0$ in un intervallo $[a, b]$, allora u può essere cambiata in $[a, b]$ in un'altra funzione, la cui pendenza è prima 0 poi -1, che darà una resistenza più bassa. In termini moderni possiamo dire che questo fenomeno dipende dal fatto che il rilassamento convesso f^{**} della funzione $f(s) = \frac{1}{1+s^2}$ si stacca da f nell'intervallo $(0, 1)$ (figura 4.1), per cui la soluzione rimane lontana dalla concavità di f. Vedremo inoltre nella prossima sezione che questo fenomeno si generalizza al caso non radiale. Per $M \to \infty$ si vede che

$$T \sim \frac{4}{3}\left(\frac{M}{R}\right) \qquad \text{e quindi} \qquad r_0 \sim \frac{27}{16}R\left(\frac{M}{R}\right)^{-3} ,$$

Figura 4.1: Grafici di $f(s) = \frac{1}{1+s^2}$ e di f^{**}



inoltre in $u_M(t)$ prevale il termine di quarto grado, e normalizzando, si ottiene la soluzione esplicita in coordinate cilindriche.

Ponendo $\rho = \frac{t}{T}$ e $v_M = \frac{u_M}{M}$, le equazioni parametriche della soluzione asintotica diventano

$$\begin{cases} r_\infty(\rho) = R\rho^3 \\ v_\infty(t) = 1 - \rho^4 \end{cases} \qquad \forall \rho \in [0,1] \ ,$$

da cui si ottiene, in coordinate cilindriche,

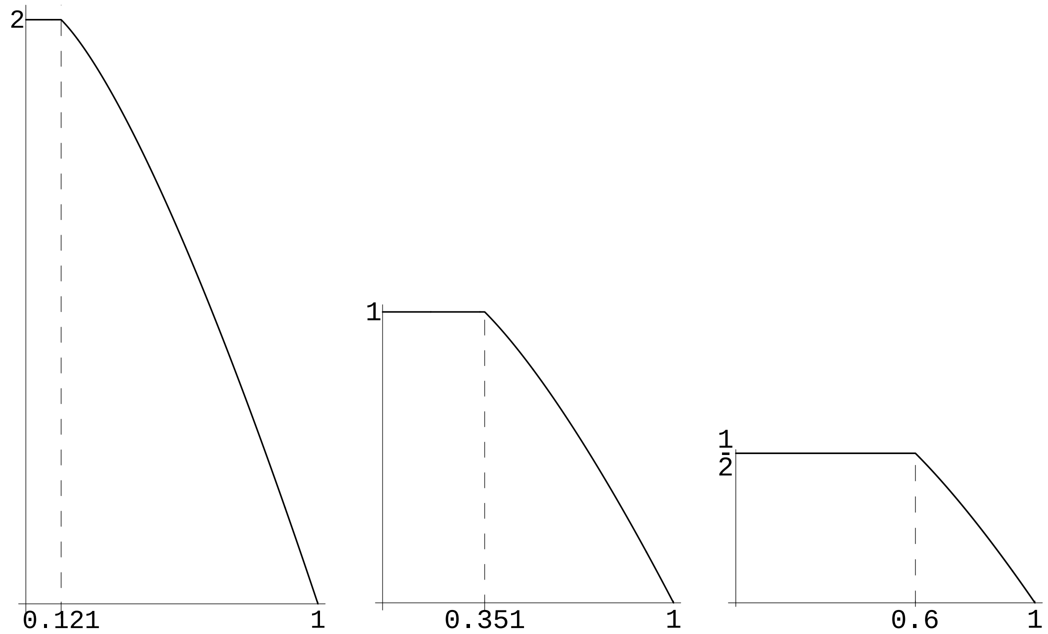
$$v_\infty(r) = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{4}{3}} \ .$$

La resistenza asintotica risulta quindi

$$D_0\{u_M\} = \frac{1}{\pi R^2} G_\infty(u_\infty) = \frac{27}{32} \ .$$

Riassumendo, le soluzioni radiali presentano le seguenti proprietà:

- $|\nabla u| \notin (0,1) \qquad \forall x \in \Omega$;
- u è concava e lipschitziana;
- $u = 0$ su $\partial\Omega$;
- la soluzione è unica
- esiste sempre una *zona piatta*, cioè un cerchio di raggio r_0 tale che $u(r) = M$ per ogni $r \in [0, r_0]$.



Osservazione 4.1.8. Si noti che la soluzione del problema di Newton che si ottiene nel caso radiale imponendo vincoli di area o volume non coincide con quella precedente, e in generale non è detto che sia concava. Purchè V sia sufficientemente grande, la soluzione del problema

$$\min \left\{ \int_0^R \frac{r}{1+|u'(r)|^2}\, \mathrm{d}r : u \text{ decrescente}, \int_\Omega u \geq V \right\} ,$$

si può infatti descrivere in forma parametrica

$$\begin{cases} r_V(t) = \dfrac{4}{\lambda} \dfrac{t}{(1+t^2)^2} \\ u_V(t) = \dfrac{2}{\lambda} \left[\dfrac{3T^2+1}{(1+T^2)^2} - \dfrac{(3t^2+1)}{(1+t^2)^2} \right] \end{cases} ,$$

dove

$$\lambda = \frac{4T}{R(1+T^2)^2} \qquad \frac{V}{\pi R^3} = \frac{45T^4+6T^2+1}{120T^3} \qquad \frac{M}{R} = \frac{3T^2+1}{2T} ,$$

e si vede facilmente (figura 4.2) che il profilo in questione non è convesso, e per $r \to 0$ si ha addirittura che $|\nabla u| \to \infty$. Nel caso in cui il vincolo sia dato dall'area, si può dimostrare che la soluzione è data da un cono.

Figura 4.2: Soluzione radiale con vincolo di volume per $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

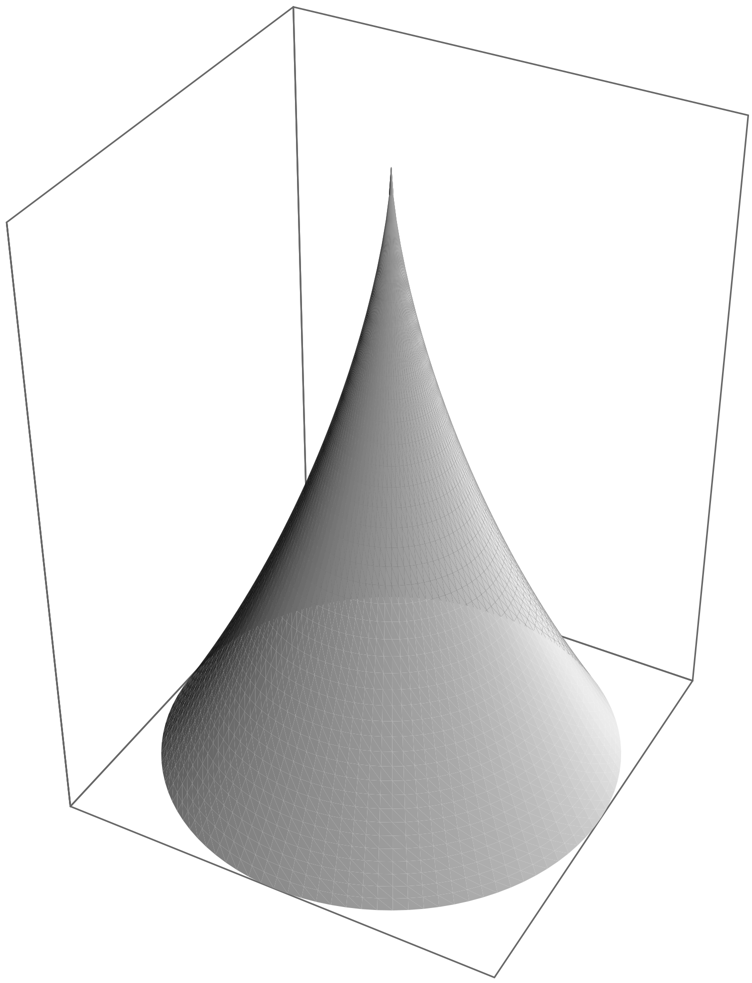


Figura 4.3: Soluzione radiale per $M = 2R$

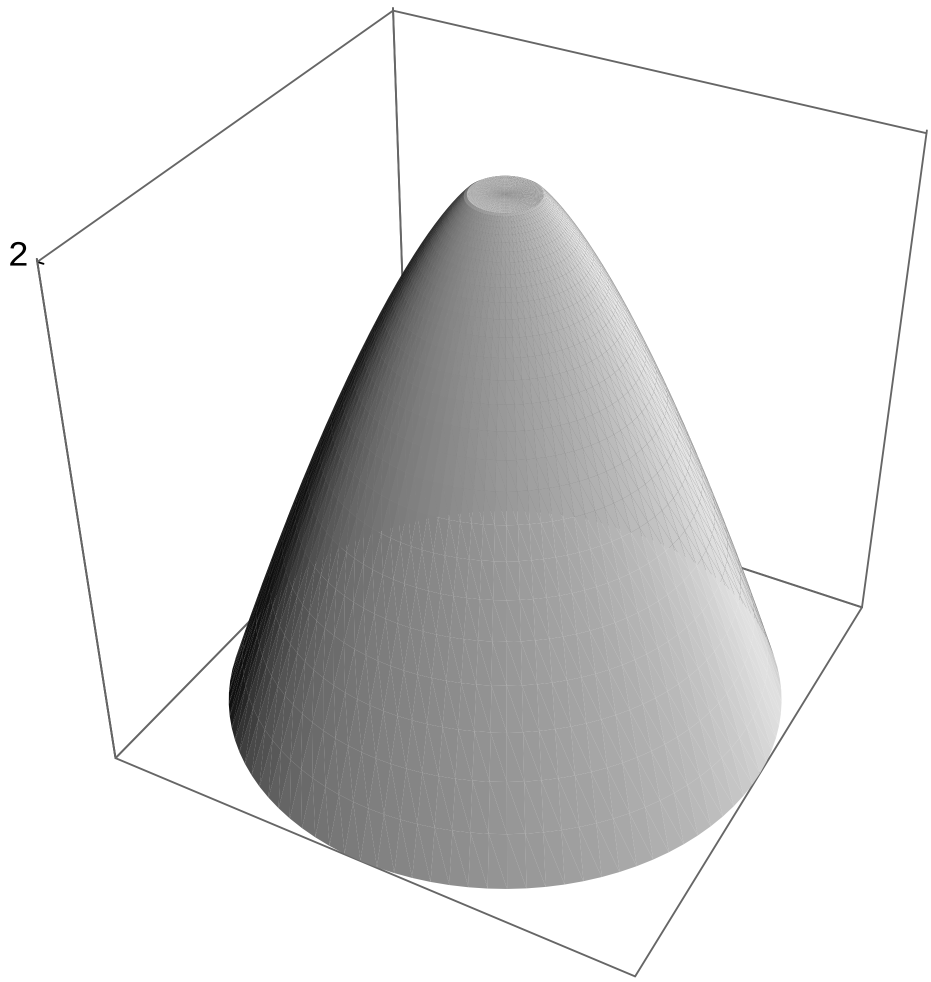


Figura 4.4: Soluzione radiale per $M = R$

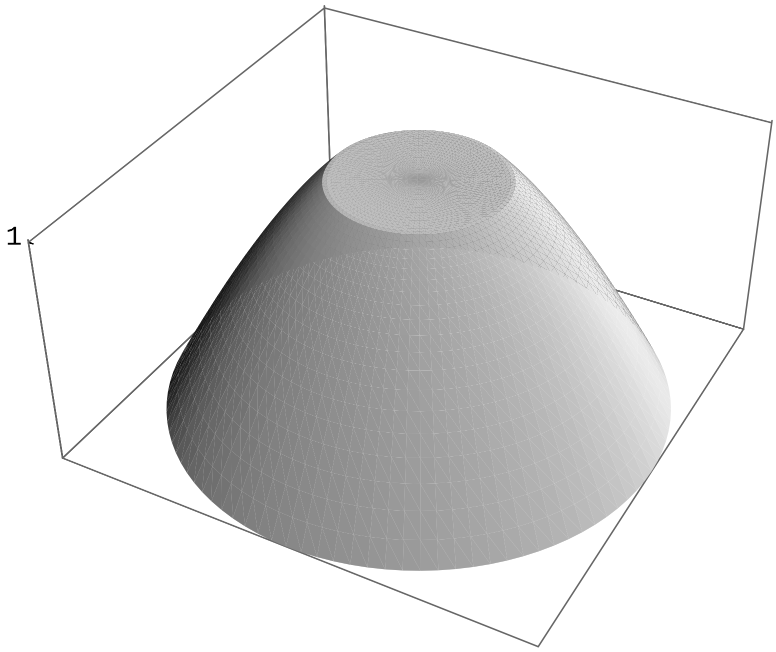
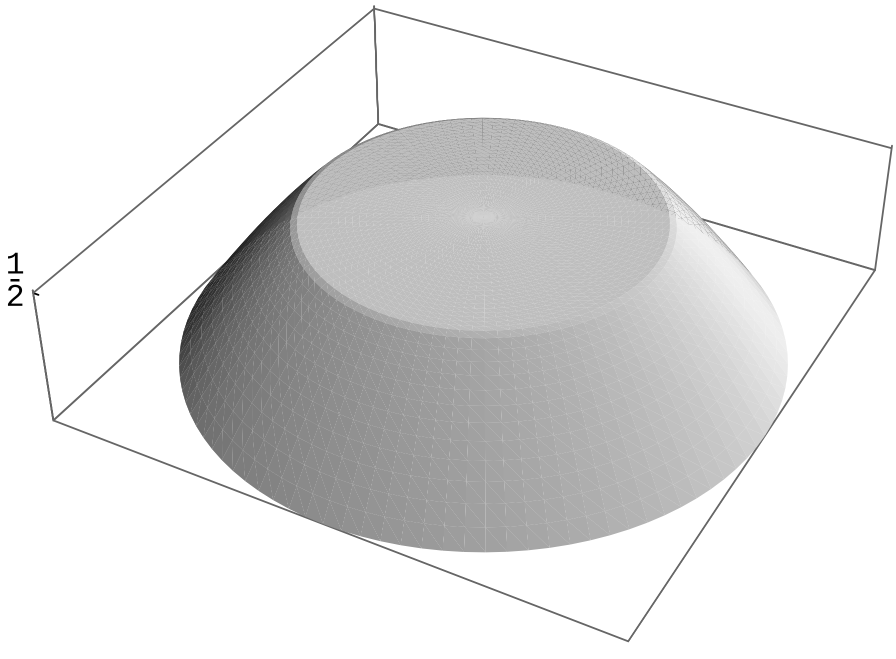


Figura 4.5: Soluzione radiale per $M = \frac{1}{2}R$

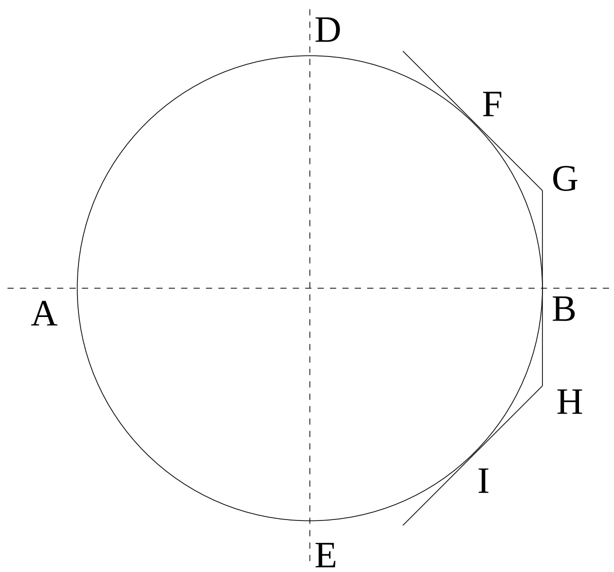


4.2 La pendenza

In questa sezione confronteremo le proprietà qualitative delle soluzioni nella classe C_M con quelle delle soluzioni radiali. In primo luogo vedremo che si avrà ancora $|\nabla u| \notin (0,1)$ per quasi ogni $x \in \Omega$: nel caso radiale questo risultato era già stato visto dallo stesso Newton, che nello Scolio della Proposizione XXXIV (vedi [27]) scriveva

> *Incidentalmente [...] segue che se il solido generato dalla circonvoluzione della figura $ABDE$ intorno all'asse AB e la figura generante è toccata dalle tre rette FG, GH, HI così che [...] FG, HI racchiudano insieme a GH gli angoli FGB, BHI di 135 gradi: il solido, generato dalla circonvoluzione della figura $ADFGHIE$ intorno all'asse AB, subirà una resistenza minore del primo solido.*

Figura 4.6:



Tuttavia, secondo Whiteside ([36], pagina 478), *"Questa, da parte di Newton, deve essere stata sicuramente una educata congettura"*.

Seguendo Buttazzo, Ferone & Kawohl [7] vediamo la dimostrazione che questa proprietà vale nella classe C_M per ogni Ω:

Teorema 4.2.1 *Sia $u \in C_M$ una soluzione del problema (2.2). Allora*

$$|\nabla u|(x) \notin (0,1) \qquad \textit{per q.o. } x \in \Omega \; .$$

Dimostrazione del teorema 4.2.1. Sia $u \in C_M$ una soluzione del problema (2.2) e sia v definita come il minimo tra M e tutti i piani tangenti all'insieme convesso $\{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq u(x)\}$ e aventi pendenza fuori da $(0, 1)$. È facile vedere che $v \in C_M, v \geq u$ su Ω, $|\nabla v|(x) \notin (0, 1)$ per q.o. $x \in \Omega$, e che sull'insieme $v \neq u$ si ha:

$$|\nabla v| \in \{0, 1\} \qquad \text{e} \qquad |\nabla u| \in (0, 1) \ .$$

Consideriamo ora la funzione $\tilde{f} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ data da

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 1 - t/2 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \dfrac{1}{1+t^2} & \text{se } t > 1 \end{cases} \ ,$$

ed il funzionale

$$\tilde{F}(u) = \int_{\Omega} \tilde{f}(|\nabla u|) \, \mathrm{d}x \ .$$

La funzione $\tilde{f}$ è convessa su $\mathbb{R}^+$ e abbiamo che

$$\tilde{f}(t) \leq \frac{1}{1+t^2} \qquad \forall t \geq 0 \ .$$

Quindi

$$F(u) \geq \tilde{F}(u) = \int_{\{u=v\}} \tilde{f}(|\nabla u|) \, \mathrm{d}x + \int_{\{u \neq v\}} \tilde{f}(|\nabla u|) \, \mathrm{d}x \ .$$

Poichè $\nabla u = \nabla v$ q.o. sull'insieme $\{u = v\}$, otteniamo

$$\begin{aligned} F(u) \geq & \int_{\{u=v\}} \tilde{f}(|\nabla v|) \, \mathrm{d}x + \int_{\{u \neq v\}} \tilde{f}(|\nabla u|) \, \mathrm{d}x = \\ =& \tilde{F}(v) + \int_{\{u \neq v\}} \left[\tilde{f}(|\nabla u|) - \tilde{f}(|\nabla v|)\right] \mathrm{d}x \ , \end{aligned}$$

Visto che $|\nabla v| \notin (0, 1)$ su Ω abbiamo

$$\tilde{f}(|\nabla v|) = f(|\nabla v|) \qquad \text{q.o. su } \Omega \ ,$$

inoltre, poichè su $\{u \neq v\}$ si ha $|\nabla v| \in \{0, 1\}$ e $|\nabla u| \in (0, 1)$, su $\{u \neq v\}$ abbiamo

$$\tilde{f}(|\nabla u|) = 1 - \frac{|\nabla u|}{2} \qquad \text{e } \tilde{f}(|\nabla v|) = 1 - \frac{|\nabla v|}{2} \ .$$

Quindi

$$F(u) \geq F(v) + \frac{1}{2} \int\limits_{\{u \neq v\}} [|\nabla v| - |\nabla u|] \, \mathrm{d}x = F(v) + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} [|\nabla v| - |\nabla u|] \, \mathrm{d}x \ .$$

Per la formula di coarea otteniamo

$$\int\limits_{\Omega} \left[|\nabla v| - |\nabla u|\right] \, \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{M} \left[\mathcal{H}^{n-1}\left(\{v = t\}\right) - \mathcal{H}^{n-1}\left(\{u = t\}\right)\right] dt \ ,$$

inoltre, per ogni t gli insiemi $\{u \geq t\}$ e $\{v \geq t\}$ sono convessi e

$$\{u \geq t\} \supset \{v \geq t\} \ .$$

Allora, per il lemma 3.3.2 otteniamo

$$F(v) \leq F(u) \ ,$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $u = v$. Quindi $|\nabla u|$ deve stare fuori dall'intervallo $(0, 1)$ e la dimostrazione e conclusa. □

Osservazione 4.2.2. Per il teorema 4.2.1 otteniamo che i due problemi di minimo

$$\min\{F(u) : u \in C_M\} \qquad (\mathcal{P})$$

$$\min\{\tilde{F}(u) : u \in C_M\} \qquad (\mathcal{P}')$$

ammettono le stesse soluzioni. In effetti, se u risolve $(\mathcal{P})$ e $\tilde{u}$ risolve $(\mathcal{P}')$, abbiamo che $|\nabla u| \notin (0, 1)$ su Ω e (ripetendo l'argomento del teorema 4.2.1), $|\nabla \tilde{u}| \notin (0, 1)$. Quindi, per ogni $v \in C_M$

$$\begin{cases} \tilde{F}(u) = F(u) \leq F(\tilde{u}) = \tilde{F}(\tilde{u}) \leq \tilde{F}(v) \\ F(\tilde{u}) = \tilde{F}(\tilde{u}) \leq \tilde{F}(v) \leq F(v) \end{cases} ,$$

e quindi u risolve $(\mathcal{P}')$ e $\tilde{u}$ risolve $(\mathcal{P})$.

4.3 La zona piatta

In questa sezione studiamo il comportamento delle soluzioni in C_M nei pressi del livello $\Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. Ovviamente Ω_M dovrà essere un convesso, quindi si avranno, per $n = 2$, tre casi:

1. Ω è un punto

2. Ω è un segmento

3. Ω è un convesso di misura di Lebesgue $|\Omega_M| > 0$.

Nel caso radiale si era già visto che si verifica sempre il caso 3 e che sulla frontiera di Ω_M si ha sempre $|\nabla u| = 1$. Vedremo ora che per M finito possiamo sempre escludere il caso 1 e che per M sufficientemente piccolo si ha il caso 3, come conseguenza del teorema 4.2.1. Per valori più alti di M, che rappresentano il caso fisicamente più interessante, il problema rimane aperto. Supponendo che si verifichi il caso 3, tuttavia, si può ottenere una stima dall'alto per $|\Omega_M|$ e $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_M)$ e concludere che $|\nabla u| = 1$ su $\partial\Omega_M$ come nel caso radiale.

Proposizione 4.3.1 *Sia u una soluzione del problema* (2.2). *Se* $|\Omega_M| > 0$, *allora* $|\nabla u| = 1$ *su* $\partial\Omega_M$.

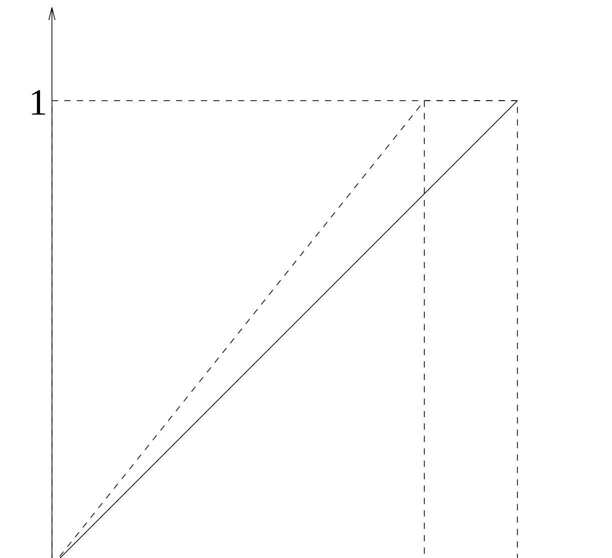
Dimostrazione. Calcoliamo la variazione del funzionale (2.1) nei due modi seguenti:

1. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $w_\varepsilon(x) : [0, M] \to [0, M]$ la funzione $w_\varepsilon = v_\varepsilon \circ u$, dove $v_\varepsilon(x)$ è definita da:

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{M}{M-\varepsilon}x & \text{se } x \in [0, M-\varepsilon] \\ M & \text{se } x \in (M-\varepsilon, M] \end{cases} .$$

   Intuitivamente, si può pensare che le w_ε siano allungamenti troncati della funzione u, quindi le w_ε sono chiaramente concave.

Figura 4.7: Grafico della funzione v_ε



Ponendo, per non appesantire la notazione, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, vediamo come varia il funzionale F:

$$\frac{F(w_\varepsilon) - F(u)}{\varepsilon} = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} \frac{f(\frac{M}{M-\varepsilon}|\nabla u(x)|) - f(|\nabla u(x)|)}{\varepsilon}\,\mathrm{d}x - \\ - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(|\nabla u(x)|)\,\mathrm{d}x\ ,$$

dove Ω_ε è il sopralivello $\{x \in \Omega : u(x) > M - \varepsilon\}$. Per $\varepsilon \to 0$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(w_\varepsilon) - F(u)}{\varepsilon} &= \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_M} \frac{f'(|\nabla u|)|\nabla u|}{M} - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(|\nabla u(x)|) = \\ &= -\frac{2}{M}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_M}\frac{|\nabla u|^2}{(1+|\nabla u|^2)^2} + \int\limits_{\partial\Omega_M}\frac{|\nabla u|}{1+|\nabla u|^2}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}\ .\end{aligned}$$

La condizione di minimo è

$$-\frac{2}{M}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_M}\frac{|\nabla u|^2}{(1+|\nabla u|^2)^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial\Omega_M}\frac{|\nabla u|}{1+|\nabla u|^2}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \geq 0\ . \tag{4.29}$$

2. Consideramo ora le seguenti v_ε, che consistono in contrazioni della funzione u, seguiti da prolungamento con $|\nabla u| = 1$ su Ω_M:

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{M-\varepsilon}{M}u(x) & \text{se } u(x) \in [0, M) \\ \min\left\{M, M-\varepsilon + \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_M)\right\} & \text{se } u(x) = M \end{cases}\ .$$

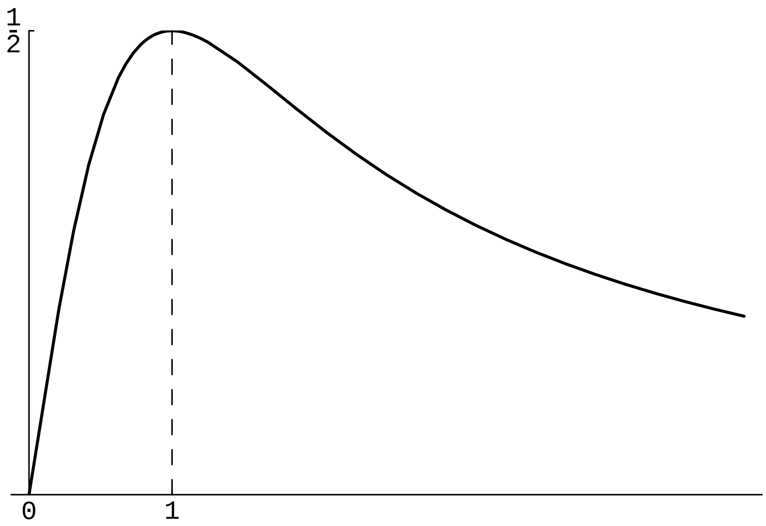
Per la 4.2.1, v_ε è concava per ogni ε. Se $|\Omega_M| > 0$, la variazione vale:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(v_\varepsilon) - F(u)}{\varepsilon} &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}\frac{f'(|\nabla u|)|\nabla u|}{M}\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(|\nabla u(x)|)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{M}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_M}\frac{|\nabla u|^2}{(1+|\nabla u|^2)^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_M)\ ,\end{aligned}$$

e dunque dovrà essere:

$$\frac{2}{M}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_M}\frac{|\nabla u|^2}{(1+|\nabla u|^2)^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_M) \geq 0\ . \tag{4.30}$$

Figura 4.8: Grafico della funzione $\frac{x}{1+x^2}$



Confrontando la (4.29) e la (4.30), otteniamo:

$$\int_{\partial\Omega_M} \frac{|\nabla u|}{1+|\nabla u|^2}\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \geq \frac{1}{2}\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_M) \ .$$

D'altra parte, $|\nabla u| \geq 1$ su $\Omega \setminus \Omega_M$, quindi

$$\int_{\partial\Omega_M} \frac{|\nabla u|}{1+|\nabla u|^2}\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_M) \ .$$

In definitiva

$$\int_{\partial\Omega_M} \frac{|\nabla u|}{1+|\nabla u|^2}\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{2}\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_M) \ ,$$

da cui, visto che la funzione $\frac{x}{1+x^2}$ è uguale a $\frac{1}{2}$ solo per $x=1$ (vedi figura 4.8), su $\partial\Omega_M$ si ottiene che $|\nabla u| = 1$ $\mathcal{H}^{n-1}$ q.o. $\square$

Corollario 4.3.2 *Per ogni $M > 0$ si ha che*

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_M) \geq \frac{4}{M} \int_{\Omega\setminus\Omega_M} \frac{|\nabla u|^2}{(1+|\nabla u|^2)^2}\, \mathrm{d}x \ .$$

Inoltre, se $|\Omega_M| > 0$

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_M) = \frac{4}{M} \int_{\Omega\setminus\Omega_M} \frac{|\nabla u|^2}{(1+|\nabla u|^2)^2}\, \mathrm{d}x \ .$$

Dimostrazione. Si noti che la (4.30) vale solo nel caso che $|\Omega_M| > 0$ mentre la (4.29) vale sempre e fornisce la stima:

$$0 \leq -\frac{2}{M} \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_M} \frac{|\nabla u|^2}{(1+|\nabla u|^2)^2} \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\partial \Omega_M} \frac{|\nabla u|}{1+|\nabla u|^2} \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \leq$$

$$\leq -\frac{2}{M} \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_M} \frac{|\nabla u|^2}{(1+|\nabla u|^2)^2} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \mathcal{H}^{n-1}(\partial \Omega_M) \ ,$$

da cui

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial \Omega_M) \geq \frac{4}{M} \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_M} \frac{|\nabla u|^2}{(1+|\nabla u|^2)^2} \, \mathrm{d}x \ .$$

Analogamente, dalla (4.30) si ottiene l'altra disuguaglianza nel caso in cui $|\Omega_M| > 0$. □

Dal corollario 4.3.2 si vede in particolare che per M finito $\mathcal{H}^{n-1}(\partial \Omega_M) > 0$ quindi, per $n \geq 2$ Ω_M non può essere un punto. Resteranno dunque due possibilità:

- $|\Omega_M| > 0$, e quindi esiste una zona piatta.
- $|\Omega_M| = 0$ e $\mathcal{H}^{n-1}(\Omega_M) > 0$ quindi, nel caso $n = 2$, Ω_M è un segmento.

Proposizione 4.3.3 *Per M sufficientemente piccolo $|\Omega_M| > 0$.*

Dimostrazione. Per il teorema 4.2.1 la soluzione è una funzione concava con $|\nabla u| \geq 1$ su $\Omega \setminus \Omega_M$, e quindi si può vedere come inviluppo inferiore di una famiglia di piani di pendenza maggiore di 1, ed il cui sottografico contiene Ω. Ne segue che

$$\Omega_M \supset \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq M\} \ ,$$

dal momento che la funzione $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ è l'inviluppo inferiore di *tutti* i piani di pendenza maggiore di 1 e contenenti Ω nel proprio sottografico. La tesi segue quindi direttamente. □

Come si è accennato, per M sufficientemente elevato non è ancora chiaro se la misura di Ω_M si annulli o se resti sempre positiva. A questo proposito, ricordando la notazione del problema asintotico (vedere la sezione 2.2), si può comunque fare la seguente considerazione.

Proposizione 4.3.4 *Se esiste una successione M_h, con $M_h \to \infty$, per cui $|\Omega_{M_h}| > 0$ per ogni h, allora*

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial \Omega_{M_h}) \sim \frac{4}{{M_h}^3} G_\infty(v_\infty) \ .$$

In particolare, $\mathcal{H}^{n-1}(\partial \Omega_{M_h})$ sarebbe infinitesima.

Dimostrazione. Se $|\Omega_M| > 0$ si è visto che

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_M) = \frac{4}{M} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_M} \frac{|\nabla u|^2}{(1+|\nabla u|^2)^2}\, \mathrm{d}x \ .$$

Osserviamo che il membro destro si può scrivere come

$$\frac{4}{M}\left(\int\limits_{\Omega} \frac{1}{1+|\nabla u|^2}\, \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} \frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^2}\, \mathrm{d}x\right) \ .$$

Indicando con u_M la soluzione del problema (2.2) e ponendo $u_M = Mv_M$ si ottiene, per $M \to \infty$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_M) =& \frac{4}{M^3}\left(\int\limits_{\Omega} \frac{1}{\frac{1}{M^2}+|\nabla v|}\, \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} \frac{M^2}{(1+M^2|\nabla v|^2)^2}\, \mathrm{d}x\right) = \\ =& \frac{4}{M^3}\left(G_M(v_M) - \int\limits_{\Omega} \frac{M^2}{(1+M^2|\nabla v|^2)^2}\, \mathrm{d}x\right) \sim \frac{4}{M^3} G_\infty(v_\infty) \ .\end{aligned}$$

□

Osservazione 4.3.5. Visto che le deformazioni della proposizione 4.3.1 sono valide anche per le soluzioni del caso radiale, usando la stima precedente si può ottenere per altra via il valore di r_0. Infatti da

$$2\pi r_0 \sim \frac{4}{M^3}\frac{27}{32}\pi R^2 \ ,$$

si ottiene

$$r_0 \sim \frac{27}{16} R \left(\frac{M}{R}\right)^{-3} \ .$$

Inoltre, utilizzando la disuguaglianza isoperimetrica

$$\frac{\mathcal{H}^1(\partial\Omega_M)^2}{|\Omega_M|} \geq 4\pi \ ,$$

si può stimare anche $|\Omega_M|$:

$$\lim_{M\to\infty} |\Omega_M| M^6 \leq \frac{4 G_\infty(v_\infty)^2}{\pi} \ ,$$

4.4 Il comportamento su $\partial\Omega$

Studiamo ora l'andamento delle soluzioni in C_M nei pressi del bordo $\partial\Omega$. Si era visto, nel caso radiale, che il profilo ottimale era lipschitziano per ogni M e si aveva $\lim_{x\to\partial\Omega} u(x) = 0$. Vedremo ora che queste due caratteristiche sono strettamente correlate: infatti, se la soluzione fosse lipschitziana, allora tenderebbe a 0 sul bordo. Nei punti in cui il limite fosse strettamente positivo o non esistesse si avrebbe necessariamente che $|\nabla u| \to \infty$. In ogni caso, nei punti $x_0 \in \partial\Omega$ di stretta convessità $\liminf_{x\to x_0} u(x) = 0$.

Proposizione 4.4.1 *Sia u una soluzione del problema* (2.2). *Allora, se u è lipschitziana in un intorno di $x_0 \in \partial\Omega$, si ha*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} u(x) = 0 \ .$$

Dimostrazione. Indichiamo con D_{max} il sup (essenziale) di $|\nabla u(x)|$ in un intorno di x_0, e con $Tx_0(\Omega)$ lo spazio tangente a $\partial\Omega$ in x_0. Per ipotesi $D_{max} < \infty$. Sia $v(x)$ una funzione affine il cui grafico è un iperpiano in $\mathbb{R}^{n+1}$ contenente $Tx_0(\Omega)$ e di pendenza $E > D_{max}$ lungo la normale interna ν a $\partial\Omega$ in x_0. Se si avesse

$$\limsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} u(x) > 0 \ ,$$

allora l'insieme $C = \{x \in \Omega : v(x) < u(z)\}$ avrebbe misura di Lebesgue positiva, e la funzione $\tilde{u}$ definita da

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in C \\ u(x) & \text{se } x \notin C \end{cases} ,$$

darebbe $F(\tilde{u}) < F(u)$, quindi u non sarebbe soluzione. $\square$

Benchè sembri ragionevole che la soluzione sia lipschitziana, finora non siamo riusciti ad escludere il caso in cui $\lim_{x\to x_0} |\nabla u(x)| = +\infty$. In assenza di questa informazione, si può ottenere comunque un risultato più debole:

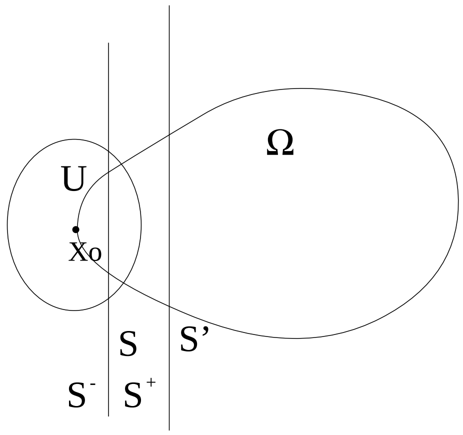
Proposizione 4.4.2 *Sia u una soluzione del problema* (2.2). *Allora per ogni punto di stretta convessità $x_0 \in \partial\Omega$ si ha che*

$$\liminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} u(x) = 0 \ .$$

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che per ogni intorno $\mathcal{U}$ di x_0 si abbia $m \equiv \inf_{x\in\mathcal{U}} u(x) > 0$. Per l'ipotesi di stretta convessità possiamo trovare un iperpiano S in $\mathbb{R}^n$, parallelo a $Tx_0(\Omega)$, che divida Ω in due semispazi, S^+ e S^- tali che (vedi figura 4.9)

$$S^+ \cap \Omega \subset \mathcal{U} \qquad \text{e} \qquad |S^+ \cap \Omega| > 0 \ .$$

Figura 4.9:



Poniamo $\tilde{u}(x) = u(x) - l_{x_0}(x)$, dove

$$l_{x_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in S^- \\ \dfrac{m}{\mathrm{dist}(x_0, S)} \mathrm{dist}(x, S) & \text{se } x \in S^+ \end{cases} .$$

Ovviamente $\tilde{u} \leq M$ e, per come è stato scelto S, x_0 massimizza in $S^+ \cap \Omega$ la distanza da S, quindi $\tilde{u}(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$. Dal momento che la funzione l_{x_0} è convessa, $\tilde{u}$ è concava in quanto somma di concave. Dimostriamo ora che è possibile scegliere $\mathcal{U}$ sufficientemente piccolo perchè si abbia $F(\tilde{u}) < F(u)$. Poichè u e $\tilde{u}$ coincidono su S^-, basterà ottenere $|\nabla \tilde{u}| > |\nabla u|$ su $\Omega \cap S^+$. Indicando con ν la normale esterna a $\partial\Omega$ in x_0, e ponendo $k = \dfrac{m}{\mathrm{dist}(x_0, S)}$, si ha

$$\nabla \tilde{u} = \nabla u - k\nu ,$$

quindi

$$|\nabla \tilde{u}|^2 = |\nabla u|^2 - 2k \nabla u \cdot \nu + k^2 .$$

La tesi sarà dunque verificata se esiste $\mathcal{U}$ tale che $\nabla u(x) \cdot \nu \leq k/2$ per ogni $x \in \mathcal{U}$. Poichè S si può avvicinare a piacere ad x_0, k può essere reso arbitrariamente grande, quindi basta dimostrare che $\nabla u(x) \cdot \nu$ è limitato su un intorno di x_0. A tale scopo, scegliamo un altro iperpiano S' parallelo a S e tale che, detta $P_{S'}$ la proiezione su S', si abbia $P_{S'}(S) \subset\subset \Omega$. Ora, per la concavità di u, si ha che

$$\nabla u(x) \cdot \nu \leq \nabla u(P_{S'}(x)) \cdot \nu \qquad \forall x \in \Omega \cap S^+ ,$$

quindi, per ogni compatto K tale che $P_{S'}(S) \subset K \subset \Omega$

$$\sup_{x \in \Omega \cap S^+} \nabla u(x) \cdot \nu \leq \sup_{x \in K} \nabla u(x) \cdot \nu \ .$$

Poichè u è localmente lipschitziana, segue la tesi. □

Osservazione 4.4.3. Nelle dimostrazioni delle proposizioni 4.4.1 e 4.4.2 si suppone solo che il funzionale sia della forma:

$$F(u) = \int_\Omega f(|\nabla u|) \, \mathrm{d}x \ ,$$

dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione inferiormente limitata per cui esiste una successione x_k tale che $x_k \to \infty$ e $f(x_k) \to \inf f$. Pertanto le proposizioni sono valide anche per funzionali diversi da (2.1), ed in particolare per G_∞.

4.5 Questioni di unicità e radialità

Affrontiamo ora i problemi dell'unicità e della simmetria nel caso in cui Ω sia un cerchio. Nelle pagine precedenti è stata ricavata la soluzione radiale ottimale, di cui si ottiene una descrizione esplicita in forma parametrica. A questo punto sorge spontaneo chiedersi se il minimo radiale rappresenti il minimo in C_M, ossia se le funzioni concave che minimizzano F debbano essere necessariamente radiali. Strettamente legato a questo problema è quello dell'unicità: infatti, se il minimo fosse unico, necessariamente dovrebbe essere radiale, viceversa, visto che il minimo radiale è unico, se il minimo in C_M fosse radiale, allora sarebbe unico.

Vediamo ora che in realtà non si ha ne l'una nè l'altra proprietà: infatti il minimo non è radiale e quindi non è unico. Una dimostrazione di questo fatto si trova in Brock & Kawohl & Ferone [4], in cui viene mostrato che la variazione seconda del funzionale è negativa sul minimo radiale. Noi useremo un altro approccio, esibendo concretamente per $M \geq 2$ una famiglia di funzioni a forma di "cacciavite", che oppongono una resistenza inferiore a quella del minimo radiale.

Proposizione 4.5.1 *Se Ω è un cerchio, le soluzioni del problema di Newton nella classe C_M sono non radiali per ogni $M \geq 2$.*

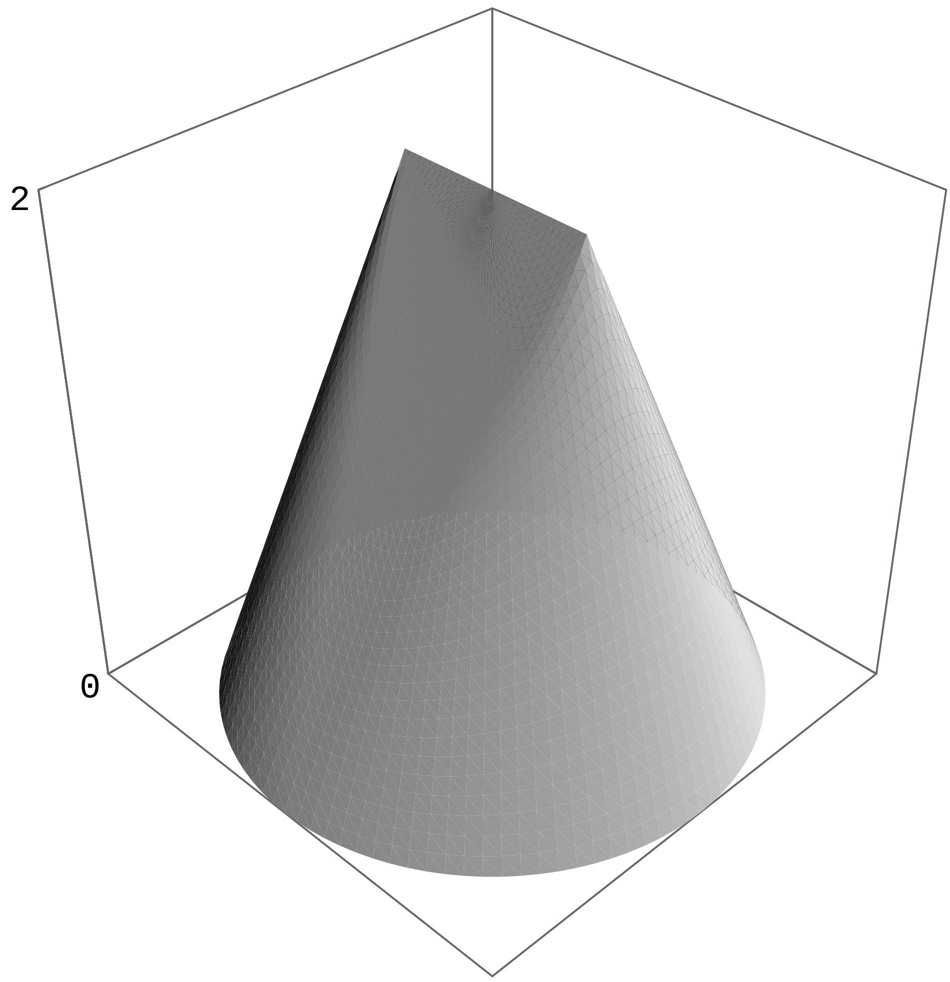
Dimostrazione. Usando la stessa notazione della sezione 4.1, ricordiamo la formula della soluzione radiale:

$$u_M(r) = M \qquad \forall r \in [0, r_0] \ ,$$

e per $r > r_0$ si utilizza la forma parametrica:

$$\begin{cases} r_M(t) = \dfrac{r_0}{4t}(1+t^2)^2 \\ u_M(t) = M - \dfrac{r_0}{4}\left(-\dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{4}t^4 + t^2 - \log t\right) \end{cases} \qquad \forall t \in [1, T] \ ,$$

Figura 4.10: Funzione "cacciavite"



dove r_0 e T sono definiti da:

$$T = f^{-1}\left(\frac{M}{R}\right) \qquad r_0 = \frac{4RT}{(1+T^2)^2} \ ,$$

con

$$f(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}\left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{4}t^4 + t^2 - \log t\right) \qquad \forall t \geq 1 \ .$$

Il funzionale calcolato su u_M vale

$$F(u_M) = \int_\Omega \frac{1}{1+|\nabla u_M|^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^R \frac{r}{1+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2}\,\mathrm{d}r =$$
$$=2\pi\int_0^R \frac{rr'}{1+\left(\frac{u'}{r'}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \pi r_0^2 + 2\pi\int_1^T \frac{rr'}{1+\left(\frac{u'}{r'}\right)^2}\,\mathrm{d}t\ ,$$

e quindi

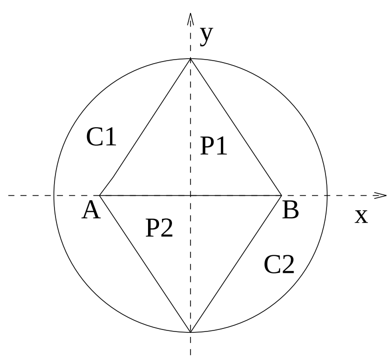
$$\frac{F(u_M)}{|\Omega|} = \frac{2}{R^2}\left(\frac{r_0^2}{2}+\int_1^T \frac{rr'}{1+\left(\frac{u'}{r'}\right)^2}\,\mathrm{d}t\right) =$$
$$=\frac{2T^2}{(1+T^2)^4}\left(8+\int_1^T \frac{(1+t^2)^2(3t^2-1)}{t^3}\,\mathrm{d}t\right) =$$
$$=\frac{2T^2}{(1+T^2)^4}\left(8+\log T+\frac{3}{4}T^4+\frac{5}{2}T^2+\frac{1}{2T^2}-\frac{15}{4}\right)\ ,$$

poichè per $M\to\infty$ si ha che $\frac{M}{R}\sim\frac{3}{4}T$ si ottiene

$$\frac{F(u_M)}{|\Omega|} \simeq \frac{27}{32}\left(\frac{M}{R}\right)^{-2} \approx 0,843\left(\frac{M}{R}\right)^{-2}\ .$$

Consideriamo ora le funzioni “cacciavite” definite come segue: per ogni $a, M > 0$ indichiamo con $V_{a,M} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ la funzione il cui sottografico coincide con l'inviluppo di tutti i coni di base uguale al cerchio Ω e di vertici appartenenti al segmento di estremi $A = (-a, M, 0)$ e $B = (a, 0, M)$ o, equivalentemente, all'intersezione del semispazio $\{z :\ z \geq 0\}$ e di tutti i semispazi contenenti il

Figura 4.11:



segmento $\overline{AB}$ e $\partial\Omega$. In forma cartesiana si ha:

$$V_{a,M}(x) = \begin{cases} M - \frac{M}{R}|y| & \text{se } x \in P1, P2 \\ C_A(x) & \text{se } x \in C1 \\ C_B(x) & \text{se } x \in C2 \end{cases},$$

dove C_A e C_B indicano le funzioni coniche di base Ω e di vertice rispettivamente A e B (vedi figura 4.11).

La funzione è quindi composta da quattro parti, di cui due sono piani e due sono parti dei coni aventi vertici A e B.

Per ogni M esisterà un a ottimale compreso tra 0 e R, e denotiamo con V_M la funzione cacciavite ottimale. Il funzionale, calcolato su V_M, vale:

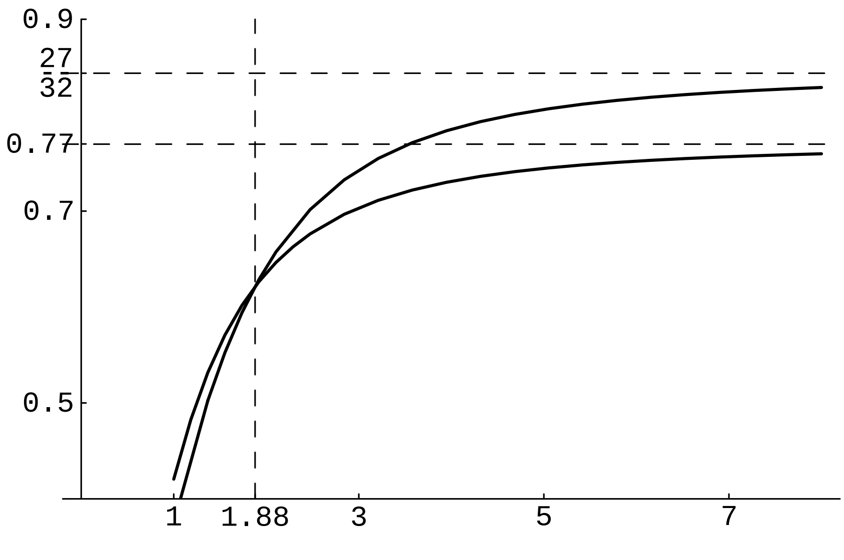
$$F(V_M) = \int_{P_1 \cup P_2} \frac{1}{1 + \left(\frac{M}{R}\right)^2} + \int_{C_A} \frac{1}{1 + |\nabla C_A(x)|^2} + \int_{C_B} \frac{1}{1 + |\nabla C_B(x)|^2},$$

e, per $M \to \infty$, si vede facilmente che

$$\frac{F(V_M)}{|\Omega|} \approx 0,77 \left(\frac{M}{R}\right)^{-2},$$

e quindi, per M sufficientemente grande le figure "cacciavite" sono preferibili a quelle radiali. Inoltre, confrontando i grafici delle funzioni $\frac{F(u_M)}{|\Omega|}\left(\frac{M}{R}\right)^2$ e $\frac{F(V_M)}{|\Omega|}\left(\frac{M}{R}\right)^2$ (vedi figura 4.12) si vede che la proposizione è verificata almeno per $M \geq 2$. $\square$

Figura 4.12: Grafici delle funzioni $\frac{F(u_M)}{|\Omega|}\left(\frac{M}{R}\right)^2$ e $\frac{F(V_M)}{|\Omega|}\left(\frac{M}{R}\right)^2$



Osservazione 4.5.2. Nel lavoro di Brock, Ferone e Kawohl ([4], osservazione 2.4) viene avanzata l'ipotesi che su un poligono regolare di N lati il profilo ottimale sia dato da una funzione w_N, simmetrica per rotazioni di ampiezza $\frac{2\pi}{N}$ e definita su ogni settore S di tale ampiezza come $u_M(x \cdot v)$, dove v è il versore che biseca S e u_M è la soluzione radiale ottimale (vedi figura 4.13 per $N = 4$). Le funzioni w_N infatti hanno la stessa resistenza relativa del minimo radiale e quindi questa ipotesi è molto simile a quella della radialità del minimo sul cerchio.

Come è stato suggerito dal Prof. Kawohl, l'impiego di funzioni "a cacciavite" mostra anche in questo caso che il minimo non è simmetrico. Infatti, sempre nel caso $N = 4$ si vede facilmente che una funzione "a tenda" (vedi figura 4.14) per M sufficientemente elevato offre una resistenza più bassa di quella di w_N. Analogamente si può verificare che la stessa proprietà vale per N qualsiasi.

Figura 4.13: Profilo simmetrico sul quadrato

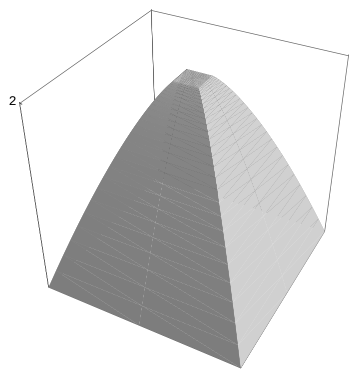
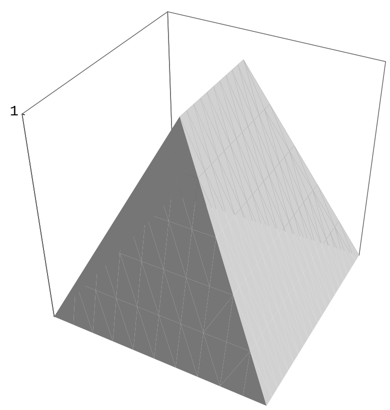


Figura 4.14: Profilo "a tenda", di resistenza inferiore



4.6 Il problema asintotico

In questa sezione presentiamo alcune considerazioni sul comportamento qualitativo della soluzione normalizzata del problema

$$\min \left\{ \int_\Omega \frac{1}{|\nabla v|^2} \, \mathrm{d}x : 0 \leq v \leq 1, \ v \text{ concava} \right\} . \tag{4.31}$$

Come si è visto in 2.2, la soluzione di questo problema rappresenta il comportamento asintotico delle soluzioni del problema di Newton sulla classe C_M per $M \to \infty$, nel senso che la successione delle soluzioni normalizzate dei problemi per M finito convergeranno in $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ alla soluzione del problema (4.31).

L'esistenza del minimo segue direttamente dal teorema 2.3.1, che si applica anche nella variante per Ω non convesso. Come già osservato, anche i risultati sul comportamento qualitativo nei pressi di $\partial\Omega$ si generalizzano senza problemi.

Tutt'altro accade invece per lo studio della pendenza e della zona piatta, dato che i risultati della sezione precedente perdono significato. Infatti, dette $v_M = \frac{u_M}{M}$ le soluzioni del problema di Newton in C_M, si ha che $|\nabla v_M| \notin (0, \frac{1}{M})$ e per $M \to \infty$ la tesi risulta identicamente verificata. Il funzionale G_∞ ha inoltre una singolarità per $|\nabla u| \to 0$, quindi la zona piatta non può esistere, e per $n = 2$ rimangono solo i casi in cui l'insieme di livello $L = \{x \in \Omega : v(x) = 1\}$ sia un punto o un segmento. Non si può tuttavia escludere il caso del punto, in quanto la disuguaglianza (4.29) non dà più informazioni.

Vediamo ora alcune considerazioni sul comportamento delle soluzioni del problema asintotico nei pressi di L: in particolare si vedrà che in ogni $x_0 \in L$ si ha $\lim_{x \to x_0} |\nabla v(x)| = 0$ e che nel caso $n = 2$, la funzione non può essere C^2.

Proposizione 4.6.1 *Sia v una soluzione del problema* (4.31). *Allora, per $n = 2$, la matrice hessiana $\nabla^2 v$ non può essere continua in alcun punto dell'insieme di livello $\{x \in \Omega : v(x) = 1\}$*

Dimostrazione. Supponiamo che si abbia $v(x) = 1$ e $\nabla^2 v$ continua in x. Allora, dal momento che 1 è il massimo di v, per la formula di Taylor si ha in un intorno $\mathcal{U}$ di x:

$$v(y) = 1 +^{\mathsf{T}} (y - x) \nabla^2 v(x)(y - x) + o(|y - x|^2) ,$$

e la matrice $\nabla^2 v$ è semidefinita negativa. Diagonalizzando $\nabla^2 v$ in una base $e_1, \ldots, e_n$ e ponendo per semplicità $z_k = y_k - x_k$, si ottiene

$$v(y) = 1 - \lambda_1 z_1^2 - \cdots - \lambda_n z_n^2 + o(|z|^2) ,$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$. Differenziando,

$$\nabla v(y) = -2\big(\lambda_1 z_1, \ldots, \lambda_n z_n\big) + o(|z|) ,$$

e dunque

$$|\nabla v(y)|^2 \leq 4\lambda |z|^2 \ ,$$

dove $\lambda > \max_k \lambda_k$. Detta $B(x,r)$ una palla contenuta in $\mathcal{U}$ e ponendo $\beta_n = \mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1})$, si ha che

$$G_\infty(v) = \int\limits_\Omega \frac{1}{|\nabla v|^2}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_{B(0,r)} \frac{1}{|\nabla v|^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{B(0,r)} \frac{1}{4\lambda(z_1^2+\cdots+z_n^2)}\,\mathrm{d}x \geq \frac{\beta_n}{4\lambda}\int\limits_0^r \frac{1}{\rho^2}\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho \ ,$$

ma per $n = 2$ si ottiene

$$G_\infty(V) \geq \frac{\beta_n}{4\lambda}\int\limits_0^r \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho = +\infty \ ,$$

che è chiaramente assurdo. □

Proposizione 4.6.2 *Sia v una soluzione del problema* (4.31)*. Allora per $n = 2$ si ha*

$$\lim_{x\to x_0} |\nabla v(x)| = 0 \qquad \forall x_0 \in L \ .$$

Lemma 4.6.3 *Sia v una soluzione normalizzata del problema* (2.2) *nella classe C_M e Ω_ε il sopralivello $\{x \in \Omega : v(x) > 1-\varepsilon\}$. Allora si ha che per ogni $\varepsilon > 0$*

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla v|^2}{\left(\frac{1}{M^2}+|\nabla v|^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{|\nabla v|^2}{\left(\frac{1}{M^2}+|\nabla v|^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \ ,$$

in particolare, per $M = \infty$, si ha

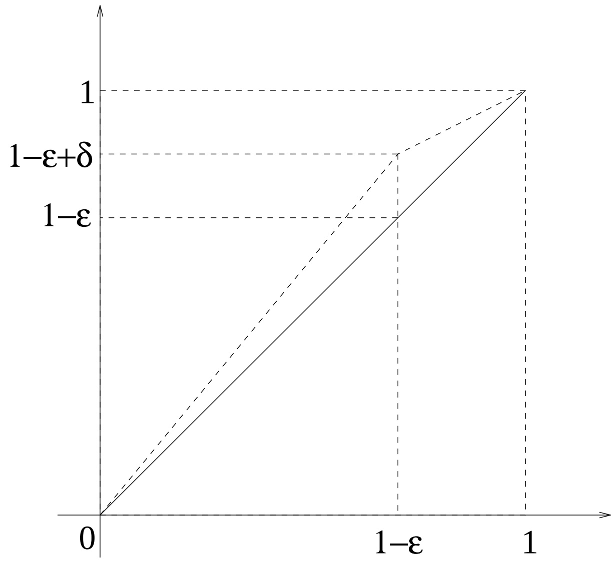
$$\int\limits_\Omega \frac{1}{|\nabla v|^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|\nabla v|^2}\,\mathrm{d}x \ .$$

Dimostrazione. Per ogni ε consideriamo le funzioni $v_\delta = w_\delta \circ v$, dove w_δ è definita da (vedere figura 4.15)

$$w_\delta(x) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{\delta}{1-\varepsilon}\right)x & \text{se } x \in [0, 1-\varepsilon] \\ \left(1-\dfrac{\delta}{\varepsilon}\right)x + \dfrac{\delta}{\varepsilon} & \text{se } x \in (1-\varepsilon, 1] \end{cases} .$$

Dal momento che le w_δ sono crescenti e concave, le v_δ sono concave per la

Figura 4.15: Grafico della funzione w_δ



proposizione 1.2.5. Calcoliamo ora la variazione

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{F_M(v_\delta)-F_M(v)}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}\left[f_M\left(\left(1+\tfrac{\delta}{1-\varepsilon}\right)|\nabla v|\right)-f_M(|\nabla v|)\right]\,\mathrm{d}x+$$

$$+\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\left[f_M\left(\left(1-\tfrac{\delta}{\varepsilon}\right)|\nabla v|-f_M(|\nabla v|)\right)\right]\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{1-\varepsilon}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}f_M'(|\nabla v|)|\nabla v|\,\mathrm{d}x-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}f_M'(|\nabla v|)|\nabla v|\,\mathrm{d}x\geq 0\ ,$$

da cui si ottiene

$$\int\limits_{\Omega}f_M'(|\nabla v|)|\nabla v|\,\mathrm{d}x\geq\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}f_M'(|\nabla v|)|\nabla v|\,\mathrm{d}x\ ,$$

ricordando che $f_M(x)=\frac{1}{\frac{1}{M^2}+x^2}$,

$$\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla v|^2}{\left(\frac{1}{M^2}+|\nabla v|^2\right)^2}\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{|\nabla v|^2}{\left(\frac{1}{M^2}+|\nabla v|^2\right)^2}\,\mathrm{d}x\ ,$$

e per $M\to\infty$,

$$\int\limits_{\Omega}\frac{1}{|\nabla v|^2}\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{|\nabla v|^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

□

Dimostrazione della proposizione 4.6.2. Per ogni ε consideriamo la funzione v_ε così definita:

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{r_{\Omega_\varepsilon}}\mathrm{dist}(x, \partial\Omega_\varepsilon) & \text{se } x \in \Omega_\varepsilon \\ v(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \end{cases} ,$$

dove r_{Ω_ε} è il massimo della funzione $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega_\varepsilon)$ in Ω_ε, ossia il massimo dei raggi delle palle n-dimensionali contenute in Ω_ε. Si verifica facilmente che v_ε è concava in quanto inf di concave. Ne segue che

$$|\nabla v_\varepsilon(x)| = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{r_{\Omega_\varepsilon}} & \text{se } x \in \Omega_\varepsilon \\ |\nabla v(x)| & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \end{cases} .$$

La condizione di minimo diventa

$$\frac{G_\infty(v_\varepsilon) - G_\infty(v)}{\varepsilon} = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{r_{\Omega_\varepsilon}^2}{\varepsilon^3} - \frac{1}{|\nabla v|^2} \right) \geq 0 \qquad \forall \varepsilon > 0 ,$$

cioè

$$\frac{r_{\Omega_\varepsilon}^2}{\varepsilon^3}|\Omega_\varepsilon| \geq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|\nabla v|^2}\, \mathrm{d}x ,$$

dal lemma 4.6.3 segue che

$$\frac{r_{\Omega_\varepsilon}^2}{\varepsilon^3}|\Omega_\varepsilon| \geq \int_{\Omega} \frac{1}{|\nabla v|^2}\, \mathrm{d}x .$$

Ponendo $F = \int_\Omega \frac{1}{|\nabla v|^2}\, \mathrm{d}x$ ed utilizzando le disuguaglianze

$$\mathrm{diam}(\Omega_\varepsilon) \geq 2r_{\Omega_\varepsilon} \qquad \text{e} \qquad \frac{\pi}{4}\mathrm{diam}(\Omega_\varepsilon)^2 \geq |\Omega_\varepsilon| ,$$

si ottiene

$$\mathrm{diam}(\Omega_\varepsilon) \geq \varepsilon^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\frac{16}{\pi}F} , \tag{4.32}$$

Se esistessero un $\varepsilon > 0$ ed una costante $k > 0$ per cui $|\nabla v| \geq k$ per ogni $x \in \Omega_\varepsilon$, allora si avrebbe per $\varepsilon \to 0$

$$\mathrm{diam}(\Omega_\varepsilon) \sim 2k\varepsilon .$$

che è in contraddizione con la (4.32). □

Osservazione 4.6.4. La (4.32) ci dice che i diametri dei sopralivelli se convergono a zero lo fanno comunque piuttosto lentamente. In effetti si può verificare che nel caso radiale

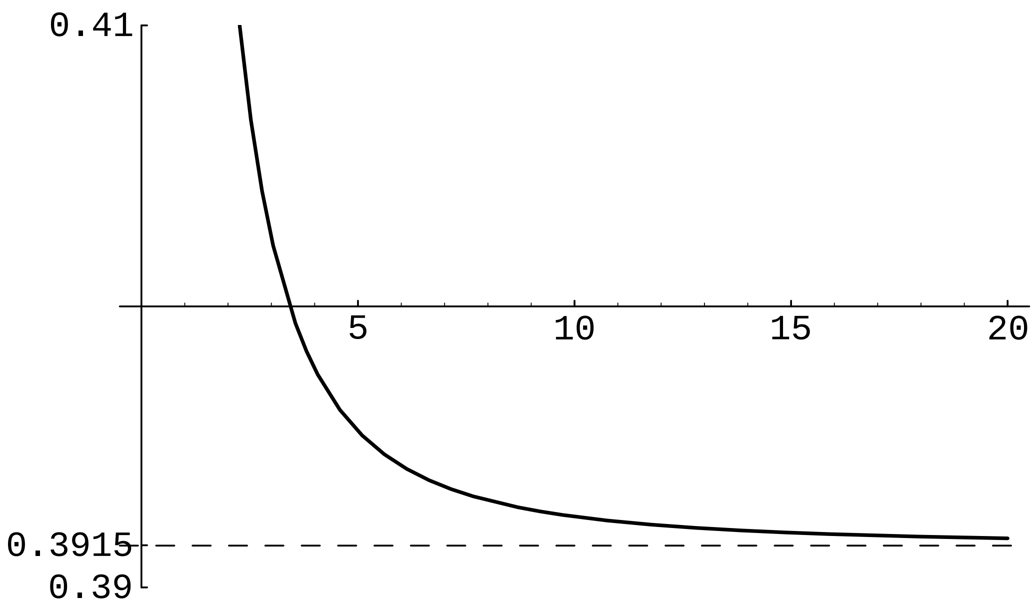
$$\mathrm{diam}(\Omega_\varepsilon) = O(\varepsilon^{\frac{3}{4}}) .$$

4.7 Problemi aperti

Formuliamo qui alcune congetture sulle proprietà qualitative delle soluzioni insieme alle motivazioni euristiche che ci inducono a ritenerle ragionevoli.

Come si è visto nella sezione 4.3, non si sa ancora se per M sufficientemente grande la misura della zona piatta Ω_M si annulli ovvero se resti positiva per valori di M arbitrariamente elevati. Se si verificasse la seconda ipotesi, tuttavia, dalla proposizione 4.3.4 abbiamo visto che $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_M)$ dovrebbe necessariamente convergere a zero per $M \to \infty$. Questa eventualità sembra però contrastare con alcuni indizi che si hanno dal caso radiale. Infatti, se si considerano le funzioni "cacciavite", e si calcola il limite della lunghezza ottimale della "punta", si vede che converge ad un numero positivo (vedi figura 4.16)

Figura 4.16: Grafico della lunghezza della "punta" ottimale, in funzione di M



Se le zone piatte delle funzioni "cacciavite" approssimassero bene quelle dei profili ottimali, allora si dovrebbe ottenere $\liminf_{M\to\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_M) > 0$, e quindi la zona piatta dovrebbe sparire da un certo M in poi.

Enunciamo dunque la seguente:

Congettura 4.7.1 *Per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ esiste M_Ω tale che per ogni $M > M_\Omega$, la soluzione del problema* (2.2) *associato a Ω nella classe M è una funzione che assume il valore M in un insieme di misura nulla, che per quanto detto nella sezione 4.3 dovrà essere un segmento.*

Per la proposizione 4.3.4, la congettura sopra sarebbe implicata dalla seguente:

Congettura 4.7.2 *Per ogni aperto Ω, si ha che* $\liminf_{M\to\infty} \mathcal{H}^{n-1}\left(\partial\Omega_M\right) > 0$.

Osservazione 4.7.3. Si noti che l'implicazione non è reversibile, in quanto la zona piatta potrebbe sparire, ma la lunghezza del segmento residuo potrebbe convergere a zero per $M \to \infty$.

Osservazione 4.7.4. Se $\liminf_{M\to\infty} \mathcal{H}^{n-1}\left(\partial\Omega_M\right) > 0$, allora $\mathcal{H}^{n-1}\left(\partial\Omega_\infty\right) > 0$, dal momento che $\Omega_\infty \supset \liminf_{M\to\infty} \Omega_M$. In generale, tuttavia, si ha solo l'inclusione stretta, per cui la condizione $\mathcal{H}^{n-1}\left(\partial\Omega_\infty\right) > 0$ non è sufficiente per portare alla sparizione della zona piatta.

Osservazione 4.7.5. Le funzioni "cacciavite", pur furnendo un esempio di profili di resistenza inferiore al minimo sulle radiali, per $\frac{M}{R} \geq 2$, non possono essere le soluzioni del problema, in quanto non soddisfano la tesi della proposizione 4.6.2

Bibliografia

[1] R. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 1975.

[2] B. Botteron, P. Marcellini. *A general approach to the existence of minimizers of one-dimensional noncoercive integrals of the calculus of variations.* Ann. Inst. H. Poincarè Analyse non Linèaire, **8** (1991), 197–223.

[3] H. Brezis. *Analyse Fonctionelle-Théorie et Application.* Masson, Paris, 1983.

[4] F. Brock, B. Kawohl, V. Ferone. *A Symmetry Problem in the Calculus of Variations.* to appear on: Calculus of Variations.

[5] G. Buttazzo. *Semicontinuity, Relaxation and integral representation in the Calculus of Variations*, volume 207. Longman, Harlow, 1989.

[6] G. Buttazzo. *Semicontinuità inferiore di funzionali definiti su BV.* In *Equazioni Differenziali e Calcolo delle Variazioni*, volume 39, 197–235, Bologna, 1995. U.M.I., Pitagora Editrice.

[7] G. Buttazzo, V. Ferone, B. Kawohl. *Minimum problems over sets of concave functions and related questions.* Math. Nachr. (1995), 71–89.

[8] G. Buttazzo, B. Kawohl. *On Newton's problem of minimal resistance.* Math. Intelligencer (1993), 7–12.

[9] B. Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*, volume 78. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.

[10] E. De Giorgi. *Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio a r dimensioni.* Ann. Mat. Pura Appl. Ser IV, **36** (1954), 191–213.

[11] E. De Giorgi. *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio a r dimensioni.* Ric. Mat., **4** (1955), 95–113.

[12] H. Federer. *Geometric Measure Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[13] P. Funk. *Variationsrechnung und ihre Anwendungen in Physik und Technik*, volume 94. Springer-Verlag, Heidelberg, 1962.

[14] E. Giusti. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation.* Birkhäuser, Boston, 1984.

[15] H. H. Goldstine. *A History of the Calculus of Variations fron the* 17^{th} *through the* 19^{th} *Century.* Springer-Verlag, Heidelberg, 1985.

[16] P.R. Halmos. *Measure Theory.* Van Nostrand, Princeton, 1965.

[17] W. D. Hayes, R. F. Probstein. *Hypersonic Flow Theory.* Academic Press, New York, 1966.

[18] B. Kawohl, C. Schwab. *Convergent Finite Elements for a class of nonconvex variational problems.* http://www.mi.uni-koeln.de/Preprint/data/kawohl.ps, Maggio 1995.

[19] A. Kneser. *Ein Beitrag zur Frage nach der zweckmäßigsten Gestalt der Geschoßspitzen.* Archiv der Mathematik und Physik, **2** (1902), 267–278.

[20] P. Marcellini. *Approximation of quasiconvex funcions and lower semicontinuity of multiple integrals.* Manuscripta Mathematica, **51** (1985), 1–28.

[21] P. Marcellini. *Nonconvex integrals of the Calculus of Variations.* In A. Cellina, editor, *Proceedings of "Methods of Nonconvex Analisys"*, volume 1446, 16–57, Heidelberg, 1990. CIME, Springer-Verlag.

[22] G. Dal Maso. *An introduction to* Γ*-convergence.* Birkhäuser, Boston, 1993.

[23] G. Dal Maso. *Problemi di semicontinuità e rilassamento nel Calcolo delle Variazioni.* In *Equazioni Differenziali e Calcolo delle Variazioni*, volume 39, 145–196, Bologna, 1995. U.M.I., Pitagora Editrice.

[24] V.G. Maz'ja. *Sobolev Spaces.* Springer-Verlag, 1985.

[25] A. Miele. *Theory of Optimum Aerodynamic Shapes.* Academic Press, New York, 1965.

[26] C. B. Morrey. *Multiple integrals in the Calculus of Variations*, volume 130. Springer-Verlag, Heidelberg, 1966.

[27] I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* 1686.

[28] F. Nicolai. *Un Modello Variazionale per l'Ottimizzazione di Profili Aerodinamici.* Tesi di laurea, Università di Pisa, 1994.

[29] H. Rademacher. *Über partielle und totale Differenzierbarkeit.* Math. Ann., **79** (1919), no. I, 340–359.

[30] Y.G. Reshetnyak. *Weak convergence of completely additive vector measures on a set.* Sibirskii Mat. Zh., **9** (1968), 1039–1045, 1386–1394.

[31] C. Rogers. *Hausdorff Measures.* Cambridge University Press, London, 1970.

[32] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* Mc Graw Hill, New York, 1966.

[33] M. Struwe. *Variational Methods.* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[34] L. Tonelli. *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Zanichelli, Bologna, 1923.

[35] M. Valadier. *Young Measures.* In A. Cellina, editor, *Proceedings of "Methods of Nonconvex Analisys"*, volume 1446, 16–57, Heidelberg, 1990. CIME, Springer-Verlag.

[36] D.T. Whiteside. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, volume I. Cambridge University Press, London, 1974.

[37] Young. *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory.* Saunders, New York, 1969.

[38] W.P. Ziemer. *Weakly differentiable functions.* Springer-Verlag, New York, 1989.