Il Problema di Chebyshev

Erich Monteleone

23 Giugno 2000

Un sottoinsieme chiuso C di uno spazio di Hilbert H con norma $\|\cdot\|$ si dice *insieme di Chebyshev* se per ogni punto x in H vi è in C un unico punto $p(x)$ di minima distanza da x, cioè:

$$\|x - p(x)\| = d(x, C) \text{ e } \|x - y\| > \|x - p(x)\| \text{ se } y \in C \text{ e } y \neq p(x),$$

in questo caso, la funzione $x \mapsto p(x)$ si dice *proiezione metrica* su C.
Una delle proprietà fondamentali di uno spazio di Hilbert è quella che ogni insieme chiuso e convesso è un insieme di Chebyshev.
Viene allora spontaneo chiedersi se valga anche l'inverso:

un insieme di Chebyshev è convesso?

Vari autori hanno provato che sotto alcune ipotesi aggiuntive la risposta a tale domanda è affermativa. Klee in [6] ha fornito evidenze per l'esistenza di un Chebyshev non convesso.
Al momento attuale il problema rimane aperto.

Il termine "insieme di Chebyshev" è stato introdotto da Efimov e Stechkin [4] nel 1961 cercando di stabilire se l'insieme delle funzioni razionali

$$R_{n,m} = \left\{ \frac{a_0 + a_1 x ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x ... + b_m x^m} \;\middle|\; a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

fosse un insieme con proiezione unica in $L^p(0,1)$ (Chebyshev [3] aveva provato tale risultato in $C([0,1])$).
Sebbene il problema di Chebyshev venga esplicitamente formulato nella forma attuale proprio in [4] e indipendentemente nei lavori di Klee, vari autori avevano considerato questioni molto simili a partire dai primi anni del secolo. Risulta dunque difficile stabilire se vi sia stato un vero e proprio autore del problema.

Vediamo sinteticamente un panorama storico dei risultati più importanti inerenti il problema:

- Nel 1934 Bunt [2] dimostra che nel piano euclideo un insieme di Chebyshev è convesso.
- Nel 1938 Kritikos [7] sulla base dei risultati di Bunt estende il teorema agli spazi $\mathbb{R}^d$.
- Nel 1961 Efimov e Stechkin [4] mostrano come in uno spazio di Hilbert generale un insieme di Chebyshev *approssimativamente compatto* è convesso.

  Un insieme C di uno spazio normato X si dice approssimativamente compatto se dato $x \in X$ e una successione di punti $y_n \in C$ con $\|x - y_n\| \to d(x, C)$, esiste una sottosuccessione y_{n_k} e un punto $y \in C$ tale che $y_{n_k} \to y$.
- Nel 1961 Klee [5] mostra che un Chebyshev, chiuso nella topologia debole è convesso.
- Nel 1969 Asplund [1] dimostra che un insieme di Chebyshev con proiezione metrica continua è convesso.

Segue dal risultato di Asplund che il problema di Chebyshev si può riformulare come segue:

un insieme di Chebyshev ha proiezione metrica continua?

Come dicevamo, al momento si conosce la risposta solo in dimensione finita. Vi sono varie ipotesi su C che garantiscono la continuità della proiezione metrica, la più interessante delle quali è la chiusura debole di C. Si noti che il fatto che in $\mathbb{R}^d$ la topologia debole coincida con la forte rende questa ipotesi superflua e fornisce una motivazione euristica della forte differenza tra il caso finito e quello infinito–dimensionale.

1 Il Caso $H = \mathbb{R}^d$

Esistono molte dimostrazioni della convessità degli insiemi di Chebyshev in dimensione finita, alternative a quella di Kritikos [7]. Quella che mostriamo apparentemente non è presente in letteratura e l'unico risultato non elementare sfruttato è la non contraibilità delle sfere in dimensione finita.

Consideriamo un insieme di Chebyshev $C \subset \mathbb{R}^d$ e sia $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ la proiezione metrica. Denoteremo con $\|x\|$ la norma euclidea di $x \in \mathbb{R}^d$, con $B_r(x)$ la palla aperta di raggio r e di centro x e con $[x, y]$ il segmento chiuso in $\mathbb{R}^d$ determinato dai due punti x, y.

Proposizione 1.1. *La proiezione metrica $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è continua.*

Dimostrazione. Se non lo fosse si troverebbe una successione x_n di punti in $\mathbb{R}^d$ che tende ad $x \in \mathbb{R}^d$ e un intorno aperto U di $p(x)$ tale che $p(x_n) \notin U$. Si ha

$$\begin{aligned}\|x - p(x_n)\| &\leq \|x - x_n\| + \|x_n - p(x_n)\| \\ &\leq \|x - x_n\| + \|x_n - p(x)\| \\ &\leq \|x - x_n\| + \|x - x_n\| + \|x - p(x)\|\end{aligned}$$

dove la seconda diseguaglianza segue dal fatto che $p(x_n)$ è il punto di C più vicino ad x_n. Poiché i tre addendi dell'ultimo membro sono limitati, la successione $p(x_n)$ è limitata.
Per compattezza si può allora trovare una sottosuccessione $p(x_{n_k})$ convergente ad un punto z appartenente a C, poiché C è chiuso, tale che $z \notin U$. In particolare si ottiene che z è diverso da $p(x)$.
Vediamo ora che questo è assurdo: si ha

$$\begin{aligned}\|x - z\| &\leq \|x - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - z\| \\ &\leq \|x - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - p(x_{n_k})\| + \|p(x_{n_k}) - z\| \\ &\leq \|x - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - p(x)\| + \|p(x_{n_k}) - z\| \\ &\leq \|x - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| + \|x - p(x)\| + \|p(x_{n_k}) - z\|.\end{aligned}$$

Passando al limite su k si ottiene allora che $\|x - z\| \leq \|x - p(x)\|$.
Poiché $p(x)$ è l'unico punto di minima distanza di x da C, segue che $z = p(x)$ da cui la contraddizione. $\square$

Osservazione 1.2. Si noti che applicando il risultato generale di Asplund si potrebbe già concludere che C è convesso.

Lemma 1.3. *L'insieme C è contraibile.*

Dimostrazione. La mappa p è una funzione continua che lascia C fissato.
Sia $z \in C$ e $L(x, t) = tz + (1 - t)x$, per $t \in [0, 1]$ e $x \in \mathbb{R}^d$. L'applicazione L retrae $\mathbb{R}^d$ nel punto z, quindi l'applicazione definita da $R(x, t) = p(L(x, t))$, per $t \in [0, 1]$ e $x \in C$ è una retrazione tra l'insieme C e il punto z. $\square$

Lemma 1.4. *Se $x \in \mathbb{R}^d$ e $z \in [x, p(x)]$, allora $p(z) = p(x)$.*

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}d(z, C) &\leq \|z - p(x)\| = \|x - p(x)\| - \|x - z\| = d(x, C) - \|x - z\| \\ &\leq \|x - z\| + d(z, C) - \|x - z\| = d(z, C)\end{aligned}$$

dove la prima uguaglianza segue da $z \in [x, p(x)]$ e la seconda diseguaglianza dalla diseguaglianza triangolare.
Quindi $\|z - p(x)\| = d(z, C)$ e per l'unicità del punto di distanza minima, $p(x) = p(z)$ □

Teorema 1.5. *Un insieme di Chebyshev in $\mathbb{R}^d$ è convesso.*

Dimostrazione. Per assurdo consideriamo un insieme di Chebyshev $C \subset \mathbb{R}^d$ non convesso. Dal fatto che C è chiuso segue che possiamo trovare due punti a e b in C tali che i punti interni al segmento $[a, b]$ non stiano in C.
Sia x il punto medio di $[a, b]$ che quindi non appartiene a C e sia $y = p(x)$.
Si ha che $y \neq a$ e $y \neq b$ altrimenti a e b sarebbero due diversi punti diversi di minima distanza di x da C.
Consideriamo ora la semiretta che partendo da y taglia il segmento $[a, b]$ in x. Esisterà un punto z su tale semiretta tale che $p(z) \neq y$, infatti è facile verificare che per punti abbastanza lontani da x la distanza da a o da b sarà minore di quella da y.
Sia ora S la sfera di centro y e raggio $\|z - y\|$. Se w è un punto qualsiasi su tale sfera si ha che x non può appartenere al segmento $[w, p(w)]$. Se così fosse, per il Lemma 1.4, si avrebbe $p(w) = p(x) = y$ e $x \in [w, y]$. Poiché l'unico punto di S che interseca la semiretta da y per x è z si concluderebbe che $w = z$ che è assurdo in quanto abbiamo scelto z in modo che $p(z) \neq y$.
Denotiamo con $p(S) \subseteq C$ l'immagine della sfera S per la mappa p.
Definiamo la mappa $K(s, t) = tp(x) + (1-t)x$ per $t \in [0, 1]$ e $s \in S$. Un punto generico s della sfera viene retratto su C dall'applicazione K muovendosi lungo il segmento $[s, p(s)]$, quindi per quanto visto sopra senza passare per il punto x. Se ora R è la retrazione del Lemma 1.3, la retrazione $T = R * K$, definita da

$$\begin{aligned} T(s,t) &= K(s, 2t) && \text{per } x \in S \text{ e } t \in [0, 1/2] \\ T(s,t) &= R(K(s, 1), 2t - 1) && \text{per } s \in S \text{ e } t \in [1/2, 1] \end{aligned}$$

deforma la sfera S in un punto senza mai passare per il punto x, interno a S. Questo fatto implicherebbe la contraibilità della sfera S che invece è impossibile (la sfera e il punto differiscono nei gruppi di omologia e quindi non possono essere omotopicamente equivalenti). □

2 Il Caso di Dimensione Infinita

L'elegante dimostrazione del seguente teorema si deve ad Asplund [1].

Teorema 2.1. *Un insieme di Chebyshev con proiezione metrica continua è convesso.*

Dimostrazione. Sia C un insieme di Chebyshev non convesso nello spazio di Hilbert H.
Sia p la proiezione metrica su C supposta continua, $\|x\|$ la norma di $x \in H$ e $x \cdot y$ il prodotto scalare in H tra x e y.
Possiamo assumere senza perdita di generalità che l'origine di H appartenga al convessificato di C ma non a C.

1) L'*inversione rispetto alla sfera unitaria* $f : x \mapsto x/\|x\|^2$ trasforma C in un insieme limitato $G = f(C)$, per come abbiamo scelto l'origine di H e per il fatto che C è chiuso.

2) Ogni palla chiusa $\overline{B}_r(x)$ contenente G deve contenere anche l'origine al suo interno, cioè deve essere $\|x\| < r$.
Se fosse infatti $\|x\| \geq r$ allora G sarebbe contenuto nel semispazio aperto $\{y \,|\, x \cdot y > 0\}$. Osservando che la mappa $f = f^{-1}$ trasforma ogni semispazio aperto in sé stesso, ne seguirebbe che anche C e quindi il suo convessificato, sono contenuti in tale semispazio aperto. Questo è chiaramente in contraddizione con l'ipotesi che il convessificato di C contenga l'origine.

3) Dato x in H si consideri la funzione $t(x) = \sup_{y \in G} \|x - y\|$. Questa è convessa in quanto estremo superiore di funzioni convesse ed essendo G limitato è anche localmente limitata, da questi due fatti segue allora che è continua.
Inoltre, t non è mai nulla in quanto ciò implicherebbe che G (e quindi C) è costituito da un singolo punto, contraddicendo l'ipotesi che C non è convesso.
Si osservi che $\overline{B}_{t(x)}(x)$ è la palla chiusa di centro x e contenente G, di raggio minimo.
Infine, per il punto precedente $t(x) > \|x\|$ quindi $\lim_{\|x\| \to \infty} t(x) = +\infty$.

4) L'immagine per l'inversione f di $\overline{B}_{t(x)}(x) \backslash \{0\}$ è il complementare della palla aperta $B_{t(x)/(t^2(x) - \|x\|^2)}(-x/(t^2(x) - \|x\|^2))$ che ha intersezione vuota con C.
Vediamo che il suo raggio è proprio la distanza del suo centro $-x/(t^2(x) - \|x\|^2)$ da C. Se così non fosse applicando di nuovo l'inversione si avrebbe che G ha distanza positiva dal bordo della palla chiusa $\overline{B}_{t(x)}(x)$ e questo sarebbe in contraddizione con la minimalità di quest'ultima.

5) Poiché l'insieme C è di Chebyshev ci deve allora essere uno ed un solo punto di C sul bordo della palla $B_{t(x)/(t^2(x) - \|x\|^2)}(-x/(t^2(x) - \|x\|^2))$ che sarà dunque

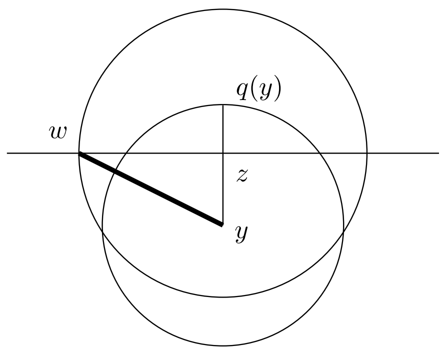
la proiezione metrica del suo centro $p(-x/(t^2(x) - \|x\|^2))$. Di conseguenza c'è uno ed un solo punto di G sul bordo della palla $\overline{B}_{t(x)}(x)$, che quindi è il punto di G di massima distanza da $x \in H$.
La funzione $q : H \to H$ che associa ad x questo punto di massima distanza è allora definita da

$$q(x) = f(p(-x/(t^2(x) - \|x\|^2))) = \frac{p(-x/(t^2(x) - \|x\|^2))}{\|p(-x/(t^2(x) - \|x\|^2))\|^2} .$$

Si noti che $x \neq q(x)$ per ogni x in quanto t è sempre positiva (punto 3).

6) Segue dalla definizione che q è una funzione continua.
Infatti, t è continua, il denominatore $(t^2(x) - \|x\|^2)$ è sempre positivo (punto 3), $0 \notin C$ e la proiezione metrica è continua per ipotesi (si noti che questo è il punto chiave in cui entra l'ipotesi di continuità della proiezione metrica su C).

7) La funzione t ha minimo in quanto in uno spazio di Hilbert una funzione convessa, continua e che tende all'infinito per x che va all'infinito assume minimo.



Per concludere la dimostrazione studiamo la funzione q nell'intorno di un punto di minimo y della funzione t e troviamo una contraddizione.
Consideriamo un punto z interno al segmento $[y, q(y)]$, per ipotesi si ha $\|z - q(z)\| = t(z) \geq t(y)$. Proviamo che $q(z)$ appartiene al semispazio $\{x \mid (x-z) \cdot (q(y) - y) < 0\}$. La distanza di y dalla semisfera chiusa

$$\partial\overline{B}_{t(z)}(z) \cap \{x \mid (x - z) \cdot (q(y) - y) \geq 0\}$$

è data da $(\|y-z\|^2+t(z)^2)^{1/2} > t(z) \geq t(y)$ (vedi la figura), quindi poichè G è contenuto nella palla chiusa $\overline{B}_{t(y)}(y)$, non vi sono punti di G su tale semisfera.
Dato che $q(z) \in G$ appartiene alla sfera $\partial\overline{B}_{t(z)}(z)$, deve allora stare sull'altra

semisfera e dunque nel semispazio $\{x \mid (x-z) \cdot (q(y)-y) < 0\}$.
Questo implica

$$(q(z)-z) \cdot (q(y)-y) < 0$$

e poichè q è continua, mandando $z \to y$ lungo il segmento $[y, q(y)]$ si ottiene $t(y) = \|q(y)-y\| = 0$, ciò contraddice il fatto che t è sempre positiva. $\square$

Concludiamo questa discussione del problema di Chebyshev con la dimostrazione che se un insieme di Chebyshev è chiuso nella topologia debole di H, la sua proiezione metrica è continua. Segue dal teorema di Asplund che quindi è convesso.
Tale risultato provato per primo da Klee [5] può essere considerato quello attualmente più generale sul problema, altri risultati più o meno recenti, come per il caso della chiusura debole, vanno nella direzione di avere qualche forma di compattezza per l'insieme C.

Proposizione 2.2. *Un insieme di Chebyshev $C \subset H$ chiuso nella topologia debole di H ha proiezione metrica continua.*

Dimostrazione. Sia $x_n \to x$, con la stessa dimostrazione del caso finito dimensionale (vedi la Proposizione 1.1) la successione $p(x_n)$ è limitata, quindi per la compattezza delle palle chiuse nella topologia debole di H si ottiene una sottosuccessione $p(x_{n_k})$ convergente debolmente ad un punto z che appartiene a C in quanto chiuso debole.
Poichè la norma di H è semicontinua inferiormente nella topologia debole e la funzione distanza da C è continua in topologia forte, si ha

$$\|x-z\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_{n_k} - p(x_{n_k})\| = \liminf_{k\to\infty} d(x_{n_k}, C) = d(x, C)\,.$$

Per l'unicità del punto di minima distanza segue allora che $p(x) = z$.
Ponendo dunque $y_{n_k} = x_{n_k} - p(x_{n_k})$ abbiamo che y_{n_k} converge debole a $x - p(x)$ e $\|y_{n_k}\| \to \|x-p(x)\|$: in uno spazio di Hilbert questo implica che allora y_{n_k} converge *forte* a $x - p(x)$ e dunque $p(x_{n_k})$ converge a $p(x)$.
Questo dimostra la continuità della proiezione metrica su C. $\square$

Referenze

[1] E. Asplund, Chebyshev sets in Hilbert space, Trans. Amer. Math. Soc. 144, 235–240 (1969).

[2] L. N. H. Bunt, Bijdrage tot de theorie der convexe puntverzamelingen, Thesis, Univ. Groningen, Amsterdam (1934).

[3] P. L. Chebyshev, Questions of the smallest values, connected with the approximate representation of functions, Collected Works, Vol. II, 151–235 (1859).

[4] N. V. Efimov e S. B. Stechkin, Approximative compactness and Chebyshev sets, Dokl. Akad. Nauk SSSR 140, 522–524 (1961).

[5] V. L. Klee, Convexity of Chebyshev sets, Math Annalen 142, 292–304 (1961).

[6] V. L. Klee, Remarks on nearest points in normed linear spaces, Kobenhavns Univ. Mat. Inst., Copenhagen, 168–176 (1967).

[7] N. Kritikos, Sur quelques propriétés des ensembles convexes, Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40, 87–92 (1938).