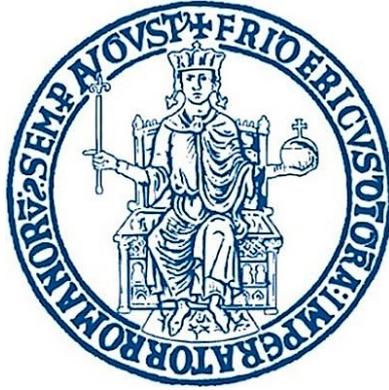


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II  
SCUOLA POLITECNICA DELLE SCIENZE DI BASE

---



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI  
"RENATO CACCIOPOLI"  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

# La Formula di Santaló

TESI DI LAUREA

RELATORE  
PROF. CARLO MANTEGAZZA

CANDIDATO  
AURORA CORBISIERO  
Matr. N87001801

ANNO ACCADEMICO 2022/2023

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Superfici regolari</b>	<b>4</b>
<b>2 Curvatura</b>	<b>16</b>
<b>3 Varietà riemanniane</b>	<b>34</b>
<b>4 La formula di Santaló</b>	<b>43</b>
<b>Referenze</b>	<b>53</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>53</b>

# Introduzione

Questa tesi ha come obiettivo quello di enunciare e dimostrare la *formula di Santaló* (provata dal matematico spagnolo Luis Antoni Santaló, nel 1952), nonché di mostrarne un'applicazione alle disuguaglianze isoperimetriche su varietà riemanniane a curvatura nonpositiva. La formula è relativa all'integrazione di insiemi di vettori nel fibrato tangente unitario  $SM$  di una varietà riemanniana  $(M, g)$  di dimensione  $n$ . Considerato un dominio limitato  $\Omega \subseteq M$  e detto  $S\Omega$  il fibrato tangente unitario del dominio, abbiamo una misura naturale (prodotto)  $\mu = \sigma \times \lambda_g$  su  $S\Omega$ , dove  $\lambda_g$  è la misura riemanniana canonica della varietà e  $\sigma$  è la misura sulle fibre (che sono delle sfere  $(n-1)$ -dimensionali). Vedremo (sotto un'ipotesi tecnica sulle curve geodetiche in  $\Omega$ ) che l'integrale

$$\int_{S\Omega} F d\mu$$

si può esprimere come (*formula di Santaló* – Teorema 4.3)

$$\int_{S\Omega} F d\mu = \int_{S^+\partial\Omega} g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) \int_0^{\tau(\xi)} F(\Phi_t(\xi)) dt d\zeta(\xi),$$

dove  $S^+\partial\Omega$ , è l'insieme dei vettori tangenti a  $M$  nei punti del bordo di  $\Omega$ , tali che il prodotto scalare tra essi e il vettore unitario  $\nu_{\pi(\xi)}$  normale a  $\partial\Omega$  che “punta” verso l'interno del dominio, sia positivo,  $\Phi_t$  è il flusso geodetico,  $d\zeta$  è la misura prodotto tra la misura di Hausdorff  $(n-1)$ -dimensionale del bordo e la misura  $\sigma$  sulle fibre, infine,  $\tau(\xi)$  è il primo tempo positivo per cui la geodetica di velocità unitaria iniziale  $\xi$ , incontra  $\partial\Omega$ .

Questa formula è una sorta di teorema di Fubini–Tonelli “geometrico” sul fibrato tangente unitario e, legando un integrale su  $\Omega$  (decomponendo la misura prodotto su  $S\Omega$ ) a un integrale su  $\partial\Omega$  (esplicitando quello su  $S^+\partial\Omega$ ), è allora molto utile per ottenere disuguaglianze geometriche. Un facile esempio è la seguente conclusione (Corollario 4.3), che si ottiene immediatamente ponendo  $F = 1$  nella formula,

$$\text{Vol}(\Omega) = \frac{1}{\alpha_{n-1}} \int_{S^+\partial\Omega} \tau(\xi) g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) d\zeta(\xi) \leq \frac{\text{diam}(\Omega) \alpha_{n-2}}{(n-1) \alpha_{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega),$$

dove  $\alpha_k$  è la misura della sfera unitaria  $k$ -dimensionale.

Un'applicazione più elaborata e importante è stata sviluppata da C. B. Croke in [5] (Teorema 4.4), per mostrare delle disuguaglianze isoperimetriche sulle varietà con curvatura nonpositiva, provando in dimensione quattro la congettura che la costante isoperimetrica di  $\mathbb{R}^n$  sia ottimale per tutte le varietà riemanniane a curvatura nonpositiva, di dimensione  $n$  (il problema è attualmente aperto dalla dimensione cinque in su).

La tesi si divide in quattro capitoli. Nel primo capitolo introduciamo le superfici regolari e i concetti di piano tangente, vettori normale, orientabilità, prima forma fondamentale e area di una regione. Il secondo capitolo è relativo alla curvatura delle superfici. Definiamo la mappa di Gauss e la seconda forma fondamentale, nonché la curvatura gaussiana e la curvatura media. Ricaviamo le equazioni di Gauss–Weingarten e di Codazzi–Mainardi e dimostriamo il *teorema egregium* di Gauss. Definiamo poi la derivata covariante, il trasporto parallelo e le curve geodetiche su una superficie. Infine, discutiamo il *teorema di Gauss–Bonnet*. Nel terzo capitolo introduciamo alcuni elementi di base di geometria riemanniana, con lo scopo di definire e analizzare le geodetiche sulle varietà riemanniane (e il relativo flusso), nonché di avere un concetto di curvatura delle stesse, seguendo un approccio “storico” di Riemann, basato sulla curvatura gaussiana delle superfici. L’ultimo capitolo tratta la formula di Santaló e l’applicazione di Croke alle disuguaglianze isoperimetriche sulle varietà con curvatura nonpositiva.

# Capitolo 1

## Superfici regolari

Riferimenti standard per questo capitolo e il seguente, sono i libri di M. P. Do Carmo [6] e I. Chavel [4].

**Definizione 1.1.** Un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  è una *superficie regolare* se per ogni  $p \in S$ , esistono  $V$  intorno di  $p$  in  $\mathbb{R}^3$  e una funzione  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subseteq \mathbb{R}^3$ , tali che:

1.  $\mathbf{x}$  è di classe  $C^\infty$ ,
2.  $\mathbf{x}$  è un omeomorfismo con la sua immagine,
3.  $\forall q \in U$ , il differenziale  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un'applicazione iniettiva.

La funzione  $\mathbf{x}$  è detta *parametrizzazione* o *sistema locale di coordinate* nell'intorno di  $p$  e  $V \cap S$  è detto *intorno coordinato* di  $p \in S$ .

Talvolta è più utile esprimere diversamente (in modo equivalente) l'ultima condizione. Sia  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , consideriamo poi le coordinate  $(u, v)$  nella base canonica di  $\mathbb{R}^2$  e le coordinate  $(x, y, z)$  nella base canonica di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $q = (u_0, v_0)$ , il vettore  $e_1$  è tangente alla curva  $u \rightarrow (u, v_0)$ , la cui immagine tramite  $\mathbf{x}$  è la curva  $(x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$  e tale curva giace su  $S$ .

Abbiamo che la matrice della mappa lineare  $d\mathbf{x}_q$  è data da

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

dove tutte le derivate sono valutate in  $q$ . Da ciò segue che la terza condizione si può esprimere richiedendo che i due vettori colonna siano linearmente indipendenti, cioè che il prodotto vettore tra essi non sia nullo, o equivalentemente, che almeno uno dei minori di ordine due della matrice non sia nullo. Indicando, in generale, con

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

la matrice jacobiana di una funzione differenziabile  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  di componenti  $f_1, \dots, f_m$ , data da

$$\left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ \alpha=1, \dots, m}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ciò è allora anche equivalente a richiedere che almeno uno dei determinanti delle matrici jacobiane  $2 \times 2$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$$

sia diverso da 0, se valutato in  $q$ .

ESEMPIO. Si vede facilmente che un qualunque piano di  $\mathbb{R}^3$  è una superficie regolare, analogamente (come ci si aspetta) la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Infatti, sia  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  e consideriamo l'applicazione  $\mathbf{x}_1 : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tale che

$$\mathbf{x}_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}),$$

per ogni  $(x, y) \in U$ , abbiamo che il dominio di  $\mathbf{x}_1$  è l'insieme dei punti  $x^2 + y^2 < 1$ , quindi tutte e tre le coordinate ammettono derivate parziali continue di tutti gli ordini. Osserviamo poi che  $\mathbf{x}_1$  è iniettiva e di classe  $C^\infty$ , mentre  $\mathbf{x}_1^{-1}$  coincide con la proiezione  $\pi(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$  ristretta a  $\mathbf{x}_1(U)$ , quindi anche la seconda condizione è verificata. Per la terza condizione, tenendo conto delle osservazioni precedenti, è sufficiente osservare che  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = 1$ .

A questo punto si possono definire delle applicazioni simili per coprire l'intera sfera e avere la conclusione. Definiamo  $\mathbf{x}_2 : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , data da

$$\mathbf{x}_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \quad (x, y) \in U,$$

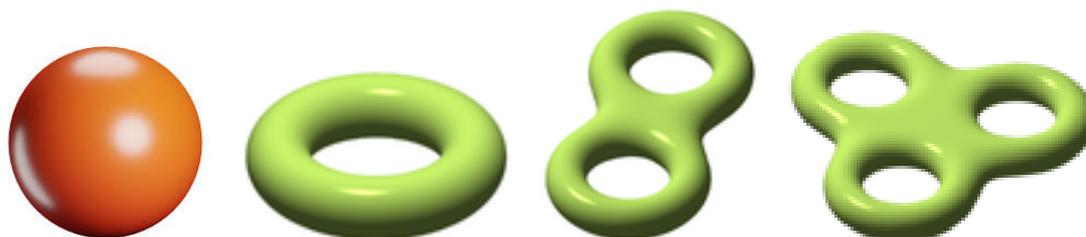
poi, posto  $V = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 < 1\}$  definiamo  $\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ , come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3(x, z) &= (x, \sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), & (x, z) \in V, \\ \mathbf{x}_4(x, z) &= (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), & (x, z) \in V \end{aligned}$$

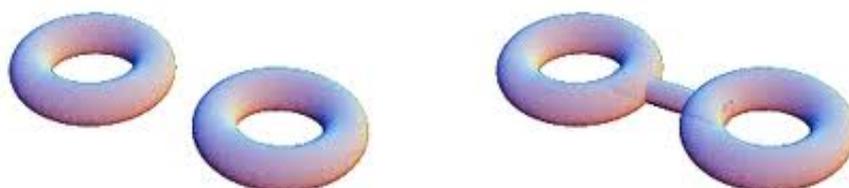
e analogamente, posto  $W = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 1\}$ , abbiamo  $\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6 : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ , date da

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_5(y, z) &= (\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), & (y, z) \in W \\ \mathbf{x}_6(y, z) &= (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), & (y, z) \in W. \end{aligned}$$

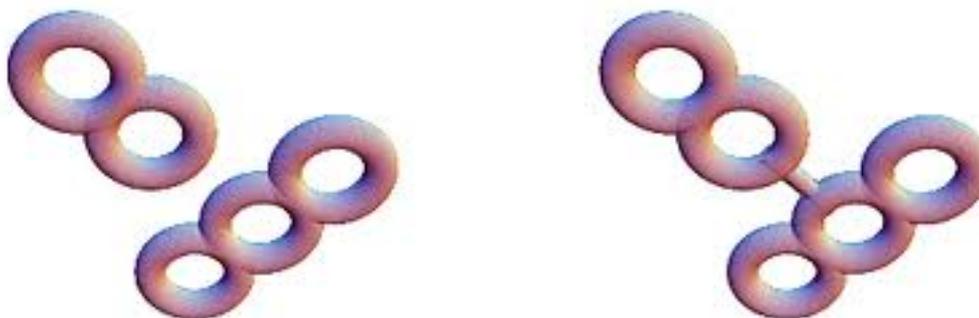
Altri esempi sono dati dal toro (che descriveremo nel prossimo capitolo), o da superfici con più "buchi" (più difficili da descrivere analiticamente).



Osserviamo che possiamo ottenere una superficie con due “buchi” unendo due tori come nella figura seguente, cioè “tagliando” da ogni toro un dischetto e connettendo le due circonferenze di bordo (in modo  $C^\infty$ ) con un cilindro.



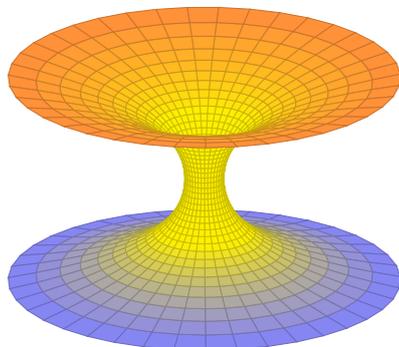
Si vede facilmente che il risultato dell’operazione, che viene detta *somma connessa* e che si può fare con qualunque coppia di superfici, come nella seguente figura, è una superficie con due “buchi”, omeomorfa (diffeomorfa se l’incollamento è fatto in modo  $C^\infty$ ) alla terza superficie nell’immagine di sopra.



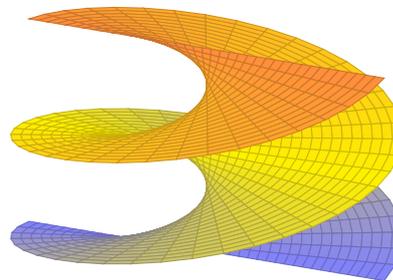
Somma connessa di due superfici.

I seguenti sono due esempi di superfici regolari illimitate (non compatte). La *catenoide* è la superficie generata dalla rotazione della curva di equazione  $y = \cosh x$  attorno all’asse delle ascisse (detta *catenaria*, in quanto descrive il profilo che assume una catena sospesa agli estremi), mentre l’*elicoide* è generata dalle rette parallele al piano  $xy$  che intersecano sia l’asse  $z$  che l’elica  $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ .

Catenoide



Elicoide



Un'altra famiglia di esempi si ottiene come conseguenza della seguente proposizione.

**Proposizione 1.2.** Sia  $U$  aperto di  $\mathbb{R}^2$ , se  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^\infty$ , allora il suo grafico  $S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U\}$  è una superficie regolare.

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\mathbf{x} : (u, v) \in U \rightarrow (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ . La prima condizione della Definizione 1.1 segue dal fatto che  $f \in C^\infty$  e la seconda condizione è verificata, in quanto  $\mathbf{x}$  è un omeomorfismo, infatti è bigettiva per costruzione e continua, infine l'inversa  $\mathbf{x}^{-1}$  è la proiezione del grafico di  $f$  sul piano  $uv$ , quindi è anch'essa continua.

Per la terza condizione è sufficiente osservare che  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$  identicamente.  $\square$

**Definizione 1.3.** Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto e sia  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenziabile. Un punto  $p \in U$  si dice *punto critico* di  $F$  se il differenziale  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  non è suriettivo. Il valore  $F(p) \in \mathbb{R}^m$  si dice allora *valore critico* di  $F$ . I valori di  $\mathbb{R}^m$  che non sono critici si dicono *valori regolari*.

Se  $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^\infty$ , allora  $df_p(1, 0, 0)$ , dove  $p = (x_0, y_0, z_0)$ , è dato da

$$df_p(1, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_x(p)$$

e analogamente,

$$df_p(0, 1, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = f_y(p) \quad \text{e} \quad df_p(0, 0, 1) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = f_z(p),$$

quindi l'applicazione lineare  $df_p$  nella base canonica è data in forma matriciale da  $df_p = (f_x(p), f_y(p), f_z(p))$ .

In questo caso dunque  $df_p$  non è suriettiva se e solo se il suo gradiente è nullo in  $p$ . Quindi  $a \in f(U)$  è un valore regolare di  $f$  se e solo se le derivate parziali non si annullano contemporaneamente in nessun punto di  $f^{-1}(a)$ .

**Proposizione 1.4.** Se  $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^\infty$  e  $a \in f(U)$  è un valore regolare di  $f$ , allora  $f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U \mid f(x, y, z) = a\}$  è una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ .

*Dimostrazione.* Sia  $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$ , poiché  $a$  è un valore regolare per  $f$  possiamo assumere  $f_z(p) \neq 0$  senza perdere generalità.

Definiamo la mappa di classe  $C^\infty$

$$F : (x, y, z) \in U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow (x, y, f(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3.$$

Se  $p \in U$  abbiamo

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(p) & f_y(p) & f_z(p) \end{pmatrix}$$

quindi  $\det(dF_p) = f_z \neq 0$ .

Dunque, è possibile applicare il teorema della funzione inversa, che garantisce l'esistenza di  $V$  intorno di  $p$  e  $W$  intorno di  $F(p)$ , tali che  $F : V \rightarrow W$  è invertibile con  $F^{-1} : W \rightarrow V$  di classe  $C^\infty$ , pertanto lo stesso vale per ciascuna delle sue componenti e si vede facilmente che, indicato con  $(u, v, t)$  il generico punto di  $\mathbb{R}^3$ , queste sono date da

$$x = u \quad y = v \quad z = g(t, u, v) \quad (u, v, t) \in W.$$

In particolare  $z = g(u, v, a) = h(u, v)$  è una funzione  $C^\infty$  definita sulla proiezione di  $V$  sul piano  $xy$ .

Osservando che  $F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t) \mid t = a\}$ , abbiamo che il grafico di  $h$  descrive  $f^{-1}(a) \cap V$  in un intorno di  $p$ . Dunque, al variare di  $p \in f^{-1}(a)$ , otteniamo un ricoprimento in intorni coordinati, per la Proposizione 1.2, da cui la tesi che  $f^{-1}(a)$  è una superficie regolare.  $\square$

La Proposizione 1.2 asserisce che il grafico di una funzione di classe  $C^\infty$  è una superficie regolare, la seguente invece mostra che ogni superficie regolare è sempre localmente il grafico di una funzione differenziabile.

**Proposizione 1.5.** *Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regolare e  $p \in S$ . Allora esiste  $V$  intorno di  $p$  in  $S$ , tale che  $V$  è il grafico di una funzione  $C^\infty$  in una delle seguenti tre forme:*

$$x = h(y, z), \quad y = g(x, z), \quad z = f(x, y).$$

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , una parametrizzazione locale di  $S$  in  $p$ , tale che

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad \forall (u, v) \in U$$

Coerentemente con le osservazioni precedenti e senza perdere generalità, possiamo assumere che  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$ , con  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ . Sia poi  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proiezione  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ , dunque  $\pi \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $\pi \circ \mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  e dal momento che  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$ , siamo nelle ipotesi del teorema della funzione inversa. Esiste quindi un diffeomorfismo  $C^\infty$  tra  $V_1$  e  $V_2$ , intorni di  $q$  e  $\pi \circ \mathbf{x}(q)$ , rispettivamente.

La restrizione di  $\pi$  a  $\mathbf{x}(V_1) = V$  è iniettiva e  $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$  è differenziabile. Poiché  $\mathbf{x}$  è un omeomorfismo, segue che  $V$  è un intorno di  $p$  in  $S$ .

Consideriamo ora la funzione  $(u, v) \rightarrow z(u, v)$ , componendola con  $\pi \circ \mathbf{x}$ , otteniamo la funzione di classe  $C^\infty$

$$f(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$$

da cui la tesi.  $\square$

La seguente proposizione ci sarà utile.

**Proposizione 1.6.** *Sia  $S$  una superficie regolare e  $p \in S$ . Consideriamo  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $p \in \mathbf{x}(U) \subseteq S$ , con  $\mathbf{x}$  di classe  $C^\infty$  e  $d\mathbf{x}_q$  sia un'applicazione iniettiva, per ogni  $q \in U$ . Se  $\mathbf{x}$  è iniettiva, allora  $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow U$  è continua.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in U$  e sia  $q \in U$ . Senza perdere generalità possiamo assumere che  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ .

Sia  $\pi$  la proiezione, tale che  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ . Per il teorema della funzione inversa, otteniamo un diffeomorfismo  $C^\infty$  di  $V_1$ , intorno di  $q$ , in  $V_2$ , intorno di  $(\pi \circ \mathbf{x})(q)$ .

Se  $\mathbf{x}$  è iniettiva, poiché  $\mathbf{x}^{-1} = (\pi \circ \mathbf{x})^{-1} \circ \pi$ , abbiamo che  $\mathbf{x}^{-1}$  è una composizione di mappe continue, dunque è continua.  $\square$

Sia  $S$  una superficie regolare e  $p \in S$ . Ovviamente, in un intorno di  $p$  possiamo scegliere diversi sistemi di coordinate, vediamo che le mappe che descrivono i cambi di coordinate sono dei diffeomorfismi.

**Proposizione 1.7.** *Sia  $S$  una superficie regolare e  $p \in S$ . Siano  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $\mathbf{y} : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  parametrizzazioni locali di  $S$ , tali che  $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$ . Allora il cambio di coordinate  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$  è un diffeomorfismo di classe  $C^\infty$ .*

*Dunque, se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono date da*

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

e

$$\mathbf{y}(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)), \quad (\xi, \eta) \in V,$$

il cambio di coordinate  $h$ ,

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \mathbf{y}^{-1}(W),$$

è tale che le funzioni  $u$  e  $v$  hanno derivate parziali continue di tutti gli ordini e  $h$  può essere invertita, con

$$\xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v), \quad (u, v) \in \mathbf{x}^{-1}(W),$$

con le funzioni  $\xi$  ed  $\eta$  con derivate parziali continue di tutti gli ordini e gli jacobiani di  $h$  e  $h^{-1}$  non nulli.

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$  è un omeomorfismo, dal momento che è composizione di omeomorfismi.

Per provare la differenziabilità, consideriamo  $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$  e sia  $q = h(r)$ . Poiché  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  è una parametrizzazione, assumiamo, senza perdere generalità, che  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ . Sia  $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , di classe  $C^\infty$ , definita da

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t)$$

per ogni  $(u, v) \in U$  e  $t \in \mathbb{R}$ , notando che dunque  $F|_{U \times \{0\}} = \mathbf{x}$ .

Il determinante del suo differenziale  $dF_q$  è

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{pmatrix} (q) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Siamo dunque nelle ipotesi del teorema della funzione inversa, che garantisce l'esistenza di un intorno  $M$  di  $\mathbf{x}(q) \subseteq \mathbb{R}^3$ , in cui  $F^{-1}$  esiste, è biettiva e di classe  $C^\infty$ . Per la continuità di  $\mathbf{y}$ , esiste allora un intorno di  $r$ ,  $N \subseteq V$ , tale che  $\mathbf{y}(N) \subseteq M$ . A questo punto è sufficiente osservare che  $h|_N = F|_{U \times \{0\}}^{-1} \circ \mathbf{y}|_N$  è una composizione di funzioni differenziabili, quindi differenziabile in  $r$ . Per l'arbitrarietà della scelta di  $r$ , la funzione  $h$  è differenziabile in  $\mathbf{y}^{-1}(W)$ . In modo analogo, si ha che  $h^{-1}$  è differenziabile, dunque  $h$  è un diffeomorfismo.  $\square$

Una conseguenza di questa proposizione è che le seguenti due definizioni sono ben poste.

**Definizione 1.8.** Sia  $V$  un aperto di una superficie regolare  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ . Diciamo che la funzione  $f : V \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in  $p \in V$  se esiste una parametrizzazione  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , con  $p \in \mathbf{x}(U) \subseteq V$ , tale che  $f \circ \mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in  $\mathbf{x}^{-1}(p)$ .

La funzione  $f$  si dice differenziabile in  $V$  se è differenziabile in tutti i punti di  $V$  e  $C^k$  o  $C^\infty$ , se lo è  $f \circ \mathbf{x}$  (cioè "esprimendola" in coordinate locali).

**Definizione 1.9.** Date due superfici regolari  $S_1, S_2$  e un aperto  $V_1 \subseteq S_1$ , diciamo che una funzione  $\varphi : V_1 \subseteq S_1 \rightarrow S_2$  è differenziabile in  $p \in S_1$ , se considerate due parametrizzazioni  $\mathbf{x}_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$  e  $\mathbf{x}_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$ , con  $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$  e  $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subseteq \mathbf{x}_2(U_2)$ , la funzione  $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$  è differenziabile in  $q = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$ .

Diciamo che  $\varphi$  è differenziabile in  $V_1$  se è differenziabile in tutti i punti di  $V_1$  e  $C^k$  o  $C^\infty$ , se lo è  $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1$  (cioè "esprimendola" in coordinate locali).

ESEMPIO. Se  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  è una parametrizzazione,  $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$  è  $C^\infty$ . Infatti, per ogni  $p \in \mathbf{x}(U)$  e per ogni parametrizzazione  $\mathbf{y} : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , abbiamo che  $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$  è  $C^\infty$ , con  $W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$ . Quindi,  $U$  e  $\mathbf{x}(U)$  sono  $C^\infty$ -diffeomorfi.

**Definizione 1.10.** Una *superficie parametrizzata*  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un'applicazione di classe  $C^\infty$  da un aperto di  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^3$ . L'insieme  $\mathbf{x}(U)$  si dice *traccia* di  $\mathbf{x}$ .

Una superficie parametrizzata è detta *regolare* se l'applicazione lineare  $d\mathbf{x}_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è iniettiva per ogni  $p \in U$ . I punti  $p \in U$  tali che  $d\mathbf{x}_p$  non è iniettiva si dicono *punti singolari* di  $\mathbf{x}$ .

**Proposizione 1.11.** Sia  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizzata regolare e sia  $q \in U$ . Allora esiste  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  intorno di  $q$ , tale che  $\mathbf{x}(V) \subseteq \mathbb{R}^3$  è una superficie regolare.

*Dimostrazione.* Per il teorema della funzione inversa, considerando un intorno abbastanza piccolo  $V$  di  $q \in U$ , la mappa  $\mathbf{x}|_V$  è iniettiva e un diffeomorfismo con l'immagine  $\mathbf{x}(V)$ , da cui la tesi.  $\square$

**Definizione 1.12.** Sia  $S$  una superficie regolare e sia  $p \in S$ . Chiamiamo *vettore tangente* a  $S$  in  $p$ , ogni vettore  $\alpha'(0) \in \mathbb{R}^3$  che si ottiene derivando una qualunque curva parametrizzata differenziabile  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ , con  $\alpha(0) = p$  (si noti che  $\alpha'(0)$  è la velocità della curva  $t \mapsto \alpha(t) \in S \subseteq \mathbb{R}^3$  al tempo  $t = 0$ ).

Vediamo che se  $S$  è una superficie regolare e  $p \in S$ , l'insieme dei vettori tangenti a  $S$  in  $p$  costituisce un piano di  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposizione 1.13.** Sia  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  una parametrizzazione di una superficie regolare  $S$  e sia  $q \in U$ . Il sottospazio vettoriale di dimensione due  $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$  coincide con l'insieme dei vettori tangenti a  $\mathbf{x}(q)$  su  $S$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{x}(U) \subseteq S$  differenziabile e sia  $\alpha(0) = \mathbf{x}(q)$ , sia  $w = \alpha'(0)$  il vettore tangente a  $S$  in  $\mathbf{x}(q)$ . La curva  $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  è differenziabile e si ha  $d\mathbf{x}_q(\beta'(0)) = w$ , quindi  $w \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ .

Sia  $w = d\mathbf{x}_q(v)$ , con  $v \in \mathbb{R}^2$ , vettore velocità della curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  data da  $\gamma(t) = q + tv$ , per  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , dunque, definendo la curva  $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$ , anche in questo caso per la definizione di differenziale  $w = \alpha'(0)$ , quindi  $w$  è un vettore tangente.  $\square$

Dalla proposizione appena dimostrata segue che il piano  $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$  contenente  $\mathbf{x}(q) = p$  non dipende dalla parametrizzazione scelta, possiamo dunque parlare quindi di *piano tangente* a  $S$  in  $p$ , che viene denotato con  $T_p S$ .

La scelta della parametrizzazione  $\mathbf{x}$  determina una base naturale  $\left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right)(q), \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right)(q) \right\}$  di  $T_p S$ , che per semplicità indicheremo con  $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ . Vediamo come ricavare le coordinate di un vettore  $w \in T_p S$  nella base associata alla parametrizzazione  $\mathbf{x}$ . Per le osservazioni precedenti definiamo  $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ , con  $\beta(t) = (u(t), v(t))$  e  $\beta(0) = q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ .  $w$  è il vettore velocità della curva  $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta$ :

$$\alpha'(0) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(u(t), v(t))(0) = \mathbf{x}_u(q)u'(0) + \mathbf{x}_v(q)v'(0) = w.$$

Tramite la nozione di piano tangente possiamo definire il concetto di differenziale di una funzione tra superfici.

Siano  $S_1$  ed  $S_2$  superfici regolari e sia  $\varphi : V \subseteq S_1 \rightarrow S_2$  una funzione differenziabile, con  $V$  aperto. Sia  $p \in V$ , se  $w \in T_p S_1$  è il vettore velocità  $\alpha'(0)$  della curva parametrizzata  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ , con  $\alpha(0) = p$ , la curva  $\beta = \varphi \circ \alpha$  è tale che  $\beta'(0) \in T_{\varphi(p)} S_2$ .

**Proposizione 1.14.** *Nelle ipotesi sopra, il vettore  $\beta'(0)$  non dipende dalla scelta di  $\alpha$ . La funzione  $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$ , tale che  $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$  è lineare.*

*Dimostrazione.* Siano  $\mathbf{x}(u, v)$  e  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$  parametrizzazioni di intorni di  $p$  e di  $\varphi(p)$ , rispettivamente. Supponiamo che

$$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \quad \text{e} \quad \alpha(t) = (u(t), v(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Allora ,

$$\beta(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))$$

e di conseguenza,

$$\beta'(0) = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} v'(0) \right).$$

Quindi  $\beta'(0)$  non dipende da  $\alpha$ .

Otteniamo anche che

$$\beta'(0) = d\varphi_p(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}$$

Dunque,  $d\varphi_p$  è un'applicazione lineare di  $T_p S_1$  in  $T_{\varphi(p)} S_2$  che nelle basi scelte si rappresenta con questa matrice.  $\square$

Infine, la seguente proposizione consente di definire il differenziale di un'applicazione tra superfici regolari. La sua dimostrazione segue direttamente dal teorema della funzione inversa.

**Proposizione 1.15.** Siano  $S_1$  ed  $S_2$  superfici regolari,  $p \in U$  e  $\varphi : U \subseteq S_1 \rightarrow S_2$  una funzione  $C^\infty$ , con  $U$  aperto, tale che  $d\varphi_p$  è un isomorfismo, allora  $\varphi$  è un diffeomorfismo locale in un intorno di  $p$ .

Trattiamo ora il concetto di orientazione di una superficie regolare.

Data una parametrizzazione locale  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  di una superficie regolare  $S$ , per ogni  $p \in \mathbf{x}(U)$ , possiamo definire il *vettore normale unitario* come

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(\mathbf{x}^{-1}(p)),$$

che si vede facilmente essere ortogonale a ogni vettore tangente a  $S$  in  $p$ , dunque può essere solo uno di due opposti versori di  $\mathbb{R}^3$ .

Tale parametrizzazione dell'intorno di  $p \in S$  determina un'orientazione di  $T_p S$ , associata alla sua base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . Se  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$  è un'altra parametrizzazione di un intorno di  $p$ , con base  $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$  che si può esprimere in funzione della prima come segue,

$$\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}},$$

le due basi determinano allora la stessa orientazione se e solo se lo jacobiano del cambio di coordinate  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$  è positivo.

**Definizione 1.16.** Una superficie regolare  $S$  è detta *orientabile*, se possiamo ricoprirla con una famiglia di intorni coordinati tali che se  $p \in S$  appartiene a due di questi intorni, lo jacobiano del cambio di coordinate è positivo in  $p$ . Se ciò è impossibile, la superficie è detta *non orientabile*.

Un esempio di superficie orientabile è la sfera. Un esempio di superficie non orientabile è il nastro di Möbius. Dal punto di vista geometrico il significato dell'orientazione di una superficie è intuitivo: sia  $\mathbf{x}(u, v)$  il sistema di coordinate in  $p \in S$ , abbiamo definito il vettore normale unitario come

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(\mathbf{x}^{-1}(p)), \quad (1.1)$$

se quindi scegliamo un altro sistema di coordinate  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$  in un intorno di  $p$ , osservando che

$$\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} = (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}, \quad (1.2)$$

il versore  $N$  rimane lo stesso oppure diventa il suo opposto, a seconda del segno dello jacobiano del cambio di coordinate.

Se la superficie è orientabile, abbiamo allora su di essa un ben definito campo di classe  $C^\infty$  di versori normali, cioè, l'applicazione  $p \in S \mapsto N(p) \in \mathbb{R}^3$ . Vediamo che ciò è equivalente all'orientabilità.

**Proposizione 1.17.** Una superficie regolare  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  è orientabile se e solo se esiste un campo di classe  $C^\infty$  di vettori normali unitari  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo prima che  $S$  sia orientabile, allora è possibile ricoprirla con una famiglia di intorni coordinati tali che nelle intersezioni lo jacobiano del cambio di coordinate è positivo. Per ogni  $p = \mathbf{x}(u, v)$  definiamo  $N(p) = N(\mathbf{x}(u, v))$  come indicato nella formula (1.1). Allora  $N(p)$  è ben definita e se operiamo un cambio di coordinate da  $(u, v)$  a  $(\bar{u}, \bar{v})$

utilizziamo la relazione (1.2) per concludere che le coordinate di  $N(\mathbf{x}(u, v))$  sono funzioni di classe  $C^\infty$ , quindi  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  è  $C^\infty$ .

Sia ora  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vettoriale di classe  $C^\infty$  di vettori unitari su  $S$  e consideriamo una famiglia di intorni coordinati connessi che ricopra  $S$ . Possiamo supporre che per ogni punto  $p = \mathbf{x}(u, v)$  di ogni intorno  $\mathbf{x}(U)$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  si abbia, a meno di scambi di  $u$  e  $v$ ,

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(\mathbf{x}^{-1}(p)).$$

Il prodotto

$$N(p) \cdot \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(\mathbf{x}^{-1}(p)) = f(p) = \pm 1$$

è una funzione continua ed essendo  $\mathbf{x}(U)$  connesso deve avere segno costante. Se  $f = -1$  basta scambiare  $u$  e  $v$  nella parametrizzazione. Procedendo analogamente con tutti gli intorni coordinati, otteniamo che nell'intersezione di due di essi lo jacobiano deve essere positivo, altrimenti avremmo

$$\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(\mathbf{x}^{-1}(p)) = N(p) = -\frac{\bar{\mathbf{x}}_u \wedge \bar{\mathbf{x}}_v}{|\bar{\mathbf{x}}_u \wedge \bar{\mathbf{x}}_v|}(\bar{\mathbf{x}}^{-1}(p)) = -N(p),$$

il che è assurdo, dunque  $S$  è orientabile.  $\square$

**Proposizione 1.18.** Sia  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$  una superficie regolare, con  $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$  e  $a \in \mathbb{R}$  valore regolare di  $f$ , allora  $S$  è orientabile.

*Dimostrazione.* Sia  $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$  e consideriamo una curva  $(x(t), y(t), z(t))$  su  $S$ , per  $t \in I$ , che passa per  $p$ , se  $t = 0$ . Poiché la curva è su  $S$ , abbiamo  $f(x(t), y(t), z(t)) = a$  per ogni  $t \in I$ . Derivando rispetto a  $t$  e valutando in  $t = 0$  otteniamo:

$$f_x(p) \left( \frac{dx}{dt} \right) \Big|_{t=0} + f_y(p) \left( \frac{dy}{dt} \right) \Big|_{t=0} + f_z(p) \left( \frac{dz}{dt} \right) \Big|_{t=0} = 0,$$

dunque, deduciamo che il vettore tangente alla curva in  $t = t_0$  è ortogonale al vettore  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ . Poiché la costruzione non dipende dal punto scelto otteniamo che

$$N = \left( \frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \right)$$

è un campo vettoriale differenziabile di vettori unitari su  $S$  e, per la proposizione precedente, segue l'orientabilità della superficie.  $\square$

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regolare, il prodotto scalare di  $\mathbb{R}^3$  induce un prodotto scalare  $v \cdot w$  su  $T_p S \subseteq \mathbb{R}^3$ , per restrizione, per ogni coppia di vettori  $v, w \in T_p S$ . Possiamo dunque considerare la forma bilineare definita positiva  $I_p$  su  $T_p S$ , data da  $I_p(v, w) = v \cdot w$ .

**Definizione 1.19.** La forma  $I_p$  su  $T_p S$  è detta *prima forma fondamentale* della superficie regolare  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ , nel punto  $p \in S$ .

Sia ora  $\mathbf{x}(u, v)$  una parametrizzazione in  $p$  e sia  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  la base associata alla parametrizzazione. Sia  $w \in T_p S$  il vettore tangente alla curva

$$\alpha : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)), \text{ con } p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0),$$

abbiamo allora

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) &= \alpha'(0) \cdot \alpha'(0) = (\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') \cdot (\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') \\ &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)(u')^2 + 2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)u'v' + (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)(v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

dunque, per  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \\ F(u_0, v_0) &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ G(u_0, v_0) &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{aligned}$$

sono i coefficienti della prima forma fondamentale in  $p$ , nella base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  di  $T_p S$ . Al variare di  $p = \mathbf{x}(u, v)$ , otteniamo dunque le funzioni  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $G(u, v)$ .

Mostriamo due esempi di calcolo della prima forma fondamentale.

ESEMPIO. Consideriamo il cilindro generato da  $x^2 + y^2 = 1$ , con la parametrizzazione

$$\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ tale che } \mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 < u < 2\pi, -\infty < v < +\infty\}.$$

Siano poi  $\mathbf{x}_u = (-\sin u, \cos u, 0)$  e  $\mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$ , quindi,

$$E = \sin^2 u + \cos^2 u = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

ESEMPIO. Consideriamo la parametrizzazione  $\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  della sfera unitaria in  $\mathbb{R}^3$ .

Siano  $\mathbf{x}_\theta(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$  e  $\mathbf{x}_\varphi(\theta, \varphi) = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0)$ .

Quindi,

$$E(\theta, \varphi) = 1, \quad F(\theta, \varphi) = 0, \quad G(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta.$$

Sia poi  $w$  un vettore tangente alla sfera nel punto  $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$ , che nella base scelta risulta essere  $w = a\mathbf{x}_\theta + b\mathbf{x}_\varphi$ , allora

$$I(w) = |w|^2 = Ea^2 + 2Fab + Gb^2 = a^2 + b^2 \sin^2 \theta.$$

Legata alla prima forma fondamentale è la definizione dell'area di una regione limitata di una superficie regolare  $S$ .

Un *dominio regolare* di  $S$  è un sottoinsieme di  $S$  aperto e connesso tale che il suo bordo è l'immagine di un cerchio tramite un omeomorfismo  $C^\infty$ .

Una *regione* di  $S$  è l'unione di un dominio con il suo bordo.

Sia  $Q \subseteq U$  una regione compatta in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  una parametrizzazione locale, allora  $\mathbf{x}(Q) = R$  è una regione limitata di  $S$ . La funzione  $(u, v) \in U \rightarrow |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \in \mathbb{R}$  determina l'area del parallelogramma che ha per lati  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$  e osserviamo che l'integrale  $\int_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv$  non dipende dalla parametrizzazione  $\mathbf{x}$ . Infatti, sia  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  un'altra parametrizzazione,  $R \subseteq \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$  e  $\bar{Q} = \bar{\mathbf{x}}^{-1}(R)$ . Sia poi  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1}$ , allora

$$\int_{\bar{Q}} |\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}| \, d\bar{u}d\bar{v} \int_{\bar{Q}} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| \, d\bar{u}d\bar{v} = \int_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv.$$

Si noti che  $|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|^2 + (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2 = |\mathbf{x}_u|^2 |\mathbf{x}_v|^2$ , quindi l'integranda si può scrivere come  $|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2}$ .

**Definizione 1.20.** Sia  $S$  una superficie regolare e sia  $R \subseteq S$  una regione limitata. Se  $R \subseteq \mathbf{x}(U)$ , con  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  una parametrizzazione, il numero positivo

$$\int_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv = \mathcal{A}(R), \quad (1.3)$$

dove  $Q = \mathbf{x}^{-1}(R)$ , è detto *area* di  $R$ . Se  $R$  non è contenuta nell'immagine in una singola parametrizzazione locale, decomponiamo  $R$  in regioni che lo siano, ne calcoliamo le aree e poi sommiamo i valori ottenuti per ottenere l'area di  $R$ .

## Capitolo 2

# Curvatura

**Definizione 2.1.** Sia  $S$  una superficie regolare orientabile. Il campo vettoriale unitario normale  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  dato (unico, a meno di segno) dalla Proposizione 1.17, viene detto *mappa di Gauss* di  $S$ .

Osserviamo che  $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  è chiaramente ortogonale a  $N(p)$ , quindi coincide con  $T_pS$ , essendo  $N(p) \perp T_pS \subseteq \mathbb{R}^3$ . Segue che

$$dN_p : T_pS \rightarrow T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = T_pS$$

è un endomorfismo di  $T_pS$ .

**Proposizione 2.2.** *Il differenziale della mappa di Gauss  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  è un operatore lineare autoaggiunto.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{x}(u, v)$  la parametrizzazione della superficie regolare  $S$  in  $p$ , con  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  la base associata di  $T_pS$  e  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  una curva in  $S$ , con  $\alpha(0) = p$ . Abbiamo allora

$$dN_p(\alpha'(0)) = dN_p(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) = \left. \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \right|_{t=0} = N_u u'(0) + N_v v'(0),$$

dunque, in particolare,  $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$  e  $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$ .

Consideriamo le derivate rispetto a  $v$  e  $u$  di  $N \cdot \mathbf{x}_u = 0$  e  $N \cdot \mathbf{x}_v = 0$ , rispettivamente, si ha

$$N_v \cdot \mathbf{x}_u + N \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0,$$

$$N_u \cdot \mathbf{x}_v + N \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0$$

e sottraendo membro a membro, otteniamo

$$N_u \cdot \mathbf{x}_v = N_v \cdot \mathbf{x}_u.$$

Segue che

$$dN_p(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v = N_u \cdot \mathbf{x}_v = N_v \cdot \mathbf{x}_u = dN_p(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u$$

che implica facilmente  $dN_p(w_1) \cdot w_2 = dN_p(w_2) \cdot w_1$ , per ogni coppia di vettori  $w_1, w_2 \in T_pS$ , da cui  $dN_p$  è autoaggiunto.  $\square$

**Definizione 2.3.** La forma bilineare simmetrica su  $T_p S$ , definita da

$$II_p(v, w) = -dN_p(v) \cdot w$$

è detta *seconda forma fondamentale* di  $S$  in  $p$ .

**Definizione 2.4.** Sia  $C$  una curva regolare su  $S$  passante per  $p$  e sia  $k$  la sua curvatura in  $p$ . Siano poi  $\cos \theta = n \cdot N$ , con  $n$  vettore normale alla curva  $C$  in  $p$  e  $N$  vettore normale a  $S$  in  $p$ . Il numero  $k_n = k \cos \theta$  è detto *curvatura normale* di  $C \subseteq S$  in  $p$ .

Quindi  $k_n$  è la lunghezza della proiezione del vettore  $kn$  sulla normale alla superficie passante per  $p$ , il segno è determinato dall'orientazione.

Consideriamo ora una curva regolare  $C \subseteq S$  con parametrizzazione  $\alpha(s)$ , con  $s$  ascissa curvilinea e  $\alpha(0) = p$ . Detta  $N(s)$  la restrizione del vettore normale  $N$  alla curva  $\alpha(s)$ , abbiamo  $N(s) \cdot \alpha'(s) = 0$ , quindi

$$N(s) \cdot \alpha''(s) = -N'(s) \cdot \alpha'(s)$$

di conseguenza

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) &= -dN_p(\alpha'(0)) \cdot \alpha'(0) = -N'(0) \cdot \alpha'(0) \\ &= N(0) \cdot \alpha''(0) = (N \cdot kn)(p) = k_n(p). \end{aligned}$$

Dunque, per un vettore unitario  $v \in T_p S$ , la seconda forma fondamentale  $II_p(v, v)$  è uguale alla curvatura normale di una curva regolare su  $S$  tangente a  $v$  nel punto  $p$ .

Una conseguenza è il seguente enunciato, noto come *teorema di Meusnier*.

**Teorema 2.5.** Sia  $S$  una superficie e  $p \in S$ . Tutte le curve su  $S$  che hanno la stessa tangente in  $p$ , hanno la stessa curvatura normale in  $p$ .

Sia  $v \in T_p S$  un vettore unitario, l'intersezione tra  $S$  e il piano contenente  $v$  e  $N(p)$  è detta *sezione normale* di  $S$  in  $p$  lungo  $v$ . Nell'intorno di  $p$  la sezione normale è una curva piana regolare su  $S$ , il cui vettore normale  $n$  in  $p$  è  $\pm N(p)$ . La sua curvatura è quindi uguale al valore assoluto della curvatura normale in  $p$  lungo  $v$ . Il teorema di Meusnier afferma allora che il valore assoluto della curvatura normale in  $p$  di una curva  $\alpha(s)$  coincide con la curvatura di una sezione normale di  $S$  in  $p$  lungo  $\alpha'(0)$ .

Un'altra importante proprietà è che essendo  $II_p$  simmetrica (poiché  $dN_p$  è autoaggiunto), per ogni  $p \in S$ , esiste una base ortonormale  $\{e_1, e_2\}$  di  $T_p S$  che la diagonalizza, cioè tale che  $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$  e  $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$ , dunque  $e_1, e_2$  sono due autovettori di  $dN_p$ . Inoltre, i due autovalori  $k_1, k_2$  sono rispettivamente il massimo e il minimo della curvatura normale (a meno di scambio).

**Definizione 2.6.** Il massimo della curvatura normale  $k_1$  e il minimo della curvatura normale  $k_2$  sono detti *curvature principali* di  $S$  in  $p$ . Le direzioni corrispondenti, determinate dagli autovettori  $e_1, e_2$ , sono dette *direzioni principali* di  $S$  in  $p$ .

**Definizione 2.7.** Se una curva regolare  $C$  su  $S$  è tale che per ogni  $p \in C$  la tangente a  $C$  è una direzione principale, allora  $C$  è detta *linea di curvatura* di  $S$ .

Menzioniamo il seguente teorema di O. Rodriguez [6, Teorema 3.2.3] che fornisce una caratterizzazione delle linee di curvatura.

**Teorema 2.8.** Una curva regolare  $C$  è una linea di curvatura di  $S$  se e solo se

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t) \quad (2.1)$$

con  $\alpha(t)$  generica parametrizzazione di  $C$ ,  $N(t) = N \circ \alpha(t)$  e  $\lambda$  funzione differenziabile. In questo caso  $-\lambda(t)$  è una curvatura principale nel punto  $\alpha(t)$ .

*Dimostrazione.* È sufficiente osservare che se  $\alpha'(t)$  giace su una direzione principale allora è un autovettore di  $dN$  e

$$dN(\alpha'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

L'implicazione inversa è immediata. □

Supponiamo  $v \in S$ , con  $|v| = 1$  e sia  $\{e_1, e_2\}$  una base ortonormale di  $T_p S$ , allora

$$v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$$

con  $\theta$  l'angolo tra  $e_1$  e  $v$ . La curvatura normale  $k_n$  è dunque data da

$$\begin{aligned} k_n &= II_p(v, v) = -dN_p(v) \cdot v = -dN_p(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta) \cdot (e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta) \\ &= (e_1 k_1 \cos \theta + e_2 k_2 \sin \theta) \cdot (e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta) \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

espressione nota come *formula di Eulero*.

**Definizione 2.9.** Sia  $S$  una superficie regolare,  $p \in S$  e sia  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  il differenziale della mappa di Gauss. Le quantità

$$K = \det(dN_p) = k_1 k_2 \quad \text{e} \quad H = -\frac{\text{tr}(dN_p)}{2} = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

con  $k_1, k_2$  le curvatures principali di  $S$  in  $p$ , sono dette rispettivamente, *curvatura gaussiana* (o *di Gauss*) e *curvatura media* di  $S$  in  $p$ .

Il punto  $p \in S$  è detto:

1. *ellittico*, se  $\det(dN_p) > 0$ ,
2. *iperbolico*, se  $\det(dN_p) < 0$ ,
3. *parabolico*, se  $\det(dN_p) = 0$ , con  $dN_p \neq 0$ ,
4. *planare*, se  $dN_p = 0$ ,
5. *umbilicale* se  $k_1 = k_2$ .

Si osservi che cambiando il campo unitario normale  $N$  nel suo opposto, il determinante non cambierebbe, mentre la traccia cambierebbe segno, dunque  $K$  non dipende dalla scelta di  $N$ . Inoltre, anche la classificazione dei punti, chiaramente non dipende da  $N$ .

L'intuizione che il differenziale della mappa di Gauss, cioè della normale unitaria  $N$  alla superficie  $S$ , descriva la curvatura di quest'ultima è motivata dal fatto che tale normale determina univocamente il piano tangente a  $S$ , dunque il differenziale di  $N$  descrive la variazione infinitesimale del tangente a  $S$  al variare del punto. Allora (come per le curve nel piano o nello spazio), è naturale interpretare la misura di tale variazione come la curvatura della superficie.

Consideriamo  $p \in S$ , una parametrizzazione  $\mathbf{x}(u, v)$  e una curva  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ , con  $\alpha(0) = p$ . Il vettore tangente ad  $\alpha(t)$  in  $p$  è

$$\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v',$$

quindi,

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'$$

e abbiamo

$$N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \quad N_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \quad (2.2)$$

di conseguenza

$$dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v.$$

Esprimendo il tutto in forma matriciale, otteniamo

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che questa matrice non è necessariamente simmetrica, a meno che la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  non sia ortonormale.

Valutiamo ora la seconda forma fondamentale in questa base:

$$II_p(\alpha', \alpha') = -(dN(\alpha') \cdot \alpha') = -(N_u u' + N_v v') \cdot (\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2,$$

dal momento che  $N \cdot \mathbf{x}_u = N \cdot \mathbf{x}_v = 0$ , abbiamo i seguenti coefficienti della seconda forma fondamentale:

$$\begin{aligned} e &= -N_u \cdot \mathbf{x}_u = N \cdot \mathbf{x}_{uu}, \\ f &= -N_v \cdot \mathbf{x}_u = N \cdot \mathbf{x}_{uv} = N \cdot \mathbf{x}_{vu} = -N_u \cdot \mathbf{x}_v, \\ g &= -N_v \cdot \mathbf{x}_v = N \cdot \mathbf{x}_{vv}. \end{aligned}$$

A questo punto, ricordando che per la prima forma fondamentale avevamo utilizzato la notazione  $E, F, G$ , otteniamo

$$\begin{aligned} -f &= N_u \cdot \mathbf{x}_v = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= N_v \cdot \mathbf{x}_u = a_{12}E + a_{22}F, \\ -e &= N_u \cdot \mathbf{x}_u = a_{11}E + a_{21}F, \\ -g &= N_v \cdot \mathbf{x}_v = a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned}$$

Queste relazioni si possono esprimere in forma matriciale come segue:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

quindi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

e naturalmente,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

quindi, si possono riscrivere i coefficienti  $a_{ij}$  della matrice di  $dN$  nella base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ , come

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \tag{2.4}$$

Sostituendo questi valori nella formula (2.2), otteniamo

$$N_u = \frac{fF - eG}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2} \mathbf{x}_v, \quad N_v = \frac{gF - fG}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \mathbf{x}_v,$$

note come *equazioni di Weingarten* e si ha

$$\begin{aligned} K = \det(a_{ij}) &= \frac{f^2 F^2 - fgEF - efFG + egEG - egF^2 + efFG + fgEF - f^2 EG}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{-f^2(EG - F^2) + eg(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Se  $-k$  è un autovalore di  $dN_p$ , l'applicazione lineare  $dN + k\text{Id}$  non è invertibile, cioè,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0,$$

equivalentemente,

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

Essendo

$$H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}),$$

questa equazione si può riscrivere come

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

e di conseguenza, si ha la formula per le curvatures principali

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Tale formula implica allora facilmente che le funzioni  $k_1$  e  $k_2$  sono  $C^\infty$  su  $S$  tranne, possibilmente, nei punti umbilicali, dove si ha  $H^2 = K$ .

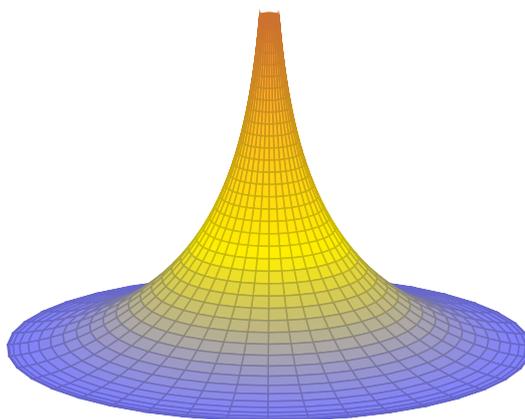
Avendo vettore unitario normale costante, un qualunque piano di  $\mathbb{R}^3$  ha seconda forma fondamentale, dunque curvatura gaussiana/media nulla. La sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$  (si vede con un facile calcolo) ha invece la seconda forma fondamentale uguale alla prima, dunque ha curvatura gaussiana e media entrambe uguali a 1.

La superficie regolare generata dalla rotazione della curva di equazione

$$x \mapsto (x - \tanh x, 1/\cosh x) \quad \text{con } x \in (0, +\infty),$$

attorno all'asse delle ascisse, è detta *pseudosfera* (esibita da Eugenio Beltrami nel 1868) e calcolando la sua curvatura gaussiana  $K$  si ottiene che è uguale costantemente a  $-1$ .

Pseudosfera



Mostriamo esplicitamente il calcolo della curvatura gaussiana di piano, sfera e pseudosfera. Per il piano  $xy$  consideriamo la parametrizzazione (globale)

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0),$$

allora,

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{x}_v = (0, 1, 0)$$

quindi  $E = G = 1$  e  $F = 0$ , mentre le derivate seconde sono tutte nulle, dunque  $e, f, g$  si annullano, da cui  $K = 0$  in ogni punto (la seconda forma fondamentale del piano è nulla).

Per un qualunque altro piano di  $\mathbb{R}^3$ , la conclusione è analoga.

Consideriamo ora la sfera di raggio  $\rho$  con centro l'origine di  $\mathbb{R}^3$ , parametrizzata da

$$\mathbf{x}(u, v) = (\rho \cos u \sin v, \rho \sin u \sin v, \rho \cos v), \quad v \in [0, \pi], \quad u \in [0, 2\pi).$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (-\rho \sin u \sin v, \rho \cos u \sin v, 0) \\ \mathbf{x}_v &= (\rho \cos u \cos v, \rho \sin u \cos v, -\rho \sin v) \\ \mathbf{x}_{uu} &= (-\rho \cos u \sin v, -\rho \sin u \sin v, 0) \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-\rho \cos u \sin v, -\rho \sin u \sin v, -\rho \cos v) \\ \mathbf{x}_{uv} &= (-\rho \sin u \cos v, \rho \cos u \cos v, 0)\end{aligned}$$

da cui,

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \rho^2 \sin^2 v, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \rho^2$$

e

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, -\cos v).$$

Segue che

$$e = N \cdot \mathbf{x}_{uu} = \rho \sin^2 v, \quad f = N \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0, \quad g = N \cdot \mathbf{x}_{vv} = \rho,$$

quindi,

$$K = \frac{eg}{EG} = \frac{\rho^2 \sin^2 v}{\rho^4 \sin^2 v} = \frac{1}{\rho^2}$$

in ogni punto. Dunque, nel caso della sfera unitaria,  $K = 1$  costantemente.

Si noti inoltre che la seconda forma fondamentale è sempre uguale alla prima forma fondamentale in ogni punto della sfera di raggio  $\rho$ , segue allora che tutti i suoi punti sono umbilicali (con autovalore  $\rho$ ).

Calcoliamo infine la curvatura gaussiana della pseudosfera. Consideriamo la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( \sin u \sin v, \sin u \cos v, \ln \tan \frac{u}{2} + \cos u \right),$$

e le sue derivate

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= \left( \cos u \sin v, \cos u \cos v, \frac{\cos^2 u}{\sin u} \right) \\ \mathbf{x}_v &= (\sin u \cos v, -\sin u \sin v, 0) \\ \mathbf{x}_{uu} &= \left( -\sin u \sin v, -\sin u \cos v, -\cos u \frac{1 + \sin^2 u}{\sin^2 u} \right) \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-\sin u \sin v, -\sin u \cos v, 0) \\ \mathbf{x}_{vu} &= (\cos u \cos v, -\cos u \sin v, 0)\end{aligned}$$

da cui,

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \sin^2 u$$

e

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = (-\sin v \cos u, -\cos u \cos v, \sin u).$$

Otteniamo allora,

$$e = N \cdot \mathbf{x}_{uu} = \cos u \sin u - \frac{\cos u}{\sin u} (1 + \sin^2 u), \quad f = N \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0, \quad g = N \cdot \mathbf{x}_{vv} = \sin u \cos u,$$

quindi,

$$K = \frac{eg}{EG} = \frac{-\cos^2 u}{\cos^2 u} = -1.$$

Dunque, la pseudosfera ha curvatura gaussiana  $K = -1$  costantemente.

Abbiamo visto che tutti i punti di una sfera o di un piano sono umbilicali. Vale anche il viceversa.

**Proposizione 2.10.** *Se tutti i punti di una superficie regolare connessa  $S$  sono umbilicali, allora  $S$  è interamente contenuta in una sfera o un piano.*

*Dimostrazione.* Sia  $p \in S$  e sia  $\mathbf{x}(u, v)$  una parametrizzazione di  $S$  in  $p$ , con  $V$  intorno coordinato connesso di  $p$ . Per ogni  $q \in V$ ,  $q$  è un punto umbilicale, quindi, per ogni  $w \in T_q S$  si ha

$$w = a_1 \mathbf{x}_u + a_2 \mathbf{x}_v, \quad dN(w) = \lambda(q)w,$$

con  $\lambda = \lambda(q)$  una funzione differenziabile in  $V$ . Dimostriamo che  $\lambda(q)$  è costante in  $V$ .

$$N_u a_1 + N_v a_2 = \lambda(\mathbf{x}_u a_1 + \mathbf{x}_v a_2),$$

allora

$$N_u = \lambda \mathbf{x}_u \quad N_v = \lambda \mathbf{x}_v.$$

Derivando la prima equazione rispetto a  $u$  e la seconda rispetto a  $v$ , otteniamo

$$\lambda_u \mathbf{x}_u - \lambda_v \mathbf{x}_v = 0$$

e poiché  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  sono linearmente indipendenti, abbiamo  $\lambda_u = \lambda_v = 0$ , per ogni  $q \in V$ . Poiché  $V$  è connesso,  $\lambda$  è costante in  $V$ .

Se  $\lambda = 0$  identicamente, allora  $N = N_0$  è costante in  $V$ , quindi

$$(\mathbf{x}(u, v) \cdot N_0)_u = (\mathbf{x}(u, v) \cdot N_0)_v = 0,$$

di conseguenza,  $\mathbf{x}(u, v) \cdot N_0$  è costante, il che implica che tutti i punti  $\mathbf{x}(u, v)$  di  $V$  appartengono a un piano.

Se invece  $\lambda \neq 0$ , per la formula (2.1), si ha

$$\left( \mathbf{x}(u, v) - \frac{N(u, v)}{\lambda} \right)_u = \left( \mathbf{x}(u, v) - \frac{N(u, v)}{\lambda} \right)_v = 0,$$

dunque, il punto

$$\mathbf{x}(u, v) - \frac{N(u, v)}{\lambda} = \mathbf{y}(u, v)$$

è fissato, da cui

$$|\mathbf{x}(u, v) - \mathbf{y}|^2 = \frac{N(u, v)}{\lambda} \cdot \frac{N(u, v)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$$

che è costante, quindi tutti i punti di  $V$  sono contenuti in una sfera di centro  $\mathbf{y}$ .

Questo prova la proposizione localmente, nell'intorno di ogni punto di  $S$ , allora con un facile argomento di connessione, la tesi "globale" segue.  $\square$

**Definizione 2.11.** Sia  $p \in S$ , una *direzione asintotica* di  $S$  in  $p$  è una direzione del piano tangente  $T_p S$  tale che la curvatura normale è nulla.

Una *curva asintotica* di  $S$  è una curva regolare  $C \subseteq S$ , tale che per ogni  $p \in C$  la tangente a  $C$  in  $p$  è una direzione asintotica.

Per chiarire meglio il significato di direzione asintotica è conveniente introdurre l'*indicatrice di Dupin* cioè, per ogni  $p \in S$ , l'insieme di vettori  $w \in T_p S$  tali che  $II_p(w, w) = \pm 1$ .

Siano  $(\xi, \eta)$  le coordinate cartesiane di  $T_p S$  nella base ortonormale  $\{e_1, e_2\}$ . Considerato  $w \in T_p S$ , siano  $\rho$  e  $\theta$  le coordinate polari,

$$w = \rho v, \quad |v| = 1, \quad v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta, \quad \text{se } \rho \neq 0.$$

Applicando la formula di Eulero, abbiamo

$$\pm 1 = II_p(w, w) = \rho^2 II_p(v, v) = k_1 \rho^2 \cos^2 \theta + k_2 \rho^2 \sin^2 \theta = k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2,$$

con  $w = \xi e_1 + \eta e_2$ . Quindi, nelle coordinate  $(\xi, \eta)$ , un punto dell'indicatrice di Dupin soddisfa l'equazione

$$k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2 = \pm 1, \quad (2.5)$$

Osserviamo che l'equazione (2.5) è l'equazione di una conica in  $T_p S$  che, per un punto ellittico è un'ellisse:  $k_1 = k_2 \neq 0$ , se il punto è umbilicale invece abbiamo una circonferenza, per un punto iperbolico  $k_1$  e  $k_2$  hanno segni opposti, quindi la (2.5) rappresenta due iperboli con gli asintoti in comune, infine, per un punto parabolico invece una delle curvature principali è nulla, quindi l'equazione (2.5) rappresenta due rette parallele.

ESEMPIO. Calcoliamo la curvatura di un toro. Consideriamo la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u), \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi,$$

che descrive un toro con asse di simmetria rotazionale l'asse  $z$  in  $\mathbb{R}^3$ .

Per calcolare  $e$ ,  $f$ ,  $g$  è necessario conoscere  $\mathbf{x}_u$ ,  $\mathbf{x}_v$  e le loro derivate,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u), \\ \mathbf{x}_v &= (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0), \\ \mathbf{x}_{uu} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \sin v, 0), \end{aligned}$$

da cui otteniamo,

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = r^2, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (a + r \cos u)^2. \end{aligned}$$

Ricordando che  $|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2}$ , si ha

$$e = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{r^2(a + r \cos u)}{r(a + r \cos u)} = r$$

e, analogamente,

$$f = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0,$$

$$g = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} \cdot \mathbf{x}_{vv} = \cos u (a + r \cos u).$$

Dal momento che  $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$ , concludiamo che

$$K = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}.$$

Osserviamo allora che  $K = 0$  per  $u = \pi/2$  e  $u = 3\pi/2$ , quindi, i relativi punti del toro, immagine per la parametrizzazione  $\mathbf{x}$  (che sono due circonferenze su due piani paralleli al piano  $xy$  e centro sull'asse  $z$  di  $\mathbb{R}^3$ ), sono punti parabolici. Nella regione immagine di  $\pi/2 < u < 3\pi/2$ ,  $K$  è negativa, dunque in questa regione i punti sono iperbolici. Infine, nella regione immagine di  $0 < u < \pi/2$  o  $3\pi/2 < u < 2\pi$ ,  $K$  è positiva, quindi i punti sono ellittici.

**Definizione 2.12.** Siano  $S$  e  $\bar{S}$  due superfici regolari orientate, sia  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  un diffeomorfismo locale. Diciamo che  $\varphi$  preserva l'orientazione se, per ogni  $p \in S$ , data una base orientata  $\{w_1, w_2\}$  di  $T_p S$ , si ha che  $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$  è una base orientata di  $T_{\varphi(p)} \bar{S}$ . Se invece  $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$  non è una base orientata allora  $\varphi$  inverte l'orientazione.

A questo punto osserviamo che l'orientazione data dal campo normale  $N$  su  $S$  induce un'orientazione  $N$  su  $\mathbb{S}^2$ . Sia  $p \in S$  tale che  $dN_p$  non sia singolare, quindi per una base  $\{w_1, w_2\}$  di  $T_p S$ , otteniamo

$$dN_p(w_1) \wedge dN_p(w_2) = \det(dN_p)(w_1 \wedge w_2) = K w_1 \wedge w_2,$$

dunque la mappa di Gauss conserva l'orientazione se  $K(p) > 0$  e la inverte se  $K(p) < 0$ . Adottiamo allora la convenzione che l'area dell'immagine tramite  $N$  di una regione contenuta in un intorno connesso  $V \subseteq S$ , con  $K \neq 0$ , sia positiva, se  $K > 0$  e negativa se  $K < 0$ . Non c'è ambiguità perché la regione considerata è connessa, quindi  $K$  non cambia segno in  $V$ .

**Proposizione 2.13.** Sia  $p \in S$ , tale che la curvatura gaussiana  $K(p) \neq 0$  e  $V$  un intorno connesso di  $p$ , in cui  $K$  ha segno costante. Sia  $\mathcal{A}$  l'area di una regione  $A \subseteq V$ , data dall'immagine per una parametrizzazione locale  $\mathbf{x}(u, v)$  di una palla  $B_r$  di raggio  $r > 0$  e centro l'origine in  $\mathbb{R}^2$ , tale che  $\mathbf{x}(0, 0) = p$  e  $\mathcal{A}'$  l'area della regione immagine di  $A$  in  $\mathbb{S}^2$ , tramite  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Allora,

$$K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}}.$$

*Dimostrazione.* L'area  $\mathcal{A}$  di  $A$  è definita come nella formula (1.3),

$$\mathcal{A} = \int_{B_r} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv.$$

e l'area  $\mathcal{A}'$  di  $N(A)$  è data da

$$\mathcal{A}' = \int_{B_r} |N_u \wedge N_v| \, dudv.$$

Utilizzando le formule (2.2) si può riscrivere quest'ultima come

$$\mathcal{A}' = \int_{B_r} K |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv.$$

Segue che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}'/\pi r^2}{\mathcal{A}/\pi r^2} = \frac{\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} K |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv}{\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv} = \frac{K(p) |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|(0,0)}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|(0,0)} = K(p)$$

□

Vediamo ora che molte proprietà delle superfici regolari dipendono esclusivamente dalla prima forma fondamentale.

**Definizione 2.14.** Siano  $S$  e  $\bar{S}$  superfici regolari. Un diffeomorfismo  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  è una *isometria* se per ogni  $p \in S$  e per ogni coppia di vettori  $w_1, w_2 \in T_p S$ , abbiamo

$$(w_1 \cdot w_2)_p = (d\varphi_p(w_1) \cdot d\varphi_p(w_2))_{\varphi(p)}.$$

In tal caso si dice che le superfici  $S$  e  $\bar{S}$  sono *isometriche*.

Essendo  $I_p(w_1, w_2) = (w_1 \cdot w_2)_p$  e  $\bar{I}_{\varphi(p)}(w_1, w_2) = (d\varphi_p(w_1) \cdot d\varphi_p(w_2))_{\varphi(p)}$  è immediato osservare che  $\varphi$  è un'isometria se e solo se  $\varphi$  preserva la prima forma fondamentale.

**Definizione 2.15.** Sia  $V$  intorno di  $p \in S$ , la funzione  $\varphi : V \rightarrow \bar{S}$  è un'isometria locale se esiste  $\bar{V}$  intorno di  $\varphi(p)$  in  $\bar{S}$  tale che  $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$  è un'isometria. Se esiste un'isometria locale verso  $\bar{S}$  per ogni punto  $p \in S$ , la superficie  $S$  è detta *localmente isometrica* a  $\bar{S}$ . Le superfici  $S$  e  $\bar{S}$  sono dette *localmente isometriche* se  $S$  è localmente isometrica a  $\bar{S}$  e  $\bar{S}$  è localmente isometrica a  $S$ .

**Proposizione 2.16.** Siano  $S$  e  $\bar{S}$  superfici regolari, supponiamo che esistano delle parametrizzazioni  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  e  $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \bar{S}$ , tali che  $E = \bar{E}$ ,  $F = \bar{F}$ ,  $G = \bar{G}$  in  $U$ . Allora la funzione  $\varphi : \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \bar{S}$  è un'isometria locale.

*Dimostrazione.* Sia  $p \in \mathbf{x}(U)$  e  $w \in T_p S$ . Allora  $w$  è tangente alla curva  $\mathbf{x}(\alpha(t))$  in  $t = 0$ , con  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  curva in  $U$ , quindi possiamo scrivere  $w$  come

$$w = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'.$$

Per definizione, il vettore  $d\varphi_p(w)$  è il vettore tangente alla curva  $\bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}(\alpha(t))$  in  $t = 0$ , quindi,

$$d\varphi_p(w) = \bar{\mathbf{x}}_u u' + \bar{\mathbf{x}}_v v'.$$

Ora poiché

$$\begin{aligned} I_p(w, w) &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2, \\ I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w), d\varphi_p(w)) &= \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F} u' v' + \bar{G}(v')^2, \end{aligned}$$

abbiamo che  $I_p(w, w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w), d\varphi_p(w))$  per ogni  $p \in \mathbf{x}(U)$  e ogni  $w \in T_p S$ , dunque  $\varphi$  è un'isometria locale. □

Un'isometria tra superfici induce un'equivalenza dal punto di vista metrico, vediamo ora un differente tipo di equivalenza.

**Definizione 2.17.** Un diffeomorfismo  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  è detto *mappa conforme* se per ogni  $p \in S$  e ogni  $v_1, v_2 \in T_p S$ , abbiamo

$$d\varphi_p(v_1) \cdot d\varphi_p(v_2) = \lambda^2(p)(v_1 \cdot v_2)$$

con  $\lambda^2$  funzione non nulla su  $S$ . In questo caso le superfici  $S$  e  $\bar{S}$  sono dette *conformi*.

Sia  $V$  intorno di  $p \in S$ , un'applicazione  $\varphi : V \rightarrow \bar{S}$  è una *mappa conforme locale* se esiste un intorno  $\bar{V}$  di  $\varphi(p)$  tale che  $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$  è una mappa conforme. Se per ogni  $p \in S$  esiste una mappa conforme locale, allora  $S$  è localmente conforme ad  $\bar{S}$ .

Il significato geometrico delle le mappe conformi è che conservano gli angoli. Infatti, siano  $\alpha : I \rightarrow S$  e  $\beta : I \rightarrow S$  curve su  $S$  che si intersecano in un punto  $t = 0$ , allora

$$\cos \theta = \frac{\alpha' \cdot \beta'}{|\alpha'| |\beta'|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Una mappa conforme  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  manda queste curve in due curve  $\varphi \circ \alpha : I \rightarrow \bar{S}$  e  $\varphi \circ \beta : I \rightarrow \bar{S}$ , che si intersecano in  $t = 0$  e si ha

$$\cos \bar{\theta} = \frac{d\varphi(\alpha') \cdot d\varphi(\beta')}{|d\varphi(\alpha')| |d\varphi(\beta')|} = \frac{\lambda^2(\alpha' \cdot \beta')}{|\alpha'| |\beta'|} = \cos \theta.$$

**Proposizione 2.18.** Siano  $x : U \rightarrow S$  e  $\bar{x} : U \rightarrow \bar{S}$  parametrizzazioni tali che  $E = \lambda^2 \bar{E}$ ,  $F = \lambda^2 \bar{F}$ ,  $G = \lambda^2 \bar{G}$  in  $U$ , con  $\lambda$  funzione non identicamente nulla in  $U$ , allora l'applicazione  $\varphi = \bar{x} \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \bar{S}$  è una mappa conforme locale.

Si ha il seguente importante teorema che enunciamo senza dimostrazione, rimandando il lettore interessato a [6, Teorema 4.2.1]

**Teorema 2.19.** Due superfici regolari qualsiasi sono localmente conformi.

Sia ora  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  una parametrizzazione con orientazione fissata e consideriamo la base di  $\mathbb{R}^3$  data dalla terna  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  e  $N$ , per ogni punto della superficie  $S$ .

Esprimendo le derivate di  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  e  $N$  nella base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$  abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 N, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N, \\ \mathbf{x}_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + \bar{L}_2 N, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + L_3 N, \\ N_u &= a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v, \end{aligned} \tag{2.6}$$

dove le ultime due equazioni seguono dalle formule (2.2) e i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, 2$  sono detti *simboli di Christoffel*. Dal momento che  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ , abbiamo che  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$  e  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$  e prendendo il prodotto scalare con  $N$  nelle prime quattro equazioni, otteniamo  $L_1 = e$ ,

$L_2 = \bar{L}_2 = f$ ,  $L_3 = g$ , con  $e, f, g$  i coefficienti della seconda forma fondamentale di  $S$ .  
Per esplicitare i simboli di Christoffel, moltiplichiamo per  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$ , ottenendo

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u) = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= (\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v) = F_u - \frac{1}{2} E_v, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= (\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u) = \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= (\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v) = \frac{1}{2} G_u, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u) = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v) = \frac{1}{2} G_v. \end{cases}$$

Questi sono tre sistemi, ciascuno con determinante  $EG - F^2 \neq 0$ , da cui possiamo calcolare tutti i simboli di Christoffel.

ESEMPIO. Calcoliamo i simboli di Christoffel di una superficie di rivoluzione ottenuta dalla rotazione di una curva attorno ad un asse.

Si consideri la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = \{f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)\}, \quad f(v) \neq 0.$$

Siano poi

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = \{(f'(v))^2 + (g'(v))^2\},$$

otteniamo quindi,

$$\begin{aligned} E_u &= 0, & E_v &= 2ff', \\ F_u &= F_v &= 0, \\ G_u &= 0, & G_v &= 2(f'f'' + g'g''), \end{aligned}$$

dove  $f'$  indica la derivata di  $f$  rispetto a  $v$ .

Abbiamo allora le seguenti relazioni,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{ff'}{f^2}, & \Gamma_{12}^2 &= 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora uno dei principali risultati della geometria delle superfici, noto come *teorema egregium* di Gauss.

**Teorema 2.20** (Teorema egregium). *La curvatura gaussiana  $K$  di una superficie è invariante per isometrie.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  una parametrizzazione, sia  $p \in S$ . Sia poi  $V \subseteq \mathbf{x}(U)$  un intorno di  $p$ , se  $\varphi : V \subseteq S \rightarrow \bar{S}$  è un'isometria locale in  $p$ , allora  $\mathbf{y} = \varphi \circ \mathbf{x}$  è una parametrizzazione di  $\bar{S}$  intorno a  $\varphi(p)$ .

Poiché

$$(\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u = 0, \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_{vu})_v = 0, \quad (2.8)$$

$$N_{uv} - N_{vu} = 0,$$

utilizzando le equazioni (2.6), si ha

$$A_1 \mathbf{x}_u + B_1 \mathbf{x}_v + C_1 N = 0,$$

$$A_2 \mathbf{x}_u + B_2 \mathbf{x}_v + C_2 N = 0,$$

$$A_3 \mathbf{x}_u + B_3 \mathbf{x}_v + C_3 N = 0,$$

con  $A_i, B_i, C_i$ , per  $i = 1, 2, 3$ , funzioni di  $E, F, G, e, f, g$  e delle loro derivate.

Essendo i vettori  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N$  linearmente indipendenti, abbiamo  $A_i = B_i = C_i = 0$ , per  $i = 1, 2, 3$ .

Riscriviamo ora la formula (2.7) utilizzando le equazioni (2.6), ottenendo

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_{uv} + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_{vv} + e N_v + (\Gamma_{11}^1)_v \mathbf{x}_u + (\Gamma_{11}^2)_v \mathbf{x}_v + e_v N \\ = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_{uu} + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_{vu} + f N_u + (\Gamma_{12}^2)_v \mathbf{x}_v + (\Gamma_{12}^2)_u \mathbf{x}_v + f_u N, \end{aligned} \quad (2.9)$$

da cui segue

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + e a_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u.$$

Infine, per le equazioni (2.3) e (2.4), concludiamo

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -EK \quad (2.10)$$

(*formula di Gauss*). Argomentando analogamente, partendo dall'equazione (2.8), si ottiene anche

$$(\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 = F \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = FK.$$

Essendo  $\varphi$  è un'isometria locale, i coefficienti della prima forma fondamentale nelle parametrizzazioni  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  coincidono nei punti corrispondenti  $q$  e  $\varphi(q)$ , per ogni  $q \in V$ , quindi i simboli di Christoffel corrispondenti coincidono e per la formula (2.10), si ha  $K(q) = K(\varphi(q))$ , per ogni  $q \in V$ .  $\square$

Eguagliando i coefficienti di  $N$  nell'equazione (2.9), si ha

$$e_v - f_u = e \Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g \Gamma_{11}^2$$

e analogamente (usando l'equazione (2.8)),

$$f_v - g_u = e \Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g \Gamma_{12}^2.$$

Queste due equazioni sono note come *equazioni di Codazzi–Mainardi* e insieme alla formula di Gauss, sono formano le cosiddette *equazioni di compatibilità delle superfici*.

**Definizione 2.21.** Sia  $p \in U \subseteq S$ ,  $v \in T_p S$  e  $w : U \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vettoriale tangente definito su  $S$ . Consideriamo la curva

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U, \quad \alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v$$

e sia  $w(t)$ , per  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  la restrizione del campo vettoriale  $w$  alla curva  $\alpha$ . Il vettore ottenuto dalla proiezione normale di  $\frac{dw}{dt}(0)$  sul piano  $T_p S$  è detto *derivata covariante* in  $p$  del campo vettoriale  $w$ , in direzione  $v$  e viene denotata con  $\frac{Dw}{dt}$  o  $D_v w(p)$ .

Vediamo che la derivata covariante non dipende dalla curva scelta. Consideriamo una parametrizzazione  $\mathbf{x}(u, v)$  di  $S$  in  $p$  e sia  $\mathbf{x}(u(t), v(t)) = \alpha(t)$  l'espressione della curva  $\alpha$  e

$$w(t) = a(u(t), v(t))\mathbf{x}_u + b(u(t), v(t))\mathbf{x}_v = a(t)\mathbf{x}_u + b(t)\mathbf{x}_v.$$

Allora,

$$\frac{dw}{dt} = a(\mathbf{x}_{uu}u' + \mathbf{x}_{vv}v') + b(\mathbf{x}_{vu}u' + \mathbf{x}_{vv}v') + a'\mathbf{x}_u + b'\mathbf{x}_v,$$

dove con  $u'$  intendiamo la derivata di  $u$  rispetto a  $t$ . Essendo  $\frac{Dw}{dt}$  la componente tangente di  $\frac{dw}{dt}$ , per le equazioni (2.6), otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} &= (a' + \Gamma_{11}^1 a u' + \Gamma_{12}^1 a v' + \Gamma_{12}^1 b u' + \Gamma_{22}^1 b v')\mathbf{x}_u \\ &\quad + (b' + \Gamma_{11}^2 a u' + \Gamma_{12}^2 a v' + \Gamma_{12}^2 b u' + \Gamma_{22}^2 b v')\mathbf{x}_v. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dunque  $\frac{Dw}{dt}$  dipende esclusivamente da  $(u', v')$  e non dalla curva  $\alpha$ .

**Definizione 2.22.** Sia  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva su  $S$ . Un campo vettoriale  $w$  lungo  $\alpha$  è una funzione che ad ogni  $t \in I$  assegna un vettore  $w(t) \in T_{\alpha(t)} S$ .

**Definizione 2.23.** Sia  $w$  un campo vettoriale lungo  $\alpha : I \rightarrow S$ . L'equazione (2.11) definisce la *derivata covariante di  $w$  lungo la curva  $\alpha$* .

Osserviamo che se una curva  $\alpha(t)$  su  $S$  descrive il moto di un punto che si muove sulla superficie, allora  $\alpha'(t)$  rappresenta la velocità e  $\alpha''(t)$  l'accelerazione, mentre la derivata covariante  $\frac{D\alpha}{dt}$  è la componente tangenziale dell'accelerazione.

**Definizione 2.24.** Un campo vettoriale  $w$  lungo una curva  $\alpha : I \rightarrow S$  è *parallelo* se  $\frac{Dw}{dt} = 0$  per ogni  $t \in I$ .

**Definizione 2.25.** Sia  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva e  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)} S$ , per  $t_0 \in I$ . Sia  $w$  il campo vettoriale parallelo lungo  $\alpha$ , con  $w(t_0) = w_0$ . Il vettore  $w_{t_1} \in T_{\alpha(t_1)} S$ , per  $t_1 \in I$  è detto *trasporto parallelo di  $w_0$  lungo  $\alpha$  nel punto  $\alpha(t_1)$* .

Si può mostrare che il trasporto parallelo è sempre ben definito e unico e non dipende dalla parametrizzazione della curva (si veda [6], Pagina 255).

**Definizione 2.26.** Una curva  $\alpha : I \rightarrow S$  è detta *geodetica*, se il campo dei vettori tangenti  $\alpha'(t)$  è parallelo lungo  $\alpha$ , cioè

$$\frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0,$$

per ogni  $t \in I$ .

Si osservi che ogni retta contenuta in una superficie  $S$  è una geodetica. Inoltre, una curva regolare  $C \subseteq S$  è una geodetica se e solo se la normale principale in ogni punto  $p \in C$  è parallela alla normale a  $S$  in  $p$ .

**Definizione 2.27.** Sia  $C$  una curva regolare orientata su una superficie orientata  $S$  e sia  $\alpha(s)$  la parametrizzazione di  $C$  con ascissa curvilinea  $s$ . Allora,

$$\frac{D\alpha'(s)}{ds} = \frac{d\alpha'(s)}{dt} \cdot (N \wedge \alpha'(s)) = k_g$$

dove  $k_g$  è detta *curvatura geodetica* di  $C$  in  $p = \alpha(s)$ .

Si noti che la curvatura geodetica di  $C \subseteq S$  cambia segno se cambia l'orientazione di  $C$  o di  $S$ .

Le curve regolari sono allora geodetiche se e solo se la loro curvatura geodetica è nulla in ogni punto.

**Definizione 2.28.** Sia  $\alpha : [0, l] \rightarrow S$  una curva semplice, chiusa e regolare a tratti, su una superficie regolare  $S$ . In particolare dalla regolarità a tratti segue l'esistenza di una partizione di  $[0, l]$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l,$$

tale che  $\alpha$  sia regolare in ciascun intervallo  $(t_i, t_{i+1})$ , per ogni  $i = 0, \dots, k$ . I punti  $\alpha(t_i)$ , sono detti *vertici* di  $\alpha$  e per la regolarità, i limiti destro e sinistro di  $\alpha'(t_i)$  esistono, in particolare

$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t) \neq 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t) \neq 0.$$

Sia  $S$  orientata e sia  $\theta_i$ , con  $0 \leq |\theta_i| \leq \pi$ , l'angolo tra  $\alpha'(t_i^+)$  e  $\alpha'(t_i^-)$ . Se  $|\theta_i| \neq \pi$ ,  $\theta_i \in (-\pi, \pi)$  è detto *angolo esterno* del vertice  $\alpha(t_i)$ . Il segno di  $\theta_i$  è dato dal determinante di  $(\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), N)$ , quindi dall'orientazione della superficie  $S$ .

Se invece  $\alpha(t_i) = \pi$ , scegliamo degli assi  $xy$  tali che  $\alpha(t_i) = 0$ , tenendo poi conto del verso di percorrenza della curva abbiamo che quando  $\alpha$  va verso  $\alpha(t_i) = 0$ , punta verso il semiasse negativo delle  $x$ . Definiamo ora due funzioni rispettivamente per l'intorno di  $\alpha(t_i) = 0$  nel semiasse negativo e positivo delle  $y$

$$f(x) = y, \quad 0 < x < \varepsilon, \quad g(x) = y, \quad 0 < x < \varepsilon,$$

Se  $f > 0$  e  $g < 0$  si pone  $\theta_i = \pi$  e se  $f < 0$  e  $g > 0$  si pone  $\theta_i = -\pi$ .

**Definizione 2.29.** Sia  $S$  una superficie orientata, una regione  $R \subseteq S$  è detta *regolare*, se il suo bordo  $\partial R$  è descritto da una famiglia finita (possibilmente vuota) di curve regolari a tratti.

Una regione  $R \subseteq S$  è detta *semplice* se  $R$  è omeomorfa a un disco e il suo bordo  $\partial R$  è dato da una curva semplice, chiusa e regolare a tratti  $\alpha : I \rightarrow S$ . In questo caso si dice che la curva  $\alpha$  è *positivamente orientata*, se percorrendo la curva la regione si trova "alla sua destra".

Sia  $S$  una superficie regolare,  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  una parametrizzazione e  $R \subseteq \mathbf{x}(S)$  una regione di  $S$ . Se  $f$  è una funzione continua su  $S$ , l'integrale

$$\int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} f(u, v) du dv$$

è indipendente dalla parametrizzazione e lo denoteremo con

$$\int_R f d\sigma.$$

Enunciamo ora il fondamentale *teorema di Gauss–Bonnet* (versione “locale”).

**Teorema 2.30.** *Sia  $R$  una regione semplice di  $S$  e sia  $\alpha : I \rightarrow S$  positivamente orientata e tale che  $\partial R = \alpha(I)$ . Siano poi  $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$  i vertici e  $\theta_0, \dots, \theta_k$  gli angoli esterni di  $\alpha$ . Allora,*

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi.$$

Con  $k_g(s)$  la curvatura geodetica del relativo arco di  $\alpha$  e  $K$  la curvatura gaussiana di  $S$ .

**Definizione 2.31.** Una regione semplice che ha solo tre vertici e gli angoli esterni non nulli è detta *triangolo*. Una *triangolazione* di una regione  $R \subseteq S$  è una famiglia finita di triangoli  $T_i$ , per  $i = 1, \dots, n$ , tale che  $\cup_{i=1}^n T_i = S$  e se  $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ , con  $i \neq j$  allora  $T_i$  e  $T_j$  hanno un lato oppure un vertice in comune.

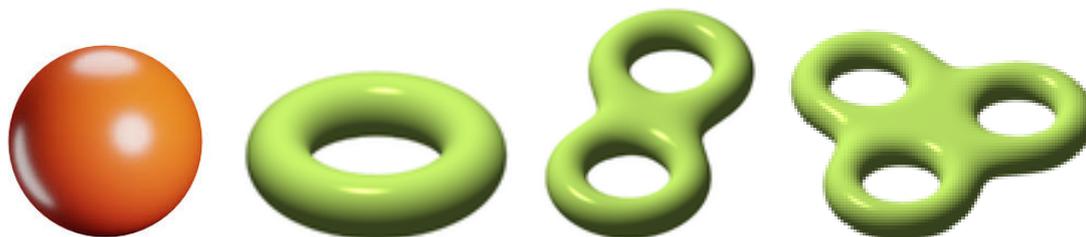
Considerata una triangolazione di una regione  $R$  di una superficie  $S$ , denotiamo con  $F$  il numero di triangoli,  $E$  il numero di lati e  $V$  il numero di vertici della triangolazione scelta. Il numero

$$\chi = F - E + V$$

è detto *caratteristica di Eulero–Poincaré* della triangolazione. Vale allora il seguente fatto (si veda [6, Proposizione 4.5.3]).

**Lemma 2.32.** *Sia  $R$  una regione triangolabile di una superficie regolare  $S$ . La sua caratteristica di Eulero–Poincaré  $\chi(R)$  non dipende dalla triangolazione. Ciò vale in particolare, per un’intera superficie regolare  $S$ , ed è quindi un invariante topologico.*

Nel caso speciale di una superficie compatta, connessa e orientabile  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ , si ha che  $\chi(S) = 2 - 2g(S)$ , dove  $g(S)$  è il *genere* di  $S$  (il numero di “buchi”). Per esempio, la sfera ha genere zero e il toro ha genere uno.



Superfici di genere 0, 1, 2 e 3, dunque di caratteristica di Eulero–Poincaré 2, 0, -2 e -4, rispettivamente.

Per mezzo del Lemma 2.32 e di alcuni altri risultati relativi alle proprietà delle triangolazioni, è possibile dimostrare il teorema di Gauss–Bonnet per una regione generale, del quale riportiamo solo l’enunciato (si veda [6, Pagina 277], per la dimostrazione).

**Teorema 2.33.** *Sia  $R$  una regione regolare limitata di una superficie regolare orientata  $S$  e siano  $C_1, \dots, C_n$  curve chiuse, semplici, regolari a tratti, parametrizzate in lunghezza d'arco, che formano il bordo di  $R$ . Supponiamo ogni curva  $C_i$  positivamente orientata e siano  $\theta_1, \dots, \theta_p$  gli angoli esterni di tutte tali curve. Allora,*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(R).$$

Come conseguenza, si ha la seguente versione “globale” (standard).

**Teorema 2.34** (Teorema di Gauss–Bonnet). *Sia  $S$  una superficie regolare compatta e orientata. Allora,*

$$\int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

## Capitolo 3

# Varietà riemanniane

Un riferimento standard per il materiale di questo capitolo è il libro di S. Gallot, D. Hulin e J. Lafontaine [7].

Introduciamo molto sinteticamente alcune nozioni e fatti di base di geometria differenziale e riemanniana.

**Definizione 3.1.** Una *varietà topologica*  $M$  di dimensione  $n$  è uno spazio topologico di Hausdorff, a base numerabile e tale che per ogni punto  $p \in M$  esiste un intorno aperto  $U \subseteq M$  di  $p$  e un omeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \Omega$  con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . La coppia  $(U, \varphi)$  viene detta *carta coordinata* (o *carta locale*).

**Definizione 3.2.** Un *atlante* di classe  $C^\infty$  per  $M$  è una famiglia di carte coordinate  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , per  $\alpha \in \mathcal{A}$ , tali che la famiglia di aperti  $U_\alpha$  è un ricoprimento di  $M$  e le *mappe di transizione* (che sono degli omeomorfismi)

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sono diffeomorfismi  $C^\infty$ , per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  tali che  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ .

**Definizione 3.3.** Una *varietà differenziabile* (o *differenziale*)  $M$  è una varietà topologica con un atlante  $C^\infty$ .

Data una varietà differenziabile  $M$ , analogamente alle superfici regolari in  $\mathbb{R}^3$ , le funzioni  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  sono  $C^\infty$ , se lo sono una volta scritte in coordinate. Abbiamo una ben nota definizione di spazio vettoriale tangente  $T_p M$  (e di conseguenza del cotangente  $T_p M^*$ , suo duale) in ogni suo punto, come lo spazio delle derivazioni di funzioni  $C^\infty$  (si veda [1]), dunque, si hanno campi vettoriali e 1-forme, che costituiscono le sezioni dei fibrati tangente  $TM$  e cotangente  $TM^*$ , rispettivamente.

A meno che indicato diversamente, sottointenderemo che ogni funzione, campo vettoriale o forma sia di classe  $C^\infty$ . Scriveremo  $x^i$  per denotare un sistema di coordinate locali indotte da una carta coordinata  $(U, \varphi)$ , con associati campi coordinati  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  e 1-forme coordinate  $dx^i$ . Denoteremo infine con  $\Gamma(TM)$  i campi vettoriali su  $M$  (le sezioni di  $TM$ ).

**Definizione 3.4.** Una *metrica riemanniana* su una varietà differenziabile  $M$  è una funzione  $g$  che a ogni punto  $p \in M$  associa un prodotto scalare  $g_p : M_p \times M_p \rightarrow \mathbb{R}$ , tale che se  $U$  è un

insieme aperto in  $M$  e  $X, Y$  sono campi vettoriali su  $U$ , allora la funzione  $g(X, Y) : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p),$$

è  $C^\infty$  in  $U$  (ciò è equivalente a dire che  $g$  è una forma bilineare simmetrica e definita positiva in ogni punto).

Una *varietà riemanniana*  $(M, g)$  è una varietà differenziabile  $M$  con una metrica riemanniana  $g$ .

La metrica riemanniana su  $M$  ci permette immediatamente di definire la lunghezza (norma) di ogni vettore tangente  $v \in T_p M$ , per ogni  $p \in M$ , come

$$|v|_p = \sqrt{g_p(v, v)}$$

e, di conseguenza, la lunghezza di una curva  $\gamma : I \rightarrow M$ , di classe  $C^1$  a tratti, come

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_I |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)} dt.$$

Tale lunghezza si vede facilmente essere invariante per riparametrizzazione di  $\gamma$ , cioè se a  $\gamma$  sostituiamo la curva  $\tilde{\gamma} : J \rightarrow M$  data da  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ , con  $\tau : J \rightarrow I$  un diffeomorfismo, abbiamo  $\mathcal{L}(\tilde{\gamma}) = \mathcal{L}(\gamma)$ .

**Definizione 3.5.** Per ogni coppia di punti  $p, q \in M$  definiamo la loro *distanza riemanniana*

$$d(p, q) = \inf \{ \mathcal{L}(\gamma) : \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ di classe } C^1 \text{ a tratti con } \gamma(a) = p \text{ e } \gamma(b) = q \}.$$

Questa distanza  $d$  su  $M$  lo rende uno spazio metrico la cui topologia associata è la stessa della topologia di  $M$  come varietà.

**Teorema 3.6.** La funzione  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  definita sopra è una distanza su  $M$ , chiamata distanza riemanniana e la topologia indotta da  $d$  coincide con la topologia di  $M$  come varietà.

Vorremmo ora definire, come per le superfici regolari, le curve geodetiche. Abbiamo allora bisogno di una nozione di derivata covariante (lungo una curva – Definizioni 2.21 e 2.23) in questo contesto “astratto” delle varietà (a differenza delle superfici non possiamo sfruttare la derivazione dei campi nello spazio “ambiente” euclideo  $\mathbb{R}^3$ , per definirla, in quanto qui non è presente).

**Teorema 3.7** (Teorema fondamentale della geometria riemanniana). Su ogni varietà riemanniana  $(M, g)$  esiste un’unica applicazione

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

detta connessione di Levi-Civita, tale che

- $\nabla$  è  $C^\infty(M)$ -lineare in  $X$ ,
- $\nabla$  è  $\mathbb{R}$ -lineare in  $Y$ ,

- per ogni  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$  e ogni  $f \in C^\infty(M)$  valgono le formule:

$$\begin{aligned}\nabla_X(fY) &= X(f)Y + f\nabla_X Y && \text{(Leibniz),} \\ \nabla_X Y - \nabla_Y X &= [X, Y] = XY - YX && \text{(simmetria),} \\ Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) && \text{(compatibilità con la metrica).}\end{aligned}$$

Il campo  $\nabla_X Y$  è detto derivata covariante di  $Y$  rispetto a  $X$

Dalle prime due proprietà di  $\nabla$ , segue che  $\nabla_X Y$  in un punto  $p \in M$  dipende solo dal comportamento locale di  $Y$  e dal valore del campo vettoriale  $X$  nel punto  $p$ .

Esprimiamo  $\nabla$  in coordinate locali. Supponiamo che  $U$  sia un aperto coordinato di  $M$ . Fissate delle coordinate  $(x^1, \dots, x^n)$  in  $U$ , se localmente

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

si ha

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left( Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \left( \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

Se dunque definiamo i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  come

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

abbiamo

$$\nabla_X Y = X^i \left( \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

I coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  sono detti *simboli di Christoffel* di  $\nabla$  (coincidono con quelle delle superfici regolari, considerandole come varietà riemanniane con la metrica data dalla prima forma fondamentale – formule (2.6)), chiaramente la determinano in maniera univoca nell'aperto  $U$  e variano al variare della carta di  $M$ .

L'appellativo "simmetria" per la penultima proprietà nella definizione di  $\nabla$ , si riferisce al fatto che tale formula implica (una volta espressa in coordinate locali) che i simboli di Christoffel soddisfano la relazione

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k,$$

cioè sono simmetrici negli indici  $i$  e  $j$ .

La proprietà di compatibilità con la metrica fornisce invece le relazioni

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{li}.$$

ESEMPIO. Lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  è una varietà riemanniana dove la metrica è data dal suo prodotto scalare standard (identificando lo spazio tangente in ogni punto con  $\mathbb{R}^n$  stesso). Vediamo che i suoi simboli di Christoffel sono tutti nulli, nella carta globale data dalle coordinate usuali. Infatti, la connessione di Levi-Civita, per controllo diretto, è semplicemente la derivazione coordinata per coordinata dei campi: se

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

si ha

$$\nabla_X Y = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Dunque

$$\Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0.$$

Possiamo dunque, analogamente alle superfici regolari (Definizioni 2.22, 2.23, 2.24, 2.26), definire la derivata covariante di un campo lungo una curva, i campi paralleli e le curve geodetiche.

**Definizione 3.8.** Sia  $\gamma : I \rightarrow M$  una curva. Un *campo vettoriale lungo*  $\gamma$  è un'applicazione  $X : I \rightarrow TM$ , di classe  $C^\infty$ , tale che  $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$  per ogni  $t \in I$ .

Ovviamente, per una curva  $\gamma : I \rightarrow M$ , la sua *velocità*  $\dot{\gamma}$  è un esempio di campo vettoriale lungo di essa.

Una classe importante di campi vettoriali lungo  $\gamma$  è dato dai campi del tipo

$$X(t) = \tilde{X}_{\gamma(t)} \quad \text{per ogni } t \in I,$$

dove  $\tilde{X}$  è un fissato campo vettoriale definito in un intorno del supporto di  $\gamma$ . Un campo vettoriale  $X$  lungo  $\gamma$  di questo tipo è detto *estendibile* (e in tal caso si dice che  $\tilde{X}$  è un'*estensione* di  $X$ ).

**Proposizione 3.9** (Derivata covariante lungo una curva). *Data una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  esiste un unico operatore  $\frac{D}{dt}$  dallo spazio dei campi vettoriali lungo  $\gamma$  in se stesso, con le seguenti proprietà:*

- $\frac{D}{dt}$  è  $\mathbb{R}$ -lineare,
- per ogni  $f \in C^\infty(I)$  vale la formula

$$\frac{D}{dt}(fX)(t) = f'(t)X(t) + f(t)\frac{D}{dt}X(t),$$

per ogni  $t \in I$ ,

- se  $X$  è un campo estendibile localmente attorno a  $\gamma(t_0)$  (relativamente alla curva "ristretta"  $\gamma|_{(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)}$ , per un qualche  $\varepsilon > 0$ ) e  $\tilde{X}$  è una sua estensione, vale la formula

$$\frac{D}{dt}X(t_0) = (\nabla_{\dot{\gamma}(t_0)}\tilde{X})_{\gamma(t_0)}.$$

L'operatore  $\frac{D}{dt}$  così definito è detto *derivata covariante lungo*  $\gamma$ . Il campo  $\frac{D}{dt}X$  si indica anche con  $X'$  o  $\dot{X}$ , oppure con  $\nabla_{\dot{\gamma}}X$ .

La proprietà di compatibilità con la metrica della connessione di Levi-Civita e la relazione di quest'ultima con la derivata covariante lungo una curva, espressa nell'ultimo punto della Proposizione 3.9, implicano la seguente formula (detta anch'essa "di compatibilità con la metrica"),

$$\frac{d}{dt}g(X, Y) = g\left(\frac{D}{dt}X, Y\right) + g\left(\frac{D}{dt}Y, X\right), \quad (3.1)$$

per ogni coppia di campi  $X, Y$  lungo una curva.

**Definizione 3.10.** Un campo vettoriale  $X$  lungo una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  è *parallelo* se  $\frac{D}{dt}X = 0$ , per ogni  $t \in I$ .

Una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  è detta *geodetica*, se la sua velocità  $\dot{\gamma}$  è un campo parallelo lungo  $\gamma$ , cioè

$$\frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = 0,$$

per ogni  $t \in I$ .

Osserviamo che il modulo della velocità di una geodetica  $\gamma$  è costante lungo la curva, infatti, si ha

$$\frac{d}{dt}|\dot{\gamma}|^2 = \frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 2\left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \dot{\gamma}\right) = 0, \quad (3.2)$$

per la formula (3.1).

In coordinate locali, posto  $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \left( \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)} \right) &= \ddot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)} + \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)} \\ &= \left( \ddot{\gamma}^k(t) + \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) \dot{\gamma}^i(t) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)}. \end{aligned}$$

Di conseguenza,  $\frac{D}{dt}\dot{\gamma}$  è identicamente nulla e  $\gamma$  è una geodetica se e solo se in coordinate locali è una soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti  $C^\infty$ , del second'ordine, in forma normale (*equazione delle geodetiche*),

$$\ddot{\gamma}^k(t) = -\Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) \dot{\gamma}^i(t) \quad \text{per ogni } k \in \{1, \dots, n\}.$$

OSSERVAZIONE. Si noti che una soluzione  $\gamma$  di classe  $C^2$  di questo sistema è automaticamente  $C^\infty$  (si veda [10]), dunque una curva di classe  $C^2$  che soddisfa  $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$  è una geodetica

Fissato un punto  $p \in M$  e un vettore  $v \in T_p M$ , per il teorema di esistenza e unicità dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, esiste allora un'unica geodetica  $\gamma_v : I \rightarrow M$ , definita su un intervallo massimale  $I$ , contenente  $t = 0$ , tale che  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v$ .

Si ha inoltre che le geodetiche sono tutte e sole le proiezioni mediante  $\pi : TM \rightarrow M$  delle curve integrali di un campo vettoriale  $\mathcal{G}$  su  $TM$  detto *campo vettoriale geodetico*. Infatti, consideriamo una carta coordinata  $(U, \varphi = (x^i))$  di  $M$  con corrispondenti campi coordinati  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  su  $U$ , che induce naturalmente la carta coordinata  $(\pi^{-1}(U), \psi = (x^i, v^i))$  su  $TM$ , data da

$$\pi^{-1}(U) \ni v \mapsto \psi(v) = (\varphi(p), v^1, \dots, v^n) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n,$$

per ogni  $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \in T_p M \subseteq \pi^{-1}(U)$ , con  $p = \pi(v)$ .

Con un abuso di notazione, siano  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n}$  i corrispondenti campi coordinati su  $\pi^{-1}(U)$  che soddisfano

$$\pi_* \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad \pi_* \frac{\partial}{\partial v^i} = 0.$$

Consideriamo il campo vettoriale su  $\pi^{-1}(U)$  dato da

$$v^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_{ji}^k(\pi(v)) v^j v^i \frac{\partial}{\partial v^k},$$

al variare della carta locale considerata, siccome le equazioni geodetiche sono indipendenti dalla scelta delle coordinate su  $M$ , è possibile “incollare” questi campi vettoriali definiti localmente e ottenere un campo vettoriale su  $TM$  che denotiamo con  $\mathcal{G}$  e che viene detto *spray geodetico* di  $M$ . Segue facilmente che allora una curva  $t \mapsto \gamma(t) \in M$  è una geodetica se e solo se  $t \mapsto \dot{\gamma}(t) \in TM$  è una curva integrale di  $\mathcal{G}$ . Il flusso massimale di  $\mathcal{G}$  è detto *flusso geodetico* di  $M$  ed è descritto da

$$\Phi(v, t) = \Phi_t(v) = \dot{\gamma}_v(t),$$

dove  $\gamma_v$  è la geodetica con  $\gamma_v(0) = p = \pi(v)$  e  $\dot{\gamma}_v(0) = v \in T_pM$  (si veda [7, Sezione 2.C.8] per esempi e approfondimenti).

L'importanza delle curve geodetiche è dovuta al fatto che se, fissati due punti  $p, q \in M$ , l'estremo inferiore dell'insieme delle lunghezze delle curve che li connettono, che definisce la loro distanza riemanniana  $d(p, q)$  (Definizione 3.5), è in realtà un minimo, realizzato da una curva  $\gamma$ , tale curva deve essere una geodetica (si veda [7, Sezione 3.B.2] per una dimostrazione di questo fatto). Tale geodetica viene allora detta *minimale*.

Si ha inoltre il seguente fondamentale teorema (si veda [7, Sezione 2.C.5]).

**Teorema 3.11** (Teorema di Hopf–Rinow). *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana connessa tale che sia uno spazio metrico completo con la sua distanza riemanniana  $d$  (una tale varietà riemanniana si dice completa). Allora,*

- *l'intervallo massimale di esistenza di ogni geodetica è tutto  $\mathbb{R}$ , cioè qualsiasi geodetica  $\gamma : I \rightarrow M$  può essere estesa a una geodetica  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow M$ ;*
- *per ogni coppia di punti  $p, q \in M$  esiste una geodetica minimale che li congiunge, che dunque ha come lunghezza la distanza  $d(p, q)$ .*

Nel seguito, tutte le varietà riemanniane che considereremo saranno connesse e complete.

Vogliamo ora discutere brevemente il concetto di curvatura per una varietà riemanniana.

**Definizione 3.12.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana e  $\nabla$  la sua connessione di Levi–Civita. Per ogni  $p \in M$ , definiamo l'applicazione

$$R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \rightarrow T_pM,$$

come segue: per  $\xi, \eta, \zeta \in T_pM$ , siano  $X, Y, Z$  delle estensioni a dei campi vettoriali in un intorno di  $p$  dei tre vettori, rispettivamente e definiamo

$$R_p(\xi, \eta)\zeta = \nabla_\eta \nabla_X Z - \nabla_\xi \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]_p} Z. \quad (3.3)$$

L'applicazione  $R_p$  è allora ben definita (indipendente dalle estensioni), è multilineare e viene chiamata *operatore di Riemann*.

La forma quadrilineare su  $T_pM$ ,

$$R_p(\xi, \eta, \zeta, \tau) = g_p(R_p(\xi, \eta)\zeta, \tau)$$

è detta *tensore di curvatura* o *tensore di Riemann*.

Al variare del punto, il tensore di Riemann “codifica” tutte le informazioni “di tipo curvatura” per una varietà riemanniana, che si esplicitano geometricamente analizzandone poi il comportamento. Questo punto di vista “moderno”, dovuto a J.-L. Koszul, lega la curvatura all’errore nell’interscambio di due derivate covarianti successive di un campo, come si può notare osservando la formula (3.3). Malgrado si riveli molto efficiente per i calcoli, non è chiaramente immediata come definizione di curvatura, a differenza della curvatura gaussiana delle superfici in  $\mathbb{R}^3$  che è un concetto di curvatura geometricamente intuitivo. Per questo motivo e poiché è sufficiente per le applicazioni della formula di Santaló che discuteremo nel prossimo capitolo, presentiamo uno dei modi più intuitivi in cui Riemann definì originariamente la curvatura di una varietà riemanniana  $(M, g)$  (si veda [13, Volume 2, Capitolo 4]) che si lega naturalmente alla nostra analisi delle superfici regolari, in qualche modo generalizzando la curvatura di Gauss di una superficie in  $\mathbb{R}^3$ .

Seguendo Riemann, per ogni piano  $\pi \subseteq T_p M$  consideriamo la superficie  $S$  generata dalle geodetiche uscenti da  $p$  con velocità iniziale appartenente a  $\pi$  e calcoliamo la curvatura di Gauss in  $p$ , una volta immerso un suo intorno in  $S$  isometricamente in  $\mathbb{R}^3$  (ciò è sempre possibile se la varietà è analitica, ma se è solo  $C^\infty$  tale possibilità in generale è un famoso problema aperto – trascuriamo qui nella nostra trattazione questo problema tecnico). Grazie al *teorema egregium* 2.20 di Gauss, tale curvatura è indipendente dall’immersione, dunque abbiamo una ben definita nozione di curvatura associata a ognuno dei piani  $\pi$  in  $T_p M$ .

La curvatura così ottenuta viene detta *curvatura sezionale* del piano  $\pi$ .

Si può mostrare che conoscendo la curvatura di *tutti* i piani  $\pi$  della varietà, si può determinare il tensore di Riemann, dunque questa definizione di curvatura è equivalente alla Definizione 3.3 (nel senso che contiene le stesse informazioni).

È inoltre evidente, per costruzione, che se  $(M, g)$  è una superficie regolare  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ , essendo lo spazio tangente in ogni suo punto bidimensionale, può contenere un unico piano, cioè se stesso e le geodetiche formano localmente un intorno di  $p$  (ovviamente, non serve immergere isometricamente  $S$ , lo è di già). Dunque, la curvatura sezionale in ogni punto  $p \in S$  è data da un unico numero, che coincide con la curvatura gaussiana  $K$  di  $S$  in  $p$ , il che rende queste due definizioni di curvatura “coerenti”, per le superfici regolari.

**ESEMPIO.** Il tensore di Riemann di  $\mathbb{R}^n$ , con la sua la metrica canonica data dal suo prodotto scalare standard (identificando lo spazio tangente in ogni punto con  $\mathbb{R}^n$  stesso), è zero in ogni punto. Infatti, abbiamo visto che la sua connessione di Levi-Civita è semplicemente la derivazione coordinata per coordinata dei campi, da cui, estendendo vettori  $\xi, \eta, \zeta \in T_x \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$  a campi costanti  $X, Y, Z$ , abbiamo

$$R_x(\xi, \eta)\zeta = \nabla_\eta \nabla_X Z - \nabla_\xi \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]_x} Z = 0,$$

essendo  $Z$  costante.

Anche la sua curvatura sezionale è zero, per ogni piano  $\pi$  contenuto in qualunque spazio tangente  $T_x \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ , infatti, le geodetiche (che in  $\mathbb{R}^n$  sono rette) uscenti da  $x$  generano  $\pi$  e considerando un vettore  $v \in \mathbb{R}^n$  ortogonale a  $\pi$ , possiamo vedere allora  $\pi$  come (un piano) immerso in  $\mathbb{R}^3 \approx \pi \oplus \langle v \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$  e abbiamo visto nel capitolo precedente che tutti i piani di  $\mathbb{R}^3$  hanno curvatura gaussiana nulla.

Il calcolo del tensore di Riemann per la sfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1}$  di  $\mathbb{R}^n$  è più complesso (si veda [7]) e si ottiene che

$$R_p(\xi, \eta), \zeta = g_p(\xi, \zeta)\eta - g_p(\eta, \zeta)\xi,$$

da cui

$$R_p(\xi, \eta, \zeta, \tau) = g_p(\xi, \zeta)g_p(\eta, \tau) - g_p(\xi, \tau)g_p(\eta, \zeta),$$

per ogni  $p \in \mathbb{S}^{n-1}$  e  $\xi, \eta, \zeta, \tau \in T_p\mathbb{S}^{n-1}$ .

Il calcolo della curvatura sezionale di un qualunque piano  $\pi \subseteq T_p\mathbb{S}^{n-1}$  è facile in quanto le geodetiche che escono tangenti a  $\pi$  dal punto  $p$  formano una sfera bidimensionale, che dunque, una volta immersa in  $\mathbb{R}^3$ , ha curvatura gaussiana uguale a uno, come sappiamo. Quindi, la curvatura sezionale di ogni piano in un qualunque spazio tangente di  $\mathbb{S}^{n-1}$  è uguale a uno.

**Definizione 3.13.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana. Se tutte le sue curvatures sezionali sono nonnegative o nonpositive, diremo che  $(M, g)$  ha *curvatura nonnegativa* o *nonpositiva*, rispettivamente (definizione analoga, se tali curvatures sono tutte positive/negative).

Una varietà riemanniana tale che la curvatura sezionale di ogni piano in un qualunque suo spazio tangente è costante, si dice *a curvatura costante*.

Per quanto visto sopra, lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  e le sfere  $\mathbb{S}^{n-1}$  hanno curvatura costante, rispettivamente zero e uno (si mostra facilmente che tutte le sfere hanno curvatura costante uguale al quadrato dell'inverso del loro raggio).

Particolare importanza, per la nostra discussione nel prossimo capitolo, hanno le varietà riemanniane  $(M, g)$  con curvatura nonpositiva, che se sono semplicemente connesse (e complete) devono essere diffeomorfe a  $\mathbb{R}^n$ , con  $n$  la dimensione di  $M$  (teorema di Cartan–Hadamard, si veda [7, Sezione 3.G.2]) e sono dette *varietà di Cartan–Hadamard*. Una loro peculiarità è che due geodetiche escenti dallo stesso punto non si incontrano mai (eccetto ovviamente che nel punto), nè una geodetica si può autointersecare. Inoltre, ogni geodetica è sempre minimale tra ogni coppia di suoi due punti.

Concludiamo questo capitolo definendo la misura riemanniana canonica di una varietà, che ci servirà nella discussione delle applicazioni della formula di Santaló alle disuguaglianze isoperimetriche su varietà, nel prossimo capitolo.

Diciamo che un sottoinsieme  $E \subseteq M$  è *misurabile* se, per ogni carta coordinata  $(U, \varphi)$  di  $M$ , si ha che  $\varphi(E \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n$  è misurabile secondo Lebesgue. Si verifica facilmente che la famiglia di tutti sottoinsiemi misurabili di  $M$  è una  $\sigma$ -algebra, che denotiamo con  $\mathcal{M}(M)$ . Segue che ogni aperto di  $M$  è misurabile, dunque la  $\sigma$ -algebra degli insiemi boreliani  $\mathcal{B}(M)$  di  $M$  è contenuta in  $\mathcal{M}(M)$ . Si noti che questa nozione di misurabilità dipende solo dalla struttura differenziale, mentre la misura che è definita dal seguente teorema (si veda [8, Sezione 3.4]) è determinata dalla metrica riemanniana della varietà

**Teorema 3.14.** Per ogni varietà riemanniana  $(M, g)$  esiste un'unica misura  $\lambda_g$  sullo spazio misurabile  $(M, \mathcal{M}(M))$ , che chiameremo *misura riemanniana*, tale che in ogni carta coordinata  $(U, \varphi)$ , si ha

$$\lambda_g(A) = \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det g_{ij}(\varphi^{-1}(x))} d\mathcal{L}^n(x),$$

per ogni insieme  $A \in \mathcal{M}(M)$  contenuto in  $U$ , dove  $\mathcal{L}^n$  è la misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$ . Inoltre valgono le seguenti proprietà:

1.  $\lambda_g$  è completa,
2.  $\lambda_g(K) < +\infty$  per ogni  $K$  compatto di  $M$ ,

3.  $\lambda_g(V) > 0$  per ogni  $V$  aperto di  $M$  non vuoto,

4.  $\lambda_g$  è regolare, cioè per ogni  $A \in \mathcal{M}(M)$  si ha

$$\begin{aligned}\lambda_g(A) &= \sup \{ \lambda_g(K) : K \subseteq M \text{ compatto contenuto in } A \} \\ \lambda_g(A) &= \inf \{ \lambda_g(V) : V \subseteq M \text{ aperto contenente } A \},\end{aligned}$$

5. se  $E \in \mathcal{M}(M)$ , esistono  $A, B \in \mathcal{B}(M)$  tali che  $A \subseteq E \subseteq B$  e  $\lambda_g(B - A) = 0$ .

Per l'approssimazione mediante funzioni semplici delle funzioni misurabili nonnegative, segue che se  $f$  è continua a supporto compatto contenuto in una carta  $(U, \varphi)$  si ha

$$\int_M f d\lambda_g = \int_{\varphi(\text{supp } f)} f(\varphi^{-1}(x)) \sqrt{\det g_{ij}(\varphi^{-1}(x))} d\mathcal{L}^n(x),$$

dunque se  $f$  è continua a supporto compatto, una volta scelto un ricoprimento di  $M$  con carte coordinate  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , per  $\alpha \in \mathcal{A}$  e una partizione dell'unità  $\rho_\alpha$  associata, vale

$$\int_M f d\lambda_g = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{\varphi_\alpha(\text{supp } \rho_\alpha f)} \rho_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x)) f(\varphi_\alpha^{-1}(x)) \sqrt{\det g_{ij}(\varphi_\alpha^{-1}(x))} d\mathcal{L}^n(x).$$

È quindi ben definito l'integrale

$$\text{Vol}(A) = \lambda_g(A) = \int_M \chi_A d\lambda_g$$

per ogni insieme misurabile  $A \subseteq M$ , che chiameremo *volume riemanniano* di  $A$ .

**Definizione 3.15.** Sia  $\omega_n$  la misura della palla unitaria di  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)},$$

dove  $\Gamma$  è la funzione di Eulero.

**Definizione 3.16.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana,  $0 \leq k \leq n$  e  $\delta > 0$ . Definiamo la  $\delta$ -premisura di Hausdorff  $k$ -dimensionale di ogni  $E \subseteq M$  come

$$\mathcal{H}_\delta^k(E) = \omega_k \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \left( \frac{\text{diam}(C_i)}{2} \right)^k : E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \text{ e } \text{diam}(C_i) < \delta, \text{ per ogni } i \in \mathbb{N} \right\},$$

dove il diametro di un sottoinsieme di  $M$  è relativo alla distanza riemanniana  $d$  su  $M$ , indotta da  $g$ . Considerando poi

$$\mathcal{H}^k(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^k(E),$$

per ogni  $E \subseteq M$ , si ha che  $\mathcal{H}^k$  è una misura esterna che viene detta *misura di Hausdorff  $k$ -dimensionale* di  $(M, g)$ .

Si può dimostrare che la misura  $\lambda_g$  coincide con la misura di Hausdorff  $n$ -dimensionale  $\mathcal{H}^n$  su  $(M, g)$ .

## Capitolo 4

# La formula di Santaló

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana connessa e completa e sia  $\Omega \subseteq M$  una regione aperta e limitata con bordo  $\partial\Omega$  di classe  $C^\infty$ . Ricordiamo che la completezza implica che le geodetiche sono prolungabili indefinitivamente. Per ogni  $\xi \in T_pM$ , denotiamo con  $\gamma_\xi$  la geodetica uscente da  $p \in M$  con velocità iniziale  $\xi$ . Consideriamo  $S\Omega \subseteq T\Omega$  il fibrato tangente unitario di  $\Omega$ , cioè

$$S\Omega = \{\xi \in T_pM : p \in \Omega \text{ e } |\xi|_p = 1\}$$

e sia  $\pi : S\Omega \rightarrow \Omega$  la proiezione naturale.

Per ogni  $\xi \in S\Omega$ , definiamo

$$\tau(\xi) = \sup \{\tau > 0 : \gamma_\xi(\tau) \in \Omega, \forall t \in (0, \tau)\},$$

allora, se  $\tau$  è finito,  $\gamma_\xi(\tau(\xi))$  è il primo punto della geodetica (di velocità costante *unitaria* – si ricordi l'equazione (3.2)) a “toccare” il bordo di  $\Omega$ .

Definiamo  $c(\xi)$ , per ogni  $\xi \in S\Omega$ , come

$$c(\xi) = \sup \{\tau > 0 : \gamma_\xi : [0, \tau] \rightarrow M \text{ è minimale tra } \pi(\xi) = \gamma_\xi(0) \text{ e } \gamma_\xi(\tau)\},$$

da cui segue  $c(\xi) = d(\pi(\xi), \gamma_\xi(c(\xi)))$  e poniamo  $l(\xi) = \min \{c(\xi), \tau(\xi)\}$ .

Sia  $\nu$  il campo vettoriale su  $\partial\Omega$  tale che in ogni punto  $q \in \partial\Omega$ , sia ortogonale allo spazio tangente a  $\partial\Omega$  (visto come un iperpiano di  $T_qM$ ) e sia “rivolto verso  $\Omega$ ” e definiamo

$$S^+\partial\Omega = \{\xi \in S\bar{\Omega} : \pi(\xi) \in \partial\Omega \text{ e } g_{\pi(\xi)}(\xi, \nu) > 0\}.$$

Consideriamo la misura “prodotto”  $\mu$  su  $S\Omega$ , detta *misura di Liouville*, definita da

$$\mu(A) = \int_{\Omega} \int_{S_p\Omega} \chi_{A_p}(\xi) d\sigma_p(\xi) d\lambda_g(p),$$

per ogni sottinsieme boreliano  $A$  di  $S\Omega$ , dove  $\lambda_g$  è la misura riemanniana di  $(M, g)$ ,  $A_p = A \cap S_p\Omega = \{\xi \in A : \pi(\xi) = p\}$ , per ogni  $p \in \Omega$  e  $\sigma_p$  è la misura canonica sulla sfera  $(n-1)$ -dimensionale  $S_p\Omega \subseteq T_p\Omega$ , con la metrica indotta da  $g_p$  su  $T_p\Omega$ .

Definiamo inoltre (similmente a  $\mu$ ) la misura di Borel  $\zeta$  su  $S^+\partial\Omega$ , come

$$\zeta(B) = \int_{\partial\Omega} \int_{S_q^+\partial\Omega} \chi_{B_q}(\xi) d\sigma_q(\xi) d\mathcal{H}^{n-1}(q), \quad (4.1)$$

per ogni sottinsieme boreliano  $B$  di  $S_q^+ \partial\Omega$ , dove  $B_q = B \cap S_q^+ \partial\Omega = \{\xi \in B : \pi(\xi) = q\}$ , per ogni  $q \in \partial\Omega$ .

Sia  $\Phi_t : SM \rightarrow SM$ , per  $t \in \mathbb{R}$ , la famiglia di diffeomorfismi associati al flusso geodetico, cioè

$$\Phi_t(\xi) = \dot{\gamma}_\xi(t),$$

per ogni  $\xi \in SM$ , ben definita in quanto le geodetiche hanno velocità costante.

Ci servirà il seguente risultato sulla misura di Liouville.

**Proposizione 4.1.** *La misura di Liouville è invariante per il flusso geodetico, cioè  $\Phi_t^* \mu = \mu$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , dove il pull-back della misura  $\mu$  per  $\Phi_t$ , è definito da  $\Phi_t^* \mu(A) = \mu(\Phi_t(A))$ , per ogni boreliano  $A \subseteq S\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Vogliamo provare che  $\mu(\Phi_t(A)) = \mu(A)$ , cioè

$$\mu(\Phi_t(A)) = \int_A \det(d\Phi_t(\xi)) d\mu(\xi) = \mu(A) = \int_A d\mu(\xi),$$

che chiaramente segue se mostriamo che  $\det(d\Phi_t) = 1$ .

Il fibrato tangente a  $SM$  si scrive localmente come  $TM \oplus VSM$ , dove  $VSM$  è il fibrato tangente a ogni fibra sfera unitaria. Il flusso geodetico  $\Phi_t$  su  $S$  è generato dal campo  $X : SM \rightarrow TSM$ , che con questa identificazione si scrive

$$X(x, \xi) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$$

dunque,

$$\frac{d}{dt} \Phi_t(\xi) = X(\Phi_t(\xi)) \quad \text{e} \quad \Phi_0 = \text{id}.$$

Differenziando, abbiamo

$$\frac{D}{dt} d\Phi_t = d \frac{d}{dt} \Phi_t = dX|_{\Phi_t} \circ d\Phi_t \quad \text{e} \quad d\Phi_0 = \text{Id}. \quad (4.2)$$

Poiché, con l'identificazione di cui sopra, si ha

$$dX = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

segue che  $dX$  ha traccia nulla, quindi dalla nota formula di derivazione del determinante di una matrice, otteniamo

$$\frac{d}{dt} \det(d\Phi_t) = \text{tr} \left( \frac{D}{dt} d\Phi_t \circ d\Phi_t^{-1} \right) \det(d\Phi_t) = \text{tr}(dX|_{\Phi_t}) \det(d\Phi_t) = 0,$$

dove abbiamo usato l'uguaglianza (4.2).

Concludiamo allora che  $\det(d\Phi_t)$  è costante uguale a 1, essendo  $\det(d\Phi_0) = 1$  e abbiamo la tesi.  $\square$

Mostriamo dunque la *formula di Santaló*, che è una sorta di teorema di Fubini–Tonelli “geometrico” sul fibrato tangente unitario. Vediamone una versione semplificata in  $\mathbb{R}^2$  (che è comunque un esempio già interessante), considerando  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un convesso limitato con bordo  $C^\infty$  e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Sia  $v \in \mathbb{R}^2$  di norma uno, allora per il teorema di Fubini–Tonelli si ha

$$\int_{\Omega} F(x) dx = \int_{\{y \in v^\perp\}} \int_{\tilde{\tau}_2(y,v)}^{\tilde{\tau}_1(y,v)} F(y + sv) dt dy$$

dove  $\tilde{\tau}_1(y, v)$  è il primo valore di  $t \in \mathbb{R}$  tale che  $y + sv \in \partial\Omega$  e  $\tilde{\tau}_2(y, v)$  il secondo ( $\Omega$  è convesso). Con un cambio di variabile, trasformiamo l’integrale in  $y$  in un integrale sul bordo di  $\Omega$ , cioè

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(x) dx &= \int_{\partial\Omega} (v \cdot \nu_q)_+ \int_0^{\tilde{\tau}(q,v)} F(q + tv) dt d\mathcal{H}^1(q) \\ &= \int_{\{q \in \partial\Omega : v \cdot \nu_q > 0\}} v \cdot \nu_q \int_0^{\tilde{\tau}(q,v)} F(q + tv) dt d\mathcal{H}^1(q), \end{aligned}$$

dove  $\tilde{\tau}(q, v)$  è il primo valore di  $t > 0$  tale che  $q + tv \in \partial\Omega$  e  $(v \cdot \nu_q)_+$  è la parte positiva del prodotto scalare. Integrando dunque in  $v \in \mathbb{S}^1$ , otteniamo (usando ancora il teorema di Fubini–Tonelli),

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\Omega} F(x) dx &= \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\{q \in \partial\Omega : v \cdot \nu_q > 0\}} v \cdot \nu_q \int_0^{\tilde{\tau}(q,v)} F(q + tv) dt d\mathcal{H}^1(q) d\theta(v) \\ &= \int_{\partial\Omega} \int_{\{v \in \mathbb{S}^1 : v \cdot \nu_q > 0\}} v \cdot \nu_q \int_0^{\tilde{\tau}(q,v)} F(q + tv) dt d\theta(v) d\mathcal{H}^1(q). \end{aligned}$$

La formula di Santaló che segue, generalizza questa uguaglianza (come abbiamo visto, basata sul teorema di Fubini–Tonelli) a regioni di varietà riemanniane  $n$ -dimensionali e a funzioni  $F$  dipendenti anche da vettori nel fibrato unitario.

**Teorema 4.2** (L. A. Santaló [11]). *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana completa e connessa e sia  $\Omega \subseteq M$  una regione aperta e limitata con bordo  $\partial\Omega$  di classe  $C^\infty$ . Supponiamo che  $\ell(\xi) = \tau(\xi)$ , cioè che tutte le geodetiche uscenti da punti di  $\Omega$  siano minimali fino al bordo. Per ogni funzione continua  $F : S\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , si ha*

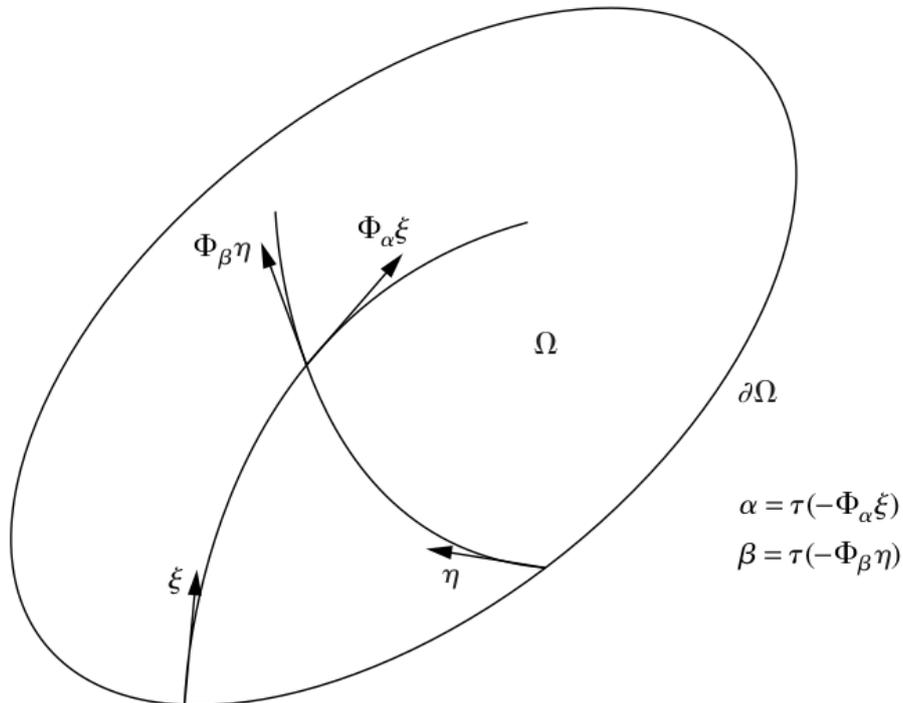
$$\int_{S\Omega} F d\mu = \int_{S^+\partial\Omega} g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) \int_0^{\tau(\xi)} F(\Phi_t(\xi)) dt d\zeta(\xi) \quad (4.3)$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che, essendo  $\Omega$  limitato e tutte le geodetiche da punti di  $\Omega$  minimali,  $\tau(\xi)$  è finito, per ogni  $\xi \in S\Omega$ .

Consideriamo l’insieme

$$\mathcal{A} = \{(\xi, t) \in S^+\partial\Omega \times \mathbb{R}^+ : t \in (0, \tau(\xi))\}$$

e l’applicazione  $\Lambda : \mathcal{A} \rightarrow S\Omega$ , definita da  $\Lambda(\xi, t) = \Phi_t(\xi) = \dot{\gamma}_\xi(t)$ . Si vede allora facilmente che  $\Lambda$  è un diffeomorfismo tra  $\mathcal{A}$  e  $S\Omega$ .



Prima di vedere una dimostrazione formale della formula (4.3), mostriamo un argomento intuitivo per la sua validità.

La misura  $\mu$ , in un piccolo intorno di un punto  $(\xi, s)$  di  $\mathcal{A}$  si può esprimere, a meno di un errore piccolo (che va a zero col raggio dell'intorno), come  $\mu = \sigma_{\pi(\xi)} \lambda_g$  e  $\lambda_g$  come

$$\lambda_g = g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) \mathcal{H}^{n-1}|_{\partial\Omega} \mathcal{L}^1,$$

con un facile argomento geometrico (sempre a meno di un errore piccolo). Dunque,

$$\mu = \sigma_{\pi(\xi)} g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) \mathcal{H}^{n-1}|_{\partial\Omega} \mathcal{L}^1$$

e ricordiamo (equazione (4.1)) che  $\sigma_{\pi(\xi)} \mathcal{H}^{n-1}|_{\partial\Omega} = \zeta$ , da cui concludiamo,

$$\mu = g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) \zeta \mathcal{L}^1,$$

a meno di un piccolo errore.

Se il supporto di  $F$  sta nell'immagine per  $\Lambda$  di un piccolo intorno di  $(\xi, s) \in \mathcal{A}$ , per le equazioni approssimate precedenti, a meno di un errore piccolo nelle uguaglianze, si ha (usando

l'uguaglianza  $\Phi_s^* \mu = \mu$ ,

$$\begin{aligned}
\int_{S\Omega} F(\eta) d\mu(\eta) &= \int_{S\Omega} F(\Phi_s(\xi)) d\Phi_s^* \mu(\xi) \\
&= \int_{S\Omega} F(\Phi_s(\xi)) d\mu(\xi) \\
&= \int_{\Phi_s^{-1}(\text{supp } F)} F(\Phi_s(\xi)) d\mu(\xi) \\
&= \int_{S^+\partial\Omega} \int_0^{\tau(\xi)} F(\Phi_s(\xi)) g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) dt d\zeta(\xi) \\
&= \int_{S^+\partial\Omega} \int_0^{\tau(\xi)} F(\Phi_t(\xi)) g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) dt d\zeta(\xi),
\end{aligned}$$

che è la formula di Santaló. Questo argomento può comunque essere reso rigoroso, per mezzo di partizioni dell'unità e approssimazione, in modo simile a come si dimostra la formula di cambio di variabile negli integrali multipli.

Poiché

$$\int_{S\Omega} F(\eta) d\mu(\eta) = \int_{\mathcal{A}} F(\Phi_t(\xi)) d\Lambda^* \mu(\xi, t),$$

il punto è esprimere la misura  $\Lambda^* \mu(\xi, t)$  su  $\mathcal{A}$ . In termini di  $dt d\zeta$ , si ha

$$F(\eta) d\mu(\eta) = \int_{\mathcal{A}} F(\Phi_t(\xi)) d\Lambda^* \mu(\xi, t) = \int_{S^+\partial\Omega} \int_0^{\tau(\xi)} F(\Phi_t(\xi)) \alpha(t, \xi) dt d\zeta,$$

per una funzione  $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ .

L'invarianza per  $\Phi_t$  della misura di Liouville  $\mu$  (Proposizione 4.1) implica che  $\alpha$  non dipende da  $t$ , dunque

$$F(\eta) d\mu(\eta) = \int_{S^+\partial\Omega} \int_0^{\tau(\xi)} F(\Phi_t(\xi)) \alpha(\xi) dt d\zeta$$

e  $\alpha(\xi) dt d\zeta = \Lambda^* \mu$ .

Per calcolare il fattore  $\alpha$ , vediamo le misure come forme di volume su  $\mathcal{A}$  e  $S\Omega$  e calcoliamo

$$\alpha(\xi) d\zeta = i_{\partial/\partial t} \alpha(\xi) dt d\zeta = i_{\partial/\partial t} \Lambda^* d\mu = \Lambda^* i_{\Lambda_* \partial/\partial t} d\mu$$

che è una forma di volume su  $S^+\partial\Omega$ , ipersuperficie di  $SM$ .

Il vettore  $\Lambda_* \partial/\partial t$  in un punto (vettore)  $\xi \in S^+\partial\Omega$  è lo stesso vettore  $\xi$ , quindi, per la definizione della forma di volume indotta su un'ipersuperficie di una varietà riemanniana (si veda [7]), in questo caso data da  $d\zeta = i_{\nu_{\pi(\xi)}} d\mu$ , concludiamo che

$$\Lambda^* i_{\Lambda_* \partial/\partial t} d\mu = \Lambda^* i_{\xi} d\mu = \Lambda^* g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) i_{\nu_{\pi(\xi)}} d\mu = \Lambda^* g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) d\zeta = g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) d\zeta,$$

in quanto  $\Lambda$  è l'identità su  $S^+\partial\Omega$ .

Segue che  $\alpha(\xi) = g(\xi, \nu_{\pi(\xi)})$ , da cui la formula di Santaló.  $\square$

Il fatto che la formula di Santaló leghi un integrale su  $\Omega$  (decomponendo quello su  $S\Omega$ ) a un integrale su  $\partial\Omega$  (esplicitando quello su  $S^+\partial\Omega$ ), la rende allora uno strumento molto utile per ottenere disuguaglianze geometriche che coinvolgono tali due insiemi. Un esempio immediato è la conclusione del seguente corollario.

**Corollario 4.3.** *Nelle stesse ipotesi del teorema, si ha*

$$\text{Vol}(\Omega) = \frac{1}{\alpha_{n-1}} \int_{S^+ \partial \Omega} \tau(\xi) g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) d\zeta(\xi) \leq \frac{\text{diam}(\Omega) \alpha_{n-2}}{(n-1) \alpha_{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(\partial \Omega),$$

dove  $\alpha_k = \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^k)$  è il volume della sfera unitaria  $k$ -dimensionale.

*Dimostrazione.* Considerando una funzione  $F$  identicamente uguale a 1 nella formula di Santaló (4.3), si ha

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} \text{Vol}(\Omega) &= \int_{S\Omega} d\mu = \int_{S^+ \partial \Omega} \tau(\xi) g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) d\zeta(\xi) \\ &\leq \text{diam}(\Omega) \int_{\partial \Omega} \int_{S_q^+ \partial \Omega} g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) d\sigma_q(\xi) d\mathcal{H}^{n-1}(\partial \Omega) \end{aligned}$$

e la tesi segue dal fatto che, per ogni  $q \in \partial \Omega$ ,

$$\int_{S_q^+ \partial \Omega} g(\xi, \nu_{\pi(\xi)}) d\sigma_q(\xi) = \frac{\alpha_{n-2}}{(n-1)},$$

per calcolo esplicito. □

Concludiamo questo capitolo e la tesi con un'elegante e importante applicazione della formula di Santaló alle disuguaglianze isoperimetriche in varietà di Cartan–Hadamard a curvatura nonpositiva, dovuta a C. B. Croke [5]. Altre applicazioni si possono trovare in [4] e [12].

Ricordiamo che abbiamo indicato con

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)},$$

il volume della palla unitaria  $B^n$  di  $\mathbb{R}^n$  (dove  $\Gamma$  è la funzione di Eulero) e definiamo

$$\bar{C}(n) = \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})^n}{\text{Vol}(B^n)^{n-1}}.$$

Allora, la *disuguaglianza isoperimetrica* in  $\mathbb{R}^n$  dice che per una regione limitata  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  con bordo regolare, si ha

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial \Omega)^n \geq \bar{C}(n) \text{Vol}(\Omega)^{n-1}, \quad (4.4)$$

con uguaglianza se e solo se  $\Omega$  è una palla di  $\mathbb{R}^n$ .

Si vede facilmente, considerando palle con centro fissato e raggi sempre più piccoli, che se vale un'analogia disuguaglianza per una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale, la costante che interviene deve essere più piccola di  $\bar{C}(n)$ .

Il seguente teorema di C. B. Croke in [5] prova che per le varietà di Cartan–Hadamard, cioè complete, semplicemente connesse e con curvatura nonpositiva (si veda la discussione dopo la Definizione 3.13), si ha tale disuguaglianza con una costante esplicita.

**Teorema 4.4.** *Sia  $(M, g)$  una varietà di Cartan–Hadamard di dimensione  $n \geq 3$ . Allora, per ogni regione limitata  $\Omega \subseteq M$  con bordo regolare, si ha*

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)^n \geq C(n) \text{Vol}(\Omega)^{n-1},$$

con

$$C(n) = \frac{\alpha_{n-1}^{n-1}}{\alpha_{n-2}^{n-2} \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos(t)^{n/n-2} \sin(t)^{n-2} dt \right\}^{n-2}},$$

dove  $\alpha_k = \mathcal{H}^k(\mathbb{S}^k)$  è il volume della sfera unitaria  $k$ -dimensionale.

Se  $n \neq 4$ , l'uguaglianza non sussiste mai, mentre se  $n = 4$ , si ha solo nel caso in cui  $\Omega$  (con la metrica di  $M$ ) è isometrica a una palla di  $\mathbb{R}^n$  con la metrica standard.

Essendo  $C(4) = \bar{C}(4)$ , per calcolo diretto, questo risultato fornisce la dimostrazione in dimensione 4 della congettura aperta da lungo tempo, che la disuguaglianza (4.4) vale in realtà per ogni varietà di Cartan–Hadamard con la stessa costante di  $\mathbb{R}^n$ , cioè che la costante isoperimetrica euclidea è ottimale per tutte tali varietà riemanniane (con uguaglianza se e solo se la regione è isometrica a una palla di  $\mathbb{R}^n$ ).

La congettura è stata provata anche in dimensione 2 da A. Weil [14] (ridimostrata successivamente in modo diverso da E. F. Beckenbach e T. Radó [2]) e in dimensione 3 da B. Kleiner [9] (le tre dimostrazioni hanno linee completamente diverse). Rimane un problema attualmente aperto in dimensione  $n \geq 5$ .

Prima di affrontare la dimostrazione del Teorema 4.4, proviamo due lemmi preliminari. Ricordiamo (discussione dopo la Definizione 3.13) che in una varietà di Cartan–Hadamard ogni geodetica è sempre minimale tra ogni coppia di suoi due punti.

**Lemma 4.5.** *Sia  $(M, g)$  una varietà di Cartan–Hadamard e  $\Omega$  una sua regione limitata con bordo di classe  $C^\infty$ . Sia  $\pi : S\Omega \rightarrow \Omega$  la mappa di proiezione e definiamo  $\cos(\xi) = g(\xi, \nu_\pi(\xi))$ , per ogni  $\xi \in S^+\partial\Omega$ , allora si ha*

$$\text{Vol}(\Omega) = \frac{1}{\alpha_{n-1}} \int_{S^+\partial\Omega} \tau(\xi) \cos(\xi) d\zeta(\xi). \quad (4.5)$$

Inoltre, per ogni funzione continua  $F : S\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int_{S^+\partial\Omega} F(\xi) \cos(\xi) d\zeta(\xi) = \int_{S^+\partial\Omega} F(\text{Ant}(\xi)) \cos(\xi) d\zeta(\xi), \quad (4.6)$$

dove  $\text{Ant}(\xi) = -\dot{\gamma}_\xi(\tau(\xi))$ .

*Dimostrazione.* Considerando una funzione  $F$  identicamente uguale a 1 nella formula di Santaló (4.3), che vale essendo  $(M, g)$  una varietà di Cartan–Hadamard, si ha

$$\alpha_{n-1} \text{Vol}(\Omega) = \int_{S\Omega} d\mu = \int_{S^+\partial\Omega} \cos(\xi) \int_0^{\tau(\xi)} dt d\zeta(\xi) = \int_{S^+\partial\Omega} \tau(\xi) \cos(\xi) d\zeta(\xi).$$

Consideriamo di nuovo l'insieme

$$\mathcal{A} = \{(\xi, t) \in S^+\partial\Omega \times \mathbb{R}^+ : t \in (0, \tau(\xi))\}$$

e l'applicazione  $\Lambda : \mathcal{A} \rightarrow S\Omega$ , definita da  $\Lambda(\xi, t) = \Phi_t(\xi) = \dot{\gamma}_\xi(t)$ , che è un diffeomorfismo tra  $\mathcal{A}$  e  $S\Omega$ . Abbiamo

$$\Lambda^{-1}(\xi) = (-\dot{\gamma}_{-\xi}(\tau(-\xi)), \tau(-\xi))$$

per ogni  $\xi \in S\Omega$  e

$$\Lambda^{-1} \circ \text{Ant} \circ \Lambda(\xi, t) = (\text{Ant}(\xi), \tau(\xi) - t).$$

Poiché la mappa  $\text{Ant}$  “mantiene” la misura  $\mu$ , se consideriamo  $G(\xi, t) = \frac{F(\xi)}{\tau(\xi)}$ , si ha (sempre per la formula di Santaló)

$$\begin{aligned} \int_{S^+\partial\Omega} F(\xi) \cos(\xi) d\zeta(\xi) &= \int_{S^+\partial\Omega} \int_0^{\tau(\xi)} \frac{F(\xi)}{\tau(\xi)} \cos(\xi) dt d\zeta(\xi) \\ &= \int_{S^+\partial\Omega} \int_0^{\tau(\xi)} \frac{F(\text{Ant}(\xi))}{\tau(\text{Ant}(\xi))} \cos(\xi) dt d\zeta(\xi) \\ &= \frac{\tau(\xi)}{\tau(\text{Ant}(\xi))} \int_{S^+\partial\Omega} F(\text{Ant}(\xi)) \cos(\xi) d\zeta(\xi) \end{aligned}$$

e osservando che  $\tau(\text{Ant}(\xi)) = \tau(\xi)$ , otteniamo l’uguaglianza (4.6).  $\square$

**Lemma 4.6.** *Siano  $(M, g)$  e  $\Omega$  come nel lemma precedente, allora si ha:*

$$\int_{S^+\partial\Omega} \frac{\tau(\xi)^{n-1}}{\cos(\text{Ant}(\xi))} d\zeta(\xi) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)^2, \quad (4.7)$$

con uguaglianza se e solo se  $\Omega$  è isometrico a un convesso di  $\mathbb{R}^n$  e

$$\int_{S^+\partial\Omega} \cos(\text{Ant}(\xi))^{\frac{1}{n-2}} \cos(\xi)^{\frac{n-1}{n-2}} d\zeta(\xi) \leq C_2(n) \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega), \quad (4.8)$$

dove

$$C_2(n) = \alpha_{n-2} \int_0^{\pi/2} \cos^{n/n-2}(t) \sin^{n-2}(t) dt.$$

con uguaglianza se e solo se  $\cos(\xi) = \cos(\text{Ant}(\xi))$ , per ogni  $\xi \in S^+\partial\Omega$ .

*Dimostrazione.* Sia  $dV$  la forma di volume riemanniana di  $\Omega$  e  $dP$  quella indotta su  $\partial\Omega$ . Fissato  $q \in \partial\Omega$ , nell’insieme

$$\{\Phi_t(\xi) : \xi \in S_q^+\partial\Omega, 0 \leq t \leq \tau(\xi)\},$$

in coordinate polari normali  $(\xi, r)$  rispetto a  $q$ , si ha  $dV = F(\xi, r) d\zeta(\xi) dr$  per una funzione  $F = F(\xi, r)$ . Definiamo poi

$$A = \{\exp t\xi : t = \tau(\xi)\},$$

allora  $A \subseteq \partial\Omega$  e  $dP$  su  $A$  si scrive come

$$\frac{F(\xi, \tau(\xi))}{\cos(\text{Ant}(\xi))} d\sigma_q(\xi),$$

quindi,

$$\int_{S_q^+\partial\Omega} \frac{F(\xi, \tau(\xi))}{\cos(\text{Ant}(\xi))} d\sigma_q(\xi) = \int_A dP = \mathcal{H}^{n-1}(A) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega).$$

L’uguaglianza si ha chiaramente se e solo se  $A = \partial\Omega$ , cioè se  $\Omega$  è stellato rispetto a  $q$ . Da ciò segue, integrando su  $q \in \partial\Omega$  in  $dP$ ,

$$\int_{S^+\partial\Omega} \frac{F(\xi, \tau(\xi))}{\cos(\text{Ant}(\xi))} d\sigma_q(\xi) = \int_{\partial\Omega} \int_{S_q^+\partial\Omega} \frac{F(\xi, \tau(\xi))}{\cos(\text{Ant}(\xi))} d\sigma_q(\xi) dP(q) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)^2.$$

L'uguaglianza sussiste se e solo se  $\Omega$  è un convesso, dovendo essere stellato rispetto a ogni punto  $q \in \partial\Omega$ . La conclusione nel caso di uguaglianza poi segue dal fatto che, in curvatura nonpositiva,  $F(\xi, \tau(\xi)) \geq \tau(\xi)^{n-1}$  con uguaglianza se e solo se le curvature sezionali di tutti i piani contenenti  $\dot{\gamma}_\xi(t)$  sono nulle (si veda [3, Sezione 11.10]).

Per provare la formula (4.8), applichiamo la disuguaglianza di Schwarz e la seconda formula del Lemma 4.5,

$$\begin{aligned}
& \int_{S^+\partial\Omega} \cos(\text{Ant}(\xi))^{\frac{1}{n-2}} \cos(\xi)^{\frac{n-1}{n-2}} d\zeta(\xi) \\
&= \int_{S^+\partial\Omega} \cos(\text{Ant}(\xi))^{\frac{1}{n-2}} \cos(\xi)^{\frac{1}{n-2}} \cos(\xi) d\zeta(\xi) \\
&\leq \left\{ \int_{S^+\partial\Omega} \cos(\text{Ant}(\xi))^{\frac{2}{n-2}} \cos(\xi) d\zeta(\xi) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{S^+\partial\Omega} \cos(\xi)^{\frac{2}{n-2}} \cos(\xi) d\zeta(\xi) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \int_{S^+\partial\Omega} \cos(\xi)^{\frac{n}{n-2}} d\zeta(\xi) \\
&= \int_{\partial M} \left( \int_{S_q^+\partial\Omega} \cos(\xi)^{\frac{n}{n-2}} d\zeta(\xi) \right) dV \\
&= C_2(n) \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega).
\end{aligned}$$

Perché valga l'uguaglianza è necessario e sufficiente che ci sia uguaglianza nell'applicazione della disuguaglianza di Schwarz, dunque se e solo se  $\cos(\text{Ant}(\xi)) = K \cos(\xi)$  per ogni  $\xi \in S^+\partial\Omega$ , con una costante  $K \in \mathbb{R}$ . Tale costante  $K$  deve poi essere necessariamente uguale a uno, in quanto sia  $\cos(\text{Ant}(\xi))$  che  $K \cos(\xi)$  hanno come massimo il valore uno.  $\square$

A questo punto possiamo dimostrare il teorema di Croke.

*Dimostrazione del Teorema 4.4.* Prima applicando la formula (4.5) e poi la disuguaglianza di Hölder, abbiamo

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(\Omega) &= \frac{1}{\alpha_{n-1}} \int_{S^+\partial\Omega} \tau(\xi) \cos(\xi) d\zeta(\xi) \\
&= \frac{1}{\alpha_{n-1}} \int_{S^+\partial\Omega} \frac{\tau(\xi)}{\cos(\text{Ant}(\xi))^{\frac{1}{n-1}}} \cos(\text{Ant}(\xi))^{\frac{1}{n-1}} \cos(\xi) d\zeta(\xi) \\
&\leq \frac{1}{\alpha_{n-1}} \left\{ \int_{S^+\partial\Omega} \frac{\tau(\xi)^{n-1}}{\cos(\text{Ant}(\xi))} d\zeta(\xi) \right\}^{\frac{1}{n-1}} \left\{ \int_{S^+\partial\Omega} \cos(\text{Ant}(\xi))^{\frac{1}{n-2}} \cos(\xi)^{\frac{n-1}{n-2}} d\zeta(\xi) \right\}^{\frac{n-2}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Applicando le formule (4.7) e (4.8), otteniamo

$$\text{Vol}(\Omega) \leq \frac{1}{\alpha_{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)^{\frac{2}{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)^{\frac{n-2}{n-1}} C_2(n)^{\frac{n-2}{n-1}} = \frac{1}{\alpha_{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)^{\frac{n}{n-1}} C_2(n)^{\frac{n-2}{n-1}},$$

quindi,

$$C(n) \text{Vol}(M)^{n-1} = \frac{\alpha_{n-1}^{n-1}}{C_2(n)^{n-2}} \text{Vol}(M)^{n-1} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)^n.$$

Per ottenere l'uguaglianza, abbiamo bisogno che nelle formule del Lemma 4.6 e nella disuguaglianza di Hölder valgano le uguaglianze. Dalla formula (4.7) segue dunque che  $\Omega$  è

isometrico a un convesso di  $\mathbb{R}^n$  e il fatto che debba essere una palla si ha allora dal teorema isoperimetrico "classico" in  $\mathbb{R}^n$ .

Poiché nel caso  $n = 4$ , si ha  $C(4) = \overline{C}(4)$  (in tutte le altre dimensioni  $C(n) \neq \overline{C}(n)$ ), possiamo analizzare tale caso direttamente. L'uguaglianza nella disuguaglianza di Hölder implica

$$\frac{\tau^3(\xi)}{\cos(\text{Ant}(\xi))} = K \cos(\text{Ant}(\xi))^{\frac{1}{2}} \cos(\xi)^{\frac{3}{2}},$$

per ogni  $\xi \in S^+ \partial\Omega$ , con una costante  $K \in \mathbb{R}$ , mentre dall'uguaglianza nella formula (4.8), si ha

$$\tau(\xi) = 2r \cos(\xi),$$

per una costante  $r > 0$ . Quindi  $\Omega$  è una palla di raggio  $r$  in  $\mathbb{R}^n$ .

In dimensione  $n \neq 4$ , per l'uguaglianza dovremmo richiedere  $\Omega$  piatto e convesso,  $\cos(\text{Ant}(\xi)) = \cos(\xi)$  e  $\tau(\xi) = K \cos^{\frac{2}{n-2}}(\xi)$ . Si può vedere facilmente che nessun convesso di  $\mathbb{R}^n$  soddisfa quest'ultima condizione.  $\square$

# Referenze

- [1] M. Abate and F. Tovena, *Geometria differenziale*, Springer–Verlag, 2011.
- [2] E. F. Beckenbach and T. Radó, *Subharmonic functions and surfaces of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), no. 3, 662–674.
- [3] R. L. Bishop and R. J. Crittenden, *Geometry of manifolds*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XV, Academic Press, New York–London, 1964.
- [4] I. Chavel, *Riemannian geometry*, Cambridge University Press, 2005.
- [5] C. B. Croke, *A sharp four–dimensional isoperimetric inequality*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), no. 2, 187–192.
- [6] M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Dover Publications, 2016.
- [7] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, third ed., Universitext, Springer–Verlag, Berlin, 2004.
- [8] A. Grigor’yan, *Heat kernel and analysis on manifolds*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 47, Amer. Math. Soc., Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009.
- [9] B. Kleiner, *An isoperimetric comparison theorem*, Invent. Math. **108** (1992), no. 1, 37–47.
- [10] L. C. Piccinini, G. Stampacchia, and G. Vidossich, *Equazioni differenziali ordinarie in  $\mathbf{R}^n$  (problemi e metodi)*, Serie di Matematica e Fisica, Liguori Editore, Napoli, 1979.
- [11] L. A. Santaló, *Measure of sets of geodesics in a Riemannian space and applications to integral formulas in elliptic and hyperbolic spaces*, Summa Brasil. Math. **3** (1952), 1–11.
- [12] ———, *Integral geometry and geometric probability*, second ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, With a foreword by Mark Kac.
- [13] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry (5 volumes)*, second ed., Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.
- [14] A. Weil, *Sur les surfaces à courbure négative*, C.R. Acad. Sci. Paris **182** (1926), no. 1, 1069–1071.

# Ringraziamenti

In primo luogo ringrazio molto il Professore Carlo Mantegazza per la disponibilità e l'aiuto durante la stesura della tesi.

Vorrei ringraziare Flora, perché sa sempre cosa dire, per tutti i consigli, per la pazienza e per tutte le volte in cui appena torno a casa mi fa vedere i nuovi giochi inventati con Rocky, che ringrazio per essere un cagnolone tenerissimo.

Ringrazio tutta la mia famiglia, in particolare mamma, papà e più di tutti nonno.

Voglio ringraziare Antonio, oltre che per tutto l'aiuto materiale durante questi tre anni, anche per tutti i caffè che mi porta, per guardare sempre le stesse serie che mi piacciono e tanti altri motivi, ma soprattutto per il supporto continuo.

Infine voglio ringraziare Anna e Fiorella perché siamo passate dal vederci tutti i giorni al vederci un paio di volte all'anno ma non vi ho mai sentite distanti.

# Referenze