Problemi di Analisi I dal Corso del I Anno alla Scuola Normale Superiore di Pisa

Carlo Mantegazza

Edizioni MCM

Problemi di Analisi I
dal Corso del I Anno della
Scuola Normale Superiore
di Pisa

Carlo Mantegazza

(Carlo Mantegazza) Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri 7, Pisa 56126
E-mail address, C. Mantegazza: c.mantegazza@sns.it

Indice

Introduzione

Il corso del primo anno è il primo impatto degli studenti con la Scuola Normale Superiore di Pisa. Tale corso ha avuto varie forme, interpretazioni e contenuti, a seconda di chi lo tenesse e di chi ne facesse le esercitazioni, ma tradizionalmente si trattava e si tratta di una serie di complementi al corso di Analisi I del Dipartimento di Matematica di Pisa. In alcune occasioni si è trattato di un corso di *Calcolo* (specialmente quando a tenerlo era Franco Conti) con un occhio anche alle applicazioni alla fisica, in altre dello studio di temi di *Analisi Reale*, più sporadicamente, un corso sperimentale di *soli problemi*. Quest'ultimo fu il mio caso: Stefano Mortola ci proponeva ogni settimana una serie di circa 10 problemi di analisi da affrontare e ne rimandava la discussione alla lezione successiva (una forma soft del cosiddetto "metodo Moore", *http://www–history.mcs.st–and.ac.uk/Extras/Halmos_Moore_method.html*). Uno dei corsi più belli e impegnativi che abbia mai seguito. Ho avuto la fortuna di poter riproporre tale corso in un'occasione alla Scuola Normale e so che vari (allora) ragazzi l'hanno apprezzato quanto me e lo ricordano anche ora che sono dei professionisti.

Trovandomi ora "dall'altro lato", credo che la cura dei corsi di esercitazioni debba essere massima, in quanto è mia convinzione che solo risolvendo esercizi e problemi si assimili realmente la teoria. Inoltre, tale attività è forse la cosa che più si avvicina, in un corso di studi, a quello che è la ricerca professionale in matematica. In un certo senso (permettetemi il paragone), penso che studiare solo la teoria sia come imparare a giocare a calcio da un libro. Non ho mai considerato le esercitazioni come *complementari* alla teoria: ritengo che quanto chiamiamo "teoria" sia, anche storicamente, il ripensamento e l'organizzazione di argomenti che emergono frequentemente dal risolvere problemi espliciti. In questo senso, quindi, le esercitazioni si configurano come un corso parallelo vero e indipendente, in cui si imparano cose diverse.

Per questi motivi, la mia opinione personale è che ogni corso necessiti di un *corso* di esercitazioni che non segua pedissequamente quello di teoria e non tema di addentrarsi, curiosità degli studenti permettendo, in direzioni impreviste. Una certa elasticità del programma (e dell'esercitatore) è sicuramente un altro requisito fondamentale per un buon lavoro. Questo vale non solo per i corsi dei primi anni, ma per ogni corso di matematica con valenza "istituzionale": dovrebbe essere sempre previsto un corso di esercitazioni, eventualmente limitato. Nello stesso spirito, dovrebbe essere anche previsto un esame scritto di esercizi o problemi, malgrado ovviamente tutto ciò comporti maggiori oneri didattici/organizzativi. Ho sempre cercato di seguire queste convinzioni nei miei corsi e la mia valutazione al riguardo è stata spesso condivisa dagli studenti.

Questo libro raccoglie esercizi dalla mia esperienza di studente e di collaboratore in varie forme dei corsi del primo anno alla Scuola Normale, tenuti dagli anni novanta a oggi da Franco Conti, Stefano Mortola, Mariano Giaquinta, Giuseppe Da Prato, Fulvio Ricci, Luigi Ambrosio e con esercitatori Alberto Abbondandolo, Giovanni Gaiffi, Paolo Tilli, Andrea Mennucci, Tommaso Pacini e me stesso.

Le fonti di questi problemi sono in gran parte i seguenti libri:

- F. Conti, *Calcolo. Teoria e applicazioni*, McGraw–Hill, 1993;

- J. E. Marsden, *Elementary classical analysis*, W. H. Freeman and Co., 1974;
- G. Prodi, *Analisi matematica*, Bollati Boringhieri, 1972;
- W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw–Hill, 1976;

(che sono quelli che più ho amato da studente) e i colleghi Franco Conti, Stefano Mortola, Luigi Ambrosio, Pietro Majer, Giovanni Alberti, Enzo Tortorelli, Matteo Novaga, Alberto Abbondandolo, Giovanni Gaiffi, Andrea Maffei, Paolo Tilli, Francesco Bonsante, Stefano Francaviglia, Roberto Frigerio, Andrea Mennucci, Tommaso Pacini e vari altri... Inoltre, molti problemi sono sorti da discussioni con studenti curiosi che hanno sollevato domande durante le lezioni, domande a cui talvolta la risposta era difficile (in qualche caso sconosciuta) e che hanno portato anche me a imparare qualcosa di nuovo.

Il taglio di questa collezione di esercizi è piuttosto teorico, per scelta e per gusto. Per una raccolta di (spesso stupendi) esercizi più "pratici" rimando al bellissimo libro di Franco Conti citato sopra. Ho scelto di non includere esercizi sulle equazioni differenziali ordinarie, né sulle serie di Fourier, più naturalmente appartenenti a un corso del second'anno, sebbene talvolta siano state trattate. In alcune occasioni il corso ha avuto contenuti più geometrici, con una grossa parte di topologia generale (che è una robusta tradizione pisana) oppure è stato trattato anche il calcolo in più variabili. In questa collezione ho deciso di restare più ancorato agli argomenti standard comuni a un corso di Analisi I.

Il libro contiene circa 1800 problemi senza soluzioni. Essendo alla sua prima edizione è inevitabile che contenga errori di vario genere, di cui mi assumo la piena responsabilità. Nel caso ne troviate (la loro segnalazione è ovviamente gradita, così come ogni commento, critica o suggerimento), scrivete per favore a *c.mantegazza@sns.it*. Alcuni problemi hanno una o due stellette: ho cercato di segnalare quelli che mi sembravano più difficili, oppure molto difficili.

Mi è stato chiesto come mai non ho messo le soluzioni. Il primo motivo è perché il volume del libro si sarebbe triplicato, il secondo motivo è più didattico: sapere di poter andare a vedere la soluzione è una tentazione troppo forte, che indebolirebbe l'impegno anche dello studente più motivato. Inoltre, oggi uno strumento come internet e l'esistenza di siti come Wikipedia, MathOverflow o MathStackExchange (quest'ultimo in particolare) permettono di trovare la soluzione di qualunque esercizio di matematica (e di approfondire).

Infine, vorrei citare alcune persone che si sono rese disponibili a leggere e a correggere la versione quasi finale di questa raccolta: i miei colleghi Silvia Benvenuti, Francesco Bonsante, Alberto Farina, Annibale Magni, Sunra Mosconi e i miei ex–studenti Fabrizio Bianchi, Davide Lombardo, Giovanni Mascellani, Marco Marengon e Gennady Uraltsev, che hanno "subìto" da me molti di questi esercizi. Il vostro lavoro è stato preziosissimo, ve ne sono sentitamente grato.

CAPITOLO 1

Teoria degli Insiemi

PROBLEMA 1.1.
Si dimostrino le seguenti equivalenze logiche per le proposizioni p, q e r.

- leggi di idempotenza: $p \wedge p = p$, $p \vee p = p$,
- legge della doppia negazione: $-(-p) = p$,
- leggi commutative: $p \wedge q = q \wedge p$, $p \vee q = q \vee p$,
- leggi associative: $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$,
- leggi distributive: $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,
- leggi di De Morgan: $-(p \wedge q) = (-p) \vee (-q)$, $-(p \vee q) = (-p) \wedge (-q)$,
- leggi di assorbimento: $p \vee (p \wedge q) = p$, $p \wedge (p \vee q) = p$.

PROBLEMA 1.2.
Si trovi una espressione proposizionale in termini di p, q, r tale che risulti vera se e solo se esattamente due di esse sono vere.

PROBLEMA 1.3.
Dati tre insiemi A, B e C, si provi che

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)\,,$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)\,.$$

PROBLEMA 1.4.
Siano A e B due insiemi non vuoti, si provi che se

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$$

per un terzo insieme C, allora $A = B = C$.

PROBLEMA 1.5.
Dati quattro insiemi A, B, C e D, si determinino le relazioni tra le seguenti coppie di insiemi

$$(A \times C) \cup (B \times D) \qquad \text{e} \qquad (A \cup B) \times (C \cup D)\,,$$
$$(A \times C) \cap (B \times D) \qquad \text{e} \qquad (A \cap B) \times (C \cap D)\,.$$

PROBLEMA 1.6.
Siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, si provi che

$$X \times Y \setminus A \times B = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)\,.$$

PROBLEMA 1.7.
Si verifichi che

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C \cap B^c).$$

PROBLEMA 1.8.
La differenza simmetrica tra due insiemi è definita come $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dati gli insiemi A, B, C, si dimostri che

$$(A \triangle B)^c = A^c \triangle B = A \triangle B^c\,,$$

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)\,,$$

$$A \cup (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A^c \cap C)\,,$$

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C = (A \triangle C) \triangle B\,.$$

PROBLEMA 1.9.
Siano A e B due sottoinsiemi di un insieme X. Si dica per quali sottoinsiemi $Y \subseteq X$ valgono le seguenti relazioni

- $A \cup Y = B$,
- $A \cap Y = B$,
- $A \triangle Y = B$.

PROBLEMA 1.10.
Si provi che per una famiglia di insiemi A_i per $i \in \{1, \dots, n\}$, si ha

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus S_1) \cup \dots \cup (A_n \setminus S_{n-1})\,,$$

dove $S_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ e che tale unione è disgiunta.
Vale la formula analoga

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus S_1) \cup \dots \cup (A_n \setminus S_{n-1}) \cup \dots$$

(infinita) se la famiglia di insiemi A_i è numerabile (cioè $i \in \mathbb{N}$)?

PROBLEMA 1.11.
Per una famiglia di insiemi A_i con $i \in \{1, \dots, n\}$, si determini se la seguente formula vale

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots \cup (A_n \setminus A_1) \cup \bigcap_{i=1}^{n} A_i\,.$$

PROBLEMA 1.12.
Data una successione di insiemi A_n per $n \in \mathbb{N}$, si definiscano il *limsup* e il *liminf* della successione, rispettivamente, come segue

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n+k}\,,$$

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n+k}\,.$$

Si provi che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \underline{\lim}\, A_n \subseteq \overline{\lim}\, A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,.$$

PROBLEMA 1.13.
Si provi che $\overline{\lim}\, A_n$ sono tutti e soli gli elementi in $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ tali che appartengano a un insieme infinito di insiemi A_n.
Si provi che $\underline{\lim}\, A_n$ sono tutti e soli gli elementi in $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ tali che appartengano definitivamente agli insiemi A_n.

PROBLEMA 1.14.
Si provi che se tutti gli insiemi A_i sono sottoinsiemi di un insieme X, valgono le relazioni

$$\underline{\lim}\, A_n^c = \big(\overline{\lim}\, A_n\big)^c\,,$$

$$\overline{\lim}\, A_n^c = \big(\underline{\lim}\, A_n\big)^c\,.$$

PROBLEMA 1.15.
Date due successioni di insiemi A_n e B_n, si stabiliscano le relazioni tra le seguenti coppie di insiemi

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\lim}\, A_n \cup \underline{\lim}\, B_n & \text{e} & \underline{\lim}(A_n \cup B_n)\,, \\
\underline{\lim}\, A_n \cap \underline{\lim}\, B_n & \text{e} & \underline{\lim}(A_n \cap B_n)\,, \\
\overline{\lim}\, A_n \cup \overline{\lim}\, B_n & \text{e} & \overline{\lim}(A_n \cup B_n)\,, \\
\overline{\lim}\, A_n \cap \overline{\lim}\, B_n & \text{e} & \overline{\lim}(A_n \cap B_n)\,.
\end{array}$$

PROBLEMA 1.16.
Si mostri che se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots A_n \subseteq \dots$ allora $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ e se invece $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots A_n \supseteq \dots$ allora $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

PROBLEMA 1.17.
Si descriva l'insieme $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)))$, dove $\mathscr{P}(X)$ denota l'insieme *potenza* di un insieme X, l'insieme delle sue parti.

PROBLEMA 1.18.
Sia $f : X \to Y$ una funzione e siano $A, B \subseteq X$, si provino le seguenti relazioni, mostrando un esempio quando l'uguaglianza non vale e discutendo se vale assumendo che f sia iniettiva/surgettiva:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)\,,$$

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)\,,$$

$$f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)\,,$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)\,,$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)\,,$$

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)\,.$$

PROBLEMA 1.19.
Si discutano le relazioni del problema precedente in caso di unioni/intersezioni multiple e/o infinite di insiemi.

PROBLEMA 1.20.
Sia $f : X \to Y$ una funzione, si provi che

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

oppure

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)\,,$$

per ogni coppia di insiemi $A, B \subseteq X$, se e solo se la funzione f è iniettiva.

PROBLEMA 1.21.
Sia $f : X \to Y$ una funzione e siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, si provino le seguenti relazioni, mostrando con un esempio che l'uguaglianza non vale in generale:

$$f^{-1}(f(A)) \supseteq A\,,$$
$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B\,.$$

Si provi inoltre che l'uguaglianza vale nella prima relazione per ogni insieme $A \subseteq X$ se e solo se la funzione f è iniettiva e che l'uguaglianza vale nella seconda relazione per ogni insieme $B \subseteq X$ se e solo se la funzione f è surgettiva.

PROBLEMA 1.22.
Con le stesse notazioni del problema precedente si provi in generale che

$$f^{-1}(f(f^{-1}(f(A)))) = f^{-1}(f(A))\,,$$
$$f(f^{-1}(f(f^{-1}(B)))) = f(f^{-1}(B))\,.$$

PROBLEMA 1.23.
Dati due insiemi X e Y, si provi che una funzione $f : X \to Y$ è iniettiva se e solo se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che $g \circ f = Id_X$.
Si provi che una funzione $f : X \to Y$ è surgettiva se e solo se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che $f \circ g = Id_Y$.
In entrambi i casi si dica se la funzione g (quando esiste) è unica.

PROBLEMA 1.24.
Considerate due funzioni $g : X \to Y$ e $f : Y \to Z$, si risponda alle seguenti domande, motivando la risposta.

- Se f e g sono iniettive, la funzione composta $f \circ g$ è iniettiva? Vale il viceversa?
- Se f e g sono surgettive, la funzione composta $f \circ g$ è surgettiva? Vale il viceversa?
- Se la funzione composta $f \circ g$ è iniettiva/surgettiva cosa si può dire sulle funzioni f e g?
- Se la funzione composta $f \circ g$ è iniettiva per una funzione $g : X \to Y$ surgettiva, cosa si può dire sulla funzione f?
- Se la funzione composta $f \circ g$ è iniettiva per ogni funzione $g : X \to Y$ iniettiva e X ha almeno due elementi, cosa si può dire sulla funzione f?
- Se la funzione composta $f \circ g$ è surgettiva per una funzione $f : Y \to Z$ iniettiva, cosa si può dire sulla funzione g?
- Se la funzione composta $f \circ g$ è surgettiva per ogni funzione $f : Y \to Z$ surgettiva e Z ha almeno due elementi, cosa si può dire sulla funzione g?

PROBLEMA 1.25. ★
Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(f(x)) = -x$?
Per ogni funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esiste sempre una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f \circ f = g$?

PROBLEMA 1.26.
Dati due insiemi X e Y Si provi che esiste una funzione $f : X \to Y$ iniettiva (surgettiva) se e solo se esiste una funzione $g : Y \to X$ surgettiva (iniettiva).

PROBLEMA 1.27.
Si provi che per ogni funzione $f : X \to Y$ esiste un insieme Z e due funzioni $g : X \to Z$ e $h : Z \to Y$ tali che $f = h \circ g$ con g surgettiva e h iniettiva. È vero anche con g iniettiva e h surgettiva?

PROBLEMA 1.28.
Sia $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il campo dei resti modulo 2.

- Si verifichi che, dato un insieme X, l'insieme $\mathbb{Z}_2^X$ con le operazioni di somma e prodotto puntuale, è un anello commutativo con identità. Quali sono gli elementi invertibili?
- Si consideri la bigezione $\mathscr{P}(X) \to \mathbb{Z}_2^X$ che ad ogni sottoinsieme A di X associa la sua funzione caratteristica $\mathbb{1}_A \in \mathbb{Z}_2^X$ definita come
$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$
Le operazioni di somma e prodotto di $\mathbb{Z}_2^X$, trasferite in $\mathscr{P}(X)$ con questa bigezione lo rendono un anello commutativo. A cosa corrispondono l'uno, lo zero, la somma, il prodotto?
- A cosa corrispondono le operazioni $A \mapsto A^c$, $(A, B) \mapsto (A \cup B)$ e $(A, B) \mapsto (A \cap B)$?

PROBLEMA 1.29.
Dato un sottoinsieme $A \subseteq X$ sia $\mathbb{1}_A : X \to \{0, 1\}$ la sua funzione caratteristica. Si provi che
$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B\,,$$
$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$$
e si trovino le formule per le funzioni caratteristiche di A^c, $A \setminus B$, $A \triangle B$.

PROBLEMA 1.30.
Dato un insieme X si caratterizzino le funzioni *idempotenti* $f : X \to X$, cioè tali che $f^2 = f$ (usiamo qui la notazione $f^2 = f \circ f$).

PROBLEMA 1.31.
Dati due insiemi finiti X e Y, quali sono le cardinalità degli insiemi delle funzioni $f : X \to Y$ iniettive, surgettive, bigettive?

PROBLEMA 1.32.
Si dimostri che un insieme X è infinito se e solo se esiste un suo sottoinsieme proprio Y e una funzione iniettiva $f : X \to Y$, oppure una funzione surgettiva $g : Y \to X$.
L'insieme $X \setminus Y$ si può scegliere infinito? E della stessa cardinalità di X?

PROBLEMA 1.33.
Si provi che

- l'unione di due insiemi numerabili è numerabile e così ogni unione finita di insiemi numerabili,
- il prodotto di due insiemi numerabili è numerabile e così ogni prodotto finito di insiemi numerabili,
- che ogni insieme infinito contiene un insieme numerabile.

PROBLEMA 1.34.
Si provi che se X è un insieme infinito allora la cardinalità di $X \cup \mathbb{N}$ è uguale a quella di X.
Si provi che se X è un insieme infinito di cardinalità maggiore di $\mathbb{N}$ allora la cardinalità di $X \setminus Y$, dove $Y \subseteq X$ è numerabile, è uguale a quella di X.

PROBLEMA 1.35.
Si provi che un'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile e che l'insieme delle parti finite di un numerabile è numerabile.
L'insieme delle parti numerabili di $\mathbb{N}$ è numerabile?

PROBLEMA 1.36. ★
Si trovi un polinomio $p(x, y)$ in due variabili a coefficienti interi tale che la funzione $p : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sia iniettiva. Si trovi un polinomio $q(x, y)$ in due variabili a coefficienti razionali tale che la funzione $q : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sia bigettiva.

Nota. *Lo stesso problema per* $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *o* $q : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *è aperto, per approfondire si vedano* **[27, 29]**.

PROBLEMA 1.37.
Si provi che la cardinalità di $\mathbb{R}$ (cardinalità del continuo $\mathfrak{c}$) è uguale a quella di $2^{\mathbb{N}}$ e delle successioni in $\mathbb{N}$, cioè di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

PROBLEMA 1.38.
Si provi che
- l'unione di due insiemi con cardinalità del continuo ha sempre cardinalità del continuo e così ogni unione finita,
- il prodotto di due insiemi con cardinalità del continuo ha sempre cardinalità del continuo e così ogni prodotto finito.

PROBLEMA 1.39.
Si provi che se X è un insieme di cardinalità maggiore di $\mathfrak{c}$ allora le cardinalità di $X \cup \mathbb{R}$ e di $X \setminus \mathbb{R}$ sono uguali a quella di X.

PROBLEMA 1.40.
Si provi che un'unione numerabile di insiemi con cardinalità del continuo ha sempre cardinalità del continuo.

PROBLEMA 1.41. ★
Si dimostri che l'insieme delle parti finite di un insieme con cardinalità del continuo ha sempre cardinalità del continuo.
L'insieme delle parti numerabili di $\mathbb{R}$ ha la cardinalità del continuo? E la sua cardinalità è uguale a quella delle successioni in $\mathbb{R}$, cioè di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

PROBLEMA 1.42.
Si discutano le cardinalità dei seguenti insiemi:
- i numeri razionali e i numeri irrazionali,
- i numeri complessi,
- i polinomi a coefficienti interi o razionali,
- i numeri algebrici e i numeri trascendenti,
- le successioni a valori razionali/reali,
- le successioni a valori in $\mathbb{Q}$ convergenti a un limite in $\mathbb{Q}$ e quelle a valori in $\mathbb{Q}$ convergenti a un limite in $\mathbb{R}$,
- le successioni a valori in $\mathbb{R}$ convergenti a un limite in $\mathbb{Q}$ e quelle a valori in $\mathbb{R}$ semplicemente convergenti,
- le funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Nota. *Un numero reale si dice* algebrico *se è la radice di un polinomio a coefficienti interi, altrimenti si dice* trascendente.

PROBLEMA 1.43.
Dati tre insiemi A, B e C si provino le seguenti formule,
- $card\, A \times B = card\, B \times A$,
- $card\, (A \times B) \times C = card\, A \times (B \times C)$,
- $card\, (A^B)^C = card\, A^{B \times C}$,

- $card\, A^B \times A^C = card\, A^{B\cup C}$, se B e C sono disgiunti.
- $card\, (A \times B)^C = card\, A^C \times B^C$,

PROBLEMA 1.44.
Sia X infinito e Y di cardinalità minore di X, si provi allora che le cardinalità di $X \cup Y$ e di $X \setminus Y$ sono uguali alla cardinalità di X.

PROBLEMA 1.45. ★
Si provi che se almeno uno dei due insiemi A e B è infinito, si ha

$$card\, A \cup B = \max\{card\, A,\, card\, B\}$$

e che di conseguenza

$$card\, 2 \times A = card\, n \times A = card\, A$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e A infinito.

PROBLEMA 1.46. ★
Si provi che se X è infinito la cardinalità di $X \times \mathbb{N}$ è uguale alla cardinalità di X.

PROBLEMA 1.47. ★★
Si provi che se almeno uno dei due insiemi A e B è infinito, si ha

$$card\, A \times B = \max\{card\, A,\, card\, B\}$$

e che di conseguenza

$$card\, A \times A = card\, A^n = card\, A$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e A infinito.

PROBLEMA 1.48.
Sia X infinito, si provi che si può partizionare X in una famiglia di insiemi numerabili. Qual è la cardinalità di tale famiglia?

PROBLEMA 1.49.
Sia X infinito, si provi che si può partizionare X in una famiglia numerabile di insiemi di cardinalità uguale a quella di X.

PROBLEMA 1.50.
Sia X di cardinalità minore o uguale a Y. Si provi che si può partizionare Y in una famiglia di insiemi ognuno di cardinalità uguale a quella di X. Qual è la cardinalità di tale famiglia?

PROBLEMA 1.51.
Dati due insiemi X e Y, si discutano le cardinalità degli insiemi delle funzioni $f : X \to Y$ iniettive, surgettive, bigettive, in relazione alla cardinalità dell'insieme Y^X.

PROBLEMA 1.52. ★
La cardinalità delle parti numerabili di un insieme infinito Y è la stessa della cardinalità di $Y^{\mathbb{N}}$?
Sia X di cardinalità minore o uguale a Y, la cardinalità delle parti di cardinalità X di Y è la stessa della cardinalità di Y^X?

PROBLEMA 1.53.
Si provi che se Y è un insieme infinito e $card\, X \leq card\, Y$ si ha $card\, X^Y = card\, 2^Y$.

PROBLEMA 1.54.
Si provi che se $card\, X = card\, 2^Z$ per un qualche insieme infinito Z, allora

$$card\, X^Y = \max\{card\, X,\, card\, 2^Y\}\,,$$

in particolare, $card\, X^{\mathbb{N}} = card\, X$.

Nota. *Nel caso in cui l'insieme X non soddisfi $card\, X = card\, 2^Z$ per un qualche insieme infinito Z, determinare la cardinalità di X^Y quando $card\, Y < card\, X$ può essere difficile (è legata al concetto di* cofinalità *di un numero cardinale) e dipendere dall'assunzione o meno dell'*ipotesi del continuo (generalizzata)*, per approfondire l'argomento si consulti la letteratura specialistica.*
Esistono comunque insiemi infiniti X tali che $card\, X^{\mathbb{N}} > card\, X$ (esempio complicato).

PROBLEMA 1.55. ★
Si provi il seguente *Teorema di König*. Se $card\, X_i < card\, Y_i$ per ogni $i \in \mathcal{I}$, insieme di indici, si ha

$$card \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i < card \prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i\,.$$

Se ne deduca il fatto che $card\, X < card\, 2^X$ per ogni insieme infinito X.

PROBLEMA 1.56.
Sia A un insieme non vuoto. Chiamiamo *bipartizione* di A una partizione di A in due soli sottoinsiemi. Sia X l'insieme delle bipartizioni di A.

- Sia $a \in A$ un qualunque elemento, si dimostri che la cardinalità di X è uguale alla cardinalità dell'insieme delle parti di $A \setminus \{a\}$.
- Si dimostri che esiste una corrispondenza biunivoca tra X e le relazioni d'equivalenza su A aventi la seguente proprietà aggiuntiva:

$$\forall x, y, z \in A \qquad x \not\sim y,\ y \not\sim z \implies x \sim z\,.$$

PROBLEMA 1.57. ★
Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Diciamo che $X \subseteq V$ è libero se ogni suo sottoinsieme finito è linearmente indipendente. Diciamo che X è un sistema di generatori se per ogni $v \in V$ esistono $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$. Una base di Hamel B di V è un sistema libero di generatori.

- Si provi che B è una base di Hamel se e solo se è un sottoinsieme libero massimale.
- Si dimostri, usando il lemma di Zorn, che ogni spazio vettoriale ammette una base di Hamel.
- Si dimostri che, dato X sottoinsieme libero di V, esiste una base di Hamel di V contenente X.
- Si dimostri che, dato X sottoinsieme libero di V e una base di Hamel B di V, esiste un sottoinsieme B' di B tale che $X \cup B'$ è una base di Hamel di V.
- Si dimostri che due basi di Hamel B_1 e B_2 di uno spazio vettoriale V hanno la stessa cardinalità.

PROBLEMA 1.58. ★
Si provi che esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (una tale funzione si dice *additiva*), ma f non ha la forma $f(x) = \alpha x$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$, cioè non è $\mathbb{R}$–lineare (o semplicemente lineare). Si provi che ogni funzione additiva è $\mathbb{Q}$–lineare, cioè $f(qx) = qf(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}$.

Nota. *L'equazione $f(x+y) = f(x) + f(y)$ si dice* equazione funzionale di Cauchy*, che la studiò per primo nel libro* **[6]** *dimostrando il primo enunciato del Problema 9.83, mentre Hamel in* **[16]** *mostrò l'esistenza di soluzioni non $\mathbb{R}$–lineari.*

PROBLEMA 1.59. ★★
Si provi che esiste una funzione additiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che l'immagine di ogni intervallo di $\mathbb{R}$ sia tutto $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 1.60. ★★
Si provi che $\mathbb{S}^1$, visto come il gruppo moltiplicativo dei complessi di norma unitaria, è isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$ dei complessi non nulli.

PROBLEMA 1.61.
Quante sono le relazioni di equivalenza possibili su un insieme di 2, 3, 4 elementi?

PROBLEMA 1.62.
Data una relazione $\mathcal{R}$ in un insieme X, si definisca la relazione inversa $\mathcal{R}^{-1}$ come segue: $a\mathcal{R}^{-1}b$ se e solo se $b\mathcal{R}a$.
Date due relazioni $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ su X, si definisca la relazione composta $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ come segue: $a(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})b$ se e solo se esiste $c \in X$ tale che $a\mathcal{R}c$ e $c\mathcal{S}b$.

- Si provi che la relazione $\mathcal{R}^{-1}$ è simmetrica se e solo se $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.
- Si provi che la relazione $\mathcal{R}^{-1}$ è transitiva se e solo se lo è $\mathcal{R}$.
- Si provi che se una relazione $\mathcal{R}$ è transitiva se e solo se $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$ e si dia un esempio in cui tale inclusione è stretta. Se la relazione $\mathcal{R}$ è anche riflessiva vale l'uguaglianza?
- Si provi che una relazione $\mathcal{R}$ è di equivalenza se e solo se è riflessiva, $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$ e $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

PROBLEMA 1.63.
Si provi che se una relazione $\mathcal{R}$ è riflessiva e transitiva allora la relazione $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ è di equivalenza.

PROBLEMA 1.64.
Si dicano quali sono le proprietà soddisfatte dalle seguenti relazioni:

- $\mathcal{R}$ su $\mathbb{R}$ data da $x\mathcal{R}y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$,
- $\mathcal{R}'$ su $\mathbb{R}$ data da $x\mathcal{R}'y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- $\mathcal{S}$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ data da $x\mathcal{S}y$ se e solo se $x/y \in \mathbb{Q}$.
- $\mathcal{S}'$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ data da $x\mathcal{S}'y$ se e solo se $x/y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

PROBLEMA 1.65.
L'intersezione e l'unione di due o più relazioni di equivalenza sono ancora relazioni di equivalenza?
L'intersezione e l'unione di due o più relazioni d'ordine sono ancora relazioni d'ordine?

PROBLEMA 1.66.
Date due relazioni $\mathcal{R}$ su X e $\mathcal{S}$ su Y, si definisca una relazione $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ su $X \times Y$ come segue: $(x_1, y_1)(\mathcal{R} \times \mathcal{S})(x_2, y_2)$ se e solo se $x_1\mathcal{R}x_2$ e $y_1\mathcal{S}y_2$.
Si dica se valgono:

- $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relazioni d'equivalenza allora $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ è una relazione d'equivalenza,
- $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relazioni d'ordine allora $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ è una relazione d'ordine.

Si dica se le due affermazioni sopra valgono se la relazione $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ su $X \times Y$ è invece definita come segue: $(x_1, y_1)(\mathcal{R} \times \mathcal{S})(x_2, y_2)$ se e solo se vale almeno una delle due condizioni $x_1\mathcal{R}x_2$ e $y_1\mathcal{S}y_2$.

PROBLEMA 1.67.
Sia $\mathcal{R}$ una relazione su X, si provi che $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ è la più piccola relazione simmetrica che contiene $\mathcal{R}$ e che $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ è la più grande relazione simmetrica contenuta in $\mathcal{R}$.

PROBLEMA 1.68.
Sia $f : X \to Y$ una funzione e definiamo la relazione $a\mathcal{R}b$ se $f(a) = f(b)$. Si mostri che $\mathcal{R}$ è una relazione d'equivalenza e che la mappa $\widetilde{f} : X/\mathcal{R} \to Y$ è ben definita da $\widetilde{f}([a]) = f(a)$ per

ogni $a \in X$, è iniettiva e soddisfa $\widetilde{f} \circ \pi = f$, dove $\pi : A \to X/\mathcal{R}$ è la mappa di proiezione nel quoziente.

PROBLEMA 1.69.
Sia $f : X \to Y$ una funzione e siano $\mathcal{R}$ su X e $\mathcal{S}$ su Y due relazioni d'equivalenza, inoltre si assuma che per ogni coppia a, b in X con $a\mathcal{R}b$ si abbia $f(a)\mathcal{S}f(b)$. Si provi che allora è ben definita e unica una mappa $\widetilde{f} : X/\mathcal{R} \to Y/\mathcal{S}$ tale che

$$\widetilde{f} \circ \pi_{\mathcal{R}} = \pi_{\mathcal{S}} \circ f\,,$$

dove $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R}$ e $\pi_{\mathcal{S}} : Y \to Y/\mathcal{S}$ sono le rispettive mappe di proiezione sul quoziente delle due relazioni $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

PROBLEMA 1.70.
Siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ rispettivamente una relazione di equivalenza e di ordine sull'insieme X, sia $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la mappa *proiezione* che manda ogni elemento $x \in X$ nella sua classe di equivalenza $[x] \in X/\mathcal{R}$. Se si ha che per ogni coppia (x, y) e (z, w) con $x\mathcal{R}y$ e $z\mathcal{R}w$, la relazione $x \leq z$ implica $y \leq w$ allora si provi che $\widetilde{\mathcal{S}} = \widetilde{\pi}(\mathcal{S})$ è una relazione d'ordine su $X/\mathcal{R}$, dove la mappa $\widetilde{\pi} : X \times X \to X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R}$ è data da $(x, z) \mapsto ([x], [z])$.
Si noti inoltre che la mappa $\widetilde{\pi}$ manda la relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ in una relazione d'equivalenza $\widetilde{\mathcal{R}} = \widetilde{\pi}(\mathcal{R})$ su $X/\mathcal{R}$ consistente nella sola diagonale di $X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R}$.

PROBLEMA 1.71.
Dato l'insieme A, sia X l'insieme delle relazione d'ordine su A.
Ordiniamo X come segue: $\mathcal{R}_1 \leq \mathcal{R}_2$ se e solo se $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$.

- Esiste un elemento minimo?
- Quali sono gli elementi massimali?
- Si provi che per ogni $\mathcal{R}_1 \in X$ esiste $\mathcal{R}_2 \in X$ massimale con $\mathcal{R}_1 \leq \mathcal{R}_2$.

PROBLEMA 1.72.
Siano X e Y due insiemi ordinati. Una funzione $f : X \to Y$ si dice ordinata se $a \leq b$ implica $f(a) \leq f(b)$.
Si trovino due relazioni $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ su X e una corrispondenza biunivoca ordinata $f : (X, \mathcal{R}_1) \to (X, \mathcal{R}_2)$ tale che f^{-1} non sia ordinata.
Si trovi una relazione $\mathcal{R}$ su X e una corrispondenza biunivoca ordinata $f : (X, \mathcal{R}) \to (X, \mathcal{R})$ tale che f^{-1} non sia ordinata.

PROBLEMA 1.73.
Si costruisca una corrispondenza biunivoca strettamente crescente $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^+$.

PROBLEMA 1.74.
Siano $(X, \mathcal{R})$ e $(Y, \mathcal{S})$ due insiemi ordinati. Una corrispondenza biunivoca ordinata $f : X \to Y$ si dice un isomorfismo se anche la sua inversa f^{-1} è ordinata.
Sia X bene ordinato e sia $f : X \to X$ un isomorfismo, allora si provi che per ogni $x \in X$ si ha $x \leq f(x)$. Si deduca che se $(X, \mathcal{R})$ e $(Y, \mathcal{S})$ sono bene ordinati e isomorfi, l'isomorfismo è unico. In particolare, l'unico isomorfismo di X in sé è l'identità.

PROBLEMA 1.75.
Su $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ si consideri la seguente relazione

$$\mathcal{R} = \{((x, y), (x', y')) \in X \times X \,:\, xy' = x'y\}\,,$$

- si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza,
- chi è l'insieme $X/\mathcal{R}$?

PROBLEMA 1.76.
Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ su $\mathbb{N}$ data da $a \leq b$ se e solo se a divide b.

- Si verifichi che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine. È di ordine totale? È un buon ordinamento di $\mathbb{N}$?
- Con tale ordine $\mathbb{N}$ ha massimo e minimo? E quali sono?
- Si provi che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha estremo superiore e inferiore.
- Cosa sono $n \vee m = \inf\{n, m\}$ e $n \wedge m = \sup\{n, m\}$?

PROBLEMA 1.77.
Sia A un insieme parzialmente ordinato. Un suo elemento può essere contemporaneamente minimale e massimale? E minimo e massimo?

PROBLEMA 1.78.
Si provi che se un insieme parzialmente ordinato A è finito e ha un unico elemento massimale, questo è il massimo. Si mostri con un esempio che l'ipotesi di finitezza è necessaria.

PROBLEMA 1.79.
Si provi che un insieme A è finito se e solo se ogni ordinamento totale su A è un buon ordinamento.

PROBLEMA 1.80.
Si provi che un insieme A è finito se e solo se possiede un buon ordinamento $\leq$ tale che la relazione d'ordine inversa sia ancora un buon ordinamento.

PROBLEMA 1.81. ★
Si discuta la struttura di un insieme totalmente ordinato $(A, \leq)$ in cui per ogni elemento esista sia il suo *successore* che il suo *predecessore*.
Il predecessore di un elemento $a \in A$ si definisce come il massimo degli elementi $b < a$ e il suo successore come il minimo degli elementi $c > a$.

PROBLEMA 1.82.
Sia $(A, \leq)$ un insieme totalmente ordinato, si provi che se ogni sottoinsieme numerabile di A è bene ordinato, allora A è bene ordinato.

PROBLEMA 1.83.
Sia $(A, \leq)$ un insieme totalmente ordinato, si provi che A è bene ordinato se e solo se non contiene un sottoinsieme isomorfo (nel senso degli insiemi ordinati) a $\mathbb{Z}^-$.

PROBLEMA 1.84 (Principio di Massimalità di Hausdorff). ★
Sia $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Si provi che ogni catena in A è contenuta in una catena massimale.
Si provi che questo principio è equivalente al lemma di Zorn.
Si provi che una forma equivalente è che ogni insieme parzialmente ordinato contiene una catena massimale.

PROBLEMA 1.85.
Sia $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Se l'ordinamento non è totale esistono due elementi $a, b \in A$ tali che né $a \leq b$ né $b \leq a$, si provi allora che esiste un ordinamento $\leq'$ di A che estende $\leq$ tale che valga $a \leq' b$ oppure $b \leq' a$.

PROBLEMA 1.86.
Sia $(X, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Diciamo che un sottoinsieme non vuoto A di X è *anarchico* se vale l'implicazione

$$a, a' \in A,\ a \leq a' \implies a = a' .$$

- Si dimostri che esistono sottoinsiemi anarchici massimali rispetto all'inclusione.
- Si dica per quali insiemi ordinati esiste un sottoinsieme anarchico massimo rispetto all'inclusione.
- Dato un sottoinsieme anarchico massimale A, si considerino gli insiemi

$$A^+ = \{x \in X \,:\, \exists a \in A \text{ tale che } a < x\}, \qquad A^- = \{x \in X \,:\, \exists a \in A \text{ tale che } x < a\},$$

si dimostri che A, A^+, A^- sono disgiunti e la loro unione è X.

PROBLEMA 1.87.
Sia $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Si provi che esiste un ordinamento totale di A che estende $\leq$.

PROBLEMA 1.88. ★
L'assioma di regolarità afferma che ogni insieme non vuoto A possiede un elemento B tale che $A \cap B = \emptyset$.

- Si dimostri che non può esistere un insieme X tale che $X \in X$ e si deduca che $X \cup \{X\} \neq X$.
- Si provi che non esistono due insiemi X, Y tali che $X \in Y$ e $Y \in X$. Se ne deduca che se $X \cup \{X\} = Y \cup \{Y\}$ allora $X = Y$.
- Si provi che non esistono successioni di insiemi A_n per $n \in \mathbb{N}$ tali che $A_{n+1} \in A_n$.

PROBLEMA 1.89.
Si dica quali dei seguenti insiemi sono induttivi:

- $\mathbb{N}$ con l'ordinamento usuale,
- l'insieme delle parti $\mathscr{P}(A)$ di un insieme A, con l'ordinamento dato dall'inclusione,
- $\mathscr{P}(A) \setminus \{A\}$ con l'ordinamento dato dall'inclusione.

PROBLEMA 1.90.
Siano $(A, \leq)$ e $(B, \leq')$ due insiemi parzialmente ordinati. Sul prodotto cartesiano $A \times B$ introduciamo l'ordinamento *lessicografico*

$$(a, b) \leq'' (c, d) \iff b \leq' d \text{ oppure } b = d \text{ e } a \leq c.$$

- Si dimostri che $\leq''$ è effettivamente un ordinamento su $A \times B$.
- Si dimostri che se $(A, \leq)$ e $(B, \leq')$ sono entrambi induttivi anche $(A \times B, \leq'')$ è induttivo.
- In $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \leq'')$, ottenuto dall'ordinamento naturale in $\mathbb{R}$ di entrambi i fattori, si dica se esistono sottoinsiemi superiormente limitati senza estremo superiore.

PROBLEMA 1.91.
Dato un insieme X, una sottofamiglia di $\mathscr{P}(X)$ si dice

- *anello* se è chiusa per intersezione e differenza di due insiemi,
- *algebra (o campo)* se è chiusa per intersezione e complemento,
- *δ–anello* se è chiusa per unione, differenza di due insiemi e intersezione numerabile,
- *σ–anello* se è chiusa per intersezione, differenza di due insiemi e unione numerabile,
- *σ–algebra* se è chiusa per intersezione numerabile e complemento.

Si mostri che un anello potrebbe non contenere l'insieme X e che se lo contiene è un algebra. Si trovino le relazioni tra queste strutture, mostrando che non sono equivalenti.

PROBLEMA 1.92.
Dato un insieme X, si dica che strutture sono:

- $\mathscr{P}(X)$,
- i sottoinsiemi finiti di X,

- i sottoinsiemi numerabili di X,
- i sottoinsiemi di X con cardinalità non superiore a una cardinalità fissata (finita o infinita),
- data una bigezione $f : X \to X$, la famiglia degli insiemi tali che $f(A) = A$.

PROBLEMA 1.93.
Dato un insieme X e due qualsiasi delle strutture del problema precedente, si dica cosa soddisfano la loro intersezione e la loro unione.

PROBLEMA 1.94.
Dato un insieme X e una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X, si mostri che esiste una minima (rispetto all'inclusione) σ–algebra che contiene $\mathcal{F}$, che si dice *generata da* $\mathcal{F}$.

PROBLEMA 1.95.
Dato un insieme X, si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- la famiglia che consiste solo Ø e di X è una σ–algebra, detta *σ–algebra minimale*,
- $\mathscr{P}(X)$ è una σ–algebra, detta *σ–algebra discreta*,
- per ogni insieme $A \subseteq X$, la famiglia $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ è una σ–algebra, detta *σ–algebra generata da A*,
- la famiglia dei sottoinsiemi al massimo numerabili di X è una σ–algebra (si noti che è generata dai sottoinsiemi di X con un solo elemento),
- la famiglia dei sottoinsiemi di X con complementare al massimo numerabile è una σ–algebra,
- la famiglia di tutte le unioni numerabili di insiemi di una partizione di X è una σ–algebra.

PROBLEMA 1.96. ★
Si mostri che una σ–algebra o è finita o è più che numerabile.