COMPLEMENTI DI MATEMATICA - I ANNO SNS 2013/14
ESERCIZI

CARLO MANTEGAZZA

Gli esercizi con delle stellette sono più difficili.
Commenti, suggerimenti e segnalazioni di errori sono graditi.

1. Teoria degli Insiemi

Problema 1.1.
Si trovi una espressione proposizionale in termini di p, q, r tale che risulti vera se e solo se esattamente due di esse sono vere.

Problema 1.2.
Siano A e B due sottoinsiemi di un insieme X. Si dica (e si dimostri la risposta) per quali sottoinsiemi $Y \subseteq X$ valgono le seguenti relazioni
(1) $A \cup Y = B$,
(2) $A \cap Y = B$,
(3) $A \triangle Y = B$.

Problema 1.3.
Dati tre insiemi A, B e C, si provi che

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)\,,$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)\,.$$

Problema 1.4.
Siano A e B due insiemi non vuoti, si provi che se

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$$

per un terzo insieme C, allora $A = B = C$.

Problema 1.5.
Dati quattro insiemi A, B, C e D, si determinino le relazioni tra le seguenti coppie di insiemi

$$(A \times C) \cup (B \times D) \qquad \text{e} \qquad (A \cup B) \times (C \cup D)\,,$$

$$(A \times C) \cap (B \times D) \qquad \text{e} \qquad (A \cap B) \times (C \cap D)\,.$$

Date: 13 dicembre 2015.

Problema 1.6.
Siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, si provi che

$$X \times Y \setminus A \times B = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)\,.$$

Problema 1.7.
Si provi che per una famiglia di insiemi A_i per $i \in \{1, \dots, n\}$, si ha

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus S_1) \cup \dots \cup (A_n \setminus S_{n-1})\,,$$

dove $S_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ e che tale unione è disgiunta.
Vale la formula analoga

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus S_1) \cup \dots \cup (A_n \setminus S_{n-1}) \cup \dots$$

(infinita) se la famiglia di insiemi A_i è numerabile (cioè $i \in \mathbb{N}$)?

Problema 1.8.
Per una famiglia di insiemi A_i con $i \in \{1, \dots, n\}$, si determini se la seguente formula vale

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots \cup (A_n \setminus A_1) \cup \bigcap_{i=1}^{n} A_i\,.$$

Problema 1.9.
Data una successione di insiemi A_n per $n \in \mathbb{N}$, si definiscano il *limsup* ed il *liminf* della successione, rispettivamente, come segue

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n+k}\,,$$

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n+k}\,.$$

Si provi che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \underline{\lim}\, A_n \subseteq \overline{\lim}\, A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,.$$

Problema 1.10.
Si provi che $\overline{\lim}\, A_n$ sono tutti e soli gli elementi in $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ tali che appartengano ad un insieme infinito di insiemi A_n.
Si provi che $\underline{\lim}\, A_n$ sono tutti e soli gli elementi in $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ tali che appartengano definitivamente agli insiemi A_n.

Problema 1.11.
Si provi che se tutti gli insiemi A_i sono sottoinsiemi di un insieme X, valgono le relazioni

$$\underline{\lim}\, A_n^c = \left(\overline{\lim}\, A_n\right)^c,$$
$$\overline{\lim}\, A_n^c = \left(\underline{\lim}\, A_n\right)^c.$$

Problema 1.12.
Date due successioni di insiemi A_n e B_n, si stabiliscano le relazioni tra le seguenti coppie di insiemi

$$\begin{array}{ccc} \underline{\lim}\, A_n \cup \underline{\lim}\, B_n & \text{e} & \underline{\lim}\,(A_n \cup B_n)\,, \\ \underline{\lim}\, A_n \cap \underline{\lim}\, B_n & \text{e} & \underline{\lim}\,(A_n \cap B_n)\,, \\ \overline{\lim}\, A_n \cup \overline{\lim}\, B_n & \text{e} & \overline{\lim}\,(A_n \cup B_n)\,, \\ \overline{\lim}\, A_n \cap \overline{\lim}\, B_n & \text{e} & \overline{\lim}\,(A_n \cap B_n)\,. \end{array}$$

Problema 1.13.
Si mostri che se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots A_n \subseteq \ldots$ allora $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ e se invece $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots A_n \supseteq \ldots$ allora $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Problema 1.14.
Sia $f : X \to Y$ una funzione e siano $A, B \subseteq X$, si provino le seguenti relazioni, mostrando un esempio quando l'uguaglianza non vale e discutendo se vale assumendo che f sia iniettiva/surgettiva:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)\,,$$
$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)\,,$$
$$f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)\,,$$
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)\,,$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)\,,$$
$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)\,.$$

Problema 1.15.
Si discutano le relazioni del problema precedente in caso di unioni/intersezioni multiple e/o infinite di insiemi.

Problema 1.16.
Sia $f : X \to Y$ una funzione, si provi che

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

oppure

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)\,,$$

per ogni coppia di insiemi $A, B \subseteq X$, se e solo se la funzione f è iniettiva.

Problema 1.17.
Sia $f : X \to Y$ una funzione e siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, si provino le seguenti relazioni, mostrando con un esempio che l'uguaglianza non vale in generale:

$$f^{-1}(f(A)) \supseteq A\,,$$

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B\,.$$

Si provi inoltre che l'uguaglianza vale nella prima relazione per ogni insieme $A \subseteq X$ se e solo se la funzione f è iniettiva e che l'uguaglianza vale nella seconda relazione per ogni insieme $B \subseteq X$ se e solo se la funzione f è surgettiva.

Problema 1.18.
Con le stesse notazioni del problema precedente si provi in generale che

$$f^{-1}(f(f^{-1}(f(A)))) = f^{-1}(f(A))\,,$$

$$f(f^{-1}(f(f^{-1}(B)))) = f(f^{-1}(B))\,.$$

Problema 1.19.
Considerate due funzioni $g : X \to Y$ e $f : Y \to Z$, si risponda alle seguenti domande, motivando la risposta.

- Se f e g sono iniettive, la funzione composta $f \circ g$ è iniettiva? Vale il viceversa?
- Se f e g sono surgettive, la funzione composta $f \circ g$ è surgettiva? Vale il viceversa?
- Se la funzione composta $f \circ g$ è iniettiva/surgettiva cosa si può dire sulle funzioni f e g?
- Se la funzione composta $f \circ g$ è iniettiva per una funzione $g : X \to Y$ surgettiva, cosa si può dire sulla funzione f?
- Se la funzione composta $f \circ g$ è iniettiva per ogni funzione $g : X \to Y$ iniettiva e X ha almeno due elementi, cosa si può dire sulla funzione f?
- Se la funzione composta $f \circ g$ è surgettiva per una funzione $f : Y \to Z$ iniettiva, cosa si può dire sulla funzione g?
- Se la funzione composta $f \circ g$ è surgettiva per ogni funzione $f : Y \to Z$ surgettiva e Z ha almeno due elementi, cosa si può dire sulla funzione g?

Problema 1.20. ★
Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(f(x)) = -x$?
Per ogni funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esiste sempre una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f \circ f = g$?

Problema 1.21.
Dati due insiemi X e Y Si provi che esiste una funzione $f : X \to Y$ iniettiva (surgettiva) se e solo se esiste una funzione $g : Y \to X$ surgettiva (iniettiva).

Problema 1.22.
Si provi che per ogni funzione $f : X \to Y$ esiste un insieme Z e due funzioni $g : X \to Z$ e $h : Z \to Y$ tali che $f = h \circ g$ con g surgettiva e h iniettiva. È vero anche con g iniettiva e h surgettiva?

Problema 1.23.
Dato un sottoinsieme $A \subseteq X$ sia $\mathbb{1}_A : X \to \{0,1\}$ la sua funzione caratteristica. Si provi che

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \,,$$
$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \,.$$

Problema 1.24.
Si provino per induzione le seguenti formule:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin{(n+1/2)x}}{2\sin(x/2)} \qquad \text{per } n \geq 1,\ x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 2h\pi \text{ per ogni } h \in \mathbb{N}\,,$$

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} \qquad \text{per } n \geq 1,\ x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 2^n h\pi \text{ per ogni } h \in \mathbb{N}\,.$$

Problema 1.25.
Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ numeri reali, posto $V_k = \sum_{i=1}^{k} y_i$ e $V_0 = 0$ si dimostri per induzione la seguente *formula di sommazione per parti di Abel*,

$$\sum_{i=m}^{n} x_i y_i = \sum_{i=m}^{n-1} (x_i - x_{i+1})V_i + x_n V_n - x_m V_{m-1}$$

per ogni $m \in \{1, 2, \ldots, n-1)$.

Problema 1.26.
Si dimostri che un insieme X è infinito se e solo se esiste un suo sottoinsieme proprio Y e una funzione iniettiva $f : X \to Y$, oppure una funzione surgettiva $g : Y \to X$.
L'insieme $X \setminus Y$ si può scegliere infinito?

Problema 1.27.
Si provi che

- l'unione di due insiemi numerabili è numerabile e così ogni unione finita di insiemi numerabili,
- il prodotto di due insiemi numerabili è numerabile e così ogni prodotto finito di insiemi numerabili,
- che ogni insieme infinito contiene un insieme numerabile.

Problema 1.28.
Si provi che se X è un insieme infinito allora la cardinalità di $X \cup \mathbb{N}$ è uguale a quella di X.
Si provi che se X è un insieme infinito di cardinalità maggiore di $\mathbb{N}$ allora la cardinalità di $X \setminus Y$, dove $Y \subseteq X$ è numerabile, è uguale a quella di X.

Problema 1.29.
Si provi che un'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile e che l'insieme delle parti finite di un numerabile è numerabile.
L'insieme delle parti numerabili di $\mathbb{N}$ è numerabile?

Problema 1.30. ★
Si trovi un polinomio $p(x, y)$ in due variabili a coefficienti interi tale che la funzione $p : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sia iniettiva. Si trovi un polinomio $q(x, y)$ in due variabili a coefficienti razionali tale che la funzione $q : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sia bigettiva.

Problema 1.31.
Si provi che la cardinalità di $\mathbb{R}$ (cardinalità del continuo $\mathfrak{c}$) è uguale a quella di $2^{\mathbb{N}}$ e delle successioni in $\mathbb{N}$, cioè di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Problema 1.32.
Si provi che

- l'unione di due insiemi con cardinalità del continuo ha sempre cardinalità del continuo e così ogni unione finita,
- il prodotto di due insiemi con cardinalità del continuo ha sempre cardinalità del continuo e così ogni prodotto prodotto finito.

Problema 1.33.
Si provi che se X è un insieme di cardinalità maggiore di $\mathfrak{c}$ allora le cardinalità di $X \cup \mathbb{R}$ e di $X \setminus \mathbb{R}$ sono uguali a quella di X.

Problema 1.34.
Si provi che un'unione numerabile di insiemi con cardinalità del continuo ha sempre cardinalità del continuo.

Problema 1.35. ★
Si dimostri che l'insieme delle parti finite di un insieme con cardinalità del continuo ha sempre cardinalità del continuo.
L'insieme delle parti numerabili di $\mathbb{R}$ ha la cardinalità del continuo? E la sua cardinalità è uguale a quella delle successioni in $\mathbb{R}$, cioè di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Problema 1.36.
Si discutano le cardinalità dei seguenti insiemi:

- i numeri razionali e i numeri irrazionali,
- i numeri complessi,
- i polinomi a coefficienti interi o razionali,
- i numeri algebrici e i numeri trascendenti,
- le successioni a valori razionali/reali,
- le successioni a valori in $\mathbb{Q}$ convergenti ad un limite in $\mathbb{Q}$ e quelle a valori in $\mathbb{Q}$ convergenti ad un limite in $\mathbb{R}$,
- le successioni a valori in $\mathbb{R}$ convergenti ad un limite in $\mathbb{Q}$ e quelle a valori in $\mathbb{R}$ semplicemente convergenti,
- le funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Nota. *Un numero reale si dice* algebrico *se è la radice di un polinomio a coefficienti interi.*

Problema 1.37.
Dati tre insiemi A, B e C si provino le seguenti formule,

- $card\, A \times B = card\, B \times A$,
- $card\, (A^B)^C = card\, A^{B\times C}$,
- $card\, A^B \times A^C = card\, A^{B\cup C}$, se B e C sono disgiunti.

Problema 1.38.
Sia X infinito e Y di cardinalità minore di X, si provi allora che le cardinalità di $X \cup Y$ e di $X \setminus Y$ sono uguali alla cardinalità di X.

Problema 1.39. ★
Si provi che se almeno uno dei due insiemi A e B è infinito, si ha

$$card\, A \cup B = \max\{card\, A,\ card\, B\}$$

e che di conseguenza

$$card\, 2A = card\, nA = card\, A$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e A infinito.

Problema 1.40. ★
Si provi che se X è infinito la cardinalità di $X \times \mathbb{N}$ è uguale alla cardinalità di X.

Problema 1.41. ★★
Si provi che se almeno uno dei due insiemi A e B è infinito, si ha

$$card\, A \times B = \max\{card\, A,\ card\, B\}$$

e che di conseguenza

$$card\, A \times A = card\, A^n = card\, A$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e A infinito.

Problema 1.42.
Sia X infinito, si provi che si può partizionare X in una famiglia di insiemi numerabili. Qual è la cardinalità di tale famiglia?

Problema 1.43.
Sia X infinito, si provi che si può partizionare X in una famiglia numerabile di insiemi di cardinalità uguale a quella di X.

Problema 1.44.
Sia X di cardinalità minore o uguale a Y. Si può partizionare Y in una famiglia di insiemi ognuno di cardinalità uguale a quella di X. Qual è la cardinalità di tale famiglia?

Problema 1.45.
Sia X di cardinalità minore o uguale a Y. Si provi che si può partizionare Y in una famiglia di insiemi di cardinalità uguale a quella di X e la cardinalità di tale famiglia può essere scelta tra tutte quelle minori o uguali a quella di Y.

Problema 1.46.
Dati due insiemi X e Y, si discutano le cardinalità degli insiemi delle funzioni $f : X \to Y$ iniettive, surgettive, bigettive, in relazione alla cardinalità dell'insieme Y^X.

Problema 1.47. ★
La cardinalità delle parti numerabili di Y è la stessa della cardinalità di $Y^{\mathbb{N}}$?
Sia X di cardinalità minore o uguale a Y, la cardinalità delle parti di cardinalità X di Y è la stessa della cardinalità di Y^X?

Problema 1.48.
Si provi che se Y è un insieme infinito e $card\, X \leq card\, Y$ si ha $card\, X^Y = card\, 2^Y$.

Problema 1.49.
Si provi che se $card\, X = card\, 2^Z$ per un qualche insieme Z infinito, allora

$$card\, X^Y = \max\{card\, X,\, card\, 2^Y\}\,,$$

in particolare, $card\, X^{\mathbb{N}} = card\, X$.

Nota. *In generale non vale* $card\, X^{\mathbb{N}} = card\, X$ *(esempio complicato).*

Problema 1.50. ★
Si provi il seguente *Teorema di König*. Se $card\, X_i < card\, Y_i$ per ogni $i \in \mathcal{I}$ si ha

$$card \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i < card \prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i\,.$$

Se ne deduca il fatto che $card\, X < card\, 2^X$ per ogni insieme infinito X.

Problema 1.51.
Data una relazione $\mathcal{R}$ in un insieme X, si definisca la relazione inversa $\mathcal{R}^{-1}$ come segue: $a\mathcal{R}^{-1}b$ se e solo se $b\mathcal{R}a$.
Date due relazioni $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ su X, si definisca la relazione composta $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ come segue: $a(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})b$ se e solo se esiste $c \in X$ tale che $a\mathcal{R}c$ e $c\mathcal{S}b$.

- Si provi che la relazione $\mathcal{R}^{-1}$ è simmetrica se e solo se $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.
- Si provi che la relazione $\mathcal{R}^{-1}$ è transitiva se e solo se lo è $\mathcal{R}$.
- Si provi che se una relazione $\mathcal{R}$ è transitiva se e solo se $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$ e si dia un esempio in cui tale inclusione è stretta. Se la relazione $\mathcal{R}$ ẽ anche riflessiva vale l'uguaglianza?
- Si provi che una relazione $\mathcal{R}$ è di equivalenza se e solo se è riflessiva, $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$ e $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

Problema 1.52.
Si provi che se una relazione $\mathcal{R}$ è riflessiva e transitiva allora la relazione $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ è di equivalenza.

Problema 1.53.
Si dicano quali sono le proprietà soddisfatte dalle seguenti relazioni:

- $\mathcal{R}$ su $\mathbb{R}$ data da $x\mathcal{R}y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$,

- $\mathcal{R}'$ su $\mathbb{R}$ data da $x\mathcal{R}'y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- $\mathcal{S}$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ data da $x\mathcal{S}y$ se e solo se $x/y \in \mathbb{Q}$.
- $\mathcal{S}'$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ data da $x\mathcal{S}'y$ se e solo se $x/y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Problema 1.54.
L'intersezione e l'unione di due o più relazioni di equivalenza sono ancora relazioni di equivalenza?
L'intersezione e l'unione di due o più relazioni d'ordine sono ancora relazioni d'ordine?

Problema 1.55.
Date due relazioni $\mathcal{R}$ su X e $\mathcal{S}$ su Y, si definisca una relazione $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ su $X \times Y$ come segue: $(x_1, y_1)(\mathcal{R} \times \mathcal{S})(x_2, y_2)$ se e solo se $x_1\mathcal{R}x_2$ e $y_1\mathcal{S}y_2$.
Si dica se valgono:

- $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relazioni d'equivalenza allora $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ è una relazione d'equivalenza,
- $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relazioni d'ordine allora $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ è una relazione d'ordine.

Si dica se le due affermazioni sopra valgono se la relazione $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ su $X \times Y$ è invece definita come segue: $(x_1, y_1)(\mathcal{R} \times \mathcal{S})(x_2, y_2)$ se e solo se vale almeno una delle due condizioni $x_1\mathcal{R}x_2$ e $y_1\mathcal{S}y_2$.

Problema 1.56.
Sia $\mathcal{R}$ una relazione su X, si provi che $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ è la più piccola relazione simmetrica che contiene $\mathcal{R}$ e che $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ è la più grande relazione simmetrica contenuta in $\mathcal{R}$.

Problema 1.57.
Sia $f : X \to Y$ una funzione e definiamo la relazione $a\mathcal{R}b$ se $f(a) = f(b)$. Si mostri che $\mathcal{R}$ è una relazione d'equivalenza e che la mappa $\widetilde{f} : X/\mathcal{R} \to Y$ è ben definita da $\widetilde{f}([a]) = f(a)$ per ogni $a \in X$, è iniettiva e soddisfa $\widetilde{f} \circ \pi = f$, dove $\pi : A \to X/\mathcal{R}$ è la mappa di proiezione nel quoziente.

Problema 1.58.
Sia $f : X \to Y$ una funzione e siano $\mathcal{R}$ su X e $\mathcal{S}$ su Y due relazioni d'equivalenza, inoltre si assuma che per ogni coppia a, b in X con $a\mathcal{R}b$ si abbia $f(a)\mathcal{S}f(b)$. Si provi che allora è ben definita e unica una mappa $\widetilde{f} : X/\mathcal{R} \to Y/\mathcal{S}$ tale che

$$\widetilde{f} \circ \pi_{\mathcal{R}} = \pi_{\mathcal{S}} \circ f \,,$$

dove $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R}$ e $\pi_{\mathcal{S}} : Y \to Y/\mathcal{S}$ sono le rispettive mappe di proiezione sul quoziente delle due relazioni $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

Problema 1.59.
Siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ rispettivamente una relazione di equivalenza e di ordine sull'insieme X, sia $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la mappa *proiezione* che manda ogni elemento $x \in X$ nella sua classe di equivalenza $[x] \in X/\mathcal{R}$. Se si ha che per ogni coppia (x, y) e (z, w) con $x\mathcal{R}y$ e $z\mathcal{R}w$, la relazione $x \leq z$ implica $y \leq w$ allora si provi che $\widetilde{\mathcal{S}} = \widetilde{\pi}(\mathcal{S})$ è una relazione d'ordine su $X/\mathcal{R}$, dove la mappa $\widetilde{\pi} : X \times X \to X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R}$ è data da $(x, z) \mapsto ([x], [z])$.
Si noti inoltre che la mappa $\widetilde{\pi}$ manda la relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ in una relazione d'equivalenza $\widetilde{\mathcal{R}} = \widetilde{\pi}(\mathcal{R})$ su $X/\mathcal{R}$ consistente nella sola diagonale di $X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R}$.

Problema 1.60. ★
Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Diciamo che $X \subseteq V$ è libero se ogni suo sottoinsieme finito è linearmente indipendente. Diciamo che X è un sistema di generatori se per ogni $v \in V$ esistono $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$. Una base di Hamel B di V è un sistema libero di generatori.

- Si provi che B è una base di Hamel se e solo se è un sottoinsieme libero massimale.
- Si dimostri, usando il lemma di Zorn, che ogni spazio vettoriale ammette una base di Hamel.
- Si dimostri che, dato X sottoinsieme libero di V, esiste una base di Hamel di V contenente X.
- Si dimostri che, dato X sottoinsieme libero di V e una base di Hamel B di V, esiste un sottoinsieme B' di B tale che $X \cup B'$ è una base di Hamel di V.
- Si dimostri che due basi di Hamel B_1 e B_2 di uno spazio vettoriale V hanno la stessa cardinalità.

Problema 1.61.
Si consideri la relazione d'ordine su $\mathbb{N}^*$ data da $a \leq b$ se e solo se a divide b. Con tale relazione $\mathbb{N}^*$ è bene ordinato? È totalmente ordinato?

Problema 1.62.
Si provi che un insieme A è finito se e solo se ogni ordinamento totale su A è un buon ordinamento.

Problema 1.63.
Si provi che un insieme A è finito se e solo se possiede un buon ordinamento $\leq$ tale che la relazione d'ordine inversa sia ancora un buon ordinamento.

Problema 1.64.
Si discuta la struttura di un insieme totalmente ordinato $(A, \leq)$ in cui per ogni elemento esista sia il suo *successore* che il suo *predecessore*.
Il predecessore di un elemento $a \in A$ si definisce come il massimo degli elementi $b < a$ e il suo successore come il minimo degli elementi $c > a$.

Problema 1.65.
Sia $(A, \leq)$ un insieme totalmente ordinato, si provi che se ogni sottoinsieme numerabile di A è bene ordinato, allora A è bene ordinato.

2. Numeri Reali e Disuguaglianze

Problema 2.1.
Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, si definiscano

$$-A = \{-x \,:\, x \in A\}\,,$$
$$A + B = \{x + y \,:\, x \in A \;e\; y \in B\}\,,$$
$$A - B = \{x - y \,:\, x \in A \;e\; y \in B\}\,,$$
$$A \cdot B = \{x,y \,:\, x \in A \;e\; y \in B\}\,.$$

Si determinino (quando è possibile o sotto delle ipotesi) $\sup(-A)$, $\inf(-A)$, $\sup(A+B)$, $\inf(A+B)$, $\sup(A-B)$, $\inf(A-B)$, $\sup(A\cdot B)$, $\inf(A\cdot B)$, $\sup(A\cup B)$, $\inf(A\cup B)$, $\sup(A\cap B)$, $\inf(A\cap B)$, $\sup(A\setminus B)$, $\inf(A\setminus B)$, in termini di $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ e $\inf B$.

Problema 2.2.
Si provi che $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, i numeri algebrici e i numeri trascendenti sono tutti sottoinsiemi densi di $\mathbb{R}$.

Problema 2.3.
I seguenti numeri sono razionali o irrazionali? $\sqrt{2}$, $\sqrt{p}$ con p primo, $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ e $\sqrt{n}-\sqrt{m}$ con almeno uno di $n, m \in \mathbb{N}$ non quadrato perfetto, $\sqrt[k]{n}$ con $k, n \in \mathbb{N}$ ed n non k–potenza perfetta di un naturale.

Problema 2.4.
Si trovino $\sup$ e $\inf$ dei seguenti insiemi

$$\left\{\frac{nm}{n^2+m^2} \,:\, n,m \in \mathbb{N},\; n,m \in \mathbb{N}^*\right\},$$
$$\left\{\frac{nm}{n+m} \,:\, n,m \in \mathbb{N},\; n,m \in \mathbb{N}^*\right\},$$
$$\left\{\frac{m-2}{3n} \,:\, n,m \in \mathbb{N},\; n > 0\right\},$$
$$\left\{\frac{xy}{x^2+y^2} \,:\, x,y \in (0,1)\right\},$$
$$\left\{\frac{n^\lambda + m^{1/\lambda}}{n+m} \,:\, n,m \in \mathbb{N}^*\right\},$$

in quest'ultimo caso al variare di $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Problema 2.5. ★
Sia $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, si provi che almeno un elemento dell'insieme $\{a,\, 2a,\, \dots\, (n-1)a\}$ dista al massimo $1/n$ da un intero.

Problema 2.6.
Si trovino $\sup$ e $\inf$ degli insiemi

$$\{\sin n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{e} \qquad \{\sin nx \,:\, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{al variare di } x \in \mathbb{R}\,.$$

Problema 2.7. ★
Dati due numeri reali α e β, si trovino le condizioni su di essi tali che l'insieme $\{\alpha m + \beta n \ : \ n, m \in \mathbb{Z}\}$ sia denso in $\mathbb{R}$. Lo stesso per l'insieme $\{\alpha m + \beta n \ : \ n, m \in \mathbb{N}\}$.

Problema 2.8. ★
Dato un numero irrazionale x si dimostri che esistono infiniti razionali m/n tali che

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2}\,.$$

Problema 2.9. ★
Si trovino $\sup$ e $\inf$ dell'insieme $\left\{ \sqrt[n]{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Problema 2.10.
Si provino le seguenti disuguaglianze di tipo *Bernoulli* e si discutano gli eventuali casi di uguaglianza:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &\geq 1 + nx && \text{per } x > -1 \text{ e } n \in \mathbb{N},\\
(1-x)^n &\geq 1 - nx && \text{per } x < 1 \text{ e } n \in \mathbb{N},\\
(1+x)^n &\leq \frac{1}{1-nx} && \text{per } -1 < x < 1/n \text{ e } n \in \mathbb{N},\\
(1-x)^n &\leq \frac{1}{1+nx} && \text{per } -1/n < x < 1 \text{ e } n \in \mathbb{N},\\
\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n &\leq 1 && \text{per } 1 < x < n \text{ e } n, m \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Problema 2.11. ★
Usando i risultati del problema precedente, si provino le seguenti disuguaglianze (analoghe con esponente razionale) e si discutano gli eventuali casi di uguaglianza:

$$\begin{aligned}
(1+x)^q &\geq 1 + qx && \text{per } x > -1 \text{ e } q \geq 1,\, q \in \mathbb{Q},\\
(1+x)^q &\leq 1 + qx && \text{per } x > -1 \text{ e } q \in \mathbb{Q} \cap (0,1],\\
(1-x)^q &\geq 1 - qx && \text{per } x < 1 \text{ e } q \geq 1,\, q \in \mathbb{Q},\\
(1-x)^q &\leq 1 - qx && \text{per } x < 1 \text{ e } q \in \mathbb{Q} \cap (0,1],\\
(1+x)^q &\leq \frac{1}{1-qx} && \text{per } -1 < x < 1/q \text{ e } q \geq 1,\, q \in \mathbb{Q},\\
(1-x)^q &\leq \frac{1}{1+qx} && \text{per } -1/q < x < 1 \text{ e } q \geq 1,\, q \in \mathbb{Q},\\
\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p \left(1 - \frac{x}{q}\right)^q &\leq 1 && \text{per } 1 < x < q \text{ e } p, q \geq 1,\, p, q \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Si discuta poi il passaggio agli esponenti reali.

Problema 2.12. ★
Si provi che la successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è monotona crescente e limitata dall'alto da 3.

Si provi che per ogni $x \in \mathbb{R}$ la successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è monotona decrescente e limitata dal basso da 2.

Problema 2.13. ★
Si provi la disuguaglianza *aritmetico–geometrica*, cioè, dati $a_1, a_2, \dots, a_n$ numeri reali positivi si ha

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

e se ne deduca la disuguaglianza tra la *media armonica* e geometrica

$$\left(\frac{1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n}{n}\right)^{-1} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

e la disuguaglianza tra la *media quadratica* e aritmetica degli stessi numeri

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Problema 2.14.
Si provi la seguente disuguaglianza di tipo *Young*, prima con α e β naturali e poi razionali positivi, con $x, y > 0$:

$$\left(x^\alpha y^\beta\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \leq \frac{\alpha x + \beta y}{\alpha + \beta}$$

e si veda che è equivalente a

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

con $p, q \in \mathbb{Q}$, $p, q > 1$ tali che $1/p + 1/q = 1$.
Si discuta poi il passaggio agli esponenti reali.

Problema 2.15.
Si provi che per ogni $x > 1$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$0 < \sqrt[n]{x} - 1 \leq \frac{x-1}{n}.$$

Problema 2.16.
Si dimostri che per ogni $\alpha \geq 0$ e $n \geq 1$ si ha

$$\frac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha} \leq 1 + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha \leq \frac{(n+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Problema 2.17.
Si provi la seguente disuguaglianza prima con α naturale e poi razionale maggiore o uguale a uno e $0 < y \leq x$:

$$\alpha y^{\alpha-1}(x-y) \leq x^\alpha - y^\alpha \leq \alpha x^{\alpha-1}(x-y).$$

Si discuta poi il passaggio agli esponenti reali.

Problema 2.18.
Si provi che per $p \geq q$ reali positivi e $x \geq 1$ si ha

$$\frac{x^p - 1}{p} \geq \frac{x^q - 1}{q}\,.$$

Problema 2.19.
Si provi che per q reale maggiore o uguale a uno, $x > 0$ e $h > -1$ valgono le disuguaglianze

$$q(x-1)x^{q-1} \geq x^q - 1 \geq q(x-1)\,,$$

$$1 + qh(1+h)^{q-1} \geq (1+h)^q \geq 1 + qh\,.$$

Problema 2.20.
Si determinino i numeri $n \in \mathbb{N}$ tali che

$$\frac{2^{2n}}{2n} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2} \leq 2^{2n}\,.$$

Problema 2.21.
Si provi la *disuguaglianza di Cauchy–Schwarz* (o di prodotto scalare): dati $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ numeri reali, si ha

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^n b_i^2\Big)^{1/2}\,.$$

Quando vale l'uguaglianza?
Verificare inoltre la seguente *identità di Lagrange*,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{i<j}(a_i b_j - a_j b_i)^2\,.$$

Problema 2.22.
Si provi che se $a_1, \dots, a_n$ sono positivi si ha

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{n}\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Problema 2.23. ★
Si provi la *disuguaglianza di Hölder*: dati $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ numeri reali e due esponenti $p, q > 1$ con $1/p + 1/q = 1$, si ha

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \Big(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\Big)^{1/q}\,.$$

Si discutano poi i casi di uguaglianza.
Cosa succede se si permette a p, q di essere minori o uguali a 1?

Problema 2.24.
Si provi che dati $a_1, a_2, \dots, a_n$ numeri reali positivi e $p \geq 1$ vale

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} a_i^p \, .$$

Quando vale l'uguaglianza?

Problema 2.25. ★
Si provi la *disuguaglianza di Minkowski*: dati $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ numeri reali e $p \geq 1$, si ha

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\Big)^{1/p} .$$

Si discutano poi i casi di uguaglianza.
Cosa succede se si permette a p di essere minore di 1?

Problema 2.26.
Si provi la *disuguaglianza di riarrangiamento*: dati $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ numeri reali, allora si ha

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \, ,$$

per ogni permutazione $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$.

Problema 2.27.
Si provi la *disuguaglianza di Chebyshev*: dati $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ numeri reali, allora si ha

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i\Big) .$$

Si provi che se invece $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ la disuguaglianza vale nel verso opposto.

Problema 2.28. ★
Si provi la disuguaglianza generale delle medie: definita la media p–esima, con $p \in \mathbb{R}^*$, di n numeri reali positivi $a_1, a_2, \dots, a_n$ come

$$M_p = \Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{n}\Big)^{1/p}$$

e posto M_0 uguale alla media geometrica, si ha

$$\min\{a_i\} \leq M_{p_1} \leq M_{p_2} \leq M_0 \leq M_{q_1} \leq M_{q_2} \leq \max\{a_i\}$$

per ogni insieme di reali $p_1 \leq p_2 < 0 < q_1 \leq q_2$.

Problema 2.29. ★
Si dimostrino le seguenti disuguaglianze con $a, b, c, d \geq 0$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{abcd} &\leq \frac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}+\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{4}\\ &\leq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}+\sqrt{da}+\sqrt{ac}+\sqrt{bd}}{6} \leq \frac{a+b+c+d}{4}\end{aligned}$$

Problema 2.30.
Sia P un punto interno ad un triangolo ABC, si cerchi il minimo della somma dei quadrati delle distanze di P dai tre lati, al variare di P.

3. Successioni

Problema 3.1.
Se x_n è una successione di numeri reali tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n+k}) = 0$, si può concludere che x_n è una successione di Cauchy?

Problema 3.2.
Sia x_n una successione di numeri reali tale che $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n+2}) = 0$. Si provi che allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{n} = 0$$

Problema 3.3.
La successione $x_n + px_{n-1}$ converge se e solo se converge x_n. Dire per quali valori di p tale affermazione è corretta.

Problema 3.4.
Sia a_n una successione di reali positivi tali che

$$a_n < \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}.$$

Dimostrare che allora a_n converge.

Problema 3.5.
Sia x_n una successione di numeri reali. Provare che è sempre possibile trovare una sottosuccessione monotona.

Problema 3.6.
Sia x_n una successione di numeri positivi. Provare che è sempre possibile trovare o una sottosuccessione convergente o una sottosuccessione che diverge a $+\infty$.

Problema 3.7. ★
Calcolare i limiti (se esistono) delle seguenti successioni:

$$\sqrt[n]{a} \text{ per } a \in \mathbb{R}^+, \quad \sqrt[n]{n}, \quad \sqrt[n]{n \log n}, \quad \sqrt[n]{n!}, \quad \sqrt[n^2]{n!}, \quad \sqrt[n \log n]{n!},$$

$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\log n}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n,$$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^\alpha} \text{ per } \alpha \in \mathbb{R}, \quad \frac{n!}{n^n}, \quad \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!},$$

$$\frac{\sum_{k=1}^n k^{\alpha-1}}{n^\alpha} \text{ per } \alpha > -1, \quad \frac{\sum_{k=1}^n \log k}{n \log n}, \quad \frac{\sum_{k=1}^n \log k}{n} - \log n.$$

Problema 3.8. ★
Studiare il limite di

$$x_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + \lambda n}\right)$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.
Nel caso il limite sia zero si studi l'ordine di infinitesimo della successione.

Problema 3.9. ★
Quali sono i possibili limiti della successione delle parti frazionarie di $\sqrt{n}$?

Problema 3.10. ★
La successione $1/(n \sin n)$ ha una sottosuccessione che converge a zero? Si discuta se ne ha una che converge a $+\infty$? (ATTENZIONE!!! Questo secondo è un PROBLEMA APERTO!!! Cercare in letteratura o in rete informazioni al riguardo).

Problema 3.11.
Studiare il comportamento delle seguenti successioni definite per ricorrenza, al variare del parametro λ,

(1) $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$,
(2) $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \sin a_n$,
(3) $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + {a_n}^2$.

Problema 3.12.
Sia a_n una successione di numeri reali tale che $a_1 = a$, $a_2 = b$ e

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$$

Si studi la convergenza di a_n e si calcoli l'eventuale limite.

Problema 3.13.
Studiare il comportamento della successione

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$$

Problema 3.14.
Si trovi una formula esplicita per la successione dei numeri di Fibonacci, definita per ricorrenza da $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

Problema 3.15.
Si consideri la successione definita per ricorrenza $a_0 = 1$ e $a_{n+1} = 2a_n + n$, si trovi una formula esplicita per a_n.

Problema 3.16.
Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza,

$$\begin{cases} a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \\ a_n = 4a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{se } n > 1\,. \end{cases}$$

Trovare $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Problema 3.17.
Dati due numeri reali e positivi a e b, definiamo

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{Media Aritmetica,}$$
$$G(a,b) = \sqrt{ab} \qquad \text{Media Geometrica,}$$
$$H(a,b) = \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2ab}{a+b} \qquad \text{Media Armonica.}$$

Consideriamo le successioni x_n e y_n, definite per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_0 = a, \quad y_0 = b \\ x_n = A(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n = G(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases}$$

Si provi che entrambe le successioni convergono ad uno stesso limite (tale limite si dice *Media Aritmo–Geometrica* di a e b).

Problema 3.18.
Mostrare che la successione definita da

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$$

diverge a $+\infty$ e valutarne l'ordine di crescita.

4. Serie Numeriche

Problema 4.1.
Dimostrare la seguente identità

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{2n}\quad \text{(Identità di Catalan)}\,.$$

Problema 4.2.
Calcolare

$$1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}$$

e

$$1+4x+9x^2+\dots+n^2x^{n-1}.$$

Problema 4.3.
Provare che le seguenti serie sono convergenti e calcolarne la somma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\qquad \text{(Serie di Mengoli)},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)},\quad \sum_{n\neq m}^{\infty}\frac{1}{n^2-m^2}\qquad \text{per } m\in\mathbb{N}^*\,,$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\dots$$

Problema 4.4.
Provare che le seguenti serie sono convergenti e calcolarne la somma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}.$$

Problema 4.5.
Provare che la seguente serie è convergente e calcolarne la somma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\arctan\Big(\frac{1}{1+n(n+1)}\Big)\,.$$

Problema 4.6.
Sia h un intero positivo. Provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+h)}=\frac{1}{hh!}.$$

Problema 4.7.
Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente con $a_{n+1} \leq a_n$. Si provi che la successione na_n è infinitesima. (Osservare che da questo si può dedurre che la serie armonica è divergente).

Problema 4.8.
Sia a_n una successione infinitesima e decrescente. Provare che se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ lo è, e le due serie hanno la stessa somma.

Problema 4.9.
Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ove i termini a_n sono definiti ricorsivamente da

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n},$$

è convergente. Provare invece che l'analoga serie definita da

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n},$$

è divergente.

Problema 4.10.
Si provi che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)} \, ,$$

con $a > 0$, è convergente.

Problema 4.11 (Criterio di Raabe)**.**
Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Si provi che se esiste un numero $k > 1$ tale che

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq k,$$

per ogni n, allora la serie è convergente, mentre se si verifica che

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1,$$

per ogni n, allora la serie è divergente.

Problema 4.12.
Si utilizzi il criterio di Raabe per lo studio della convergenza della serie

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots (3n)}\right)^2 + \dots$$

Problema 4.13.
Sia x_n un successione di punti distinti di $(0, 1)$, densa in $[0, 1]$. I numeri $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$

dividono $[0, 1]$ in n parti e x_n divide una di queste in due intervalli. Siano a_n e b_n le lunghezze di questi due intervalli. Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n (a_n + b_n) = \frac{1}{3}.$$

Problema 4.14 (Criterio di Condensazione di Cauchy)**.**
Sia a_n una successione decrescente di numeri positivi. Si provi che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente se e solo se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ è convergente. Come applicazione si dimostri che la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^a$ risulta convergente se $a > 1$.

Problema 4.15.
Si determini il comportamento delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n}, \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta (\log \log n)^\gamma}, \dots$$

per $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Problema 4.16.
Mostrare che le serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log \log n}}$$

sono una convergente e l'altra divergente.

Problema 4.17 (Criterio di Dirichlet I)**.**
Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è una serie le cui somme parziali costituiscono una successione limitata e b_n è una successione di numeri positivi decrescente e infinitesima, dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. Come applicazione, si mostri che convergono le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} a_n,$$

se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente e $|x| < 1$.
Si mostri inoltre che questo criterio implica il criterio di Leibniz sulle serie a segni alterni.

Problema 4.18.
Sia a_n una successione di numeri reali tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < +\infty$$

(una tale successione si dice *a variazione limitata*), si mostri che è convergente.

Problema 4.19 (Criterio di Dirichlet II)**.**
Siano a_n e b_n due successioni di numeri reali tali che
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < +\infty, \qquad a_n \to 0$$
ed esiste $M > 0$ tale che
$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big| < M\,,$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si mostri che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge e si ha
$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\Big| \le 2M \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|\,.$$
Si mostri che questo criterio implica il criterio classico sulle serie a segni alterni.

Problema 4.20.
Si mostrino dei controesempi alla conclusione del problema precedente nel caso che
- la successione a_n non sia a variazione limitata,
- la successione a_n non sia infinitesima,
- le somme parziali della serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ non siano limitate.

Problema 4.21 (Criterio di Abel)**.**
Siano a_n e b_n due successioni di numeri reali tali che
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < +\infty\,,$$
e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è convergente. Si mostri allora che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Problema 4.22. ★
Si costruiscano due successioni di numeri positivi a_n e b_n tali che $a_n/b_n \to 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ è convergente mentre $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ non converge o è divergente.

Problema 4.23.
Si dica per quali valori del parametro reale α la seguente serie converge
$$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^\alpha} + \dots$$

Problema 4.24.
Mostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/\sqrt{n+1}$ converge, però il prodotto di questa serie con se stessa non converge.

Problema 4.25.
Si calcoli il prodotto alla Cauchy della serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ e lo si usi per calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$.
Si calcoli il prodotto alla Cauchy delle due serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 4.26.
Si dica per quali $\alpha \geq 0$ la sommatoria

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(n+m+1)^\alpha}$$

converge.

Problema 4.27 (Teorema di Goldbach–Eulero)**.** ★
Sia P l'insieme di tutte le potenze perfette dei naturali: 4,8,9,16,25,27,. . . . Si provi che la serie $\sum_{n\in P} \frac{1}{n-1}$ è convergente ed ha somma 1.

Problema 4.28. ★★
Dimostrare che la serie il cui termine n–esimo è il reciproco dell'n–esimo numero primo diverge. Indicato con $\pi(n)$ il numero di numeri primi minori o uguali a n, si provi che $\pi(n) = o(n)$ per $n \to \infty$.

Problema 4.29.
Sapendo che $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \pi^2/6$, si dimostri che

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Problema 4.30. ★
Si provi che

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2\,.$$

Problema 4.31.
La serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n}$$

è convergente?

Problema 4.32.
Dimostrare che la successione delle somme parziali $\sum_{k=1}^n \sin k$ è limitata e usare tale fatto per dedurre che la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin n}{n}$$

è convergente.

Problema 4.33.
Data una successione a_n di numeri reali, si dice che il prodotto infinito $\prod_{n=0}^\infty a_n$ converge se

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^n a_k = \lim_{n\to\infty} a_0 a_1 \dots a_n \qquad \text{esiste finito.}$$

Si dimostri che

- se $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ad un numero non zero, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$,
- se $a_n \geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - 1)$ converge se e solo se $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

5. Topologia di $\mathbb{R}$

Problema 5.1.
Si dica cosa sono la chiusura, l'apertura e il bordo di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Problema 5.2.
Si provi che gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sia aperti che chiusi sono il vuoto e $\mathbb{R}$ stesso.

Problema 5.3.
Si provi che l'interno di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è l'unione di tutti gli aperti contenuti in A.

Problema 5.4.
Dati gli insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$, si determinino le relazioni tra le seguenti coppie di insiemi

$$\begin{array}{rcl} \overline{A \cup B} & \text{e} & \overline{A} \cup \overline{B}\,, \\ \overline{A \cap B} & \text{e} & \overline{A} \cap \overline{B}\,, \\ (A \cup B)^\circ & \text{e} & A^\circ \cup B^\circ\,, \\ (A \cap B)^\circ & \text{e} & A^\circ \cap B^\circ\,. \end{array}$$

Problema 5.5.
Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, si dimostrino le relazioni

$$\begin{array}{rr} (A^\circ)^\circ = A^\circ, & \overline{\overline{A}} = \overline{A}\,, \\ \overline{A} = [(A^c)^\circ]^c, & \overline{A^c} = (A^\circ)^c\,, \\ A^\circ = (\overline{A^c})^c, & (A^c)^\circ = (\overline{A})^c\,, \\ \overline{A} = A \cup \partial A, & A^\circ = A \setminus \partial A\,. \end{array}$$

Problema 5.6.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, si dica se sono vere o false le seguenti relazioni:

$$\partial A = \partial(A^c), \quad \partial A = \partial\overline{A}, \quad \partial A = \partial A^\circ, \quad \partial A = \overline{\partial A}, \quad \partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}, \quad \partial\partial A \subseteq \partial A\,.$$

Problema 5.7.
Si provi che per $A \subseteq \mathbb{R}$ è aperto,

$$\partial A \subseteq A^c, \qquad A = \overline{A} \setminus \partial A\,.$$

Problema 5.8.
Si provi che per $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\partial A = (A \cap \overline{A^c}) \cup (\overline{A} \setminus A)\,.$$

Problema 5.9.
Si provi che per $A, B \subseteq \mathbb{R}$,

$$\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B \subseteq \partial(A \cup B) \cup A \cup B\,.$$

Problema 5.10.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato, si provi che $\sup(A) \in \partial A$.

Problema 5.11.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, quanti insiemi diversi ci possono essere nella seguente sequenza?

$$A, \quad \partial A, \quad \partial\partial A, \quad \partial\partial\partial A, \dots$$

Problema 5.12.
Qual è la cardinalità della famiglia degli insiemi aperti di $\mathbb{R}$? E della famiglia dei chiusi?

Problema 5.13.
Si provi che se A è un sottoinsieme aperto contenuto in $B \subseteq \mathbb{R}$ si ha $A \subseteq B^\circ$

Problema 5.14. ★
Trovare un insieme A di $\mathbb{R}$ tale che i seguenti 7 sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ risultino tutti distinti:

$$A, \quad \overline{A}, \quad A^\circ, \quad \overline{A^\circ} \quad \overline{A}^\circ, \quad \overline{\overline{A}^\circ}, \quad \overline{A^\circ}^\circ.$$

Dimostrare inoltre che non se ne possono creare altri proseguendo nella stessa maniera.

Problema 5.15.
Se A e B sono due sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$, l'insieme $A + B = \{x + y \,:\, x \in A, \, y \in B\}$ è aperto? E se sono due chiusi, $A + B$ è chiuso?

Problema 5.16.
Si provi che ogni aperto di $\mathbb{R}$ è un'unione numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti.

Problema 5.17. ★
Si provi che ogni chiuso di $\mathbb{R}$ è un'intersezione numerabile di aperti di $\mathbb{R}$.

Problema 5.18. ★★
Si provi che non è possibile ottenere $\mathbb{R}$ o un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ come unione numerabile di intervalli chiusi e limitati, a due a due disgiunti.

Problema 5.19 (Teorema di Baire)**.** ★★
Si provi che non è possibile ottenere $\mathbb{R}$ o un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ come unione numerabile di sottoinsiemi chiusi con parte interna vuota.

Problema 5.20. ★★
Si provi l'intersezione di una famiglia numerabile di aperti densi di $\mathbb{R}$ è non vuota. È un insieme denso?
Si provi un'unione numerabile di sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$ con parte interna vuota ha parte interna vuota.

Nota. *Un insieme si dice* di prima categoria *se è un'unione numerabile di sottoinsiemi chiusi con parte interna vuota,* di seconda categoria *altrimenti.*

Problema 5.21.
Si provi che se $A \subseteq \mathbb{R}$ è composto solo da punti isolati allora ha cardinalità al più numerabile.

Problema 5.22.
Si provi che l'insieme dei punti limite di una successione di numeri reali è un chiuso di $\mathbb{R}$.

Problema 5.23.
Si provi che per ogni sottoinsieme chiuso F di $\mathbb{R}$ esiste una successione il cui insieme di punti limite coincide con F.

Problema 5.24.
Si diano esempi di:

- un sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}$ senza punti di accumulazione,
- un insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq A'$,
- un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ con infiniti punti di accumulazione e tale che $A \cap A' = \emptyset$,
- un insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\partial A = \overline{A}$.

Problema 5.25.
Si provi che l'insieme derivato A' di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso e che $\overline{A} = A \cup A'$.

Problema 5.26.
Si provi che un insieme A è chiuso se e solo se $A' \subseteq A$.

Problema 5.27.
Si provi che vale la relazione $(\overline{A})' = A'$.

Problema 5.28.
Si provi la relazione $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Problema 5.29.
Si provi che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di cardinalità del continuo ha insieme derivato non vuoto.

Problema 5.30. ★
Si provi che se l'insieme derivato A' di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è finito, l'insieme A è numerabile. La stessa conclusione vale se A' è numerabile?

Problema 5.31. ★
Si diano esempio di insiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ tali che $A'' \neq A'$. La successione

$$A,\, A',\, A''\, A''' \,\dots$$

può avere i primi n–insiemi tutti diversi tra loro, per ogni $n \in \mathbb{N}$? Può essere composta di insiemi tutti diversi tra loro?

Problema 5.32. ★★
Si dimostri che un sottoinsieme perfetto e non vuoto di $\mathbb{R}^n$ non può essere numerabile.

Problema 5.33.
Si provi che $A \subseteq \mathbb{R}$ è compatto se e solo se ogni suo sottoinsieme infinito ha un punto di accumulazione in A.

Problema 5.34.
Si provi che ogni successione di Cauchy in un compatto $A \subseteq \mathbb{R}$ converge in A.

Problema 5.35.
Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è infinito e A' consiste di un singolo punto, allora A è compatto?

Problema 5.36. ★
Dimostrare che $C \subseteq \mathbb{R}$ è compatto se e solo se, data una qualunque famiglia $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ di insiemi aperti che ricopre C (cioè $C \subseteq \cup_{i\in\mathcal{I}} A_i$), esiste una sottofamiglia finita $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}\}$ che ricopre ancora C.

Problema 5.37.
Si dia un esempio di una famiglia di insiemi aperti che ricopre l'intervallo $(0,1)$ che non abbia una sottofamiglia finita che ricopre ancora $(0,1)$.

Problema 5.38 (Insieme di Cantor)**.**
Si consideri la successione di insiemi di $\mathbb{R}$ definita per ricorrenza da $I_1 = [0,1]$ e

$$I_{n+1} = \frac{I_n}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{I_n}{3}\right).$$

(1) Si provi che I_n è l'unione di 2^n intervalli chiusi disgiunti di lunghezza 3^{-n}.
(2) si mostri che $\mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (insieme di Cantor) è un chiuso non vuoto e se ne determini la cardinalità.
(3) Si mostri che $x \in \mathbb{R}$ appartiene a $\mathcal{C}$ se e solo se esiste una successione a_n tale che $a_n \in \{0,2\}$ e

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^{-n}.$$

Problema 5.39.
Dimostrare che l'insieme di Cantor è perfetto.

Problema 5.40.
Sia E il sottoinsieme di $[0,1]$ dei numeri tali che nella loro espansione decimale contengano solo le cifre 4 e 7. L'insieme E è denso in $[0,1]$? Compatto? Perfetto?

6. Spazi Metrici, Normati e Topologici

Problema 6.1.
Si provi che se C_1, C_2 sono due chiusi disgiunti di $\mathbb{R}^n$, allora esistono due aperti $A_1 \supseteq C_1$ e $A_2 \supseteq C_2$ tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Problema 6.2.
Sia $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ una successione di chiusi non vuoti di $\mathbb{R}^n$. Si provi che se almeno uno degli F_n è limitato, allora $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ è non vuoto.

Problema 6.3.
Si provi che i sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli i chiusi e limitati.

Problema 6.4.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, dimostrare che esiste una successione K_n di compatti con $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ tale che $A = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Problema 6.5.
Sia (X, d) uno spazio metrico costituito da tre punti, si provi che si può immergere isometricamente in $\mathbb{R}^2$. Si mostri un esempio di spazio metrico (X, d) costituito da quattro punti che non si può immergere isometricamente in nessun $\mathbb{R}^n$ e si discutano condizioni per cui invece ciò sia possibile.

Problema 6.6.
Sia X un insieme infinito. Per $p, q \in X$ si ponga

$$d(p, q) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \neq q, \\ 0 & \text{se } p = q. \end{cases}$$

Si provi che d è una metrica (detta *metrica discreta*) completa e si determinino gli aperti, i chiusi, i limitati, i connessi e i compatti dello spazio metrico (X, d).
Si mostri inoltre che ogni punto è isolato e che una successione è convergente se e solo se è costante.

Problema 6.7.
Sia (X, d) uno spazio metrico e si definisca

$$d(A, B) = \inf \left\{ d(a, b) \, : \, a \in A, \, b \in B \right\},$$

per ogni coppia di sottoinsiemi A e B di X. Si provi che d non è una distanza su $\mathcal{P}(X)$ e che esistono due chiusi A e B disgiunti con $d(A, B) = 0$.

Problema 6.8.
Dati $x, y \in \mathbb{R}$ si definiscano

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= (x-y)^2\,, \\ d_2(x,y) &= \sqrt{|x-y|}\,, \\ d_3(x,y) &= |x^2-y^2|\,, \\ d_4(x,y) &= |x-2y|\,, \\ d_5(x,y) &= \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\,. \end{aligned}$$

Si determinino quali di queste funzioni sono metriche su $\mathbb{R}$.

Problema 6.9.
Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ si definiscano

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|\,, \\ d_2(x,y) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|^2\Big)^{1/2}\,, \\ d_\infty(x,y) &= \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i-y_i|\,. \end{aligned}$$

Si mostri che sono metriche e che vale

$$d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le n d_\infty(x,y)\,.$$

Problema 6.10.
Due metriche d e δ su X si dicono equivalenti se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$Cd(x,y) \le \delta(x,y) \le \frac{1}{C} d(x,y)$$

per ogni $x, y \in X$.
Si provi che d e δ determinano la stessa topologia su X e che le loro successioni di Cauchy coincidono.

Problema 6.11.
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ poniamo

$$d(x,y) = \Big|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\Big|\,.$$

- Si provi che d è una distanza su $\mathbb{R}$.
- Si mostri che $(\mathbb{R}, d)$ non è completo.
- Si mostri che d induce su $\mathbb{R}$ la topologia usuale
- Si mostri che il completamento di $(\mathbb{R}, d)$ è omeomorfo a $[0, 1]$.

Problema 6.12.
Dato uno spazio metrico (X, d) si definiscano

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad d''(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}, \qquad \text{per ogni } x, y \in X,$$

e si provi che sono distanze su X, non equivalenti a d, ma che ma determinano la stessa topologia su X e le loro successioni di Cauchy coincidono.

Problema 6.13.
Sia (X, d) uno spazio metrico e x_n una successione di Cauchy. Si provi che se x_n ha una sottosuccessione convergente, allora tutta la successione è convergente.

Problema 6.14.
Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici. Si mostri che la topologia prodotto su $X_1 \times X_2$ coincide con quella generata dalla distanza

$$\delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$

dove $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$.

Problema 6.15.
Sia (X, d) uno spazio metrico. Si provi che $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è continua. È anche Lipschitziana?

Problema 6.16.
Dato uno spazio metrico (X, d) e un suo sottoinsieme A non vuoto, si definisca la funzione distanza da A come

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

(1) Dimostrare che la funzione d_A è ben definita e Lipschitziana.
(2) Si provi che $d_A = d_{\overline{A}}$.
(3) Si dimostri che $\{x \in X : d_A(x) = 0\} = \overline{A}$.
(4) Si provi che ogni aperto di X è un'unione numerabile di chiusi.
(5) Se $X = \mathbb{R}^n$ e $d_A(x) = r$ si provi che esiste $y \in \overline{A}$ tale che $d(x, y) = r$. Se inoltre A è chiuso si mostri che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste almeno un punto $y \in A$ di distanza minima da x.
(6) Se $X = \mathbb{R}^n$ e A è un chiuso non vuoto, si provi che $\{x \in X : d_A(x) \leq r\} = A + D_r$ dove D_r è il disco chiuso di raggio r in $\mathbb{R}^n$.
(7) Se $X = \mathbb{R}^n$ e A è un convesso chiuso non vuoto, si provi che la funzione d_A è convessa e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ il punto $y \in A$ di distanza minima da x è unico.

Problema 6.17.
Sia $p \in \mathbb{N}$ un numero primo e per ogni $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con $x = ap^n/b$, dove a, b sono interi non divisibili per p, sia $\operatorname{ord}(x) = n$. Definiamo

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\operatorname{ord}(x)} & \text{se } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Sia poi $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definita da $d(x, y) = |x - y|_p$.

- Si mostri che per ogni $x, y, z \in \mathbb{Q}$ si ha $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, x)\}$.
- Si mostri che d è una distanza su $\mathbb{Q}$.
- Si dica se $(\mathbb{Q}, d)$ è uno spazio metrico completo.
- Sia $(\overline{\mathbb{Q}}, \overline{d})$ il completamento di $(\mathbb{Q}, d)$. Si dica se i limitati di $(\overline{\mathbb{Q}}, \overline{d})$ sono compatti.

Nota. *Questa distanza prende il nome di* distanza p–adica *su* $\mathbb{Q}$.

Problema 6.18.
Sia X l'insieme delle successioni a valori in $[-1, 1]$. Per $A = (a_n)$ e $B = (b_n)$ si ponga

$$d(A, B) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |a_n - b_n| \,.$$

Si dimostri che (X, d) è uno spazio metrico e che una successione $A_k = (a_n^k)$ di elementi di X converge a un elemento limite $A = (a_n)$ se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\lim_{k\to\infty} a_n^k = a_n$. È uno spazio completo?

Problema 6.19.
Sull'insieme $GL(n, \mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ si consideri la funzione

$$d(A, B) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|=1} \|Ax - Bx\| \,.$$

Si mostri che d è una distanza completa su $GL(n, \mathbb{R})$.
Data una successione di matrici A_i, si mostri che $A_n \to A$ rispetto a d se e solo se tutte le "entrate" $(A_n)_{ij}$ di A_n convergono alle entrate A_{ij} di A.
La distanza d è equivalente alla distanza Euclidea

$$d_E(A, B) = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij} - B_{ij}|^2 \Big)^{1/2} \,?$$

Problema 6.20 (Distanza di Hausdorff)**.**
Sia (X, d) uno spazio metrico e si indichi con $\mathcal{K}(X)$ l'insieme dei suoi sottoinsiemi compatti e non vuoti. Fissati due compatti K e K' si definisce la loro distanza come l'$\inf$ su $r > 0$ tali che l'r–intorno di K contiene K' e l'r–intorno di K' contiene K. In formule,

$$\delta(K, K') = \inf\{r \in \mathbb{R} \,:\, K' \subseteq U_r(K) \text{ e } K \subseteq U_r(K')\} \,.$$

Si mostri che δ è una distanza su $\mathcal{K}(X)$, detta *distanza di Hausdorff*.
Si calcoli in $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ la distanza tra le seguenti coppie di compatti:

$$[0, 1], \quad [2, 3]\,;$$
$$[0, 1], \quad [0, 1/2]\,;$$
$$[0, 1], \quad \mathcal{C}\,;$$
$$\{1/2\}, \quad \mathcal{C}\,,$$

dove $\mathcal{C}$ è l'insieme di Cantor.

Problema 6.21.
Si mostri che una definizione equivalente della distanza di Hausdorff tra due compatti K e K' è data da

$$\delta(K,K') = \sup\big(\{d(x,K')\,:\,x\in K\}\cup\{d(x',K)\,:\,x'\in K'\}\big)\,.$$

Problema 6.22.
Si mostri che una successione K_n di compatti di (X,d) converge in $(\mathcal{K}(X),\delta)$ ad un compatto $K\subseteq X$ se e solo se le due seguenti condizioni si verificano:

- per ogni successione x_n tale che $x_n\in K_n$, esiste una sottosuccessione convergente ad un elemento x appartenente a K;
- per ogni $x\in K$ esiste una successione $x_n\to x$ con $x_n\in K_n$.

Si calcoli, se esiste, il limite in $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ delle seguenti successioni di compatti:

$$K_n = \{1/n\}\,,$$
$$K_n = [1/n,n]\,,$$
$$K_n = [1/n,1-1/n]$$

e, se esiste, il limite in $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ di

$$K_n = \{(x,y)\,:\,|x|^n+|y|^n\leq 1\}\,,$$
$$K_n = \{(e^{-t/n}\cos t, e^{-t/n}\sin t)\ t\geq 0\}\,.$$

Problema 6.23.
Sia K_n una successione decrescente $K_{n+1}\subseteq K_n$ di compatti di uno spazio metrico (X,d).
Si mostri che tale successione ammette limite in $(\mathcal{K}(X),\delta)$ uguale a $\cap_{n\in\mathbb{N}}K_n$.
Si consideri la seguente successione di compatti definita per ricorrenza

$$I_0=[0,1],\qquad I_{n+1}=1/3I_n\cup(2/3+1/3I_n)$$

e se ne calcoli il limite.

Problema 6.24. ★
Sia (X,d) uno spazio metrico compatto, si mostri che allora anche $(\mathcal{K}(X),\delta)$ è compatto.

Problema 6.25. ★
Sia K_n una successione di Cauchy in in $(\mathcal{K}(X),\delta)$, con (X,d) spazio metrico completo.
Si mostri che per ogni $k\in\mathbb{N}$ l'insieme

$$B_k=\overline{\bigcup_{n\geq k}K_n}$$

è compatto.
Si provi che esiste $B=\lim_{k\to\infty}B_k$ e che $B=\lim_{n\to\infty}K_n$, se ne deduca che $(\mathcal{K}(X),\delta)$ è completo.

Problema 6.26.
Si mostri che la funzione $F:\mathcal{K}(X)\to\mathbb{R}$ che associa ad ogni compatto di uno spazio metrico (X,d) il suo diametro, dato da $\operatorname{diam}(K)=\sup_{x,y\in K}d(x,y)$, è continua.

Problema 6.27.
Sia K_n una successione in $(\mathcal{K}(X), \delta)$ convergente a K. Se tutti i K_n sono connessi, anche K è connesso?

Problema 6.28.
Siano $f_1, f_2, \ldots, f_n : (X, d) \to (X, d)$ funzioni Lipschitziane di costante $r < 1$.

- Si mostri che per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ la mappa
$$f_{i,*} : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$$
definita da $f_{i,*}(K) = f_i(K)$ è Lipschitziana di constante r.
- Si mostri che la mappa
$$F : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$$
definita da $F(K) = f_1(K) \cup f_2(K) \cup \cdots \cup f_n(K)$ è Lipschitziana di constante r.
- Si deduca che se (X, d) è completo esiste un unico compatto non vuoto $K \subseteq X$ tale che
$$K = f_1(K) \cup f_2(K) \cup \cdots \cup f_n(K)\,.$$
- Nel caso speciale $X = [0, 1]$ con l'usuale distanza Euclidea, si determinino f_1 e f_2 tale che l'unico insieme $K \subseteq [0, 1]$ con $K = f_1(K) \cup f_2(K)$ sia l'insieme di Cantor.

Problema 6.29.
Sia V uno spazio vettoriale normato con una norma $\|\cdot\|$. Si mostri che l'operazione somma $+ : V \times V \to V$ è continua.

Problema 6.30.
Sia V uno spazio vettoriale normato con una norma $\|\cdot\|$. Si mostri che $d(x, y) = \|x - y\|$ definisce una distanza su V.
Se lo spazio metrico (V, d) è completo, si dice *spazio di Banach*.

Problema 6.31.
Sia V uno spazio vettoriale con una metrica d. Si discutano le condizioni su d per cui la mappa $\|\cdot\| = d(\cdot, 0)$ è una norma e $d(x, y) = \|x - y\|$.

Problema 6.32.
Sia V uno spazio vettoriale con una norma $\|\cdot\|$. Si mostri che la palla unitaria di V è convessa. Si discutano le condizioni per cui un convesso di V è la palla unitaria di una qualche norma.

Problema 6.33.
Provare che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale l'identità
$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\,,$$
detta *identità del parallelogramma* .

Problema 6.34.
Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ si definiscano

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,,\\ \|x\|_2 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2},\\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|\,.\end{aligned}$$

Si mostri che sono norme e che vale

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty\,.$$

Problema 6.35.
Siano V_1 e V_2 due spazi vettoriali con norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, rispettivamente. Si mostri che la mappa $\|\cdot\| : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$$

dove $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ è una norma sullo spazio vettoriale $V_1 \times V_2$.

Problema 6.36.
Sia V è uno spazio vettoriale, un *prodotto scalare* su V è una forma bilineare $\langle\cdot|\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che $\langle x|x\rangle \geq 0$ ed è uguale a zero se e solo se $x = 0$. Si provi che vale

$$|\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle \cdot \langle y|y\rangle$$

e che $x \mapsto \big(\langle x|x\rangle\big)^{1/2}$ è una norma su V.

Problema 6.37.
Si mostri che una norma $\|\cdot\|$ su uno spazio vettoriale V viene da un prodotto scalare $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ se e solo se vale l'identità del parallelogramma

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\,,$$

per ogni $x, y \in V$.
Se lo spazio V è completo con la distanza indotta da tale norma si dice *spazio di Hilbert*.

Problema 6.38.
Si provi che due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su uno stesso spazio vettoriale V inducono la stessa topologia se e solo se sono equivalenti, cioè esiste una costante $C > 0$ tale che

$$C\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \frac{1}{C}\|x\|_1$$

per ogni $x \in V$.

Problema 6.39. ★
Si provi che se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, tutte le norme sono equivalenti. Si dia un esempio di uno spazio vettoriale di dimensione infinita con due norme non equivalenti.

Problema 6.40.
Si provi che se V è uno spazio vettoriale normato e W un suo sottospazio vettoriale di dimensione finita, si provi che W è un chiuso di V. Si costruisca un esempio esplicito di uno spazio vettoriale e di un suo sottospazio vettoriale non chiuso.

Problema 6.41.
Sia V è uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$. Si mostri che le seguenti due condizioni sono equivalenti:

- V con la distanza $d(x,y) = \|x-y\|$ è uno spazio metrico completo;
- per ogni sequenza x_n si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \text{converge.}$$

Problema 6.42.
Sia V uno spazio vettoriale normato. Si mostri che la norma è una funzione convessa.

Problema 6.43.
Per $p \geq 1$, su $\mathbb{R}^n$ definiamo la mappa $x \mapsto |x|_p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p$. Si provi che $|\cdot|_p$ è una norma e che la topologia indotta è quella usuale di $\mathbb{R}^n$. Lo stesso per la mappa $x \mapsto |x|_\infty = \max\{|x_i|\}$.
Si disegni la palla unitaria per tutte queste norme.

Problema 6.44. ★
Si mostri che la palla unitaria chiusa di uno spazio normato o di Banach di dimensione infinita non è compatta.

Problema 6.45.
Si considerino gli spazi vettoriali

$$\begin{aligned} \ell^\infty &= \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,:\, \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}\,, \\ c &= \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,:\, \text{esiste finito} \lim_{n\to\infty} x_n\}\,, \\ c_0 &= \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,:\, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}\,. \end{aligned}$$

Si mostri che $|x|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ è una norma per questi spazi che li rende spazi di Banach.

Problema 6.46.
Dato $p \in [1, +\infty)$, si consideri lo spazio vettoriale

$$\ell^p = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\right\}.$$

Si mostri che $|x|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ è una norma su ℓ^p che lo rende uno spazio di Banach.

Problema 6.47.
Si mostri che nessuna palla di ℓ^2 è compatta.
Si trovi una successione x^k non convergente in ℓ^2 tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ la successione numerica x_n^k converge a zero.

Problema 6.48.
Sia F un sottoinsieme di uno spazio metrico compatto. Si provi che F è compatto se e solo se è chiuso.

Problema 6.49.
Si provi che uno spazio vettoriale normato localmente compatto è completo.

Problema 6.50 (Numero di Lebesgue)**.**
Sia (X, d) uno spazio metrico. Dato un ricoprimento di X con una famiglia di aperti $\mathcal{U} = \{U_i\}$ si definisca il *numero di Lebesgue* del ricoprimento $\mathcal{U}$ come il $\sup$ dei $\rho \in \mathbb{R}^+$ tali che per ogni $x \in X$, esiste un aperto U_i che contiene la palla aperta di centro x e raggio ρ, se un tale ρ positivo non esiste diciamo che il ricoprimento ha numero di Lebesgue zero.
Si mostri che se (X, d) è compatto, ogni suo ricoprimento ha numero di Lebesgue positivo.

Problema 6.51.
Sia $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ una successione di compatti non vuoti di uno spazio metrico (X, d). Si provi che $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ è non vuoto.

Problema 6.52.
Uno spazio metrico si dice *separabile* se contiene un sottoinsieme numerabile denso. Si mostri che $\mathbb{R}^n$ è separabile.

Problema 6.53. ★
Si provi che ogni spazio metrico compatto è separabile.

Problema 6.54.
Sia K un sottoinsieme di uno spazio metrico (X, d). Si provi che le tre seguenti condizioni sono equivalenti.

- Ogni successione $x_n \in K$ ha una sottosuccessione convergente a $x \in K$ (compattezza sequenziale).
- Da ogni famiglia di aperti che ricopre K si può estrarre una sottofamiglia finita che lo ricopre (compattezza per ricoprimenti, o semplicemente compattezza).
- L'insieme K è completo e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme finito di punti $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ tale che $K \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$ (totale limitatezza).

Problema 6.55.
Si provi che uno spazio metrico è separabile se e solo se ha una base numerabile della sua topologia.

Problema 6.56.
Si provi che ogni spazio metrico compatto ha una base numerabile della sua topologia.

Problema 6.57.
Si provi che se in uno spazio metrico possiamo trovare una famiglia più che numerabile di aperti non vuoti a due a due disgiunti, lo spazio non è separabile.

Problema 6.58.
Si mostri che lo spazio metrico ℓ^∞ non è separabile. Si provi che tutti gli spazi ℓ^p, per $p \geq 1$, sono separabili. E gli spazi c e c_0?

Problema 6.59. ★
Sia X lo spazio delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $[0,1]$ con la distanza

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\,,$$

detta *distanza uniforme*. Si provi che tale spazio non è separabile, quindi la sua topologia non ha base numerabile.
Cambia qualcosa considerando invece lo spazio delle funzioni continue da $[0,1]$ in sé?

Problema 6.60 (Teorema di Lindelöf). ★
Si provi che se (X,d) è uno spazio metrico separabile, allora da ogni ricoprimento aperto di X si può estrarre un sottoricoprimento numerabile. Vale anche il viceversa?

Problema 6.61. ★
Si dia un esempio di uno spazio metrico che non soddisfa il secondo assioma di numerabilità, cioè tale che la sua topologia non abbia una base numerabile.

Problema 6.62 (Teorema di Baire). ★
Si provi che se (X,d) è uno spazio metrico completo, non è possibile ottenere X come unione numerabile di sottoinsiemi chiusi con parte interna vuota.

Problema 6.63. ★
Si provi che se (X,d) è uno spazio metrico completo, allora l'intersezione di una famiglia numerabile di aperti densi di X è un insieme denso.
Si provi che un'unione numerabile di sottoinsiemi chiusi di X con parte interna vuota ha parte interna vuota.

Problema 6.64.
Sia (X,d) uno spazio metrico completo, se $X = \cup_{n=1}^\infty F_n$ con F_n chiusi, allora $\cup_{n=1}^\infty F_n^\circ$ è un aperto denso di X.

Problema 6.65. ★★
Si provi che ogni chiuso di uno spazio metrico separabile è l'unione disgiunta di un insieme perfetto e di un numerabile. Inoltre, tale decomposizione è unica.

Problema 6.66.
Sia (X,d) uno spazio metrico contenente almeno due punti. Si mostri che se X è connesso, allora la sua cardinalità è almeno quella del continuo.

Problema 6.67.
Si mostri che la palla unitaria e la sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$, se $n \geq 2$ sono spazi connessi.

Problema 6.68.
La chiusura e la parte interna di un sottoinsieme connesso di uno spazio metrico (topologico) sono connessi?

Problema 6.69. ★
Si mostri che se X è uno spazio metrico e A_n è una famiglia di sottoinsiemi connessi di X tali che $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, allora $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ è connesso.

Problema 6.70.
Si consideri sullo spazio X la relazione $x \sim y$ se esiste un sottoinsieme connesso di X che contenga x e y. Si mostri che tale relazione è di equivalenza. Le classi di equivalenza si dicono *componenti connesse* di X.

Problema 6.71.
Si mostri che le componenti connesse sono chiuse. Sono anche aperte?

Problema 6.72.
Si provi che $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

Problema 6.73.
Si provi che un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ è connesso se e solo se è connesso per archi.

Problema 6.74. ★
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ dato da $A = \{(x, \sin(1/x)) \,:\, x \in \mathbb{R}^+\}$. Si mostri che $\overline{A}$ è connesso ma non connesso per archi.

Problema 6.75.
Sia (X, d) uno spazio metrico e sia A_n una successione di sottoinsiemi non vuoti di X tali che $A_{n+1} \subseteq A_n$ e sia $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

- Si provi che se ogni A_n è compatto e connesso, allora A è compatto, connesso e non vuoto.
- Si provi che ci sono casi in cui tutti gli A_n sono connessi per archi ma A è non vuoto e non connesso.
- Si provi che ci sono casi in cui tutti gli A_n sono compatti e connessi per archi ma A non è connesso per archi.

7. Continuità

Problema 7.1.
Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che trasforma ogni successione x_n convergente in una successione convergente $f(x_n)$, è necessariamente continua?

Problema 7.2.
Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ porta intervalli in intervalli, si può concludere che f è continua?

Problema 7.3.
Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ porta aperti in aperti, si può concludere che f è continua? E chiusi in chiusi?

Problema 7.4.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f^3 + 2f + 1$ è una funzione continua. Si provi che allora f è continua.

Problema 7.5.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f\Big(\varlimsup_{n\to\infty} x_n\Big) = \varlimsup_{n\to\infty} f(x_n)$$

per ogni successione limitata di numeri reali x_n. Dimostrare che f è continua e monotona.

Problema 7.6. ★
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione surgettiva tale che per ogni successione x_n *non* convergente, la successione $f(x_n)$ è *non* convergente. Si provi che allora f è continua.

Problema 7.7. ★
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\lim_{h\to 0^+} [f(x+h) - f(x-h)] = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione f è allora continua?

Problema 7.8.
Si mostri che una funzione continua $f : C \to \mathbb{R}$ su un chiuso C di uno spazio metrico (X, d) si può estendere ad una funzione continua su tutto X.

Problema 7.9.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, si discuta se f e f^{-1} come funzioni insiemistiche, mandano aperti in aperti, chiusi in chiusi, limitati in limitati, densi in densi, perfetti in perfetti, compatti in compatti, connessi in connessi, di I/II categoria in I/II categoria, etc.. ed eventualmente si trovino ipotesi che lo garantiscano.
Si discutano le stesse questioni per funzioni continue $f : X \to Y$ dove X, Y siano due spazi metrici o topologici.

Problema 7.10.
Si discutano le stesse questioni del problema precedente se V e W sono due spazi normati (o di Banach) e $f : V \to W$ è un'applicazione lineare e continua.

Problema 7.11.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, si discutano le relazioni tra le seguenti coppie di insiemi ed eventualmente si trovino ipotesi che ne garantiscano l'uguaglianza:

$$f(\overline{A}) \text{ e } \overline{f(A)}, \quad f(A^\circ) \text{ e } f(A)^\circ, \quad f(\partial A) \text{ e } \partial f(A), \quad f(A') \text{ e } f(A)',$$

$$f^{-1}(\overline{A}) \text{ e } \overline{f^{-1}(A)}, \quad f^{-1}(A^\circ) \text{ e } f^{-1}(A)^\circ, \quad f^{-1}(\partial A) \text{ e } \partial f^{-1}(A), \quad f^{-1}(A') \text{ e } f^{-1}(A)'.$$

Si discutano le stesse questioni per funzioni continue $f : X \to Y$ dove X, Y siano due spazi metrici o topologici.
Si discutano le stesse questioni se V e W sono due spazi normati (o di Banach) e $f : V \to W$ è un'applicazione lineare e continua.

Problema 7.12.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata e sia

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = f(x)\}$$

il grafico di f. Si mostri che f è continua se e solo se $\Gamma(f)$ è un chiuso di $\mathbb{R}^2$.
La conclusione vale anche se f non è limitata?

Problema 7.13.
Sia V uno spazio vettoriale con una norma $\|\cdot\|$ che viene da un prodotto scalare $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$. Si mostri che le funzioni $f : X \times X \to X$, $g : X \times X \to \mathbb{R}$ e $h : X \times \mathbb{R} \to X$ date da $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = \langle x|y \rangle$ e $h(x, \lambda) = \lambda x$ sono funzioni continue.

Problema 7.14.
Siano (X, d) e (Y, δ) due spazi metrici di cui X compatto, $T : X \to Y$ e $S : Y \to X$ due *isometrie* (cioè $\delta(T(x), T(y)) = d(x, y)$ per ogni coppia $x, y \in X$ e lo stesso per S).
Provare che allora T ed S sono iniettive e surgettive.

Problema 7.15. ★
Sia $f : X \to X$ un'isometria di uno spazio metrico (X, d), si provi che f è iniettiva ma non necessariamente surgettiva. Se X è compatto si mostri che f è bigettiva. Si dia un esempio di due spazi metrici (X, d) e (Y, δ), non isometrici tra loro, per cui esistano due isometrie $f : X \to Y$, $g : Y \to X$.

Problema 7.16.
Si provi che l'inversa di una isometria bigettiva tra due spazi metrici è ancora un'isometria.

Problema 7.17.
Siano (X, d) e (Y, d') due spazi metrici, con (X, d) compatto. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e iniettiva, si mostri che allora è un omeomorfismo tra X e la sua immagine $f(X)$.

Problema 7.18.
Siano $(V_1, \|\cdot\|_1)$ e $(V_2, \|\cdot\|_2)$ due spazi vettoriali normati, si mostri che una applicazione lineare $A : V_1 \to V_2$ è continua se e solo se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|A(x)\|_2 \leq C\|x\|_1$$

per ogni $x \in V_1$.

Problema 7.19.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che ogni punto di $\mathbb{R}$ è un punto di minimo relativo per f. Dimostrare che f è costante.

Problema 7.20. ★
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione qualunque. Si mostri che l'insieme dei suoi minimi (o massimi) stretti è al più numerabile.

Problema 7.21. ★★
Si determinino le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che ogni punto di $\mathbb{R}$ è o un massimo o un minimo relativo per f e si descriva la sottoclasse delle continue con tale proprietà.

Problema 7.22. ★
Si consideri una funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ limitata e continua in 0, tale che $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$. È possibile trovare una funzione $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ che sia continua, valga $g(0) = 0$ e $g \geq f$ dappertutto?

Problema 7.23.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(x + y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (tale funzione si dice *additiva*).

- Si mostri che se f è continua in almeno un punto, allora è lineare.
- Si mostri che se f è monotona, allora è lineare.
- Si mostri che se f è limitata in un qualche intervallo di $\mathbb{R}$, allora è lineare.

Problema 7.24. ★
Si mostri che esistono $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additive ma non lineari.

Problema 7.25.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq h(x - y)\,,$$

dove $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. Si mostri che f è continua.

Problema 7.26.
Sia f una funzione reale tale che soddisfi una delle seguenti ipotesi

(1) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}$,
(2) $f(xy) = f(x)f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,
(3) $f(x + y) = f(x)f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,
(4) $f(xy) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^*$,

è vero che se f è continua in un punto, allora è continua dappertutto? E se è solo limitata? O monotona?
Assumendo f continua, si descrivano gli insiemi delle funzioni che soddisfano tali condizioni.

Problema 7.27.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)\,,$$

esistono (finiti o infiniti) e sono uguali. Si dimostri che allora f ha minimo o massimo in $\mathbb{R}$ (nel senso che ne ha almeno uno dei due oppure entrambi).

Problema 7.28.
Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (lo spazio topologico $\overline{\mathbb{R}}$ è definito da $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ con base della sua topologia la famiglia di insiemi

$$(a,b)\,, \quad [-\infty, a)\,, \quad (a, +\infty]\,,$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$) con (X,d) spazio metrico, si dice *semicontinua inferiormente* (*superiormente*) – talvolta si scrive SCI (SCS) – se per ogni $x_0 \in X$ si ha $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$ ($\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0)$).
Si mostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f è semicontinua inferiormente.
- Per ogni $t \in \overline{\mathbb{R}}$, il sottolivello $S_t = \{x \in X \,:\, f(x) \leq t\}$ è un chiuso di X.
- L'*epigrafico* $E = \{(x,t) \in X \times \overline{\mathbb{R}} \,:\, f(x) \leq t\}$ è un chiuso di $X \times \overline{\mathbb{R}}$.

Si formuli poi l'equivalente conclusione per le funzioni semicontinue superiormente.

Problema 7.29.
Si dica se gli spazi delle funzioni semicontinue inferiormente e superiormente da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono spazi vettoriali.

Problema 7.30.
Si mostri che se $\{f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}\}_{i\in\mathcal{I}}$ è una famiglia di funzioni semicontinue inferiormente, allora la funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, definita da $f(x) = \sup_{i\in\mathcal{I}} f_i(x)$ per ogni $x \in X$, è semicontinua inferiormente.

Problema 7.31. ★
Si mostri che se $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinua inferiormente e mai uguale a $-\infty$, esiste una successione crescente di funzioni continue $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Problema 7.32.
Si mostri che se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione semicontinua inferiormente, mai uguale a $-\infty$, e X è uno spazio compatto, allora f assume minimo. Si discuta l'analogo enunciato per le funzioni semicontinue superiormente.

Problema 7.33.
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva, si mostri che deve essere monotona e che l'inversa $f^{-1} : f(a, b) \to (a, b)$ è continua.

Problema 7.34.
Dati n numeri reali positivi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, si mostri che la funzione

$$p \mapsto M_p = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{n}\right)^{1/p}$$

definita su $\mathbb{R}^*$ è continua e monotona e che

- $\lim_{p\to 0} M_p = G$, dove G è la media geometrica dei valori $a_1, a_2, \ldots, a_n$,
- $\lim_{p\to -\infty} M_p = \min\{a_i\}$,
- $\lim_{p\to +\infty} M_p = \max\{a_i\}$.

Problema 7.35.
Data una serie convergente a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si definisca la funzione

$$p \mapsto S_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p}$$

per $p \in [1, +\infty)$. Si mostri che $\lim_{p\to +\infty} S_p = \max\{a_n\}$.

Problema 7.36.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, si mostri che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ costante a tratti, che assume un numero finito di valori, tale che $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in [a, b]$. La conclusione va modificata se invece di $[a, b]$ si considera tutto $\mathbb{R}$, oppure un intervallo aperto, assumendo che la funzione f sia o meno limitata? Se la funzione non è continua ma è soltanto limitata, cosa si può dire?

Problema 7.37.
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ e sia $m \in \mathbb{R}$. Si calcolino, se esistono, i limiti

$$\lim_{t\to 0} f(t, mt)\,, \qquad \lim_{t\to 0} f(0, t)\,, \qquad \lim_{t\to 0} f(t, t^2)\,, \qquad \lim_{(x,y)\to 0} f(x, y)\,.$$

Problema 7.38.
Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+, \\ \frac{1}{q} & \text{per } x = \frac{p}{q} > 0,\ p \text{ e } q \text{ primi tra loro} \end{cases}$$

e se ne discuta l'iniettività, la surgettività e i punti di continuità o di semicontinuità inferiore e superiore.

Problema 7.39.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione qualunque, si dimostri che l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ dove f ha una discontinuità a salto oppure una discontinuità eliminabile è al più numerabile.

Problema 7.40. ★★
Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una funzione tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0.$$

Si può concludere allora che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,?$$

E se f è uniformemente continua? E se è solo continua?

Problema 7.41.
Dare un esempio di una funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che i suoi punti di discontinuità siano tutti e soli i numeri razionali.
Una funzione u con questa proprietà può essere monotona?

Problema 7.42.
Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si indichi con $D(f)$ l'insieme dei punti in cui f non è continua. Si dimostri che $D(f)$ è un'unione numerabile di insiemi chiusi, cioè un F_σ.

Problema 7.43. ★
Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che i suoi punti di discontinuità siano tutti e soli i numeri irrazionali?

Problema 7.44. ★
Supponendo che lo spazio metrico (X, d) abbia un sottoinsieme denso D con parte interna vuota, si mostri che dato $E \subseteq X$ che sia un F_σ, esiste una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ tale che l'insieme dei suoi punti di discontinuità $D(f)$ sia esattamente E.

Problema 7.45.
Una funzione $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ si dice *modulo di continuità* se è continua in 0, $\omega(0) = 0$ ed è monotona crescente. Si dice che ω è un modulo di continuità per $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ se

$$f(x) - f(y) \leq \omega(|x - y|) \qquad \forall x, y \in A\,.$$

Dimostrare che f è uniformemente continua se e solo se ammette un modulo di continuità finito (cioè a valori in $(0, +\infty)$). Scrivere un modulo di continuità per una funzione Lipschitziana o Hölderiana.

Problema 7.46.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni su $\mathbb{R}$ con un modulo comune di continuità finito ω e tali che

$$\overline{f}(x) = \sup\{f(x) \,:\, f \in \mathcal{F}\} < +\infty$$

Dimostrare che allora ω è un modulo di continuità anche per la funzione $\overline{f}$ che quindi è continua.

Problema 7.47.
Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, dove (X, d) è uno spazio metrico, si definisca la *funzione oscillazione*, per ogni $x \in X$, come

$$\theta_f(x) = \inf_{\varepsilon>0} \operatorname{diam}\big(f(B_\varepsilon(x))\big)\,,$$

dove per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ definiamo $\operatorname{diam}(A)$ come l'estremo inferiore delle lunghezze degli intervalli che contengono A.

(1) Si mostri che

$$\theta_f(x) = \inf_{\varepsilon>0} \big[\sup\{f(B_\varepsilon(x))\} - \inf\{f(B_\varepsilon(x))\}\big]\,.$$

(2) Si mostri che

$$\theta_f(x) = \overline{\lim_{y\to x}} \max\{f(y), f(x)\} - \underline{\lim_{y\to x}} \min\{f(y), f(x)\}\,.$$

(3) Si mostri che $\theta_f(x) \geq 0$ e che f è continua in $x \in X$ se e solo se $\theta_f(x) = 0$.
(4) Si mostri che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ l'insieme $A_n = \{x \in \mathbb{R} : \theta_f(x) \geq 1/n\}$ è chiuso.
(5) Si concluda che $\theta_f : X \to \mathbb{R}$ è semicontinua superiormente.

Problema 7.48. ★
Si dimostri che l'insieme dei punti di $\mathbb{R}$ in cui una funzione semicontinua inferiormente non è continua è un insieme di prima categoria (un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si dice di prima categoria se è contenuto in un'unione numerabile di chiusi con parte interna vuota).

Problema 7.49.
Si provi che una funzione uniformemente continua $f : X \to \mathbb{R}$ trasforma ogni successione di Cauchy in una successione di Cauchy. Vale il viceversa?

Problema 7.50.
Nella relazione ε–δ che vale per una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la scelta di δ in generale dipende da $x \in \mathbb{R}$ e da $\varepsilon > 0$. Fissato ε, si può sempre scegliere δ dipendente in modo continuo da x?

Problema 7.51.
Siano $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni continue tali che $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0$. Si mostri che se g è uniformemente continua, lo è anche f.

Problema 7.52.
Si provi che una funzione uniformemente continua su uno spazio vettoriale normato è limitata su ogni sottoinsieme limitato. Si mostri con un esempio che la stessa conclusione non vale in generale per uno spazio metrico.

Problema 7.53.
Si dimostri che una funzione continua sull'intervallo aperto e limitato (a, b) è uniformemente continua se e solo se esistono finiti i limiti di $f(x)$ per x che tende ad a e b.

Problema 7.54.
Sia f definita e continua in $\mathbb{R}$. Si mostri che se esistono finiti i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, allora f è uniformemente continua.

Problema 7.55.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo $I_n = [2n, 2n+1]$ e sia $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2^n$ se $x \in I_n$. Si mostri che esiste un'estensione continua di f a tutto $\mathbb{R}^+$ ma non esiste un'estensione uniformemente continua.

Problema 7.56.
Si mostri che la composizione di due funzioni uniformemente continue è uniformemente continua.

Problema 7.57.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, si dica quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

- se f è periodica, f è uniformemente continua,
- se f è limitata, f è uniformemente continua,
- se f è limitata e uniformemente continua, allora f^2 (cioè la funzione $x \mapsto [f(x)]^2$) è uniformemente continua,
- se f è uniformemente continua esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $|f(x)| \leq a|x| + b$, per ogni $x \in \mathbb{R}$,
- se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $|f(x)| \leq a|x| + b$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora f è uniformemente continua.

Problema 7.58.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua, si mostri che esistono due costanti $C, M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq C|x|$ per $|x| \geq M$.

Problema 7.59.
Si mostri che una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$, monotona e limitata, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo limitato o illimitato, è uniformemente continua.

Problema 7.60. ★
Si trovi una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che non sia monotona in nessun intervallo non vuoto.

Problema 7.61.
Una funzione si dice *aperta* se manda insiemi aperti in aperti. Si mostri che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e aperta è strettamente monotona.

Problema 7.62.
Si mostri che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotona e con la proprietà del valor intermedio è continua.

Problema 7.63.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tale che per ogni $x \in [a, b]$ esiste $h > 0$ tale che per ogni

$y \in [x, x+h]$ si ha $f(x) \leq f(y)$. Si provi che f è monotona non decrescente. La stessa conclusione vale se f non è continua?

Problema 7.64.
Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana. Si provi che esiste finito il limite $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Problema 7.65.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$. La funzione f si dice α–Hölderiana (per $\alpha > 0$) se esiste una costante $C \geq 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in A\,.$$

(1) Si dica per quali $\beta \geq 0$ la funzione x^β da $[0, +\infty)$ in $\mathbb{R}$ è α–Hölderiana.
(2) Si provi che ogni funzione Hölderiana è uniformemente continua.
(3) Si dia un esempio di una funzione continua ma non α–Hölderiana per ogni $\alpha > 0$.
(4) Si mostri che se A è limitato e $\beta < \alpha$, allora ogni funzione α–Hölderiana è β–Hölderiana. Si dica se lo stesso vale se $A = \mathbb{R}$.

Problema 7.66.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq C(x - y)^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\,,$$

con $\alpha > 1$ e $C > 0$. Si mostri che f è costante (da cui nella definizione di funzione α–Hölderiana si considera sempre $\alpha \leq 1$).

Problema 7.67.
Si esibisca una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uniformemente continua ma non α–Hölderiana per ogni $\alpha > 0$.

Problema 7.68.
Si provi che l'insieme di discontinuità di una funzione monotona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è al più numerabile.

Problema 7.69.
Siano f e g funzioni Lipschitziane da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Si dica quali delle seguenti funzioni risultano ancora Lipschitziane, precisando le relative costanti: $f + g$, $f - g$, $f \wedge g$, $f \vee g$, fg, f/g, $f \circ g$.
Si discuta il problema analogo con f e g Hölderiane.

Problema 7.70.
Si mostri che una funzione Lipschitziana su di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si estende sempre ad una funzione Lipschitziana su tutto $\mathbb{R}$.
La costante di Lipschitz si può mantenere invariata nell'estensione?

Problema 7.71.
Si mostri che una funzione Lipschitz su tutto $\mathbb{R}$ è sempre differenza di due funzioni

monotone. Si possono scegliere entrambe crescenti o decrescenti? O una crescente e l'altra decrescente?

Problema 7.72.
Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice a *variazione limitata* (talvolta indicato come BV) se esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni suddivisione $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ si ha

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq C\,.$$

Si mostri che una funzione a variazione limitata è sempre differenza di due funzioni monotone. Si possono scegliere entrambe crescenti o decrescenti? O una crescente e l'altra decrescente?
Vale il viceversa?

Problema 7.73.
Si mostri che una funzione Lipschitziana è a variazione limitata.

Problema 7.74. ★
Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice *assolutamente continua* (talvolta indicato come AC) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni famiglia finita $\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]\}$ di sottointervalli chiusi di $[a, b]$, a due a due disgiunti, con $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ si ha

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon\,.$$

Si mostri che vale la seguente catena di implicazioni:

f è Lipschitziana $\Longrightarrow$ f è AC $\Longrightarrow$ f è BV e continua $\Longrightarrow$ f è uniformemente continua.

Si mostri con controesempi che le implicazioni opposte non valgono in generale.

Problema 7.75.
Si dica se gli spazi delle funzioni Lipschitziane, Hölderiane, assolutamente continue, a variazione limitata, uniformemente continue, semicontinue inferiormente su un intervallo chiuso $I \subset \mathbb{R}$ sono spazi vettoriali.
Nel caso, che norma proporreste per renderli Banach?

Problema 7.76.
Si dica se gli spazi delle funzioni limitate, monotone, continue, Lipschitziane, Hölderiane, assolutamente continue, a variazione limitata, uniformemente continue, semicontinue inferiormente, su un intervallo chiuso $I \subset \mathbb{R}$ (o su tutto $\mathbb{R}$) sono "chiusi" per somma, differenza, modulo, operazioni di $\max/\min$ e di $\sup/\inf$, prodotto, rapporto, composizione.

Problema 7.77.
Data una funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'insieme $f([0, x])$ è limitato,

si consideri la funzione $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \sup_{t \leq x} f(t)$$

e si risponda alle seguenti domande, giustificando la risposta:

(1) la funzione g è continua? Monotona?
(2) Se f è limitata allora g è limitata?
(3) Se f è monotona allora g è monotona?
(4) Se f è continua allora g è continua?
(5) Se f è uniformemente continua allora g è uniformemente continua?
(6) Se f è Lipschitz allora g è Lipschitz?
(7) Se f è Hölderiana allora g è Hölderiana?
(8) Se f è AC allora g è AC?
(9) Se f è BV allora g è BV?
(10) Se f ha la proprietà del valor intermedio allora anche g?

Si ripeta il problema scambiando il ruolo di f e g nelle domande.

Problema 7.78.
Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e una costante $\varepsilon > 0$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'insieme $f(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ è limitato, si consideri la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \sup_{t \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)} f(t)$$

e si risponda alle seguenti domande, giustificando la risposta:

(1) la funzione g è continua? Monotona?
(2) Se f è limitata allora g è limitata?
(3) Se f è monotona allora g è monotona?
(4) Se f è continua allora g è continua?
(5) Se f è uniformemente continua allora g è uniformemente continua?
(6) Se f è Lipschitz allora g è Lipschitz?
(7) Se f è Hölderiana allora g è Hölderiana?
(8) Se f è AC allora g è AC?
(9) Se f è BV allora g è BV?
(10) Se f ha la proprietà del valor intermedio allora anche g?

Si ripeta il problema scambiando il ruolo di f e g nelle domande.

Problema 7.79 (Teorema delle Frittelle)**.** ★
Dati due poligoni nel piano, si dimostri che esiste una retta (un taglio) tale che separi ognuno dei due poligoni (frittelle) in due parti di stessa area.

Nota. *Il risultato vale per ogni coppia di insiemi limitati nel piano, avendo a disposizione un concetto di area generale. Valgono inoltre degli analoghi n–dimensionali (si provi ad enunciarli) però di dimostrazione più complessa. Con idee simili si può provare il fatto che ci sono sempre due punti antipodali sulla terra (sulla sfera) tali che hanno la stessa temperatura e la stessa pressione (i valori di due funzioni continue sulla* *sfera). Il caso* 1*–dimensionale è dato dal fatto che per ogni funzione continua sulla circonferenza, esistono sempre due punti opposti con lo stesso valore della funzione (lo si dimostri).*

8. Successioni e Serie di Funzioni

Problema 8.1.
Siano
$$f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$
si mostri che la successione di funzioni f_n converge puntualmente ma non uniformemente su $\mathbb{R}$.

Problema 8.2.
Siano
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \le x \le n+1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$
si mostri che la successione di funzioni f_n converge puntualmente a zero, converge uniformemente su ogni insieme della forma $(-\infty, a]$ ma non su tutto $\mathbb{R}$.

Problema 8.3.
Si dica se la successione di funzioni
$$f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$$
converge puntualmente in ogni punto di $[0, \pi]$ e si dica se la convergenza è uniforme.
Si dica se la successione di funzioni
$$f_n(x) = \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)^n$$
converge puntualmente in ogni punto di $[0, 2\pi]$ e se la convergenza è uniforme.

Problema 8.4.
Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in 0, siano
$$f_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$
Si studino le proprietà di convergenza puntuale e uniforme di f_n.

Problema 8.5.
Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = B$, siano
$$f_n(x) = f(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$
Si studino le proprietà di convergenza puntuale e uniforme di f_n

Problema 8.6.
Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, se la famiglia di funzioni
$$f_n(x) = f(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*\,,$$
è equicontinua su $[0, 1]$ cosa si può dire su f?

Problema 8.7.
Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siano
$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$
Si mostri che se f è continua, allora $f_n \to f$ puntualmente, per $n \to \infty$.
Si mostri che se f è uniformemente continua, allora $f_n \to f$ uniformemente, per $n \to \infty$.

Problema 8.8.
Sia $f_n : I \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni tale che $f_n \to f$ uniformemente e $f : I \to \mathbb{R}$ è continua. Si provi che se $x, x_n \in I$ e $x_n \to x$ allora $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.
Si dica se la conclusione vale assumendo la convergenza solo puntuale, inoltre si discuta se vale il viceversa, cioè assumendo che la conclusione valga per ogni $x \in I$ e $x_n \to x$ si ha che la convergenza $f_n \to f$ è uniforme.

Problema 8.9.
Siano
$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Si mostri che $f_n \to 0$ uniformemente su $\mathbb{R}$, per $n \to \infty$, ma f_n' converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ ma non sempre a zero.

Problema 8.10.
Si provi che ogni funzione continua su $[a, b]$ è limite uniforme di una successione di funzioni continue affini a tratti.

Problema 8.11 (Inf–Convoluzione)**.**
Sia (X, d) uno spazio metrico e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferiormente e limitata dal basso. Si definiscano le funzioni
$$f_n(x) = \inf_{y\in X} \{f(y) + nd(x, y)\}$$
e si mostri che la successione f_n è una successione crescente di funzioni Lipschitziane convergente puntualmente a f.

Problema 8.12 (Teorema del Dini)**.** ★
Sia $K \subset \mathbb{R}$ un compatto e sia f_n una successione di funzioni continue su K, convergente puntualmente ad una funzione f continua su K. Si mostri che se $f_n \geq f_{n+1}$, la convergenza è uniforme su K.
Si esibiscano degli esempi che mostrino che le ipotesi di monotonia, continuità e compattezza di K non possono essere eliminate.

Problema 8.13. ★
Sia f_n una successione di funzioni monotone non decrescenti su $[a, b]$ che converga puntualmente ad una funzione continua su $[a, b]$. Si mostri che la convergenza è uniforme su $[a, b]$.
Si esibiscano degli esempi che mostrino che le ipotesi di monotonia, continuità e compattezza dell'intervallo $[a, b]$ non possono essere eliminate.

Problema 8.14 (Teorema di Selezione di Helly). ★
Sia $f_n : I \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni monotone non decrescenti su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, uniformemente limitate dall'alto e dal basso, si provi che esiste una funzione monotona non decrescente $f : I \to \mathbb{R}$ e una successione $n_i \in \mathbb{N}$ tale che $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x)$ per ogni $x \in I$.

Problema 8.15. ★
Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue che converge puntualmente ad una funzione f. Si dimostri che l'insieme dei punti di discontinuità di f è un insieme di prima categoria. Se ne deduca che la funzione f è continua su un denso di $\mathbb{R}$.
Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinua su un insieme di prima categoria è limite puntuale di una successione di funzioni continue?

Nota. *Lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sono limite puntuale di una successione di funzioni continue si dice* prima classe di Baire*, la classe zero sono le funzioni continue, le classi successive si ottengono considerando i limiti puntuali di successioni di funzioni nelle classi precedenti. Per induzione transfinita si ottengono così tutte le classi di Baire associate agli ordinali numerabili. Le funzioni nell'unione di tutte queste classi si dicono funzioni di Baire.*
Lebesgue ha mostrato che ogni classe di Baire contiene strettamente tutte le precedenti e che ci sono funzioni che non sono funzioni di Baire. Un esempio di una funzione nella seconda classe di Baire ma non nella prima è dato dalla funzione caratteristica dei razionali, si veda il Problema 8.17.

Problema 8.16. ★
Sia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto. Si mostri che f' è continua in un denso (di seconda categoria).

Problema 8.17. ★
Si dimostri che la funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

non è il limite puntuale di una successione di funzioni continue. Si mostri però che

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{\sin^2(n!\pi x)}{\sin^2(n!\pi x) + 1/m^2} = f(x)\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Problema 8.18. ★
Sia $p_n \in \mathbb{R}[x]$ una successione di polinomi di grado non superiore a $k \in \mathbb{N}$, uniformemente convergente su un intervallo chiuso $[a,b]$. Si mostri che la funzione limite è un polinomio di grado non superiore a k.
La stessa conclusione vale se la convergenza è solo puntuale su un intervallo qualunque?

Problema 8.19.
Sia f_n una successione di funzioni definite su di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ a valori reali che converga uniformemente ad una funzione f limitata. Si provi che tutte le funzioni f_n sono limitate in modulo da una stessa costante. Si dica se la stessa conclusione vale se la convergenza è solo puntuale.

Problema 8.20.
Sia f_n una successione di funzioni definite su $\mathbb{R}$ a valori reali e limitate. Si supponga che f_n converga uniformemente su $\mathbb{R}$ a una funzione f. Si provi che

- le funzioni f_n sono limitate in modulo da una stessa costante,
- per ogni funzione g continua su $\mathbb{R}$, le composizioni $g \circ f_n$ convergono uniformemente a $g \circ f$.

Problema 8.21.
Sia $f_n : I \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni uniformemente continue, convergenti uniformemente ad una funzione $f : I \to \mathbb{R}$. Allora la funzione f è uniformemente continua e la famiglia $\{f\} \cup \{f_n\}$ è equicontinua. Viceversa, se la famiglia $\{f_n\}$ è equicontinua e la successione f_n converge puntualmente alla funzione $f : I \to \mathbb{R}$, la funzione f è continua con lo stesso modulo di continuità comune alle f_n e la convergenza è uniforme.

Problema 8.22.
Si discuta la chiusura per convergenza puntuale o uniforme delle seguenti classi di funzioni $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$ (si distinguano i vari casi a seconda dell'intervallo).

- Le funzioni limitate.
- Le funzioni monotone non decrescenti.
- Le funzioni che ammettono limite destro e sinistro finiti in ogni punto.
- I polinomi e i polinomi di grado minore di n, per $n \in \mathbb{N}$ fissato.
- Le funzioni continue.
- Le funzioni continue e monotone non decrescenti.
- Le funzioni uniformemente continue.
- Le funzioni con un fissato comune modulo di continuità.
- Le funzioni Lipschitziane (con o meno la stessa costante di Lipschitz).
- Le funzioni Hölderiane (con o meno la stessa costante di Hölder).
- Le funzioni assolutamente continue.
- Le funzioni a variazione limitata.
- Le funzioni che hanno la proprietà del valor intermedio.
- Le funzioni derivabili (con o meno derivata limitata in modulo da una costante comune).
- Le funzioni convesse.

Problema 8.23. ★
Si mostri che, fissati un polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$, un numero reale $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, esiste una funzione continua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tale che

- $$\sup_{x\in[0,1]} |p(x) - f(x)| < \varepsilon\,,$$
- per ogni x esiste y tale che
$$\Big|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\Big| > n\,.$$

Se ne deduca che l'insieme
$$F_n = \Big\{ f \in C([0,1]) \,:\, \text{esiste } x \in [0,1] \text{ tale che } \Big|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\Big| \le n \text{ per ogni } y \neq x \Big\}$$
è un chiuso con parte interna vuota nello spazio metrico $C([0,1])$ con la norma uniforme. Si mostri allora che l'insieme delle funzioni che non sono derivabili in nessun punto è un denso (di seconda categoria) in tale spazio.

Problema 8.24.
Si mostri che per ogni $C \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in (0,1)$, l'insieme di funzioni continue
$$W_{C,\alpha} = \Big\{ f \in C([0,1]) \,:\, |f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha \text{ per ogni } x \neq y \Big\}\,,$$
è un chiuso con parte interna vuota nello spazio metrico $C([0,1])$ con la norma uniforme. Si deduca che l'insieme delle funzioni che non sono Hölderiane è un denso (di seconda categoria) in tale spazio.

Problema 8.25. ★
Sia W un sottospazio dello spazio metrico $C([0,1])$ con la norma uniforme tale che tutti i suoi elementi siano funzioni derivabili. Si mostri che la chiusura dell'insieme
$$B_W(1) = \Big\{ f \in W \,:\, \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \le 1 \ \text{ e } \ f(0) = 0 \Big\}$$
è un compatto.

Problema 8.26 (Teorema di Ascoli–Arzelà)**.** ★
Sia K uno spazio metrico compatto e sia S un sottoinsieme di $C(K)$ con la norma uniforme. Si mostri che S è compatto se e solo se è chiuso e consiste di una famiglia di funzioni puntualmente equilimitate ed equicontinue.

Problema 8.27.
Siano $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ e $\sum_{n=0}^\infty g_n(x)$ due serie di funzioni $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$ *totalmente convergenti* (una serie di funzioni $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ si dice totalmente convergente se la serie numerica $\sum_{n=0}^\infty \sup_{x\in X} |f_n(x)|$ converge). Si provi che allora anche le serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^\infty \big(f_n(x) + g_n(x)\big), \qquad \sum_{n=0}^\infty f_n(x) g_n(x), \qquad \sum_{n,m\in\mathbb{N}} f_n(x) g_m(x)$$
convergono totalmente.

Problema 8.28.
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f_n, g_n : E \to \mathbb{R}$ e

- la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ha somme parziali uniformemente limitate in E,
- $g_n(x) \to 0$ uniformemente su E,
- si ha $g_1(x) \geq g_2(x) \geq g_3(x) \geq \dots$ per ogni $x \in E$.

Si provi che allora la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ converge uniformemente su E.

Problema 8.29.
Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{per } n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si mostri che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è assolutamente convergente e uniformemente convergente su $\mathbb{R}$, ma non è totalmente convergente.

Problema 8.30.
Si trovino le discontinuità della funzione f definita dalla serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{nx\}/n^2$$

e si provi che formano un denso numerabile di $\mathbb{R}$ (con $\{\cdot\}$ indichiamo la parte frazionaria di un numero reale).

Problema 8.31.
Si mostri che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} [nx]/n^3$ converge uniformemente su ogni intervallo limitato ad una funzione f continua in ogni punto irrazionale, e tale che se $a = p/q$, con p, q interi primi tra loro e $q > 0$, si ha

$$\lim_{x \to a+} f(x) - \lim_{x \to a-} f(x) = \frac{1}{q^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

(con $[\cdot]$ indichiamo la parte intera di un numero reale).

Problema 8.32.
Si mostri che la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}$$

non può essere differenziata termine a termine.

Problema 8.33.
Si studi la convergenza semplice e uniforme delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

Problema 8.34.
Sia

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0, \\ 1 & \text{per } x > 0, \end{cases}$$

si mostri che se x_n è una successione di punti distinti nell'intervallo (a,b) e se $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ converge, allora la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n I(x - x_n)$$

converge uniformemente in (a,b) e f è continua in tutti i punti $x \notin \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Problema 8.35.
Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} \sin(nx).$$

- Si mostri che la sua somma f è una funzione di classe C^∞.
- Si indichi una procedura per trovare, dati $\varepsilon, R > 0$, un polinomio $P(x)$ tale che $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in [-R, R]$.
- Si determini la funzione f.

Problema 8.36 (Una Curva che Riempie lo Spazio). ★
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $0 \leq f(t) \leq 1$, $f(t+2) = f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \in [0, 1/3], \\ 1 & \text{per } t \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Si ponga $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ dove

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1}t), \qquad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n}t),$$

e si provi che la curva γ è continua e mappa l'intervallo $I = [0,1]$ sul quadrato unitario $I^2 \subset \mathbb{R}^2$ surgettivamente. Più precisamente l'immagine per la curva γ dell'insieme di Cantor è tutto il quadrato unitario del piano euclideo.

Problema 8.37.
Si determini il raggio di convergenza e (se possibile) la funzione somma delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^k x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^k},$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}^*$.

Problema 8.38.
Si consideri la seguente funzione (ipergeometrica):

$$I(a,b,c,z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)\cdot b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!\cdot c(c+1)\dots(c+n-1)} z^n\,,$$

con $a,b,c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0,-1,-2,\dots$ e $z \in \mathbb{C}$.
Si stabilisca il raggio di convergenza e si studi la convergenza assoluta sulla circonferenza del disco di convergenza.

Problema 8.39.
Si determini il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

Si calcoli la somma delle precedenti serie per $x \in \mathbb{R}$, e si deduca che

$$1 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})\,.$$

Problema 8.40.
Si trovi una serie di potenze $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ che risolva l'*equazione di Bessel*

$$xy'' + y' + xy = 0\,.$$

Problema 8.41.
Si determini una serie di potenze $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ che risolva in un intorno di $x = 0$ il problema

$$y' + x^2 y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1\,.$$

Problema 8.42.
Si mostri che la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

soddisfa la relazione $xf'(x) = (x+1)f(x)$.

Problema 8.43.
Si dimostri che esiste una e una sola funzione continua f sull'intervallo $[0,1]$ tale che

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} f(x^2)\,.$$

Si dimostri che f è rappresentabile su $[0,1]$ come somma di una serie di potenze centrata in 0.

Problema 8.44. ★
Una funzione $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, analitica in un intorno di $0 \in \mathbb{R}$, soddisfa sul suo dominio le condizioni

$$\begin{cases} f'(x) = 1 + f(-x)\,, \\ f(0) = a\,. \end{cases}$$

Si determini la funzione f e si provi che la funzione trovata è l'unica funzione derivabile in un intorno di zero del sistema.

Problema 8.45 (Teorema di Stone–Weierstrass)**.** ★
Si mostri che per ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, i polinomi sono densi in $C([a,b])$ con la norma uniforme. Se ne deduca che $C([a,b])$ è uno spazio metrico separabile.

Problema 8.46 (Teorema della Mappa Aperta)**.** ★★
Siano $(V_1, \|\cdot\|_1)$ e $(V_2, \|\cdot\|_2)$ due spazi di Banach, si mostri che una applicazione lineare $A : V_1 \to V_2$ continua e bigettiva ha inversa continua.

Problema 8.47. ★
Sia (X,d) uno spazio metrico completo e $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni continue da X in $\mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in X$, l'insieme $\{f(x) \,:\, f \in \mathcal{F}\}$ sia limitato. Si mostri che esiste un aperto di X su cui le funzioni di $\mathcal{F}$ sono equilimitate.

Problema 8.48 (Principio di Uniforme Limitatezza)**.** ★
Siano $(V_1, \|\cdot\|_1)$ uno spazio di Banach e $(V_2, \|\cdot\|_2)$ uno spazio normato, se una famiglia $\mathcal{F}$ di applicazioni lineari continue tra V_1 e V_2 ha la proprietà che per ogni $x \in X$, l'insieme $\{\|A(x)\|_2 \,:\, A \in \mathcal{F}\}$ è limitato, allora $\mathcal{F}$ è una famiglia di applicazioni Lipschitziane con la stessa costante, in particolare sono equicontinue.

Problema 8.49.
Si discuta la convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}} z^n$ al variare di $a > 0$.

Problema 8.50. ★
Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con $a_n \in \{0,1\}$. Si mostri che il raggio di convergenza è maggiore o uguale a 1 e che se $f(1/2) \in \mathbb{Q}$ allora f è una funzione razionale.

Problema 8.51.
Si trovi il raggio di convergenza e la somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}\,.$$

Problema 8.52.
Si mostri che una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ha raggio di convergenza positivo se e solo se esiste una costante C tale che $|a_n| \leq C^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Problema 8.53.
Date due serie di potenze

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\quad a_n,b_n\in\mathbb{R},$$

con raggio di convergenza rispettivamente R_1 e R_2, si mostri che la serie prodotto secondo Cauchy $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, dove $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$, ha raggio di convergenza $R\geq\min\{R_1,R_2\}$ e si ha $h(z)=f(z)g(z)$ all'interno del disco di convergenza.

Problema 8.54.
Sia $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ una serie di potenze, si mostri che se $a_0\neq 0$ si può trovare una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ tale che il loro prodotto di Cauchy sia la serie identicamente costante uguale a 1. Si mostri che se inoltre la serie $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, con $a_0\neq 0$, ha raggio di convergenza $R>0$ allora anche la serie $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ ha raggio di convergenza positivo e in un intorno di $0\in\mathbb{C}$ vale $g(z)=1/f(z)$.

Problema 8.55.
Date due serie di potenze

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\quad a_n,b_n\in\mathbb{R},$$

con raggio di convergenza rispettivamente $R_1,R_2>0$ e valga $g(0)=0$. Si mostri che la serie di potenze $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, composta formale di f e g, ha raggio di convergenza positivo e vale $h(z)=(f\circ g)(z)$.

Problema 8.56. ★★
Sia $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ una serie di potenze per $x\in\mathbb{R}$, si mostri che se $a_0=0$ e $a_1\neq 0$ si può trovare una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ tale che la loro serie composta formale sia la serie identicamente uguale a x. Si mostri che se inoltre la serie $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ha raggio di convergenza $R>0$ allora anche la serie $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ ha raggio di convergenza positivo e in un intorno di $0\in\mathbb{R}$ vale $g(x)=f^{-1}(x)$.

Problema 8.57. ★★
Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione analitica in un intorno di 0 con raggio di convergenza $R>0$ e tale che $f(0)=0$ e $f'(0)\neq 0$, dal problema precedente segue che allora f ha un'inversa f^{-1} anch'essa analitica in un intorno di zero. Se la funzione f è bigettiva e ha raggio di convergenza $R=+\infty$, anche la funzione f^{-1} ha raggio di convergenza uguale a $+\infty$?

Problema 8.58. ★
Data una successione $a_n\in\mathbb{R}$ tale che $a_n\to 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n-a_{n+1}|$ sia convergente, si dimostri che $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ converge per $|z|\leq 1$, eccetto al più $z=1$ e la convergenza è uniforme in $\big\{z\in\mathbb{C}\,:\,|z|\leq 1,\ |z-1|\geq\delta\big\}$, per ogni $\delta>0$.
Si provi inoltre che $\lim_{z\to 1^-}(1-z)f(z)=0$.

Problema 8.59.
Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ tale che $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$\sup_{x\in[0,1]} |f^{(n)}(x)| \leq n!C\,,$$

per una costante $C \in \mathbb{R}$. Si mostri che $f = 0$ in $[0,1]$.

Problema 8.60.
Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza positivo tale che $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0)$, per $n \in \mathbb{N}$. Si mostri che la funzione definita da $g(x) = f(x)/x^n$ è estendibile in $x = 0$ e tale estensione coincide con una serie di potenze $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Che raggio di convergenza ha tale serie?

Problema 8.61. ★
Si dimostri che se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f^{(n)}(x) \geq 0$, allora la funzione f è analitica.

9. Calcolo Differenziale in più Variabili

Problema 9.1.
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f(x, y) = a + bx + cy + o(\sqrt{x^2 + y^2})\,,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si provi che f è differenziabile nell'origine di $\mathbb{R}^2$ e si dica che differenziale ha.
Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che

$$|f(x, y)| \leq C(x^2 + y^2)\,,$$

per una costante $C \in \mathbb{R}$. Si provi che f è differenziabile nell'origine di $\mathbb{R}^2$ e si dica che differenziale ha.

Problema 9.2.
Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una mappa lineare, si provi che $dL_x = L$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una mappa affine, cioè $f = L+v$ con L lineare e $v \in \mathbb{R}^m$, allora $dL_x = L$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.
Sia $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ una mappa bilineare, cioè $B(\cdot, y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è lineare per ogni $y \in \mathbb{R}^m$ e $B(x, \cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ è lineare per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Si calcoli il suo differenziale in un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Problema 9.3.
Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una mappa lineare e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile infinite volte, si calcoli il differenziale n–esimo di $f \circ L$.

Problema 9.4.
Sia $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ una curva differenziabile a valori nella sfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$ di $\mathbb{R}^n$. Si provi che vale

$$\langle \gamma'(t) \,|\, \gamma(t) \rangle = 0$$

per ogni $t \in (a, b)$.
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una mappa differenziabile in un aperto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ a valori nella sfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$ di $\mathbb{R}^n$. Si provi che vale

$$\langle df_x(v) \,|\, f(x) \rangle = 0$$

per ogni $x \in \Omega$ e $v \in \mathbb{R}^n$.

Problema 9.5.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva continua, differenziabile in (a, b), si mostri con un esempio che il teorema di Lagrange non vale in generale, cioè potrebbe non esistere un punto $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)\,.$$

Si mostri che vale la *disuguaglianza di valor medio*: esiste $\xi \in (a, b)$ tale che

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(\xi)\|\,|b - a|\,.$$

Problema 9.6.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva continua, differenziabile in (a, b), esiste sempre un punto $\xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) = \lambda\big(f(b) - f(a)\big)$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$? Lo stesso vale per una curva in $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^n$? Si può richiedere che la costante λ sia positiva (cioè che il vettore tangente in ξ alla curva abbia lo stesso "verso" del vettore $f(b) - f(a)$)?

Problema 9.7.
Si mostri una curva chiusa $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ differenziabile tale che $\gamma'(t) \neq 0$, per ogni $t \in [a, b]$.

Problema 9.8.
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e $x, y \in \mathbb{R}^n$, si mostri che esiste ξ nell'interno del segmento che unisce x a y tale che

$$f(x) - f(y) = \langle\, \nabla f(\xi) \,|\, x - y \,\rangle \,.$$

In particolare, se $\|\nabla f(x)\| \leq C$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|$$

e la funzione f è Lipschitziana di costante C.

Problema 9.9.
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una mappa differenziabile e $x, y \in \mathbb{R}^n$, si mostri che esiste ξ nell'interno del segmento che unisce x a y tale che

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|df_\xi\|_2 \|x - y\| \,,$$

dove $\|df_\xi\|_2$ indica la norma quadratica della matrice jacobiana in ξ . In particolare, se $\|df_x\|_2 \leq C$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$$

e la mappa f è Lipschitziana di costante C.

Problema 9.10.
Si provi che i risultati dei due problemi precedenti valgono anche se le funzioni sono definite in un convesso aperto di $\mathbb{R}^n$.
Si dica inoltre se in tali problemi la condizione di differenziabilità della funzione f si può sostituire con la sola esistenza delle derivate parziali in ogni punto.

Problema 9.11.
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una mappa differenziabile e $x, y \in \mathbb{R}^n$, sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva affine a tratti (poligonale) con $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$. Se $\|\nabla f(x)\| \leq C$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si mostri che vale

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot L(\gamma) \,,$$

dove $L(\gamma)$ è la lunghezza della curva γ.

Problema 9.12.
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una mappa differenziabile in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, si mostri che se $\|df_x\|_2 \leq C$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, la mappa f è localmente Lipschitziana di costante C.
Si mostri che se una mappa $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è di classe C^1 in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, allora è localmente Lipschitziana.

Problema 9.13.
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione tale che esistano le sue derivate parziali coordinate in ogni punto di un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ e siano tutte limitate in modulo da una costante C. Si mostri che la mappa f è localmente Lipschitziana di costante $C\sqrt{n}$.
Si estenda la conclusione alle mappe $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$.

Problema 9.14.
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione da un aperto connesso in $\mathbb{R}$ tale che esistano le sue derivate parziali coordinate e siano tutte nulle in ogni punto di Ω. si mostri che la funzione f è costante.

Problema 9.15.
Si dia un esempio di un aperto limitato e connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e di una funzione differenziabile $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\|\nabla f(x)\| \leq C$ per ogni $x \in \Omega$, tale che f non sia Lipschitziana.

Problema 9.16.
Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile da un sottoinsieme aperto e non connesso di $\mathbb{R}^n$ con $\|\nabla f(x)\| \leq C$ per ogni $x \in \Omega$, vale la disuguaglianza

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|\,,$$

per ogni $x, y \in \Omega$?

Problema 9.17. ★
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso che soddisfa la seguente condizione: esiste una costante D tale che per ogni due punti $x, y \in \Omega$, definendo $\delta_\Omega(x, y) = \inf L(\gamma)$, dove l'$\inf$ è preso su tutte le curve affini a tratti γ che congiungono x a y e $L(\gamma)$ è la lunghezza di γ, si ha

$$\delta_\Omega(x, y) \leq D\|x - y\|\,.$$

Si provi che allora se per una funzione differenziabile $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si ha $\|\nabla f(x)\| \leq C$ per ogni $x \in \Omega$, tale funzione f è Lipschitziana.

Problema 9.18.
Sia $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, differenziabile in Ω, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Se $f|_{\partial\Omega} = 0$, si provi che esiste $x \in \Omega$ tale che $\nabla f(x) = 0$.

Problema 9.19.
Sia T un triangolo di vertici A, B, C nel piano e $f : T \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in un aperto di $\mathbb{R}^2$ contenente T e tale che $f(A) = f(B) = f(C) = 0$. Esiste sempre un punto $x \in T$ tale che $\nabla f(x) = 0$?

Problema 9.20.
Si studino le proprietà di continuità, Lipschitzianità, differenziabilità, esistenza di derivate parziali in $0 \in \mathbb{R}^2$ delle funzioni $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \text{per } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } f(0,0) = 0,$$

$$g(x,y) = \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \text{per } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } f(0,0) = 0,$$

$$h(x,y) = \frac{x^3y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \text{per } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } f(0,0) = 0.$$

Problema 9.21.
Si dia un esempio di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile dappertutto ma con derivate parziali coordinate non continue in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Problema 9.22.
Si dia un esempio di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che sia C^∞ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, C^∞ su tutte le rette del piano (quindi esistano tutte le derivate parziali anche nell'origine), ma non continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Problema 9.23. ★
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitziana. Fissato $x \in \mathbb{R}^n$, si consideri l'insieme

$$D = \big\{ v \in \mathbb{R}^n \,:\, \text{esiste } \partial_v f(x) \big\}\,.$$

Si mostri che D è chiuso.
Se $D = \mathbb{R}^n$ e la mappa $v \mapsto \partial_v f(x)$ è lineare, si mostri che f è differenziabile in x.

Problema 9.24.
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2}\,,$$

per $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Si mostri che esiste $\partial_v f(0)$ ed è uguale a zero per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, che la mappa $v \mapsto \partial_v f(0)$ è lineare ma che f non è differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$ (f non è Lipschitziana, né continua nell'origine).

Problema 9.25.
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}\,,$$

per $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Si mostri che esiste $\partial_v f(0)$ con $\|\partial_v f(0)\|_{\mathbb{R}^2} \leq 1$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, la mappa f è Lipschitziana ma f non è differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$ (la mappa $v \mapsto \partial_v f(0)$ non è lineare).

Problema 9.26.
Se una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua, differenziabile in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $df_x \to L$ per $x \to 0$, allora f è differenziabile anche nell'origine con $df_0 = L$?

Problema 9.27. ★
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione tale che esistano le sue derivate parziali. Si mostri che se $n-1$ derivate parziali sono continue nell'origine, la funzione f è differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^n$.

Problema 9.28. ★★
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione tale che per ogni curva differenziabile $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ con $\gamma(0) = 0$ si ha che la funzione $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $t = 0$ con derivata nulla. Allora la funzione f è differenziabile nell'origine di $\mathbb{R}^n$ con differenziale nullo? E se la condizione vale solo per le curve C^1, $C^2, \dots, C^\infty$? O solo per le curve parametrizzate in lunghezza d'arco?

Problema 9.29.
Si dia un esempio di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che la derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ esista ma non esista $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Problema 9.30.
Si provi che la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\,,$$

per $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$, soddisfa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1\,.$$

Problema 9.31. ★
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione tale che esistano le sue derivate parziali prime e seconde in Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Si provi che se la derivata seconda mista $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ è continua in $x \in \Omega$, allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\,.$$

Problema 9.32.
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^k nell'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si provi che allora

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial_{j_k}}\,,$$

per ogni permutazione $j_1, j_2, \dots, j_k$ degli indici $i_1, i_2, \dots, i_k$.
Quante sono le possibili derivate parziali di ordine k distinte della funzione f?

Problema 9.33.
Si trovino tutte le funzioni differenziabili $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che df_x sia costante, per $x \in \mathbb{R}^n$.

Problema 9.34.
Si trovino tutte le funzioni differenziabili $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$.
Si trovino tutte le funzioni due volte differenziabili $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tali che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.
Si trovino tutte le funzioni due volte differenziabili $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tali che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$.

Problema 9.35.
Si caratterizzino le funzioni differenziabili $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tali che

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,,$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Si caratterizzino le funzioni differenziabili $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tali che

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\,,$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Problema 9.36 (Teorema di Eulero)**.**
Una funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che esista $n \in \mathbb{N}$ tale che valga $F(tx,ty) = t^n F(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $t > 0$ si dice (*positivamente*) *omogenea* di grado n.
Si mostri che se la funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è omogenea di grado n, si ha

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = nF(x,y)\,,$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Problema 9.37 (Laplaciano – Funzioni Armoniche)**.**
Data una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, si definisce il suo *Laplaciano* $\Delta u : \Omega \to \mathbb{R}$ come

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x)\,.$$

Una funzione che soddisfi $\Delta u = 0$ (*equazione di Laplace*) in Ω si dice *armonica*.
Si trovi per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}\,,$$

con $n \neq 2$, è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Si mostri una funzione armonica dipendente solo da $\|x\|$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Problema 9.38.
Si trovino tutte le funzioni armoniche dipendenti solo da $\|x\|$ su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Problema 9.39.
Si calcoli il Laplaciano della funzione $f(x,y) = \arctan(x/y)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$.

Problema 9.40.
Data una funzione armonica in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si trovino tutte le funzioni $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ tali che $\varphi \circ u$ sia ancora armonica.

Problema 9.41.
Si calcoli il Laplaciano di una funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in coordinate polari.
Si mostri che se $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'isometria, si ha $\Delta(u \circ \phi) = \Delta u \circ \phi$.

Problema 9.42 (Equazione del Calore)**.**
Una funzione $u : \Omega \times (a, b) \to \mathbb{R}$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, soddisfa l'*equazione del calore* se

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t)\,,$$

per ogni $x \in \Omega$ e $t \in (a, b)$.
Si mostri che la funzione

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{n/2}}\, e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$$

soddisfa l'equazione del calore in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ (questa funzione è detta *nucleo del calore* in $0 \in \mathbb{R}^n$).

Problema 9.43 (Equazione della Corda Vibrante)**.** ★
Una funzione $u : \mathbb{R} \times (a, b) \to \mathbb{R}$, soddisfa l'*equazione della corda vibrante* se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x,t)\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $t \in (a, b)$, dove c è una costante reale diversa da zero.
Si mostri che date due funzioni $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, la funzione

$$u(x,t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

soddisfa l'equazione della corda vibrante in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ci sono altre soluzioni?

Nota. *La versione n–dimensionale di questa equazione è l'*equazione delle onde *(detta anche* equazione di d'Alembert*). Una funzione $u : \Omega \times (a, b) \to \mathbb{R}$ la soddisfa se*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \Delta u(x,t)\,,$$

per ogni $x \in \Omega$ e $t \in (a, b)$, dove c è una costante reale diversa da zero.

Problema 9.44. ★
Si provi che tutte le soluzioni $u : \mathbb{R} \times (a, b) \to \mathbb{R}$ di classe C^2 dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + x \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

hanno la forma

$$u(x,t) = f(xe^t) + g(xe^{-t})\,,$$

dove f, g sono due funzioni in $C^2(\mathbb{R})$.

Problema 9.45. ★
Una funzione $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soddisfa nel punto (x_0, y_0) le *equazioni di Cauchy–Riemann* se è differenziabile in (x_0, y_0) e si ha

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0)\,.$$

Si provi che allora, vedendo f come una mappa da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, posto $z_0 = x_0 + iy_0$, esiste il limite (derivata complessa di f in z_0)

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ed è uguale a $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0)$. Si mostri che vale anche il viceversa e si provi che soddisfare le equazioni di Cauchy–Riemann è equivalente al fatto che il differenziale della funzione f in (x_0, y_0), visto come una funzione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, è $\mathbb{C}$–lineare.
Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, vista come una mappa da un aperto Ω di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, che soddisfi le equazioni di Cauchy–Riemann in ogni punto di Ω, si dice *olomorfa* (o *analitica*) in Ω.

Problema 9.46. ★
Si mostri che la famiglia delle funzioni olomorfe in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale, chiuso per prodotto e che se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa e mai nulla, anche $1/f$ lo è. Si mostri inoltre che per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f(z) = z^n$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$, quindi anche ogni polinomio $p \in \mathbb{C}[z]$.

Problema 9.47. ★
Si mostri che se una funzione olomorfa in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ ha derivata complessa in $z_0 \in \Omega$ diversa da zero, allora è localmente invertibile in un intorno di z_0 e la sua inversa è olomorfa.

Problema 9.48.
Si mostri che se $f = (f_1, f_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ è una funzione C^2 ed olomorfa, le due componenti f_1 e f_2 sono funzioni armoniche.
Tali funzioni f_1 e f_2 si dicono *armoniche coniugate*.

Problema 9.49 (Principio del Massimo per Funzioni Armoniche)**.**
Sia $u : \overline{B} \to \mathbb{R}$ una funzione continua da una palla chiusa $\overline{B}$ di $\mathbb{R}^n$ armonica nell'interno B.

- Supponendo che u prenda massimo in $x_0 \in B$ e che tale massimo sia maggiore del massimo di u ristretta al bordo ∂B della palla, si mostri che per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, le funzioni $u_\varepsilon : \overline{B} \to \mathbb{R}$ definite da $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon\|x - x_0\|^2$, per ogni $x \in \overline{B}$, assumono massimo in un punto x_0^ε all'interno della palla.
- Si mostri che $\Delta u_\varepsilon = \Delta u + 2\varepsilon = 2\varepsilon > 0$ in ogni punto di B.
- Si provi che $\Delta u_\varepsilon(x_0^\varepsilon) \leq 0$ in contraddizione col punto precedente.

Si concluda che per una funzione armonica $u : \overline{B} \to \mathbb{R}$ vale
$$\min_{\partial B} u \leq u(x) \leq \max_{\partial B} u$$
e che se due funzioni armoniche coincidono sul bordo di una palla allora coincidono anche all'interno.

Problema 9.50.
Dati $a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{R}^n$ si trovi il minimo (si dica se esiste e se è unico) della funzione
$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \|x - a_i\|^2 .$$

Problema 9.51.
Si mostri che l'ipotesi di continuità del differenziale è necessaria nel teorema della funzione inversa, anche nel caso unidimensionale.
Si consideri la funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$
$$f(x) = x + 2x^2 \sin(1/x) ,$$
per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, si ha $f'(0) = 1$, la derivata f' è limitata in $(-1, 1)$ ma non è invertibile in alcun intorno di $0 \in \mathbb{R}$.

Problema 9.52.
Si enunci/provi un analogo n–dimensionale della formula/teorema di Taylor per una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^k nell'intorno di un punto $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
Si usi tale formula per definire una procedura di analisi dei punti critici di una funzione nella situazione in cui in un punto del dominio di definizione sia il gradiente che tutte le derivate seconde di una funzione sono nulli.

Problema 9.53.
Si mostri che se C è un convesso compatto di $\mathbb{R}^n$ e $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una mappa lineare, il massimo e il minimo di L sono presi sul bordo di C (non necessariamente *solo* sul bordo).

Problema 9.54.
Si mostri che se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e armonica in Ω, il massimo e il minimo di f sono presi sul bordo di Ω (non necessariamente *solo* sul bordo).
Si mostri che se due funzioni armoniche in Ω e continue in $\overline{\Omega}$, coincidono su $\partial\Omega$, allora sono uguali in tutto Ω.

Nota. *In realtà vale il* principio del massimo forte *che dice che se una funzione armonica $f : \Omega \to \mathbb{R}$ assume massimo (anche locale) in un punto interno a Ω, allora è costante in tutta la componente connessa di tale punto.*

Problema 9.55.
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ due funzioni di classe C^1. Sia $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da
$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)) ,$$

si mostri che

$$dh(x) = df(g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)) \circ \begin{pmatrix} g_1'(x_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_n'(x_n) \end{pmatrix}.$$

Problema 9.56.
Sia mostri che il teorema della funzione implicita implica il teorema della funzione inversa e viceversa.

Problema 9.57. ★
Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}^m$, con $m \leq n$, una funzione di classe C^k. Sia $x_0 \in A$ con $f(x_0) = 0$ e il rango di df_{x_0} uguale a m, si provi che esistono due intorni U e V di x_0 e una mappa $h : U \to V$ di classe C^k con inversa h^{-1} di classe C^k tale che $f(h(x_1, x_2, \dots, x_n)) = (x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n)$ per ogni $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$.

Problema 9.58. ★
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $m \leq n$, una funzione di classe C^k tale che il rango di df_{x_0} uguale a m. Si provi che un intorno di x_0 è mandato dalla mappa f in un intorno di $f(x_0)$.

Problema 9.59. ★
Sia $GL(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici $n \times n$ invertibili, con la metrica indotta da $\mathbb{R}^{n \times n}$ (si mostri che $GL(n, \mathbb{R})$ ẽ un aperto in $\mathbb{R}^{n \times n}$ con tale metrica). Si dica se le seguenti mappe da $GL(n, \mathbb{R})$ in sé o in $\mathbb{R}$ sono differenziabili e, possibilmente, se ne calcoli il differenziale:

$$A \mapsto A^2, \qquad A \mapsto A^{-1}, \qquad A \mapsto \|A\|_2,$$
$$A \mapsto \|A\|_2^2, \qquad A \mapsto \det A, \qquad A \mapsto \operatorname{traccia} A.$$

Problema 9.60.
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con $\nabla f \neq 0$ in ogni punto dove f si annulla. Si mostri che allora $\{f = 0\}$ è l'unione disgiunta di una famiglia al più numerabile di sostegni di curve semplici $\gamma_n : I_n \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1, con $I_n = (0, 1)$ oppure $I_n = \mathbb{S}^1$.

Problema 9.61.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto e siano $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che in $x_0 \in \Omega$ si abbia $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e $\nabla f(x_0)$ e $\nabla g(x_0)$ siano linearmente indipendenti. Si mostri che l'insieme $\{x \in \Omega \,:\, f(x) = 0\} \cap \{x \in \Omega \,:\, g(x) = 0\}$ è una curva di classe C^1 in un intorno di x_0 in Ω.

Problema 9.62.
Sia trovi, usando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, tra tutti i triangoli inscritti in un cerchio, quello di area massima.

Problema 9.63. ★
Sia $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^2$, dove $\overline{B}$ è la palla unitaria chiusa di $\mathbb{R}^2$, una funzione C^1 fino al bordo tale che $\|f(x)\| = 1$ per ogni $x \in \overline{B}$, in altre parole f è una funzione da $\overline{B}$ in $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, inoltre si abbia che $f(x) = x$, se $x \in \partial B = \mathbb{S}^1$.

Diciamo che $x \in \overline{B}$ è un punto *regolare* se df_x ha rango 1, *singolare* se $df_x = 0$. Diciamo che $y \in \mathbb{S}^1$ è un *valore regolare* se non è immagine per f di alcun punto singolare.

- Si mostri che se $y \in \mathbb{S}^1$ è un valore regolare allora $f^{-1}(y)$ è l'unione disgiunta di una famiglia *finita* di curve chiuse semplici di classe C^1, contenute in B e di una famiglia di archi semplici di classe C^1 con estremi in $y \in \mathbb{S}^1$.
- Si provi che se un arco di curva C^1 ha estremi in $y \in \mathbb{S}^1$, allora il punto y non può essere un punto regolare, di conseguenza nemmeno un valore regolare in quanto $f(y) = y$.
- Si mostri che l'insieme dei valori regolari è denso in $\mathbb{S}^1$.
- Si concluda che una siffatta funzione f non esiste.

Problema 9.64. ★
Sia $f : \overline{B} \to \overline{B}$ una funzione C^1 fino al bordo.
Si mostri che se f non ha punti fissi, allora si può costruire una funzione $g : \overline{B} \to \mathbb{S}^1$ di classe C^1 tale che ristretta al bordo $\partial\overline{B} = \mathbb{S}^1$ sia l'identità.
Si concluda che ogni funzione C^1 da una palla chiusa di $\mathbb{R}^2$ in sé ha almeno un punto fisso.

Problema 9.65.
Si mostri, (per approssimazione) usando il risultato del problema precedente, che *ogni funzione continua da una palla chiusa di $\mathbb{R}^2$ in sé ha almeno un punto fisso* (teorema di Brouwer in dimensione 2 – vale in realtà in ogni dimensione).

10. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Problema 10.1.
Sia I un intervallo chiuso e limitato e sia $f : I \to I$ una funzione continua. Si dimostri che f ha almeno un punto fisso. La conclusione vale anche per intervalli non limitati o non chiusi?

Problema 10.2.
Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitziana di costante di Lipschitz minore di 1. Si provi che f ha un punto fisso.

Problema 10.3.
Si costruisca una applicazione 1–Lipschitziana di uno spazio metrico compatto in sé che non ha punti fissi.

Problema 10.4.
Si mostri che esiste una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, con $x \neq y$, si ha

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

ma f non ha punti fissi.

Problema 10.5. ★
Sia (K, d) uno spazio metrico compatto e sia $f : K \to K$ una funzione tale che per ogni $x, y \in K$ si ha

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)\,.$$

Si mostri che f ammette un unico punto fisso $\overline{x}$ e che per ogni $x \in K$ la successione per ricorrenza delle iterate, $x_{n+1} = f(x_n)$ con $x_0 = x$, converge a $\overline{x}$.
La mappa f è necessariamente una contrazione?

Problema 10.6. ★
Si mostri che esiste una funzione f da uno spazio metrico completo (X, d) in sé tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq \frac{1}{2}[d(x, y)]^{\alpha}\,,$$

con $\alpha < 1$, ma f non ha punti fissi.
Si provi però che tale controesempio non si può esibire se lo spazio metrico è $\mathbb{R}$, cioè una tale funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha almeno un punto fisso (vale anche in $\mathbb{R}^n$ ma la dimostrazione richiede strumenti più complessi).

Problema 10.7.
Sia f una funzione continua da una palla centrata nell'origine di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$. Si mostri che l'equazione $f(x) = f(-x)$ ha infinite soluzioni.

Problema 10.8.
Si mostri che non esistono funzioni continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(f(x)) = -x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Esistono funzioni continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(f(x)) = x$ diverse da $f(x) = \pm x$? E dall'intervallo $[0, 1]$ in sé?

Problema 10.9. ★
Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ una funzione continua tale che per ogni $x \in [0,1]$ si ha $f(f(\dots(x)\dots)) = x$ (un numero dispari di volte), allora vale $f(x) = x$?

Problema 10.10. ★
Siano $f, g : [0,1] \to [0,1]$ due funzioni continue tali che $f(g(x)) = g(f(x))$ per ogni $x \in [0,1]$. Si provi che allora esiste $y \in [0,1]$ tale che $f(y) = g(y)$.

Problema 10.11.
Sia $f : [a,b] \to [a,b]$ una funzione crescente e sia $A = \{x \in [a,b] \,:\, f(x) \geq x\}$. Si dimostri che $S = \sup A$ è un punto fisso per f.

Problema 10.12.
Sia f continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ tale che esista la funzione inversa f^{-1} e sia $f = f^{-1}$. Si mostri che esiste almeno un punto fisso per f (cioè una soluzione dell'equazione $f(x) = x$). Se inoltre f è crescente, allora tutti i punti sono fissi per f, cioè f è la funzione identità.

Problema 10.13.
Sia $f \in C([a,b])$, derivabile in (a,b) con $f(a) = 0$ ed esista $C > 0$ tale che

$$|f'(x)| \leq C|f(x)| \quad \text{per ogni} \quad x \in (a,b)\,.$$

Si mostri che $f \equiv 0$.

Problema 10.14 (Lemma di Gronwall "integrale")**.**
Siano $f, u \in C([a,b])$ con $u \geq 0$, si provi che se vale

$$f(x) \leq A + \int_a^x f(t)u(t)\,dt\,,$$

per una costante non negativa $A \in \mathbb{R}$, allora si ha

$$f(x) \leq Ae^{\int_a^x u(t)\,dt}\,.$$

Si mostri che questo risultato implica il Lemma di Gronwall "differenziale".
Cosa si può concludere se invece di essere costante, A è una funzione continua $A(x)$?

Problema 10.15.
Si dimostri con metodi elementari che e^x è l'unica funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto tale che

$$u' = u, \quad u(0) = 1\,.$$

Problema 10.16.
Supponendo di non conoscere le proprietà delle funzioni seno e coseno, si provi che l'unica funzione $u \in C^2(\mathbb{R})$ che soddisfa

$$u'' + u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1\,,$$

verifica la relazione $u'^2 + u^2 = 1$, è periodica e che per u e u' valgono le formule di addizione del seno e coseno.

Problema 10.17.
Sia $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ tale che

$$\begin{cases} u''(t) = u^7(t) & \text{per ogni } t \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0\,. \end{cases}$$

Si provi che allora $u = 0$.

Problema 10.18.
Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione C^2 tale che $f(0) = f(1) = 0$ e $f'(x) = f(x)f''(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$. Si provi che la funzione f è identicamente nulla.

Problema 10.19.
Si discutano le proprietà delle funzioni $y = y(x)$ con $y(0) = a$, definite in un intorno dell'origine, tali che $y' \geq y^2$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.
Si faccia lo stesso per le funzioni che soddisfano $y' \leq y^2$.

Problema 10.20.
Una equazione differenziale ordinaria in forma normale $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1})$ si dice *autonoma* se la funzione f non dipende dalla variabile x. Si mostri che se $y = y(x)$ è una soluzione, anche $z = z(x) = y(x + c)$ è una soluzione, per ogni $c \in \mathbb{R}$ (invarianza per traslazione).
Nel caso speciale $y'' = f(y)$, se la funzione F è una primitiva della funzione f, si mostri che per ogni soluzione, la quantità $|y'|^2/2 - F(y)$ è costante.
Nel caso speciale $y' = f(y)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$, se $f(a) = 0$ si diano condizioni su f tali che per ogni soluzione $y = y(x)$ definita su un intervallo illimitato a destra di $\mathbb{R}$ si abbia $\lim_{x\to+\infty} y(x) = a$.

Problema 10.21. ★
Si provi che se la funzione continua $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è limitata e localmente Lipschitziana nella seconda variabile oppure non limitata ma uniformemente Lipschitziana nella seconda variabile, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0\,, \end{cases}$$

ha esistenza globale nell'intervallo I per ogni dato iniziale y_0.
Si discuta l'esistenza globale nel caso di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che valga, per ogni x, y, y',

$$|f(x, y) - f(x, y')| \leq h(x)|y - y'|$$

dove $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, non negativa.

Problema 10.22. ★
Sullo spazio delle funzioni continue $y : [x_0, a] \to \mathbb{R}$ definiamo la norma

$$\|y\|_{C,L} = \sup_{x\in[x_0,a]} e^{-CL(x-x_0)}|y(x)|\,.$$

Si mostri che $C([x_0, a])$ è uno spazio di Banach con questa norma.
Sia $f : [x_0, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e uniformemente Lipschitziana nella seconda variabile

con costante L. Si mostri che scegliendo una costante C abbastanza grande, l'operatore T da $C([x_0, a])$ in sé definito da

$$T(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt\,,$$

per ogni $y \in C([x_0, a])$, è una contrazione se si considera su $C([x_0, a])$ la norma $\|\cdot\|_{C,L}$.
Di conseguenza, esiste una soluzione globale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0\,, \end{cases}$$

in tutto l'intervallo $[x_0, a]$.
Si provi ad estendere questo argomento al caso di intervalli illimitati.

Problema 10.23 (Dipendenza continua dai dati)**.** ★
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione globalmente Lipschitziana e limitata e siano $x_0, y_0, x \in \mathbb{R}$, definiamo $F(f, x_0, y_0, x) \in \mathbb{R}$ come segue: sia $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione (globalmente definita) del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0\,, \end{cases}$$

e poniamo $F(f, x_0, y_0, x) = y(x)$.
È quindi definita una funzione $F : \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dove $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2)$ è lo spazio (di Banach) delle funzioni Lipschitziane e limitate in $\mathbb{R}^2$ con la norma

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|f\|_\infty + \sup_{z,w \in \mathbb{R}^2} \frac{|f(z) - f(w)|}{\|z - w\|}\,.$$

Si provi che la funzione F è continua.
Si enunci una versione "locale" di questo risultato.
Nel caso che la funzione f sia in $C^1(\mathbb{R}^2)$ con derivate parziali limitate e Lipschitziane, si provi ad esprimere le derivate parziali della funzione F nelle tre variabili reali.

Problema 10.24. ★
Sia $f : [0, a) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, non negativa e nulla solo nell'origine (non Lipschitziana). Si provi che se l'integrale improprio $\int_0^a \frac{dx}{f(x)}$ è divergente, allora l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 0\,, \end{cases}$$

è la funzione nulla sull'intervallo $[0, a)$.

Problema 10.25.
Si dica se esistono funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f'(x) = \frac{1}{f(x)}\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed eventualmente si determinino.

Problema 10.26.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f'(x) = \arctan f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si mostri che:

- se f si annulla in un punto, allora si annulla in tutti i punti,
- se $f(0) > 0$ allora
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Problema 10.27.
Si studino le proprietà delle soluzioni (massimali) dei seguenti problemi di Cauchy, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$:
$$y' = 1 + y^2 \qquad y(0) = 0\,,$$
$$y' = xe^{y^2} \sin y \qquad y(0) = 1\,,$$
$$y' = \frac{2(y-1)}{x(x^2+2x+2)} \qquad y(1) = a\,,$$
$$y' = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{y}{x}\Big)^a + \frac{y}{x} \qquad y(1) = 0\,.$$

Problema 10.28.
Si studino le proprietà delle soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:
$$y' = y - x\,,$$
$$y' = x\Big(1 + \frac{1}{y}\Big) \qquad \text{per } x \neq 0\,,$$
$$y' = 4y(1-y)\,,$$
$$xy' + y = x \arctan x\,,$$
$$y' = 2 - \frac{y^2}{x^2}\,.$$

Problema 10.29.
Si determini il più esplicitamente possibile la soluzione massimale del seguente problema di Cauchy:
$$y' = 1 + 2yx \qquad y(0) = 1\,.$$

Problema 10.30.
Si dica se la seguente equazione differenziale ammette soluzioni periodiche per $\alpha \in \mathbb{R}^+$,
$$y' + \frac{\alpha}{x} y = \sin x$$

Problema 10.31 (Equazioni di Riccati)**.**
Siano $p, q, r \in C(I)$ con $I \in \mathbb{R}$ un intervallo, le seguenti equazioni differenziali ordinarie si dicono di *equazioni di Riccati*,
$$y'(x) + p(x)y = q(x)y^2(x) + r(x)\,.$$

Si mostri che se y è una soluzione, le altre soluzioni sono della forma $z = y + u$ dove u è una soluzione dell'equazione di Bernoulli
$$u'(x) + [p(x) - 2y(x)q(x)]u(x) = q(x)u^2(x)\,.$$
Si studi inoltre l'equazione soddisfatta dalla funzione z supponendo che $y + 1/z$ sia un'altra soluzione.
Si cerchino le soluzioni dell'equazione
$$(1 + x^2)y'(x) - xy(x) + y^2(x) = 1 + x^2\,,$$
cercando inizialmente una soluzione affine.

Problema 10.32 (Equazioni di Clairaut)**.**
Sia $f \in C^1(I)$ con $I \in \mathbb{R}$ un intervallo, le seguenti equazioni differenziali ordinarie si dicono di *equazioni di Clairaut*,
$$y(x) = xy'(x) + f(y'(x))\,.$$
Si derivi l'equazione e si discutano le possibili soluzioni.
Si cerchino le soluzioni delle equazioni
$$y(x) = xy'(x) + [y'(x)]^2 \quad \text{e} \quad y(x) = xy'(x) + [y'(x)]^3\,.$$

Problema 10.33 (Equazioni di D'Alembert–Lagrange)**.** ★★
Siano $f, g \in C^1(I)$ con $I \in \mathbb{R}$ un intervallo, le seguenti equazioni differenziali ordinarie si dicono di *equazioni di D'Alembert–Lagrange*,
$$y(x) = xf(y'(x)) + g(y'(x))\,.$$
Si derivi l'equazione e si manipoli il risultato per ottenere un'equazione più semplice, assumendo che la funzione $y'(x)$ sia invertibile, cioè si possa scrivere $x = x(y')$.
Si cerchino le soluzioni delle equazioni
$$y(x) = x[y'(x)]^2 + [y'(x)]^2 \quad \text{e} \quad y(x) = x[y'(x)]^2 + [y'(x)]^3\,.$$

Problema 10.34 (Equazioni "esatte")**.**
Siano $A, B \in C^1(\Omega)$ con $\Omega \in \mathbb{R}^2$ aperto. Si consideri l'equazione differenziale ordinaria
$$A(x, y(x)) + B(x, y(x))y'(x) = 0\,,$$
supponendo che esista una funzione $F \in C^2(\Omega)$ tale che
$$\frac{\partial F}{\partial x} = A \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = B\,,$$
si provi che il grafico (connesso) di ogni soluzione è contenuto in un insieme di livello della funzione F.
Si osservi che una condizione necessaria per l'esistenza di una tale funzione F è
$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}\,,$$
per il teorema di Schwarz. Tale condizione è anche sufficiente?

Problema 10.35.
Siano $a, b \in C(I)$ con $I \in \mathbb{R}$ un intervallo, supponendo di conoscere una soluzione y_1 della seguente equazione differenziale lineare

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0\,,$$

si mostri che si puó cercarne un'altra, linearmente indipendente da y_1, abbassando il grado dell'equazione, considerando le possibili soluzioni $y_2 = vy_1$.
Si cerchino le soluzioni dell'equazione (equazione di Legendre)

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0\,,$$

osservando che $y_1(x) = x$ è una soluzione.
Si cerchino le soluzioni dell'equazione (equazione di Bessel)

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 1/4)y(x) = 0\,,$$

osservando che $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ è una soluzione.

Problema 10.36.
Sia $f \in C(I)$ con $I \in \mathbb{R}$ un intervallo, si mostri che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = f \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione data da

$$y(x) = \int_0^x f(t)\sin(x - t)\,dt\,.$$

Problema 10.37. ★★
Si discuta l'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con f solo continua in un intorno del punto $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^2$, secondo le seguenti possibili linee:

(1) approssimando la funzione f con funzioni Lipschitz o C^1, risolvendo l'equazione corrispondente e cercando di passare al limite nelle soluzioni ottenute;
(2) costruendo una successione di funzioni affini a tratti che soddisfa l'equazione nei punti di bordo dei sottointervalli dove ogni funzione è affine (considerando la derivata destra invece che la derivata), eventualmente convergente ad una soluzione del sistema.

Problema 10.38.
Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ (o in $M_n(\mathbb{C})$) definiamo il suo esponenziale e^A come la serie

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\,.$$

Si mostri che tale serie converge per ogni matrice A e che si ha

$$e^A = \lim_{n\to\infty}\Big(Id + \frac{A}{n}\Big)^n .$$

Si provi a definire le altre funzioni "elementari" sulle matrici usando le serie di potenze e si discuta il loro dominio di definizione e le loro proprietà.

Problema 10.39.
Si mostri che se A è invertibile si ha $e^{ABA^{-1}} = Ae^B A^{-1}$.

Problema 10.40. ★
Si provi che se due matrici A e B commutano, si ha $Ae^B = e^B A$ e vale la formula

$$e^{A+B} = e^A e^B .$$

Si diano esempi in cui tale formula non vale se A e B non commutano.
Si concluda che la matrice e^A è sempre invertibile e la sua inversa è e^{-A}.

Problema 10.41. ★
Si provi che $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

Problema 10.42.
Sia consideri il seguente sistema autonomo di equazioni differenziali (bidimensionale)

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

dove $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Una soluzione massimale $t \mapsto (x(t), y(t))$ si dice anche *orbita* del sistema.
Un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si dice *punto critico* o *stazionario* se $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$, *isolato* se non ve ne sono altri in un suo intorno.
Un punto critico $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si dice *stabile* se per ogni suo intorno U esiste un altro suo intorno $V \subseteq U$ tale che se una soluzione $(x(t), y(t))$ "entra" in V non può più uscire da U, precisamente, se al tempo $t_0 \in \mathbb{R}$ si ha $(x(t_0), y(t_0)) \in V$, allora per ogni $t \geq t_0$ si ha $(x(t), y(t)) \in U$.
Un punto critico si dice *instabile* se non è stabile.
Un punto critico (x_0, y_0) si dice *asintoticamente stabile* se è stabile e esiste un suo intorno U tale che se una soluzione $(x(t), y(t))$ "entra" in U, allora tende a (x_0, y_0) asintoticamente, precisamente se al tempo $t_0 \in \mathbb{R}$ si ha $(x(t_0), y(t_0)) \in U$, allora si ha $\lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$.
Si provi che una soluzione non può "passare" per un punto critico, a meno che non sia la soluzione costante "ferma" in tale punto.
Si discuta e si cerchi di disegnare la struttura delle orbite dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x - y \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = -x \\ y' = y - x \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = x^2 \\ y' = y(2x - y) \end{cases},$$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y^2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = y^2 \\ y' = x \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = -xy \\ y' = x^2 + y^2 \end{cases},$$

attorno al loro punto critico isolato $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Problema 10.43. ★★
Sia consideri il seguente sistema autonomo di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

e si studino le orbite attorno al punto critico nell'origine di $\mathbb{R}^2$, mettendone la struttura in relazione con gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Si studi, ad esempio, il seguente sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + y/2 \\ y' = 2x - 2y \end{cases} .$$

Problema 10.44. ★★
Si studi (trasformandola in un sistema lineare del prim'ordine) la seguente equazione (*oscillatore smorzato*):

$$mu'' + \mu u' + ru = 0\,,$$

in dipendenza dei parametri m, μ, r.

Problema 10.45. ★★
Sia consideri il seguente sistema autonomo di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

con $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $f(0,0) = g(0,0) = 0$, supponendo che l'origine sia un punto critico isolato del sistema.
Si studino le orbite attorno al punto critico nell'origine di $\mathbb{R}^2$, cercando di metterne la struttura in relazione con la struttura delle orbite del sistema lineare (detto *linearizzato*)

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

dove

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \quad c = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0), \quad d = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\,.$$

Si considerino, ad esempio, i seguente sistemi:

$$\begin{cases} x' = -x - 1 + e^{\alpha y} \\ y' = e^{x-y} - 1 \end{cases} ,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ky - \frac{g}{l}\sin x \end{cases} ,$$

dove $k, g, l \in \mathbb{R}^+$ (pendolo smorzato).

Problema 10.46. ★
Si studi il seguente sistema autonomo di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -x - \frac{y}{\log r} \\ y' = -y + \frac{x}{\log r} \end{cases},$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si verifichi che il comportamento delle sue orbite nell'intorno dell'origine di $\mathbb{R}^2$ è diverso dal comportamento delle orbite del suo sistema linearizzato.

Problema 10.47.
Data l'equazione $x'' + \varphi(x, x') = 0$ con $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, si trasformi tale equazione in un sistema di due equazioni differenziali del prim'ordine e si verifichi che i suoi punti critici sono i punti $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\varphi(x_0, 0) = 0$.
Ovviamente, per ogni tale $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha che $x(t) = x_0$ è una soluzione costante dell'equazione.
Si mostri che il linearizzato del sistema ottenuto in tali punti critici $(x_0, 0)$ corrisponde alla trasformazione in sistema dell'equazione lineare

$$x'' + \partial_y\varphi(x_0, 0)x' + \partial_x\varphi(x_0, 0)(x - x_0) = 0\,,$$

detta *linearizzazione* dell'equazione originaria attorno alla soluzione costante $x(t) = x_0$.

Problema 10.48.
Dato un sistema autonomo di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

con $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, una funzione U differenziabile in un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$ si dice un *integrale primo* del sistema se, escludendo i punti critici del sistema, il suo gradiente non è mai nullo e per ogni soluzione $(x(t), y(t))$ in Ω si ha che $U(x(t), y(t))$ costante.
Le curve di livello della funzione U (che se è almeno C^1 sappiamo essere localmente delle curve, dal teorema della funzione implicita) si dicono allora curve integrali del sistema.
Si mostri che se un'orbita interseca una curva integrale, allora vi è interamente contenuta e che ogni curva integrale è unione disgiunta di orbite.
Si provi che in ogni punto $(x, y) \in \Omega$ il gradiente di un integrale primo U è ortogonale al vettore di $\mathbb{R}^2$ di componenti $f(x, y)$ e $g(x, y)$. Viceversa, si mostri che una funzione che soddisfi questa proprietà e abbia gradiente non nullo fuori dai punti critici del sistema è un integrale primo.

Problema 10.49. ★
Si determini un integrale primo del sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 - x \end{cases}$$

e se ne descrivano le curve di livello.

Problema 10.50. ★
Si provi che se $U \in C^1(\Omega)$ è un integrale primo di un sistema e l'insieme di livello $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, U(x,y) = c\}$ è una curva chiusa che non contiene punti critici del sistema, allora Γ è un'orbita periodica, cioè ogni soluzione $(x(t), y(t))$ con un punto in comune con Γ è periodica e "percorre" tutto Γ.

Problema 10.51.
Si determinino integrali primi dei seguenti sistemi,

$$\begin{cases} x' = x(1+y) \\ y' = -y(1+x) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = x(xe^y - \cos y) \\ y' = \sin y - 2xe^y \end{cases},$$

$$\begin{cases} x' = y - x^2y - y^3 \\ y' = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = 2x^2y \\ y' = x(1+y^2) \end{cases},$$

e si cerchi di disegnarne gli insiemi di livello.

Problema 10.52.
Si studino i seguenti sistemi di equazioni differenziali con particolare attenzione agli integrali primi:

$$\begin{cases} x' = 2y(y-2x) \\ y' = (1-x)(y-2x) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = x - xy \\ y' = xy - y \end{cases}.$$

Problema 10.53. ★
Si studi la seguente equazione di *Van der Pol*:

$$x'' - \mu(1-x^2)x' + x = 0\,,$$

dove $\mu > 0$.

LIBRI UTILI O PER APPROFONDIRE

[1] E. Acerbi, L. Modica, S. Spagnolo, *Problemi scelti di analisi matematica I*, Liguori Editore, 1985.
[2] A. Bruckner, *Differentiation of real functions*, CRM Monograph Series, vol. 5, AMS, 1994.
[3] F. Conti, *Calcolo. Teoria e applicazioni*, McGraw–Hill, 1993.
[4] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.
[5] B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Holden–Day, 1964.
[6] P. R. Halmos, *Naive set theory*, D. Van Nostrand Co., 1960.
[7] J. L. Kelley, *General topology*, D. Van Nostrand Co., 1955.
[8] A. B. Kharazishvili, *Strange functions in real analysis*, Pure and Applied Mathematics, vol. 272, Chapman & Hall/CRC, 2006.
[9] J. E. Marsden, *Elementary classical analysis*, W. H. Freeman and Co., 1974.
[10] L. C. Piccinini, G. Stampacchia, G. Vidossich, *Equazioni differenziali ordinarie in* $\mathbb{R}^n$ *(problemi e metodi)*, Liguori Editore, 1978.
[11] G. Prodi, *Analisi matematica*, Bollati Boringhieri, 1972.
[12] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw–Hill, 1976.
[13] L. A. Steen, J. A. Seebach Jr., *Counterexamples in topology*, Holt, Rinehart and Winston, 1970.

CARLO MANTEGAZZA
E-mail address: c.mantegazza@sns.it