ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA

CARLO MANTEGAZZA

Eventuali commenti, suggerimenti e segnalazioni di errori sono graditi.
I problemi con un asterisco sono i più difficili.

Alcuni testi con vari esercizi e problemi sono:

- W. Rudin – *Real and Complex Analysis* (ne esiste anche una versione in italiano, *Analisi Reale e Complessa*).
- W. Rudin – *Principles of Mathematical Analysis* (versione italiana, *Principi di Analisi Matematica*).
- L. Wheeden e A. Zygmund – *Measure and Integral*.

1. Teoria della Misura e Integrazione

1.1. **Premisure e Misure Esterne.**

Una premisura $(\mathcal{A}, \mu)$ è il dato di una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di uno spazio X, contenente $\emptyset$ e X, e di una funzione d'insieme $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$.
Una misura esterna μ^* su uno spazio X e una funzione d'insieme σ–subadditiva definita su $\mathbb{P}(X)$ a valori in $[0, +\infty]$.
La misura esterna μ^* sullo spazio X associata ad una premisura $(\mathcal{A}, \mu)$ è definita da

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \,|\, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Big\} ,$$

per ogni insieme $A \in \mathbb{P}(X)$. Ovviamente $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$.
Uno spazio misurabile $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è il dato di una σ–algebra $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di uno spazio X (detti misurabili) contenente $\emptyset$ e X, e di una funzione σ–additiva $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$, detta misura.
Una misura si dice completa se tutti i sottoinsiemi degli insiemi di misura nulla sono misurabili.
La famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili (o additivi) associati ad una misura esterna μ^* sullo spazio X consiste di tutti i sottoinsiemi M di X tali che

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \setminus M)$$

per ogni $A \subset X$. Si ha che $\mathcal{M}$ è una σ–algebra e μ^* è σ–additiva su $\mathcal{M}$, inoltre $(X, \mathcal{M}, \mu^*)$ è uno spazio misurabile con misura completa.
Se la misura esterna è generata da una funzione additiva μ su un anello $\mathcal{A}$, allora $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ e μ^* estende μ a $\mathcal{M}$.

Problema 1.1. *Se una premisura $(\mathcal{A}, \mu)$ su uno spazio X è tale che $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ e μ è σ–subadditiva, allora la misura esterna μ^* da essa generata coincide con μ. Si noti dunque che l'operazione di passaggio da una premisura ad una misura esterna si stabilizza immediatamente, cioè considerando $(\mathcal{P}(X), \mu^*)$ come una premisura si ha $\mu^{**} = \mu^*$.*
Segue che ogni misura esterna è generata da una premisura.

Date: 7 ottobre 2016.

Problema 1.2. *Data una misura esterna μ^* su X, si provi che se $\mu^*(A) = 0$ allora A è un insieme misurabile.*

Problema 1.3. *Data una misura esterna μ^* su X, si provi che se $\mu^*(A) < +\infty$ ed esiste un insieme misurabile $M \subset A$ tale che $\mu^*(M) = \mu^*(A)$ allora A è misurabile.*

Problema 1.4. *Supponiamo di avere tre famiglie di insiemi $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{A}''$ e relative premisure μ, μ' e μ'' con le seguenti proprietà,*

- *per ogni elemento A' di $\mathcal{A}'$ c'è un elemento $A \in \mathcal{A}$ tale che $A' \subset A$ e $\mu'(A') = \mu(A)$;*
- *per ogni elemento A di $\mathcal{A}$ c'è un elemento $A'' \in \mathcal{A}''$ tale che $A \subset A''$ e $\mu(A) = \mu''(A'')$.*

Si dimostri che se le misure esterne generate da $(\mathcal{A}', \mu')$ e da $(\mathcal{A}'', \mu'')$ sono uguali, allora la misura esterna generata da (A, μ) coincide con esse.

Problema 1.5. *Si dia un esempio di una premisura $(\mathcal{A}, \mu)$ tale che la misura esterna μ^* da essa generata sia strettamente minore di μ sulla famiglia di insiemi di $\mathcal{A}$.*

Problema 1.6. *Supponiamo che la premisura $(\mathcal{A}, \mu)$ su uno spazio X soddisfi la seguente proprietà: esiste un gruppo $\mathcal{G}$ di trasformazioni biunivoche dello spazio X in se stesso tale che, se $A \in \mathcal{A}$ allora $g(A) \in \mathcal{A}$ per ogni $g \in \mathcal{G}$ e $\mu(g(A)) = \mu(A)$. Si dimostri allora che anche la misura esterna generata μ^* soddisfa la proprietà di invarianza,*

$$\mu^*(g(A)) = \mu^*(A)$$

per ogni $A \subset X$ e $g \in \mathcal{G}$.
Si discuta il caso in cui la premisura μ soddisfi $\mu(g(A)) = \phi(g)\mu(A)$, dove $\phi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^+$ è un omomorfismo di $\mathcal{G}$ nel gruppo moltiplicativo dei reali positivi.
Si faccia qualche esempio di queste situazioni.

Problema 1.7. *Sia X in insieme generico, si determinino le σ–algebre dei misurabili e si descrivano le misure generate dalle seguenti misure esterne:*

- Cardinalità – *Per $A \subset X$, sia $\mu^*(A) =$ numero di punti di A se A è finito, $\mu^*(A) = +\infty$ se A è infinito.*
- Delta di Dirac in x – *Sia $A \subset X$, $\mu^*(A) = 1$ se $x \in A$, $\mu^*(A) = 0$ se $x \notin A$.*
- *Sia $A \subset X$, allora $\mu^*(A) = 0$ se A è finito o numerabile, $\mu^*(A) = 1$ se A è più che numerabile (si discutano i vari casi al variare dell'insieme X).*

Problema 1.8. *Si diano esempi di misure non complete.*

Problema 1.9. *Sia $\mathcal{M}$ una σ–algebra in un insieme X e μ una misura (eventualmente non completa) su $\mathcal{M}$. Sia allora $\mathcal{M}^*$ la collezione dei sottoinsiemi $M \subset X$ tali che esistano due insiemi A e B appartenenti a $\mathcal{M}$, con $A \subset M \subset B$ e $\mu(B \setminus A) = 0$. Definiamo allora per un tale M, $\widetilde{\mu}(M) = \mu(A) = \mu(B)$. Si verifichi che la coppia $(\mathcal{M}^*, \widetilde{\mu})$ così definita è una misura completa. Inoltre se la misura iniziale è completa, $(\mathcal{M}^*, \widetilde{\mu})$ coincide con $(\mathcal{M}, \mu)$.*

Problema 1.10. *Siano μ_n misure definite tutte sulla σ–algebra $\mathcal{M}$ e tali che $\mu_n(M) \leq \mu_{n+1}(M)$ per ogni $M \in \mathcal{M}$. Si provi allora che ponendo $\mu(M) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(M)$ per ogni $M \in \mathcal{M}$ si ottiene una misura μ su $\mathcal{M}$.*

1.2. σ–Algebre, Insiemi Misurabili e di Borel.

Un sottoinsieme di uno spazio topologico X si dice di Borel o boreliano se appartiene alla σ–algebra generata dagli aperti di X.
Una misura su uno spazio topologico si dice di Borel se gli insiemi boreliani appartengono alla σ–algebra dei misurabili.
Una misura di Borel μ si dice regolare dall'interno se per ogni misurabile M si ha

$$\mu(M) = \sup_{C \text{ chiuso},\, C \subset M} \mu(C)\,,$$

si dice regolare dall'esterno se per ogni misurabile M si ha

$$\mu(M) = \inf_{A \text{ aperto, } A \supset M} \mu(A)\,,$$

si dice regolare se lo è sia dall'interno che dall'esterno.
Un sottoinsieme misurabile di uno spazio X con una misura μ si dice *σ–finito* se è un unione numerabile di insiemi di misura finita.
La misura μ si dice *σ–finita* se l'intero spazio X è σ–finito.

Problema 1.11. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Esiste allora la più piccola σ–algebra che contiene tutti gli elementi di $\mathcal{A}$. Tale σ–algebra si dice generata dalla famiglia $\mathcal{A}$.*

Problema* 1.12. *Si dimostri che una σ–algebra o è finita o è più che numerabile (in realtà ha almeno la cardinalità del continuo).*
Si dia un esempio di una σ–algebra finita in $\mathbb{R}$.

Problema 1.13. *Sia μ una misura σ–finita su X, allora ogni $A \subset X$ misurabile è unione numerabile di insiemi misurabili di misura μ finita.*

Problema 1.14. *Sia μ una misura σ–finita, allora ogni funzione μ–misurabile è limite puntuale di funzioni semplici, nulle fuori da un insieme di misura finita.*

Problema 1.15 (Criterio di Carathéodory)**.** *Sia X uno spazio metrico con distanza d, μ^* una misura esterna. La distanza tra due insiemi A_1 e A_2 è definita da*

$$d(A_1, A_2) = \inf_{x \in A_1,\ y \in A_2} d(x, y).$$

Se per ogni due sottoinsiemi A e B di X, tali che $d(A, B) > 0$, si ha

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

allora ogni insieme di Borel è μ^*–misurabile.

Problema 1.16. *Si dia un esempio di una misura μ su uno spazio topologico X che non sia di Borel, cioè tale che esista un insieme boreliano non μ–misurabile.*

Problema 1.17. *Si dia un esempio di una misura non regolare.*

Problema 1.18. *La regolarità dall'interno e quella dall'esterno di una misura di Borel μ su X si implicano fra loro? Sono equivalenti? E se μ è finita o σ–finita?*

Problema 1.19. *Sia A_n una successione di sottoinsiemi μ–misurabili di uno spazio X, tali che $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$, allora quasi ogni $x \in X$ sta in un numero finito di insiemi A_n.*

Problema* 1.20. *Si provi che la σ–algebra dei boreliani di $\mathbb{R}$ ha cardinalità $\mathfrak{c} = 2^{\mathbb{N}}$, mentre quella degli insiemi Lebesgue–misurabili di $\mathbb{R}$ ha cardinalità $2^{\mathfrak{c}}$. Si deduca quindi l'esistenza di un insieme Lebesgue–misurabile ma non boreliano.*
Un esempio "costruttivo" dovuto a Lusin è discusso nel libro di Federer [**?**, 2.2.11].

Problema 1.21. *Sia μ una misura di Borel non nulla su $\mathbb{R}$, invariante per traslazioni e limitata sui compatti. Si provi allora che esiste un insieme non μ–misurabile.*

Problema 1.22. *Sia μ una misura di Borel finita su $\mathbb{R}^n$ e sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. La funzione $\varphi(x) = \mu(U + x)$ è continua? Semicontinua inferiormente/superiormente?*

1.3. **La Misura Esterna di Lebesgue.**

La misura esterna di Lebesgue λ^* in $\mathbb{R}^n$ si definisce partendo da una premisura $\lambda : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, dove $\mathcal{A}$ è la classe dei rettangoli n–dimensionali, con i *lati* paralleli agli assi coordinati e costruiti come prodotto di intervalli semiaperti (chiusi a destra e aperti a sinistra) e λ è il prodotto delle dimensioni dei *lati*.

Problema 1.23. *Si dimostri che usando invece* rettangoli n–dimensionali *aperti (o chiusi) si ottiene lo stesso la misura di Lebesgue.*

Problema 1.24. *Provare che se i lati dei rettangoli sono paralleli ad un altro sistema ortogonale di assi coordinati, si ottiene ancora la misura di Lebesgue.*

Problema 1.25. *Sia $\mathcal{A}$ la famiglia delle palle aperte (o chiuse) $B_r(x)$ in $\mathbb{R}^2$ e $\tau(B_r(x)) = \pi r^2$, si dimostri che la misura esterna generata da τ coincide con la misura esterna di Lebesgue λ^*. Si dimostri l'analogo in $\mathbb{R}^n$.*

Problema* 1.26. *Sia A un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ tale che $\lambda^*(\partial A) = 0$ e sia*

$$\mathcal{A} = \left\{\rho A + x \,|\, \rho \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n\right\} \cup \{\emptyset\}$$

la classe degli insiemi omotetici e traslati dell'insieme iniziale A. Definendo $\tau(\rho A + x) = \rho^n \lambda^*(A)$, si provi che la premisura $(\mathcal{A}, \tau)$ genera la misura esterna di Lebesgue.

Per questo problema, può essere utile considerare i seguenti due risultati:

Problema 1.27. *Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è unione disgiunta di una famiglia numerabile di n–rettangoli semiaperti a destra (o a sinistra). I rettangoli possono essere presi chiusi? E aperti?*

Problema 1.28 (Caso particolare del teorema di ricoprimento di Vitali)**.** *Sia data una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ come nel problema precedente. Allora, per ogni aperto G esiste una sottofamiglia numerabile $\{A_i\}$ di elementi di $\mathcal{A}$, ognuno contenuto in G, disgiunti a due a due e tali che*

$$\lambda^*\Big(G \setminus \bigcup_i A_i\Big) = 0.$$

Problema* 1.29. *La misura di Lebesgue λ^* è l'unica misura completa definita sui boreliani di $\mathbb{R}^n$ invariante per isometrie, tale che la misura di un insieme di Borel sia il* sup *delle misure dei compatti contenuti in esso e che valga 1 sul cubo unitario n–dimensionale $[0,1] \times \cdots \times [0,1]$.*

Problema 1.30. *Sia $\mathcal{A}_\rho = \{B_r(x) \,|\, r \in [0, \rho]\}$ una famiglia di palle aperte in $\mathbb{R}^n$ e $\tau(B_r(x) = r^\alpha$, per un certo α fissato in $[0, +\infty)$. Si indichi allora con $\mathcal{H}^\alpha_\rho$ la misura esterna che viene generata. Dimostrare che se $\alpha > n$ allora $\mathcal{H}^\alpha_\rho$ è la misura esterna nulla su $\mathbb{R}^n$.*

Problema 1.31. *Che cosa cambierebbe nella misura esterna di Lebesgue se nella definizione con la premisura invece di famiglie numerabili di rettangoli semiaperti, si usassero soltanto ricoprimenti con famiglie* finite*? L'insieme dei razionali in $[0,1]$ allora che* misura *(non si ottiene una misura!!!) avrebbe?*

Si indicherà con $\mathcal{L}^n$ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ che avrà l'usuale topologia euclidea.
Un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice di tipo G_δ se è un'intersezione numerabile di aperti, si dice di tipo F_σ se è un'unione numerabile di chiusi.
Un sottoinsieme si dice *perfetto* se coincide con l'insieme dei suoi punti di accumulazione (insieme *derivato*).
Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si dice *mai denso* se la sua chiusura non contiene alcun intervallo.

Problema 1.32. *Si provi che se A è un sottoinsieme di un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ si ha che A è Lebesgue–misurabile se e solo se*

$$\mathcal{L}(I) = \lambda^*(A) + \lambda^*(I \setminus A)$$

dove λ^* è la misura esterna di Lebesgue.

Problema 1.33. *Sia A un sottoinsieme limitato e Lebesgue–misurabile di $\mathbb{R}$ di misura $\alpha > 0$, si provi che per ogni $\beta \in (0, \alpha)$ esiste un sottoinsieme Lebesgue–misurabile $B \subset A$ tale che abbia misura β.*
Il risultato è vero anche se A è non limitato o se $\alpha = +\infty$?

Problema 1.34. *La conclusione del problema precedente continua a valere se si richiede che l'insieme B sia anche perfetto?*

Problema 1.35. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di misura esterna positiva allora contiene un sottoinsieme non misurabile per Lebesgue.*

Problema 1.36. *Si provi che un qualunque sottoinsieme Lebesgue–misurabile dell'insieme di Vitali ha misura nulla.*

Problema 1.37. *Si dimostri che esiste un insieme $A \subset \mathbb{R}$ tale che un qualunque insieme Lebesgue–misurabile contenuto in A o in $\mathbb{R} \setminus A$ ha misura nulla.*

Problema 1.38. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ mai denso e di misura di Lebesgue nulla. La sua chiusura ha sempre misura nulla?*

Problema 1.39. *Sia A un sottoinsieme Lebesgue–misurabile di $\mathbb{R}$ con la proprietà che per ogni intervallo limitato $I \subset \mathbb{R}$ si abbia $\mathcal{L}(A \cap I) > \alpha\mathcal{L}(I)$ per una qualche costante $\alpha > 0$. Si provi che $\mathcal{L}(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.*

Problema* 1.40. *Se A è un sottoinsieme Lebesgue–misurabile di $\mathbb{R}$, di misura positiva, l'insieme delle differenze di A, definito da*

$$A - A = \{x - y \,|\, x, y \in A\}$$

contiene un intervallo aperto contenente lo zero. Si provi l'analogo risultato in $\mathbb{R}^n$.

Problema 1.41. *Si mostri un esempio in cui A è un insieme di misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}$ e $A - A$, usando la definizione del problema precedente, contiene un intervallo aperto contenente lo zero.*

Problema 1.42. *Esistono sottocampi misurabili e non banali di $\mathbb{R}$ di misura di Lebesgue positiva?*

Problema 1.43. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x + y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. La funzione f è allora lineare? E se f è misurabile?*

Problema 1.44. *Un insieme Lebesgue–misurabile $A \subset \mathbb{R}$ ha la proprietà che per ogni $\delta > 0$ si ha $\mathcal{L}(A \cap (-\delta, \delta)) > 0$ inoltre $0 \in A$. Si provi che esiste un insieme perfetto $B \subset A$ tale che per ogni $\delta > 0$ si ha $\mathcal{L}(B \cap (-\delta, \delta)) > 0$.*

Un insieme Lebesgue–misurabile $A \subset \mathbb{R}$ si dice che ha *densità* d nel punto $x \in \mathbb{R}$ se il limite

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}(A \cap (-r, r))}{2r}$$

esiste ed è uguale a d.
Il punto x si dice *di densità per* A se inoltre $d = 1$, si dice *di dispersione per* A se $d = 0$.

Problema 1.45. *Dati $x \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in [0, 1]$ si mostri un insieme $A \subset \mathbb{R}$ di densità α in x.*

Problema 1.46. *Dato un insieme A per cui $0 \in \mathbb{R}$ è di densità, si dimostri che esiste un insieme perfetto $B \subset A$ per il quale 0 è sempre un punto di densità.*

Problema* 1.47. *Si dimostri che se un insieme Lebesgue–misurabile A ha la proprietà che ogni punto di $\mathbb{R}$ o è di densità o è di dispersione per A, allora $\mathcal{L}(A) = 0$ oppure $\mathcal{L}(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.*

Problema 1.48. *Esiste un insieme A di densità 1/2 in ogni punto di $\mathbb{R}$?*

Problema 1.49. *Dare un esempio di una successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, $A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset \ldots$ tali che $\lambda^*(A_0) < +\infty$, $A = \cap A_i$ e*

$$\lim_{i \to \infty} \lambda^*(A_i) > \lambda^*(A).$$

Problema 1.50. *Dimostrare che per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ esiste un insieme D di tipo G_δ tale che $D \supset A$ e $\lambda^*(A) = \mathcal{L}^n(D)$ ed un insieme C di tipo F_σ tale che $C \subset A$ e $\lambda^*(A) = \mathcal{L}^n(C)$.*

Da questo problema segue ovviamente che $\mathcal{L}^n$ è una misura di Borel regolare.

Problema 1.51. *Dimostrare che* $A \subset \mathbb{R}^n$ *è Lebesgue–misurabile se e solo se vale una delle seguenti proprietà:*

- *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un aperto* $G \supset A$ *con* $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$.
- *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un chiuso* $F \subset A$ *con* $\lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon$.
- *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esistono un aperto* G *e un chiuso* F *tali che* $F \subset A \subset G$ *con* $\lambda^*(G \setminus F) < \varepsilon$.
- *Esiste un insieme* D *di tipo* G_δ *e un insieme di misura nulla* H *tali che* $A = D \setminus H$.
- *Esiste un insieme* C *di tipo* F_σ *e un insieme di misura nulla* Z *tali che* $A = C \cup Z$.

Problema* 1.52. *Sia* $A \subset \mathbb{R}^n$*, allora esiste un insieme* D *di tipo* G_δ *tale che* $A \subset D$ *e per ogni insieme Lebesgue–misurabile* M *si ha* $\lambda^*(A \cap M) = \mathcal{L}^n(D \cap M)$.

Problema 1.53. *Si provi che se* $A \subset \mathbb{R}^n$ *è Lebesgue–misurabile allora*

$$\mathcal{L}^n(A) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ compatto}}} \mathcal{L}^n(K).$$

Una misura di Borel regolare con la proprietà del problema precedente e tale che tutti i compatti abbiano misura finita si dice *misura di Radon*.

Problema 1.54. *Se* $A \subset \mathbb{R}$ *è Lebesgue–misurabile, allora l'insieme* $\{x^2 \mid x \in A\}$ *è misurabile.*

Problema 1.55. *Sia* $\mathcal{M}$ *la classe degli insiemi Lebesgue–misurabili in* $\mathbb{R}^n$ *e di misura finita. Si definisca la relazione d'equivalenza per cui* $A \approx B$ *se* $\mathcal{L}^n(A \triangle B) = 0$*, dove* $A \triangle B$ *è la differenza simmetrica tra gli insiemi* A *e* B*. Sullo spazio quoziente si consideri la distanza* $d(A, B) = \mathcal{L}^n(A \triangle B)$ *e si provi che allora tale spazio metrico è separabile.*

Problema 1.56. *Si trovino due sottoinsiemi disgiunti* A *e* B *di* $[0, 1]$ *tali che* $A \cup B = [0, 1]$ *con* A *di misura di Lebesgue nulla e* B *di prima categoria (di Baire).*

Problema 1.57. *Si provi senza usare l'ipotesi del continuo che ogni insieme di misura di Lebesgue positiva ha la cardinalità del continuo.*

1.4. **L'Insieme di Cantor e Derivati.**

L'insieme di Cantor in $[0, 1]$ è compatto, perfetto, mai denso, ha la cardinalità del continuo ed è Lebesgue–misurabile di misura nulla.

Problema 1.58. *Sia dia una descrizione dell'insieme di Cantor in* $[0, 1]$ *usando la rappresentazione in base 3 dei numeri reali.*

Problema* 1.59. *Si definiscano le mappe* $T_1, T_2 : [0, 1] \to [0, 1]$, $T_1(x) = x/3$, $T_2(x) = (x + 2)/3$*. Si provi che l'insieme di Cantor* $\mathcal{C}$ *in* $[0, 1]$ *è l'unico sottoinsieme chiuso di* $[0, 1]$ *tale che valga,*

$$T_1(\mathcal{C}) \cup T_2(\mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$

Problema 1.60. *Si dimostri che l'insieme di Cantor è non numerabile, Lebesgue–misurabile e ha misura nulla.*

Problema 1.61. *Si provi che la funzione di Cantor–Vitali (detta anche* scala del diavolo *e talvolta attribuita anche a Lebesgue)* $\mathcal{CV} : [0, 1] \to [0, 1]$ *manda l'insieme di Cantor in tutto l'intervallo* $[0, 1]$*. Si studi anche la funzione* $x \mapsto x + \mathcal{CV}(x)$.

Problema* 1.62. *Si dia un esempio di insieme di Borel* A *in* $\mathbb{R}$*, contenuto nell'intervallo* $[0, 1]$ *tale che per ogni intervallo* $I \subset \mathbb{R}$*, entrambi gli insiemi* $I \cap A$ *e* $I \setminus A$ *abbiano misura di Lebesgue positiva.*

Problema 1.63. *Si trovi un insieme misurabile e totalmente sconnesso di* $\mathbb{R}$ *(cioè che non contenga intervalli) ma abbia misura di Lebesgue positiva.*

Problema 1.64. *Dato $\varepsilon > 0$ si trovi un sottoinsieme aperto e denso (e uno chiuso e mai denso) di misura di Lebesgue uguale a ε.*

Problema 1.65. *Esiste una famiglia numerabile di sottoinsiemi perfetti e mai densi di $[0,1]$ la cui unione ha misura 1?*

1.5. **Funzioni Boreliane e Misurabili.**

Diciamo che una funzione f da uno spazio X, con una misura μ, verso uno spazio topologico Y è misurabile, se le controimmagini degli aperti di Y sono μ–misurabili.
Diciamo che una funzione tra due spazi topologici è *boreliana* o di Borel se le controimmagini degli aperti sono insiemi di Borel dello spazio di partenza.
Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice *a variazione limitata* (o *BV*, *bounded variation*) se esiste una costante $C > 0$ tale che $|f(a) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \dots + |f(x_n) - f(b)| \leq C$ per ogni insieme di valori $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$.
Una funzione da uno spazio topologico X in $\mathbb{R}$ si dice della *prima classe di Baire* se è limite puntuale di funzioni continue, della *seconda classe di Baire* se è limite puntuale di funzioni della prima classe di Baire, e così via.
Talvolta le funzioni considerate saranno a valori in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Problema 1.66. *Dimostrare che una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è misurabile se e solo se vale una delle seguenti proprietà:*

- *La controimmagine di ogni aperto è misurabile.*
- *La controimmagine di ogni chiuso è misurabile.*
- *La controimmagine di ogni intervallo aperto è misurabile.*
- *La controimmagine di ogni intervallo chiuso è misurabile.*
- *La controimmagine di ogni intervallo del tipo $(a,b]$ è misurabile.*
- *La controimmagine di ogni intervallo chiuso $[a,b)$ è misurabile.*
- *La controimmagine di ogni semiretta aperta $(a,+\infty)$ è misurabile.*
- *La controimmagine di ogni semiretta chiusa $[a,+\infty)$ è misurabile.*
- *La controimmagine di ogni semiretta aperta $(-\infty,b)$ è misurabile.*
- *La controimmagine di ogni semiretta chiusa $(-\infty,b]$ è misurabile.*
- *La controimmagine di ogni intervallo del tipo (a,b), con a e b razionali, è misurabile.*

Problema 1.67. *Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si definiscano*

$$f_*(x) = \inf\Big\{\liminf_{n\to\infty} f(x_n)\,\Big|\, x_n \to x\Big\},$$
$$f^*(x) = \sup\Big\{\limsup_{n\to\infty} f(x_n)\,\Big|\, x_n \to x\Big\}$$

e si dimostri che sono funzioni boreliane (e semicontinue).

Problema 1.68. *Se μ è una misura di Borel su uno spazio X allora le funzioni continue e quelle semicontinue superiormente o inferiormente sono boreliane, quindi misurabili.*
Segue che tutte le funzioni nelle classi di Baire sono misurabili.

Problema 1.69. *Sia $g : Y \to Z$ una funzione continua tra due spazi topologici. Si provi che se μ è una misura su X e $f : X \to Y$ è μ–misurabile, allora $h = g \circ f$ è μ–misurabile.*

Problema 1.70. *Si provi che il prodotto e il quoziente di due funzioni misurabili sono funzioni misurabili (eventualmente il quoziente avrà valori in $\overline{\mathbb{R}}$).*

Problema 1.71. *Siano u e v funzioni reali e μ–misurabili su uno spazio X con una misura μ. Sia Φ una funzione continua da $\mathbb{R}^2$ in uno spazio topologico Y e si definisca*

$$h(x) = \Phi(u(x), v(x))$$

per ogni $x \in X$.
Allora $h : X \to Y$ è misurabile.

Problema 1.72. *Sia X uno spazio con una misura μ su una σ–algebra $\mathcal{M}$ e sia Y uno spazio topologico. Se $f : X \to Y$ è μ–misurabile, allora la controimmagine di un insieme di Borel di Y appartiene a $\mathcal{M}$. Se $g : Y \to Z$ è una funzione di Borel, dove Z è un altro spazio topologico allora $h = g \circ f$ è misurabile.*

Problema 1.73. *Una funzione $f : X \to \mathbb{C}$ è misurabile se e solo se sono misurabili la sua parte reale e immaginaria. Una funzione a valori vettoriali è misurabile se e solo se lo sono le sue componenti.*

Problema 1.74. *Sia $\mathcal{M}(X)$ lo spazio delle funzioni μ–misurabili a valori reali su uno spazio X con una misura μ. Si dimostri che $\mathcal{M}(X)$ ha una struttura di algebra unitaria reale ed inoltre è un reticolo con le operazioni di Max e Min tra due funzioni.*

Problema 1.75. *Se una funzione f è misurabile lo è anche il suo modulo $|f|$. Mostrare con un esempio che il viceversa non è vero.*

Problema 1.76. *Si mostri con un esempio che per una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ la misurabilità di $\{x \,|\, f(x) = c\}$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ non implica la misurabilità di f.*

Problema 1.77. *Dimostrare che dato A misurabile, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è misurabile se e solo se f^2 è misurabile e l'insieme $\{x \in A \,|\, f(x) > 0\}$ è misurabile.*

Problema 1.78. *Se f è una funzione misurabile e non negativa, allora f^α è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^+$.*

Problema 1.79. *Sia f una funzione misurabile a valori reali. Si provi che allora $\{x \,|\, f(x) = \alpha\}$ è un insieme misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Si mostri con un esempio che il viceversa è falso.*

Problema 1.80. *Sia f_n una successione di funzioni misurabili, allora le funzioni definite da $g_1(x) = \sup_n \{f_n(x)\}$, $g_2(x) = \inf_n \{f_n(x)\}$, $g_3(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$, $g_4(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ sono misurabili.*

Problema 1.81. *Data una famiglia di funzioni misurabili $f_t : X \to \mathbb{R}$, con X spazio topologico e $t \in \mathbb{R}$, le funzioni definite da $g(x) = \liminf_{t\to 0} f_t(x)$ e $h(x) = \limsup_{t\to 0} f_t(x)$ sono misurabili?*

Problema 1.82. *Sia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una famiglia più che numerabile di funzioni misurabili. Si mostri con un esempio che in generale la funzione $g(x) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(x)$ non è misurabile.*

Problema 1.83. *Data una funzione qualunque $f : X \to \mathbb{R}$, con X spazio topologico, si provi che le funzioni definite da $g(x) = \liminf_{y\to x} f(y)$ e $h(x) = \limsup_{y\to x} f(y)$ sono boreliane.*

Problema 1.84. *Data una successione di funzioni misurabili $f_n : X \to \mathbb{R}$ l'insieme dei punti di convergenza $A = \{x \in X \,|\, f_n(x) \text{ converge }\}$ è misurabile.*

Problema 1.85. *Data una funzione qualunque $f : X \to \mathbb{R}$, con X spazio topologico, l'insieme dei suoi punti di continuità è di Borel.*

Problema 1.86. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ continua in μ–quasi ogni $x \in X$, con X spazio topologico e μ misura di Borel, allora f è μ–misurabile.*

Problema 1.87. *Si provi che le funzioni monotone da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono di Borel. Si provi che ogni funzione a variazione limitata è differenza di due funzioni monotone quindi di Borel.*

Problema 1.88. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, allora f' è di Borel, quindi Lebesgue–misurabile. Si dia un enunciato analogo per le derivate parziali di funzioni su $\mathbb{R}^n$.*

Problema 1.89. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile e sia $g(x) = f'(x)$ se f è derivabile in x, $g(x) = 0$ altrimenti. Si provi allora che g è misurabile.*

Problema 1.90. *Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è separatamente continua, allora f è di Borel, quindi Lebesgue–misurabile.*

Problema 1.91. *Si provi che se f è continua le controimmagini degli insiemi boreliani sono boreliani. È vero il viceversa?*

Problema* 1.92. *L'immagine di un insieme Lebesgue–misurabile di $\mathbb{R}^n$ tramite una funzione continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ancora Lebesgue–misurabile? E l'immagine di un insieme di misura nulla ha misura nulla?*

Problema 1.93. *Quali sono le risposte alle domande del problema precedente se la funzione f è lipschitziana?*

Problema 1.94. *Si provi che una funzione continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ manda Lebesgue–misurabili in Lebesgue–misurabili se e solo se manda insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla.*

Problema* 1.95. *Si mostri che se f è misurabile a valori reali non è detto che le controimmagini dei misurabili siano misurabili. E se f è continua?*

Problema 1.96. *Si mostri che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Lebesgue–misurabile e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, non è detto che la funzione composta $f \circ g$ sia misurabile.*

Problema* 1.97. *Una funzione misurabile bigettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ha inversa misurabile?*

Problema 1.98. *Sia $\mu(X) = +\infty$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione μ–misurabile. Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un insieme μ–misurabile A, con $\mu(A) > n$, tale che f è limitata su A.*

Problema 1.99 (Teorema di Severini–Egorov). *Sia $f_k : A \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni misurabili definite sull'insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^n$ di misura di Lebesgue finita. Supponiamo che per quasi ogni $x \in A$, $f_k(x) \to f(x)$ dove $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione finita quasi ovunque. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $F \subset A$ tale che, $f_k|_F \to f|_F$ uniformemente e $\mathcal{L}^n(A \setminus F) < \varepsilon$.*

Problema 1.100. *La conclusione del teorema di Severini–Egorov vale nelle stesse ipotesi, se invece di una successione si ha una famiglia di funzioni misurabili $f_t : A \to \mathbb{R}$, per $t \in \mathbb{R}$, tale che*

$$\lim_{t \to +\infty} f_t(x) = f(x)$$

e la mappa $t \mapsto f_t(x)$ è continua per ogni $x \in A$ fissato?

Problema 1.101. *Si trovi una successione di funzioni Lebesgue–misurabili $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ convergente puntualmente a $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che per ogni insieme $A \subset [0, 1]$ di misura di Lebesgue uguale a 1, la successione non converga uniformemente.*

Problema 1.102. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile di misura di Lebesgue finita e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste allora un chiuso $F \subset A$ tale che $f|_F : F \to \mathbb{R}$ è limitata e $\mathcal{L}^n(A \setminus F) < \varepsilon$.*

Problema 1.103 (Teorema di Lusin). *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme Lebesgue–misurabile, allora una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $F \subset A$ tale che $f|_F : F \to \mathbb{R}$ è continua e $\mathcal{L}^n(A \setminus F) < \varepsilon$.*

Problema 1.104. *Si diano dei controesempi ai teoremi di Severini–Egorov e Lusin se si prova ad indebolire le ipotesi. I due teoremi valgono se si considera $\varepsilon = 0$ nel loro enunciato?*

Problema 1.105. *Si generalizzino i teoremi di Severini–Egorov e Lusin a spazi di misura generali. Come vanno modificati gli enunciati?*

Problema 1.106. *Si trovi una funzione Lebesgue–misurabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni insieme di misura nulla $A \subset \mathbb{R}$, la funzione $f|_{\mathbb{R}\setminus A}$ non sia continua in nessun punto di $\mathbb{R} \setminus A$.*

Problema 1.107. *Sia $f_k : A \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni misurabili definite sull'insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^n$ di misura di Lebesgue finita. Supponiamo che per ogni $x \in A$, esista un numero M_x tale che $|f_k(x)| \leq M_x$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $F \subset A$ ed un numero M tali che, $|f_k(x)| \leq M$ per ogni $x \in F$ e $k \in \mathbb{N}$, inoltre $\mathcal{L}^n(A \setminus F) < \varepsilon$.*

Problema 1.108. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue–misurabile, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione continua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\mathcal{L}^n\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon\,.$$

Problema 1.109. *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione Lebesgue–misurabile, allora esistono due funzioni boreliane $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che $g \leq f \leq h$ e $f(x) = g(x) = h(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$.*

Problema 1.110 (Teorema di Fréchet). *Se $A \subset \mathbb{R}$ è Lebesgue–misurabile e $f : A \to \mathbb{R}$ è misurabile, esiste un insieme $B \subset A$ di tipo F_σ tale che $(A \setminus B) = 0$ e $f|_B$ è nella prima classe di Baire, cioè è limite puntuale di funzioni continue da B in $\mathbb{R}$.*

Problema* **1.111** (Teorema di Vitali). *Se $A \subset \mathbb{R}$ è Lebesgue–misurabile e $f : A \to \mathbb{R}$ è misurabile, esiste una funzione g nella seconda classe di Baire di A tale che $f = g$ quasi ovunque in A.*

1.6. **Integrazione.**

In questa sezione, eccetto casi espliciti, sarà sottointeso che tutti gli insiemi e le funzioni considerati sono misurabili. Spesso si sottointenderà anche di avere uno spazio X con una misura μ e la sua σ–algebra di sottoinsiemi misurabili.
Una famiglia di funzioni $\{f_\lambda\}$ su uno spazio di misura (X, μ) si dice *μ–uniformemente integrabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $A \subset X$ misurabile di misura minore di δ e ogni f_λ della famiglia si ha

$$\int_A |f_\lambda|\, d\mu < \varepsilon\,.$$

Problema 1.112. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione μ–integrabile, allora l'insieme dei punti di X dove f è diversa da zero è σ–finito.*

Problema 1.113. *Necessario e sufficiente perché la misura μ sia σ–finita è che esista una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, positiva e μ–integrabile.*

Problema 1.114. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$, con $f(x) \geq 0$ per μ–quasi ogni $x \in X$, allora*

$$\int_X f\, d\mu = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = 0 \text{ per } \mu\text{–quasi ogni } x \in X.$$

Problema 1.115. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ non negativa e μ–integrabile, allora*

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f\, d\mu$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Problema 1.116. *Data $f : X \to \mathbb{R}$ tale che sia μ–integrabile e valga*

$$\int_A f\, d\mu = 0$$

per ogni insieme misurabile $A \subset X$, si provi che allora $f = 0$ quasi ovunque in X.

Problema 1.117. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione μ–integrabile allora*

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu$$

e si mostri che se vale l'uguaglianza allora $f \geq 0$ quasi ovunque in X oppure $f \leq 0$ quasi ovunque in X.

Problema 1.118. *Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni non negative tali che $f_n(x) \to f(x)$, per quasi ogni $x \in X$ e $f_n(x) \leq f(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in X$. Si provi che*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu\,.$$

Se si toglie l'ipotesi $f_n \geq 0$ la tesi continua a valere?

Problema 1.119. *Sia A un insieme Lebesgue–misurabile di misura finita in $\mathbb{R}$ e si definisca $f_n = \mathbb{1}_A$ se n è pari, $f_n = 1 - \mathbb{1}_A$ se n è dispari. Si verifichi allora, applicando il lemma di Fatou a questa successione di funzioni, che la disuguaglianza può effettivamente essere stretta.*

Problema 1.120. *Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni non negative, μ–misurabili, puntualmente convergente a $f : X \to \mathbb{R}$ e tali che*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \;=\; \int_X f \, d\mu < +\infty \,.$$

Si provi che allora per ogni sottoinsieme μ–misurabile $A \subset X$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu \;=\; \int_A f \, d\mu \,.$$

Problema 1.121. *Si dia un esempio di una successione di funzioni f_n uniformemente convergente ad una funzione f su un insieme X di misura μ infinita, tale che non valga*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \;=\; \int_X f \, d\mu \,.$$

Problema* 1.122. *Si costruisca una successione di funzioni $f_n : [0,1] \to [0,1]$ tali che*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\mathcal{L} \;=\; \int_{[0,1]} f \, d\mathcal{L} \,,$$

ma che per nessun $x \in [0,1]$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Problema* 1.123 (Assoluta continuità dell'integrale)**.** *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione μ–integrabile. Si provi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $A \subset X$ misurabile e di misura minore di δ si ha*

$$\int_X |f| \, d\mu < \varepsilon \,.$$

Problema 1.124. *Si dimostri il teorema di convergenza dominata usando il teorema di Severini–Egorov e il risultato del problema precedente.*

Problema 1.125 (Teorema di convergenza di Vitali)**.** *Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni μ–uniformemente integrabili e convergente quasi ovunque a $f : X \to \mathbb{R}$ con X di misura finita. Si provi che allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \,.$$

Problema 1.126. *Si provi che se $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$ allora la successione f_n è μ–uniformemente integrabile.*

Problema 1.127. *Si trovi uno spazio di misura (X, μ) e una successione $f_n \to f$ tale che $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$ ma non esista una funzione g che sia μ–integrabile e $|f_n| \le g$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Problema 1.128. *Sia f_n una successione di funzioni misurabili, si provi che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu \;=\; \int_X \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \, d\mu \,.$$

Problema 1.129. *Sia f_n una successione di funzioni misurabili, si provi che se*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu \;<\; +\infty$$

allora,

- *la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente quasi ovunque ad una funzione μ–misurabile f,*
- *la funzione f è integrabile e si ha*

$$\int_X f \, d\mu \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu \,.$$

Problema 1.130. *Si provi direttamente, usando il fatto che $\mathcal{L}^n(-A) = \mathcal{L}^n(A)$ per ogni insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^n$, che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mathcal{L}(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\, d\mathcal{L}(x),$$

per ogni funzione Lebesgue–integrabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Problema 1.131. *Siano f_n, g_n, f, g funzioni μ–misurabili su X tali che $0 \leq f_n \leq g_n$ per quasi ogni $x \in X$, inoltre $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ e $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ dove g è una funzione μ–integrabile. Si provi che se*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu \;=\; \int_X g\, d\mu\,,$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \;=\; \int_X f\, d\mu\,.$$

Problema 1.132. *Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione Lebesgue–integrabile, allora si determini il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |x^n\, f(x)|\, d\mathcal{L}(x).$$

Problema 1.133. *Si calcolino i limiti*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{x/2}\, dx\,, \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-2x}\, dx\,.$$

Problema 1.134. *Il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \log\left\{1 + e^{nf(x)}\right\} dx$$

esiste per ogni funzione f integrabile? Se esiste, quanto vale?

Problema 1.135. *Sia $f : Q \equiv [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e tale che,*

- *per ogni $x \in [0, 1]$, la funzione $f_x(y) = f(x, y) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ è integrabile in y su $[0, 1]$,*
- *per ogni $y \in [0, 1]$, la funzione $f_y(x) = f(x, y) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ è continua in x su $[0, 1]$.*

Si provi allora che la funzione $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definita da

$$F(x) = \int_{[0,1]} f(x, y)\, d\mathcal{L}(y)$$

è continua.

Problema 1.136 (Derivazione sotto il segno di integrale)**.** *Sia $f : Q \equiv [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e tale che,*

- *per ogni $x \in [0, 1]$, la funzione $f_x(y) = f(x, y) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ è integrabile in y su $[0, 1]$,*
- *per ogni $y \in [0, 1]$, la funzione $f_y(x) = f(x, y) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ è derivabile parzialmente in x su $[0, 1]$ e la sua derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ è uniformemente limitata in modulo su tutto Q.*

Si provi allora che la funzione $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definita da

$$F(x) = \int_{[0,1]} f(x, y)\, d\mathcal{L}(y)$$

è derivabile per ogni $x \in (0, 1)$ e si ha

$$\frac{d}{dx} \int_{[0,1]} f(x, y)\, d\mathcal{L}(y) = \int_{[0,1]} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, d\mathcal{L}(y)\,.$$

Problema 1.137. *Si generalizzino i due problemi precedenti a funzioni su spazi di misura astratti o a funzioni di più variabili.*

Problema 1.138. *Si provi che*

$$\int_0^1 \frac{x^{1/3}}{1-x}\log\frac{1}{x}\,dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{9}{(3n+4)^2}\,,$$

$$\int_0^1 \sin x\log x\,dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n(2n)!}\,,$$

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\,,$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{e^x+1}\,dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}\,,$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-\alpha}\,dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{1+(n+1)^2}\,,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}\,,$$

$$\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sin(nx)}{a^n}\,dx \;=\; \frac{2a(1+a^2)}{(a^2-1)^2},\ \textit{per ogni } a>1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1}\,dx \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx,\ \textit{per ogni } \alpha>0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{1/n}} \;=\; 1\,.$$

Problema 1.139. *Si dimostri che per $p,q>0$ risulta*

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+nq}\,,$$

e se ne deduca

$$\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\,,$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,,$$

$$\frac{1}{3}\log 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}\,.$$

Problema 1.140. *Si provi che, per $|a|\le 1$ si ha*

$$\int_0^1\frac{1-t}{1-at^3}\,dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

e si deduca

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}\,,$$

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(6n+1)(6n+2)}\,.$$

I problemi seguenti esprimono alcune relazioni tra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann in $\mathbb{R}^n$.

Problema 1.141. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura di Lebesgue nulla.*

Problema 1.142. *Se f è Riemann–integrabile è anche Lebesgue–integrabile e i due integrali coincidono.*

Problema 1.143. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Lebesgue–misurabile e non negativa con $|f| < M$. Data una partizione $\Gamma = \{0 = \alpha_0 < \alpha_1 \cdots < \alpha_k = M\}$ dell'intervallo $[0, M]$, sia $|\Gamma| = \max(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$ e siano $A_i = \{x \in [a, b] \,|\, \alpha_i \leq f(x) < \alpha_{i+1}\}$ per $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Si definiscano le somme parziali*

$$S_\Gamma = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{i+1}\, \mathcal{L}(A_i)\,,$$

$$s_\Gamma = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i\, \mathcal{L}(A_i)$$

e si provi che

$$\lim_{|\Gamma|\to 0} S_\Gamma = \lim_{|\Gamma|\to 0} s_\Gamma = \int_{[a,b]} f\, d\mathcal{L}\,.$$

Si noti la differenza con l'integrale di Riemann dove la partizione viene fatta nel dominio $[a, b]$.

1.7. **Gli Spazi L^p.**

Per ogni $p \in \mathbb{R}^+$, indichiamo con $L^p(X, \mu)$ lo spazio delle funzioni μ–misurabili $f : X \to \mathbb{R}$ tali che

$$\|f\|_p = \Big(\int_X |f|^p\, d\mu\Big)^{1/p} < +\infty\,.$$

Ricordiamo che ogni funzione $L^p(X, \mu)$ è definita a meno di insiemi di misura nulla.
Con $\|f\|_\infty$ denotiamo il *sup essenziale* di una funzione, cioè il minimo valore $C \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq C$ per quasi ogni $x \in X$.
Con $L^p(\mathbb{R})$, $L^p(\mathbb{R}^n)$, $L^p(a, b)$ denoteremo rispettivamente gli spazi $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$, $L^p([a, b], \mathcal{L})$.

Problema 1.144. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione μ–misurabile e*

$$\varphi(p) = \|f\|_p^p = \int_X |f|^p\, d\mu$$

per ogni $p \in \mathbb{R}^+$.
Sia $E = \{\, p \,|\, \varphi(p) < +\infty \,\}$ e assumiamo che $\|f\|_\infty > 0$.

- *Se $r < p < q$ e $r, q \in E$, si provi che $\|f\|_p \leq \max\{\|f\|_r,\ \|f\|_q\}$ quindi anche $p \in E$.*
- *Si mostri che $\log \varphi$ è convessa nell'interno di E e che φ è continua su E.*
- *E è aperto, chiuso? Può consistere di un singolo punto? Può essere un qualunque connesso di $\mathbb{R}^+$?*
- *Si provi che $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.*

Problema 1.145. *Si aggiunga alle ipotesi del problema precedente l'assunzione che $\mu(X) = 1$.*

- *Se $p < q \leq +\infty$ si provi che $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ quindi $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$.*
- *In quali casi si ha $\|f\|_p = \|f\|_q$?*
- *In quali casi $L^p(X, \mu)$ e $L^q(X, \mu)$ contengono le stesse funzioni?*
- *Si provi che $\lim_{p\to 0} \|f\|_p = e^{\int_X \log |f|\, d\mu}$ (si definisca $e^{-\infty} = 0$).*

Problema 1.146. *Se $\mu(X) < +\infty$ e $0 < p < q < +\infty$ si provi che $\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot [\mu(X)]^{1/p-1/q}$.*

Problema 1.147. *Per alcune misure $p < q$ implica che $L^p(X, \mu) \subset L^q(X, \mu)$, per altre misure vale l'inverso, per altre $L^p(X, \mu) \subset L^q(X, \mu)$ non vale mai. Si diano esempi di queste situazioni e si trovino condizioni su μ perché si verifichino.*

Problema 1.148. *Data $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue–integrabile e non limitata in $L^\infty(0,1)$, si sa che $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = +\infty$. La funzione $\|f\|_p$ può tendere a $+\infty$ arbitrariamente lentamente? Precisamente, per ogni funzione $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tale che $\lim_{p\to+\infty} F(p) = +\infty$ esiste una funzione f come sopra tale che $\|f\|_p \to \infty$ e $\|f\|_p \leq F(p)$ definitivamente per p grande?*

Problema 1.149. *Se $f_n \to f$ in $L^p(X,\mu)$ e $f_n \to g$ quasi ovunque in X, si ha $f = g$ quasi ovunque?*

Problema 1.150 (Disuguaglianza di Hardy)**.** *Sia $p \in (1,+\infty)$ e $f \in L^p(0,+\infty)$ e si definisca*

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\,.$$

- *Si dimostri che*
$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$$
quindi la mappa $f \mapsto F$ è lineare e continua da $L^p(0,+\infty)$ in se stesso.
- *Si provi che l'uguaglianza si ha solo se $f = 0$ quasi ovunque.*
- *Si provi che la costante $\frac{p}{p-1}$ è ottimale.*
- *Se $f > 0$ e $f \in L^1(0,+\infty)$ si ha che $F \notin L^1(0,+\infty)$.*

Problema 1.151. *Siano $f_n, f \in L^p(X,\mu)$ per $p \in (0,+\infty)$ tali che $f_n(x) \to f(x)$ per quasi ogni $x \in X$ e $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. Si provi che allora $f_n \to f$ in $L^p(X,\mu)$.*

Problema 1.152. *Si trovi un controesempio alla conclusione del problema precedente se non si assume l'ipotesi $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, anche se $\mu(X) < +\infty$.*

Problema* 1.153. *Sia f_n una successione di funzioni non negative in $L^1(X,\mu)$ che soddisfa $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \geq f(x)$ per quasi ogni $x \in X$. Si provi che se*

$$\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu = 1$$

allora $f \in L^1(X,\mu)$ e $f_n \to f$ in $L^1(X,\mu)$.

Problema 1.154. *Sia f_n una successione di funzioni non negative in $L^1(X,\mu)$ che soddisfa $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \geq f(x)$ per quasi ogni $x \in X$. Si provi che se*

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu$$

allora $f_n \to f$ in $L^1(X,\mu)$.

Problema 1.155. *Se una famiglia di funzioni $f_n \in L^p(X,\mu)$ soddisfa $\sup_n \|f_n\|_p < C$ con $p \in (1,+\infty]$, dove C è una costante reale, allora è μ–uniformemente integrabile? E se $p = 1$?*

Problema 1.156. *Definiamo il* rango essenziale *di una funzione $f \in L^\infty(X,\mu)$ come l'insieme R_f di quei valori $t \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\mu(\{\, x \in X \,|\, |f(x) - t| < \varepsilon \,\}) > 0$$

per ogni $\varepsilon > 0$.
Si provi che R_f è compatto e si discuta la relazione tra R_f e $\|f\|_\infty$.

Problema 1.157. *Data $f \in L^\infty(X,\mu)$, sia A_f l'insieme di tutte le medie*

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu$$

per E sottoinsieme μ–misurabile di misura positiva e finita di X.
Si discuta la relazione tra A_f e R_f. L'insieme A_f è aperto, chiuso, convesso? Ci sono misure per cui A_f è sempre convesso per ogni funzione f? E misure per cui non lo è per qualche f?
Cosa cambia se invece di $f \in L^\infty(X,\mu)$ si assume $f \in L^1(X,\mu)$ o $f \in L^p(X,\mu)$?

Problema 1.158. *Si provi che $L^p(X,\mu)$ per $p \in (0,1)$ è uno spazio metrico completo con la distanza*

$$d(f,g) = \int_X |f-g|^p \, d\mu \, .$$

Si veda che $\|f\|_p = d(f,g)^{1/p}$ non *è una norma.*

Problema 1.159. *Si trovi una funzione limitata e Lebesgue–integrabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che per ogni funzione semplice φ si abbia $\|f-\varphi\|_\infty \geq 1/2$.*

Problema 1.160. *Lo spazio della funzioni continue su $[a,b]$ o delle continue a supporto compatto in (a,b) sono densi nello* spazio metrico *$L^p(a,b)$ se $p \in (0,1)$?*
Gli spazi $C^k([a,b])$, $C^\infty([a,b])$ (o gli analoghi a supporto compatto in (a,b)) sono densi in $L^p(a,b)$?

Problema 1.161. *Sia $\mu(X) < +\infty$ e $f \in L^\infty(X,\mu)$ con $\|f\|_\infty > 0$, si ponga*

$$a_n = \int_X |f|^n \, d\mu$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e si provi che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \|f\|_\infty \, .$$

Problema 1.162. *Sia $f : X \to \mathbb{R}^+$ una funzione μ–misurabile con $\int_X f \, d\mu = 1$. Si dimostri che per ogni $A \subset X$ con $0 < \mu(A) < +\infty$ si ha*

$$\int_A \log f \, d\mu \leq -\mu(A) \log \mu(A) \, .$$

Problema 1.163. *Sia μ una misura su X, una successione di funzioni μ–misurabili $f_n : X \to \mathbb{R}$ si dice convergente* in misura *alla funzione μ–misurabile $f : X \to \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\mu(\{\, x \in X \,|\, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon \,\}) < \varepsilon$$

per ogni $n \geq n_\varepsilon$.
Supponendo che $\mu(X) < +\infty$ si provino le seguenti asserzioni.

- *Se $f_n(x) \to f(x)$ per quasi ogni $x \in X$ allora $f_n \to f$ in misura (teorema di Lebesgue).*
- *Se $f_n \to f$ in $L^p(X,\mu)$ per qualche $p \in [1,+\infty]$, allora $f_n \to f$ in misura.*
- *Se $f_n \to f$ in misura esiste una sottosuccessione f_{n_i} tale che $f_{n_i}(x) \to f(x)$ per μ–quasi ogni $x \in X$ (teorema di Riesz).*

Si discutano inoltre le implicazioni inverse e se queste asserzioni continuano a valere nel caso $\mu(X) = +\infty$.

Problema 1.164. *Si provi che se f_n converge in misura a f, tale limite è unico.*

Problema 1.165. *Si esibisca una successione di funzioni Lebesgue–misurabili $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ tale che converga in misura alla funzione nulla ma non sia convergente puntualmente in nessun punto di (a,b).*

Problema 1.166. *Sia $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni monotone crescenti convergente in misura alla funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Si provi che allora $f_n(x)$ converge a $f(x)$ in ogni punto $x \in (a,b)$ di continuità di f.*

Problema 1.167. *Si dimostri che se $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una successione di funzioni non negative e Lebesgue–misurabili tali che*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mathcal{L} = 0 \, ,$$

allora f_n converge a zero in misura.

Problema 1.168. *Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni μ–misurabili e $\mu(X) < +\infty$, si provi che*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|} \, d\mu = 0$$

se e solo f_n converge a zero in misura.
L'ipotesi $\mu(X) < +\infty$ si può rimuovere?

Problema 1.169 (Variazione del teorema di convergenza di Vitali). *Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni μ–uniformemente integrabili e convergente in misura alla funzione $f : X \to \mathbb{R}$ con $\mu(X) < +\infty$, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \, .$$

Problema 1.170. *Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni convergente in misura alla funzione $f : X \to \mathbb{R}$ con $\mu(X) < +\infty$, inoltre $|f_n(x)| \leq C$ per μ–quasi ogni $x \in X$ e ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che se $g : [-C, C] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g(f_n) \, d\mu = \int_X g(f) \, d\mu \, .$$

Problema 1.171. *Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni convergente in misura alla funzione $f : X \to \mathbb{R}$ con $\mu(X) < +\infty$, inoltre esiste $g \in L^1(X, \mu)$ tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per μ–quasi ogni $x \in X$ e ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che allora se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione lipschitziana si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X h(f_n) \, d\mu = \int_X h(f) \, d\mu \, .$$

Problema* 1.172. *Sia $\mu(X) < +\infty$ e f_n una successione di funzioni in $L^p(X, \mu)$ con $p \in (1, +\infty)$, convergente μ–quasi ovunque alla funzione $f : X \to \mathbb{R}$ con $\|f_n\|_p \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove C è una costante reale. Si dimostri che per ogni $g \in L^q(X, \mu)$ con $1/p + 1/q = 1$ si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g f_n \, d\mu = \int_X g f \, d\mu \, .$$

Vale anche

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |g(f_n - f)| \, d\mu = 0 \, ?$$

Problema 1.173. *Sia f_n una successione di funzioni in $L^p(X, \mu)$ con $p \in (1, +\infty)$, convergente in $L^p(X, \mu)$ alla funzione $f : X \to \mathbb{R}$. Data una successione di funzioni μ–misurabili g_n, convergente μ–quasi ovunque a g e tale che $|g_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove C è una costante reale. Si dimostri che $f_n g_n \to fg$ in $L^p(X, \mu)$.*

Problema 1.174. *Per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si definisca la funzione* traslata *$f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come $f_t(x) = f(x + t)$.*
Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, si provi che $\int_{\mathbb{R}} f_t \, d\mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mathcal{L}$ e che se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione Lebesgue–misurabile e limitata si ha

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |g(f_t - f)| \, d\mathcal{L} = 0$$

Problema 1.175. *Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $p \in [1, +\infty)$, si provi che $f_t \to f$ in $L^p(\mathbb{R})$ per $t \to 0$ (f_t è la funzione traslata definita nel problema precedente).*
Segue che l'operatore traslazione *è lineare e continuo da $L^p(\mathbb{R})$ in se stesso.*

CARLO MANTEGAZZA
E-mail address: c.mantegazza@sns.it