# Matematica (quasi) senza numeri

Carlo Mantegazza

4 aprile 2023

Questo articolo riassume schematicamente il mio intervento al convegno "*Matematica 2022. Nuove proposte didattiche. Matematica, arte e società*" tenutosi a Napoli il 2 dicembre 2022. Le slide della mia presentazione si possono scaricare all'indirizzo

http://cvgmt.sns.it/HomePages/cm/other/Dida/Napoli-Mathesis-2022.pdf

Ho presentato un seminario che ho tenuto varie volte in stage di orientamento matematico per studenti delle scuole superiori (dal terzo anno in poi) organizzati dalla Scuola Normale di Pisa (www.sns.it) e dalla Scuola Superiore Meridionale di Napoli (www.ssmeridionale.it), nonché in occasioni sporadiche presso vari licei scientifici. Si tratta di un invito alla matematica attraverso la discussione di alcuni problemi richiedenti pochissimi calcoli e che hanno connessioni con idee profonde del pensiero e della cultura matematica. In particolare, i primi tre problemi sono legati al concetto di *invariante*, presentato da diversi punti di vista, il quarto di *combinatoria geometrica*.

L'idea è comunicare non solo il fatto che la matematica "vera" usa i calcoli (quando servono) solo come "strumento intermedio" nei ragionamenti, ma anche come si sviluppano le argomentazioni, il grande impatto di alcune idee e concetti apparentemente semplici (e che nascono da problemi a prima vista futili, ma curiosi) e infine, la bellezza intellettuale intrinseca degli argomenti matematici.

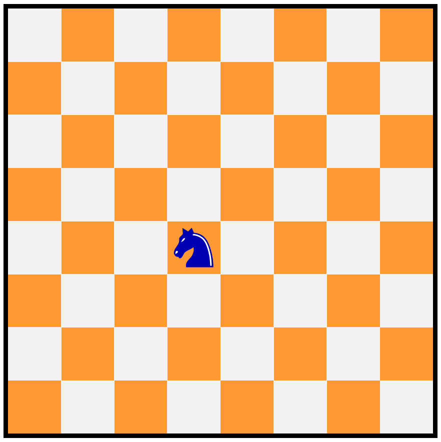
Dopo ogni problema vi sono una serie di osservazioni per studenti e docenti, che possono essere spunti per riflessioni o approfondimenti (e talvolta dei commenti riguardo al possibile uso/valore didattico, a mio personale giudizio).

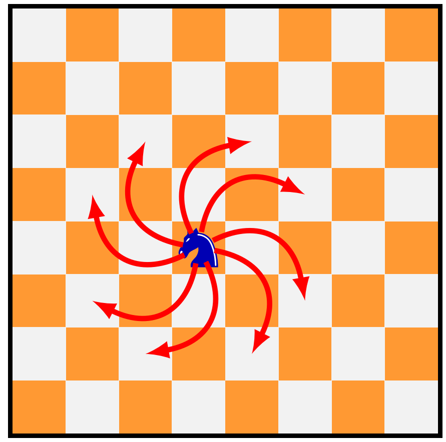
Il primo e l'ultimo problema, in particolare, si prestano molto meglio a una presentazione "dinamica" con slide, invece che "su carta". Per tale versione rimandiamo il lettore all'indirizzo citato sopra. Segnaliamo che un video dello stesso seminario "alla lavagna", si può trovare a

https://www.youtube.com/watch?v=REilCajHj08&t=3933s

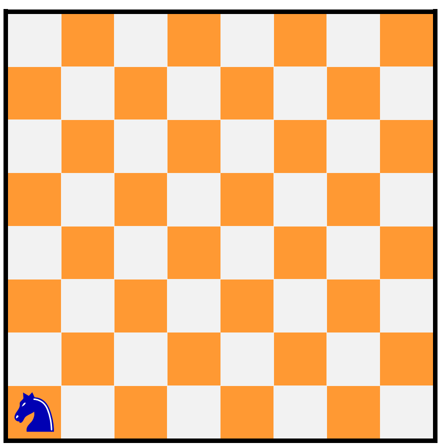
Infine, un breve articolo correlato a questo lavoro è stato pubblicato sulla rivista *Prisma* numero 46, 2022, in collaborazione con Silvia Benvenuti.

# Il “giro” del cavallo



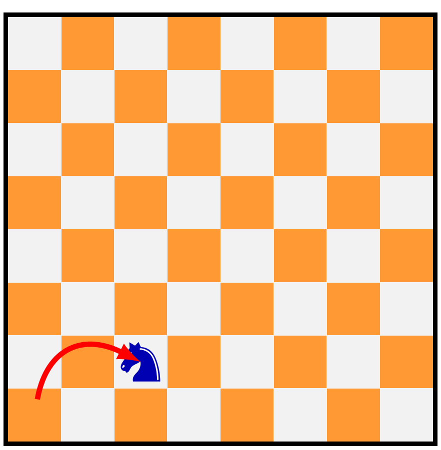


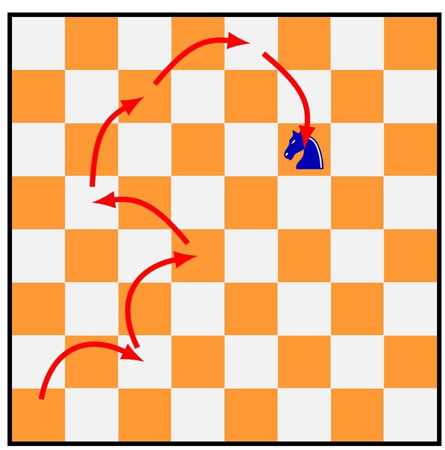
Sebbene questo problema riguardi gli scacchi, non è necessario conoscerli. L’unica regola da sapere è come si muove un cavallo: si sposta a “L”, come nella figura a destra, cioè due caselle in una direzione e una in quella ortogonale.

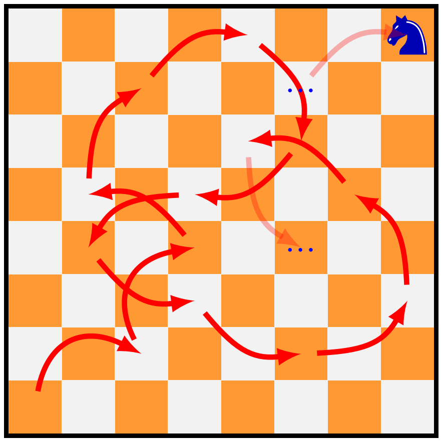


Consideriamo dunque un cavallo che “parte” nell’angolo in basso a sinistra della scacchiera 8x8.
Vorremmo “toccare” *tutte* le caselle *una e una sola volta*, muovendo il cavallo...

*Attenzione! Solo la casella di “arrivo” è considerata “toccata”, non le intermedie, facendo una mossa.*

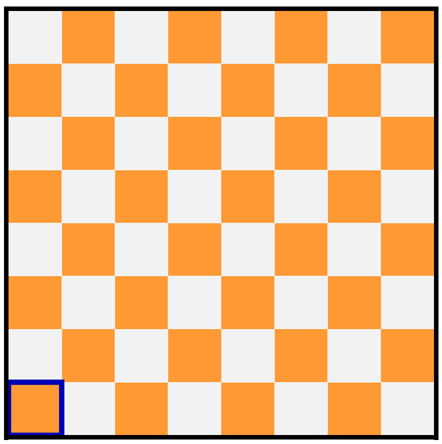




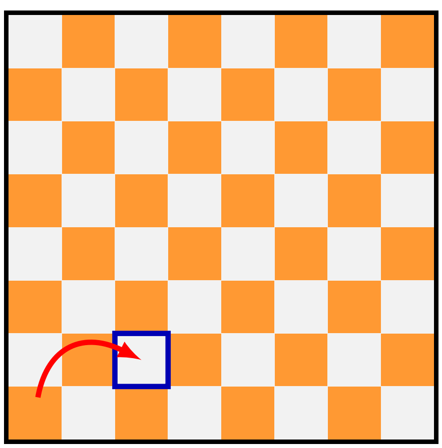


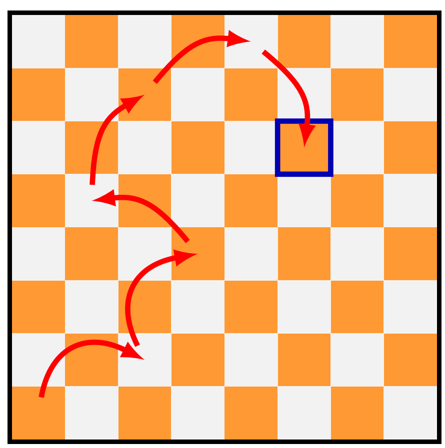
... e poi concludere il "giro" nell'angolo della scacchiera opposto a quello di partenza.

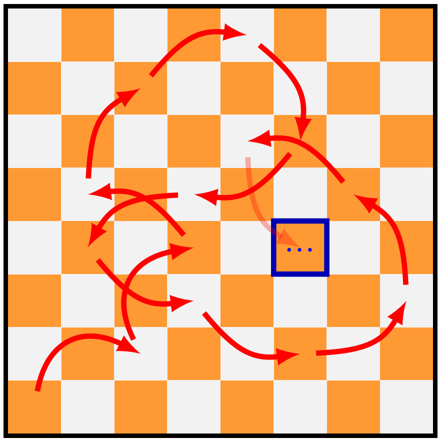
**Si può fare? Esiste cioè un tale percorso?**

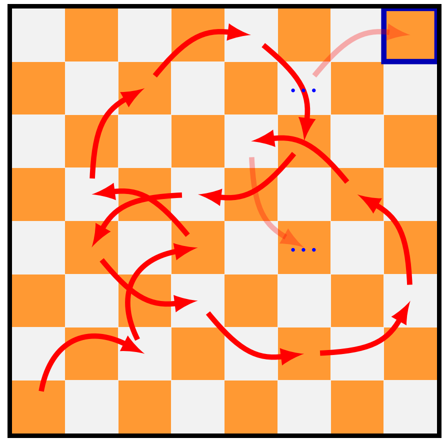


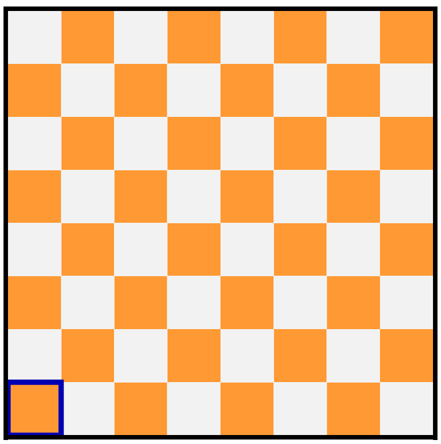
Cerchiamo di trovare qualche proprietà del nostro problema, "alleggerendo" la figura... togliamo il cavallo e guardiamo solo alle caselle "toccate".



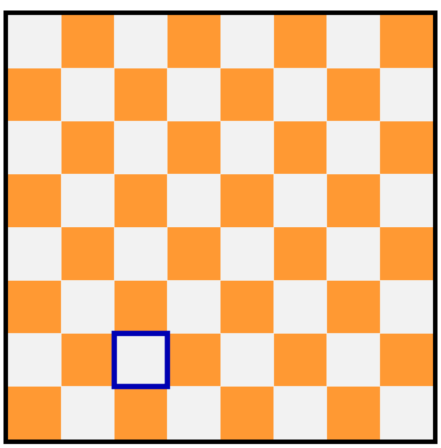


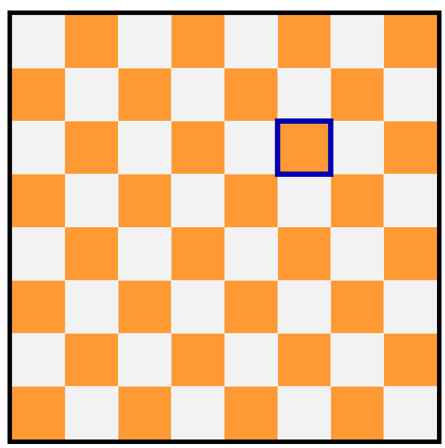


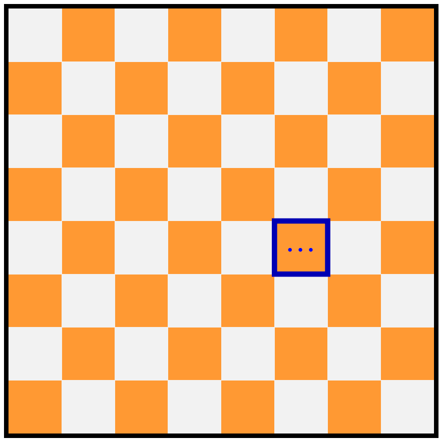


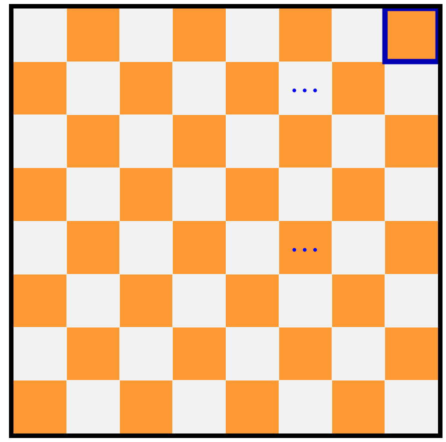


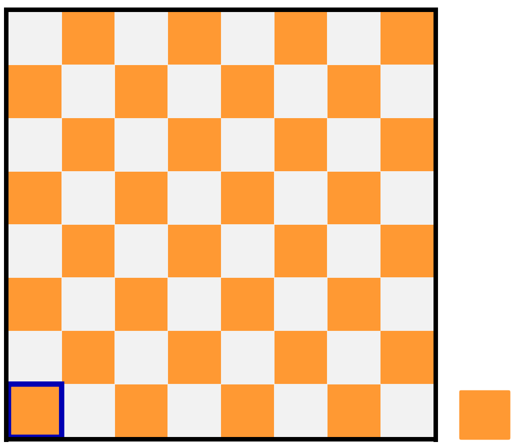
Alleggeriamo ancora la figura: togliamo anche le frecce.



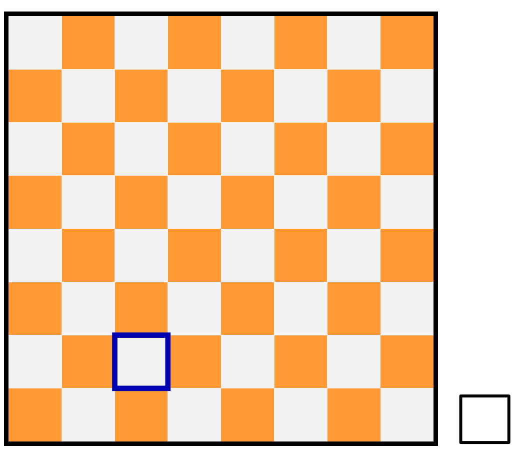


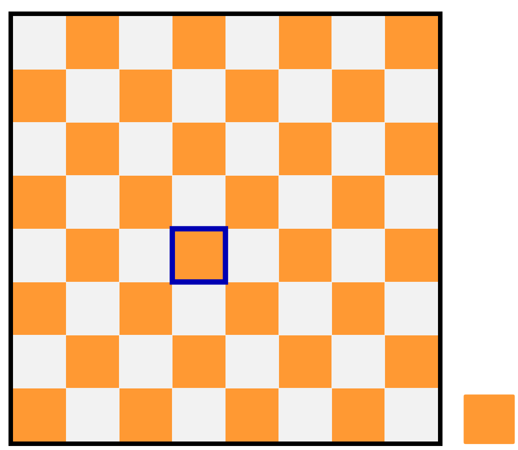


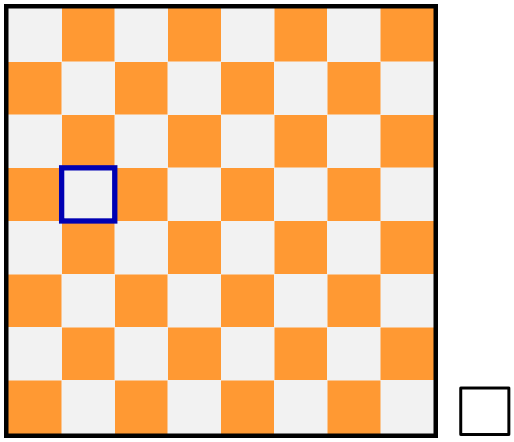


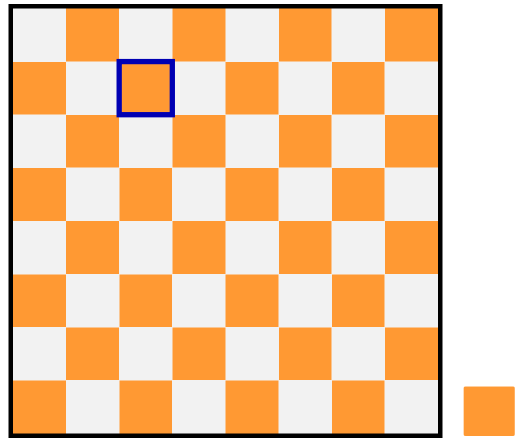


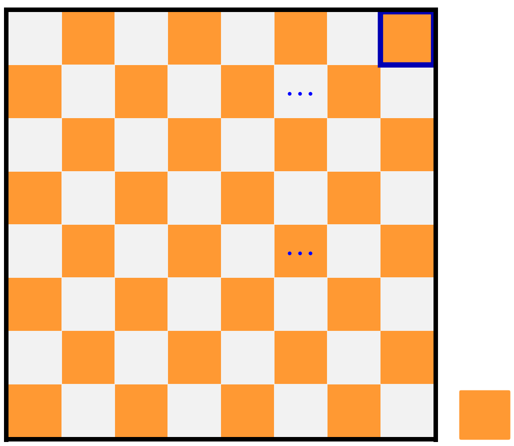
Guardiamo il colore delle caselle "toccate", mossa per mossa.







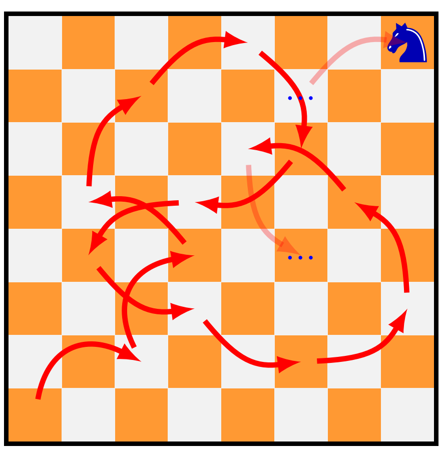




Notiamo che:

**Ad ogni mossa si cambia “colore”.**

**Alle mosse dispari, siamo sul bianco.**
**Alle mosse pari, siamo sull’arancione.**



Per completare il suo “giro” il cavallo deve fare 63 mosse, dunque all’ultima, la 63esima, sarà su una casella bianca. Quindi la nostra richiesta che il cavallo termini nell’angolo opposto a quello iniziale, che è arancione, non si può soddisfare.

**Non esiste il percorso cercato!**

## Osservazioni

- La presenza strutturale della colorazione delle caselle della scacchiera è un vantaggio eccezionale, si provi a immaginare di affrontare lo stesso problema se la scacchiera fosse sostituita da una griglia di quadrati bianchi. La difficoltà di analisi aumenterebbe considerevolmente e l'idea chiave per la soluzione sarebbe proprio quella di *aggiungere una colorazione* alla "struttura" sottostante il problema (apparentemente complicandone le caratteristiche, introducendo proprietà non presenti originariamente).

- Dal punto di vista del "problem solving", l'operazione di "alleggerire" il problema o ogni figura che lo descriva (è fondamentale fare sempre vari disegni e schemi nell'affrontare un problema) è estremamente importante. Permette (se fatta in maniera corretta – cosa che si impara con l'esperienza) di evidenziare e far risaltare le informazioni realmente necessarie e i tratti importanti del problema su cui ragionare, senza che quelle superflue li "coprano", o "disturbino" e "deviino" il ragionamento su considerazioni poco utili alla conclusione.

- Guardando al problema da un punto di vista più astratto/superiore, possiamo pensare al cavallo che si muove come un *sistema dinamico (discreto)*, cioè una "struttura" che si evolve nel tempo: lo *stato* del sistema al *tempo* $t = n \in \mathbb{N}$ (alla mossa $n$) è dato dalla posizione (casella) del cavallo dopo tale mossa. Poiché abbiamo visto che il cavallo alle mosse pari sia su una casella arancione e alle mosse dispari su una casella bianca (o più in generale che il colore cambia alternativamente a ogni mossa), diciamo che il sistema ha delle *invarianze*, o un *invariante*, cioè una o più proprietà o quantità che si mantengono inalterate durante la sua evoluzione. È allora evidente, in astratto, che se un sistema possiede un invariante, questo deve essere uguale nello *stato iniziale* e nello *stato finale* del sistema (per esempio nel nostro caso possiamo considerare il colore della casella dove sta il cavallo alle mosse dispari). Se tale invariante non coincide in tali due stati, non è allora possibile che il sistema evolva dal primo al secondo, da cui per esempio, l'impossibilità del "cammino" cercato, nel nostro problema. Vedremo altri esempi di questo argomento astratto nei problemi che seguono, in cui sarà chiaro che tutta la difficoltà di questo approccio sta nel trovare/inventare un invariante del sistema che si ottiene schematizzando il problema (sempre che sia possibile, non è scontato che dato un sistema dinamico vi sia una qualche invarianza).

- Mentre la presenza di un invariante e il fatto che differisca nello stato iniziale e finale di un sistema esclude l'evoluzione dal primo al secondo stato, il fatto che invece coincida non implica che questo sia possibile (potrebbe per esempio essere presente un secondo invariante che lo proibisce). Si noti la rilevante differenza tra le due conclusioni, che portano ad affrontarle con argomenti diversi: si esclude la possibilità dell'esistenza di un cammino (di un'evoluzione del sistema) per mezzo dell'esibizione di una contraddizione, in tal caso, mentre per una conclusione positiva, il cammino (evoluzione) va fornito/costruito esplicitamente, oppure (più raramente) fornito un argomento che ne implichi forzatamente l'esistenza. Dunque, in genere, la presenza di un'invarianza ha principalmente un ruolo nel dimostrare l'*impossibilità* di una determinata evoluzione di un sistema.

- Se si modificasse il problema richiedendo al cavallo di terminare il suo percorso in uno dei due angoli *adiacenti* a quello iniziale (*non* in quello *opposto*), il percorso esiste. Questo, come detto sopra, non è implicato dal fatto che in questo caso non vi è contraddizione in quanto l'invarianza del sistema è mantenuta, ma semplicemente dal fatto che tale cammino si può esibire esplicitamente. Invitiamo il lettore interessato a trovarlo.

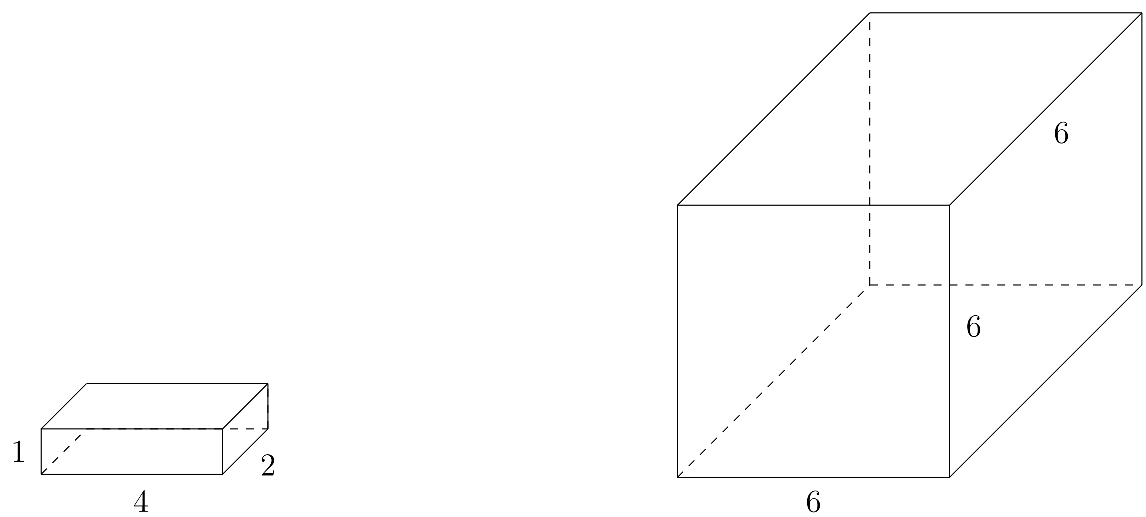
- Il fatto che una possibile piccola modifica alle ipotesi del problema (come appena detto) cambi radicalmente la risposta da negativa a positiva, rende problemi come questo del "giro del cavallo", detti *in forma dubitativa* (cioè senza "suggerimento" della risposta corretta e semplice richiesta di dimostrazione), più difficili, in quanto vi deve essere una fase in cui si decide in che direzione indirizzare i propri sforzi, prima di cominciare ad argomentare. In genere, tale decisione viene presa con una serie di tentativi (i più esaustivi possibile) di soluzione positiva costruttiva finché, in caso di fallimento di tali tentativi, non si sospetta l'impossibilità della conclusione (che comunque, a rigor di logica, potrebbe ancora essere la scelta sbagliata) e si cerca dimostrarla. Questa situazione (dubitativa) è analoga al lavoro di ricerca di un matematico professionista (o della stessa comunità matematica) di fronte a un problema originale, irrisolto o come viene detto comunemente, *aperto*, cioè una congettura di cui nessuno conosce ancora la validità. Esempi estremi e molto famosi di problemi aperti per lungo tempo, con sforzi in entrambe le direzioni nel mostrarne la veridicità o meno, sono l'*ultimo teorema di Fermat* e la *congettura di Poincaré*.

- Infine, sottolineiamo che l'argomento logico che abbiamo utilizzato, oltre allo strumento tecnico dell'invarianza, è la *dimostrazione per assurdo* (che utilizzeremo anche nei problemi seguenti), cioè negare la tesi che vogliamo (la tesi nel nostro problema è la non esistenza del cammino cercato, dunque negarla significa affermarne invece l'esistenza) e su tale base esibire una conseguente contraddizione (la non–uguaglianza dell'invariante nello stato iniziale/finale). Si tratta di una delle tecniche dimostrative più potenti a nostra disposizione, utilizzata regolarmente ed estensivamente ad ogni livello (ricreativo, didattico o di ricerca) e in ogni settore della matematica.

## “Costruire” un cubo

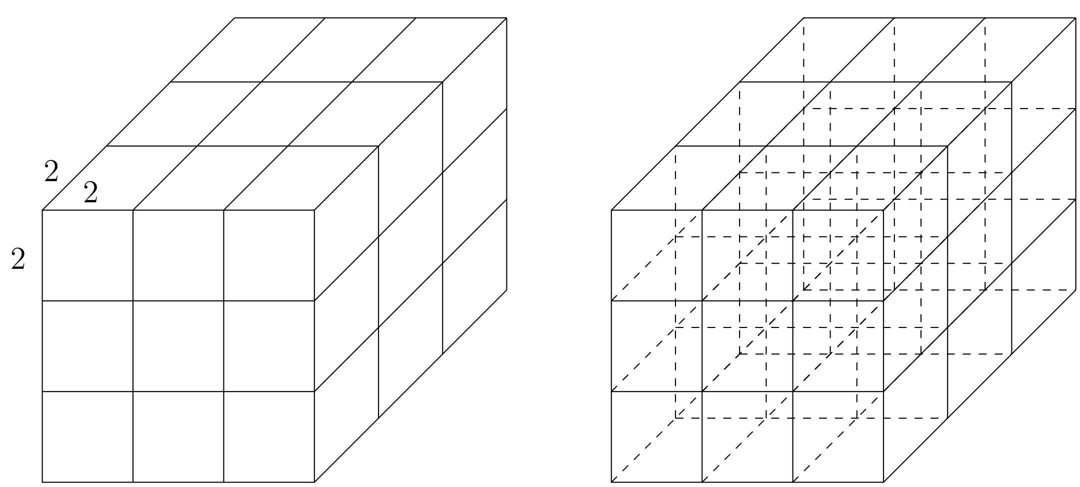
Vorremmo “costruire” un cubo di lato 6 con dei mattoncini 1x2x4 come nella figura. Ce ne vogliono 27 = 216 ÷ 8, considerando i volumi.

**Si può fare?**

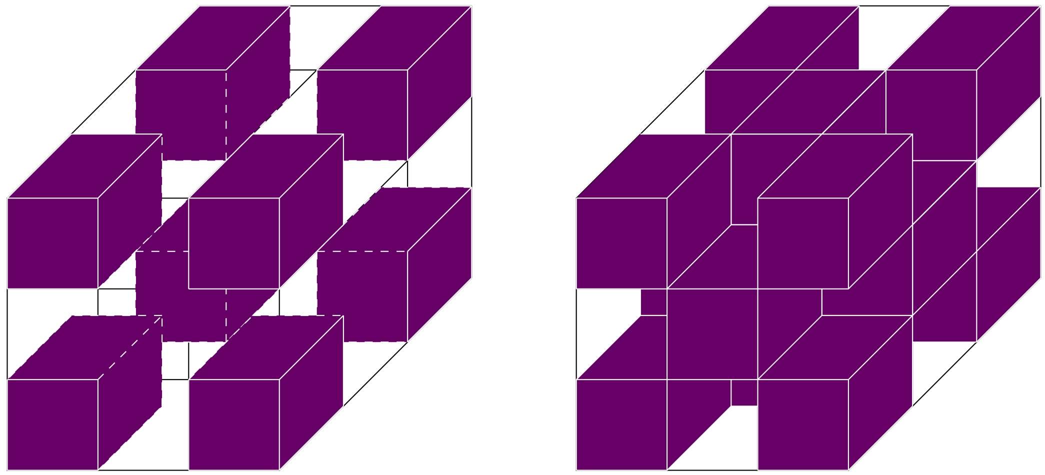



Dopo un po’ di tentativi (mentali o su carta), si può cominciare a sospettare che ciò sia impossibile. Si tratta allora di trovare una dimostrazione di tale impossibilità.

Dividiamo il cubo in 27 cubetti di lato 2, come nelle figure seguenti,

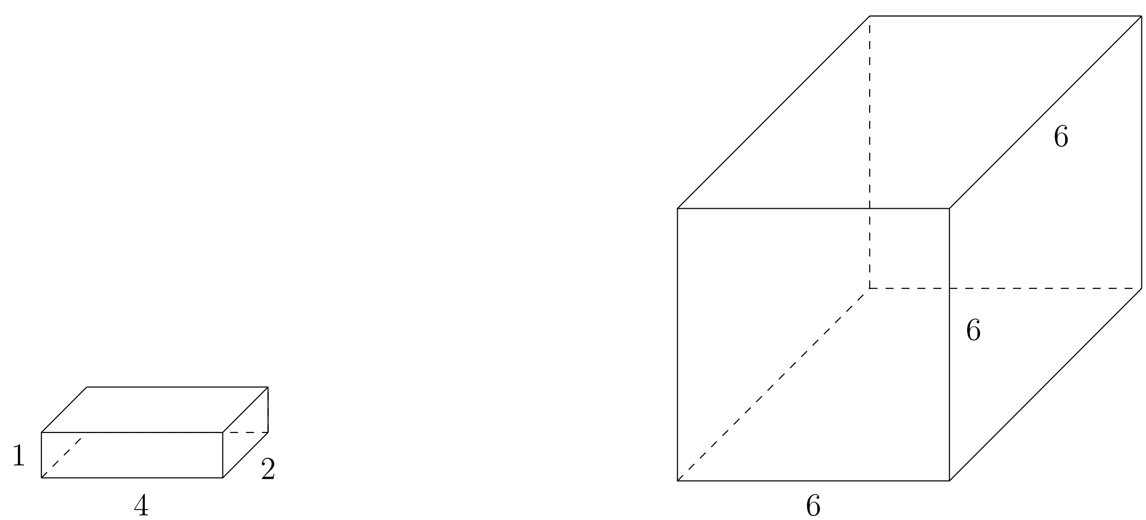


e poi “coloriamo” i cubetti alternativamente di due colori, in modo che mai due cubetti dello stesso colore siamo adiacenti, come segue.



Ora, l’osservazione chiave è che *un qualunque mattoncino messo all’interno del volume del cubo, “occupa” la stessa quantità di volume “colorato” e “non colorato”*.
Dunque, allora anche qualunque “oggetto” all’interno del volume del cubo che si può ottenere con dei mattoncini deve “occupare” la stessa quantità di volume “colorato” e “non colorato”. In particolare, il cubo intero stesso, assumendo per assurdo di essere in grado di “costruirlo” con tali mattoncini. Ciò è però in contraddizione col fatto che il cubo intero *NON* contiene la stessa quantità di volume “colorato” e “non colorato”, infatti vi sono 14 cubetti colorati e 13 non colorati.

Quindi, la risposta alla domanda iniziale è: **NO! È impossibile** “costruire” un cubo di lato 6 con 27 mattoncini 1x2x4, come nella figura seguente.



## Osservazioni

- Questo problema (specie a posteriori, una volta vista la soluzione) appartiene chiaramente alla stessa famiglia del problema precedente del cavallo ed è mia personale opinione che si tratti di uno dei più difficili da risolvere in questa tipologia di problemi (sia per uno studente di scuola superiore, ma probabilmente anche per un matematico professionista). Innanzitutto, non vi è nessuna colorazione data nella formulazione iniziale, la colorazione va messa "artificialmente" (si ricordi l'osservazione sul problema del cavallo in una griglia non colorata, invece che in una scacchiera) e scelta/inventata con già in mente il suo utilizzo in combinazione con l'invarianza del volume colorato nei mattoncini (le due cose vanno chiaramente insieme). Un'altra fonte di complessità è la struttura tridimensionale invece che bidimensionale del problema. Nella mia esperienza di insegnamento, "problem solving" e ricerca, il salto dimensionale rende più difficile ogni ragionamento, in modo molto rilevante. Si confronti, per esempio, la difficoltà di questo problema con quello bidimensionale proposto sotto al lettore.

- Per inquadrare la soluzione nello schema visto sopra di un sistema dinamico (anche questo discreto) con un invariante che si deve mantenere durante una qualunque sua evoluzione, definiamo il "sistema" al tempo $t = n \in \mathbb{N}$ come l'oggetto nel volume del cubo che otteniamo, dopo aver posizionato l'$n$–esimo mattoncino, durante il processo ("l'evoluzione" del sistema nel tempo) di costruzione/posizionamento dei 27 mattoncini. Quindi, stiamo cercando un'evoluzione tale che a tempo zero, l'oggetto sia il vuoto e a tempo $t = 27$ sia l'intero cubo. Per quanto detto sopra nella soluzione del problema, l'invariante che si mantiene durante l'evoluzione del sistema è allora la differenza tra il volume occupato colorato e quello non colorato, che deve sempre essere zero in quanto lo è per l'oggetto "vuoto" iniziale. Il fatto che l'intero cubo abbia questo invariante diverso da zero preclude dunque l'esistenza di una tale evoluzione/costruzione.
  Si noti anche, più in generale, che dato un oggetto qualunque all'interno del cubo, condizione necessaria per poterlo "trasformare" in un altro oggetto aggiungendo (o togliendo) mattoncini, è che entrambi abbiamo lo stessa differenza tra il volume occupato colorato e non colorato.

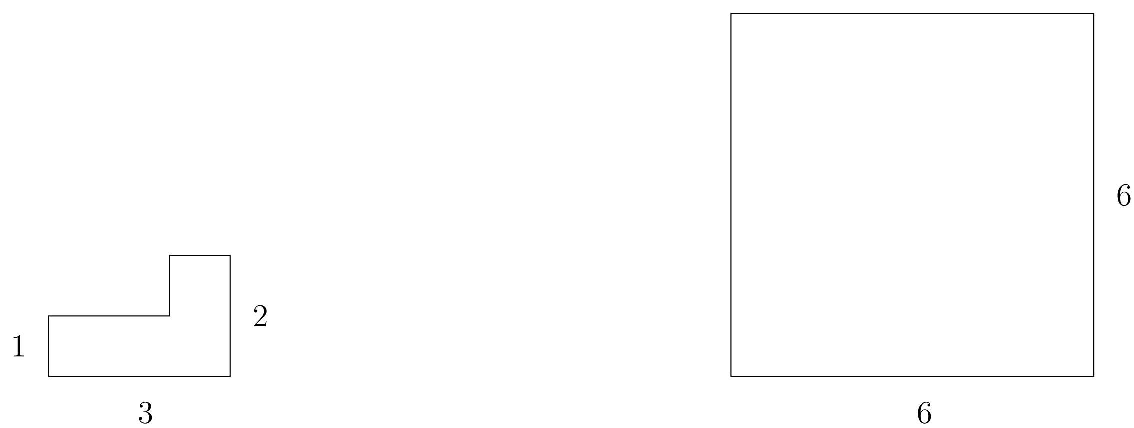
- Come il problema precedente, anche questo è posto in forma dubitativa, dunque richiede una fase preliminare di "tentativi" di soluzione costruttiva. In tutti tali tentativi (fallimentari) si finisce per ritrovarsi sempre nella situazione che manca un cubetto di lato 2 per terminare il cubo (cosa chiaramente spiegabile a posteriori). Dunque, oltre a far sospettare/congetturare l'impossibilità della costruzione, in questo caso questa fase "esplorativa" può suggerire che tali cubetti giochino un ruolo rilevante nell'analisi e possibilmente portare a immaginare le argomentazioni successive (colorazione e invarianza).

- Notiamo che se il cubo avesse il lato multiplo di $4$, si potrebbe costruire facilmente e la fase preliminare di analisi detta sopra porterebbe subito alla conclusione positiva. Come nel problema precedente, con l'angolo di arrivo modificato (si vedano le osservazioni al riguardo), in cui comunque una soluzione esiste ma non è subito evidente come in questo caso, l'esistenza di un modo per costruire tale cubo non è conseguenza dell'assenza di contraddizioni nel ragionamento di colorazione e invarianza (in questo caso non vi è alcun assurdo), ma della sua esibizione esplicita.

- Anche in questo problema abbiamo utilizzato la dimostrazione per assurdo, in maniera perfettamente analoga al problema del cavallo.

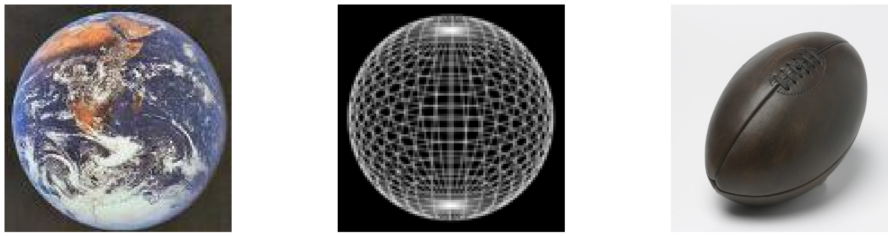
## "Costruire" un quadrato – Un esercizio per il lettore

Vorremmo "costruire" un quadrato di lato 6 con delle tesserine a L, come nella figura. Ce ne vogliono 9.
**Si può fare?**

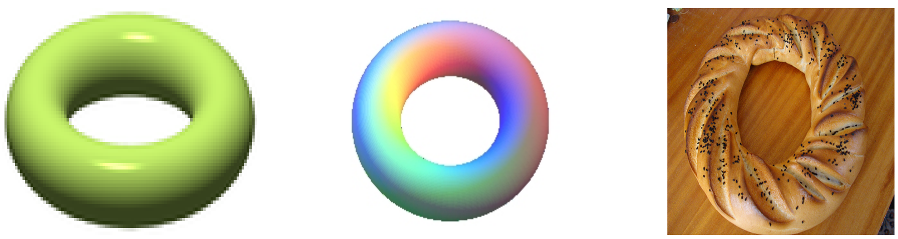


## Si può deformare una sfera in un toro?

*Sfera*

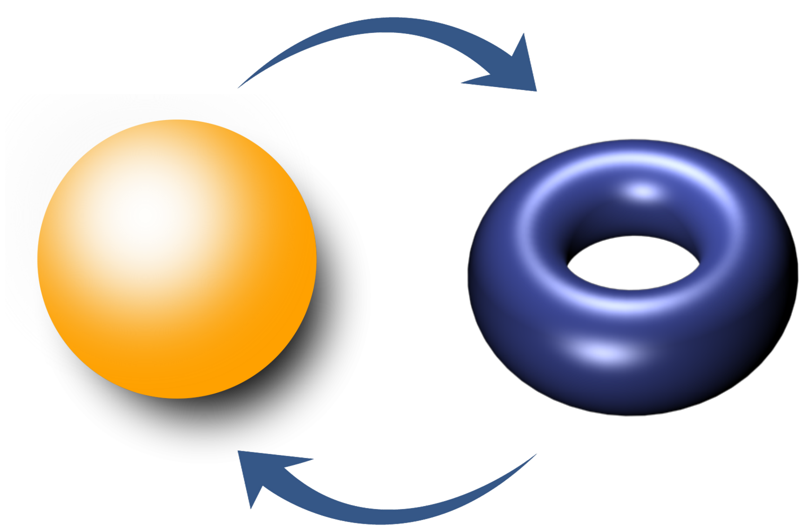


*Toro*



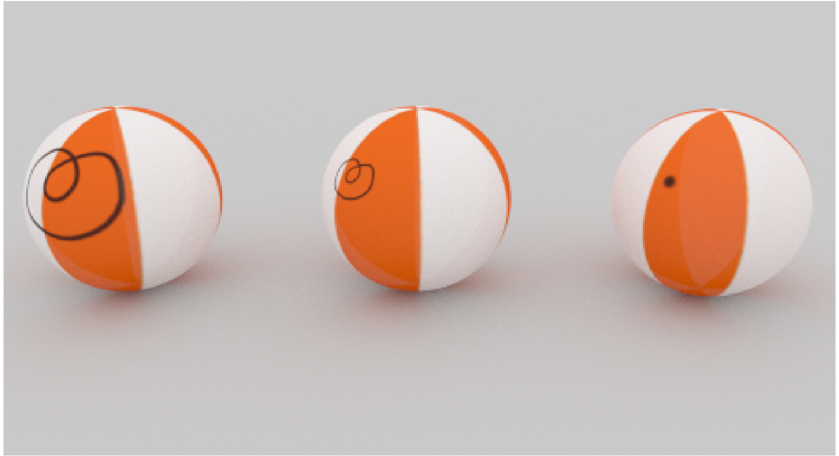
*Superfici con più "buchi"*

Dopo questi esempi di superfici con un numero vario di "buchi", ci chiediamo se è possibile deformare (come se fosse di gomma) una sfera in un toro (e ovviamente viceversa), cioè una superficie senza "buchi" in una che ne ha uno.



Con “deformazione” intendiamo modificare le superfici come se fossero elastiche, senza mai “tagliarle” o “incollarne” delle parti insieme. Per esempio, rendendo la sfera un grissino e poi “incollando” le due estremità si ottiene il toro, oppure “schiacciando” una sfera e poi facendo un buco centrale (dunque un taglio/rottura) si ha lo stesso risultato. Sfortunatamente, entrambe queste due operazioni sono proibite e scartando questi due metodi molto “naturali”, l’intuizione (per esclusione) suggerisce che potrebbe non essere possibile, in realtà. Di nuovo, si tratta di supportare tale intuizione (congettura) con una dimostrazione matematica rigorosa (come le precedenti).

L’idea (di Poincaré) è di considerare le curve chiuse sulle superfici, chiamate *lacci*. Si vede facilmente (e lo si può dimostrare con pieno rigore, una volta stabilite le definizioni matematiche precise degli oggetti in gioco) che *ogni laccio su una sfera si può “sfilare” dalla stessa senza tagliarlo o strapparlo*.



Questo è equivalente a dire che ogni laccio si può deformare (come se fosse un elastico) a un singolo punto, rimanendo sulla superficie.

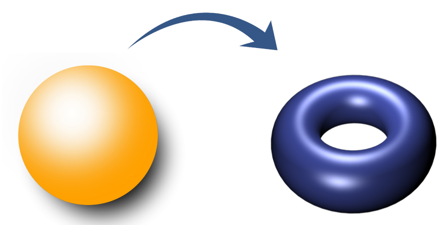
**Il toro non ha invece questa proprietà.**

Per “sfilare” o deformare a un punto il laccio disegnato sopra, ad esempio, bisogna tagliarlo, come nella figura seguente.

Oppure, un laccio che "agganci" il toro nel suo "buco" non è "sfilabile" dalla superficie senza tagliarlo. Lo stesso chiaramente vale per una qualunque superficie che abbia almeno un "buco", come quelle viste sopra.

È facile convincersi (ed è dimostrabile rigorosamente, così come le altre affermazioni precedenti) che questa proprietà che tutti i lacci si possano "sfilare" dalla superficie, *si mantiene per deformazione* (senza tagli e incollamenti).

**La sfera ce l'ha e il toro NO, dunque non si possono deformare uno nell'altro.**



**Si può deformare una sfera in un toro? La risposta è NO!**

## Poincaré e la Topologia

Sebbene vari risultati che oggi chiamiamo "topologici" siano stati trovati in precedenza, è con Henri Poincaré (1854–1912), *l'ultimo universalista*, che la topologia (da lui chiamata *Analysis Situs* e che studia le proprietà degli oggetti geometrici invarianti per determinate "deformazioni", come quelle viste sopra, per esempio) assume una forma moderna.
In particolare, per le superfici o per spazi più complessi, Poincaré introdusse il concetto fondamentale di *semplice connessione* che è esattamente la proprietà che tutti i lacci si possano deformare a un punto.

## Osservazioni

- La proprietà di poter contrarre i lacci è dunque un invariante del sistema dinamico (*continuo*, in questo caso) il cui stato è dato da una superficie che si deforma (sistema che evolve) *in modo continuo* nel tempo. Come nei problemi precedenti, essendo tale proprietà invariante durante l'evoluzione, viene preclusa la possibilità di deformare una superficie iniziale che la soddisfa (la sfera) in una finale che non la soddisfa (il toro).

- Si noti che ovviamente, la conclusione di impossibilità è *simmetrica*, il toro non si può deformare in una sfera e in generale, ogni coppia di superfici sono deformabili una nell'altra e viceversa, oppure non lo sono.

- Si può mostrare con questo "metodo dei lacci" (ma con argomentazioni più sofisticate) che in realtà, se due superfici non hanno lo stesso numero di "buchi", non sono deformabili una nell'altra (il toro ha 1 buco, la sfera zero). Con esattamente lo stesso argomento del problema si ottiene chiaramente che una sfera non si può deformare in una qualunque superficie che abbia almeno un "buco", ma per esempio, già mostrare che un toro non si può deformare in una superficie tipo "pretzel" (si veda la figura all'inizio della sezione) è molto più difficile. L'importante *teorema di classificazione delle superfici* (detto anche *di uniformizzazione*) asserisce poi, in positivo, che se due superfici (limitate, come quelle che abbiamo visto) hanno invece lo stesso numero di "buchi", allora sono deformabili una nell'altra. Dato che intuitivamente anche questo numero di "buchi" (detto *genere* di una superficie) si mantiene sotto le nostre operazioni di deformazione, anch'esso è un invariante e porta alla stessa soluzione/conclusione del problema, con un ragionamento analogo a quello che abbiamo seguito. Non lo abbiamo usato e abbiamo preferito ragionare sui lacci in quanto, malgrado sia molto intuitivo, definire precisamente e rigorosamente da un punto di vista matematico cosa sia un "buco" è molto complesso.

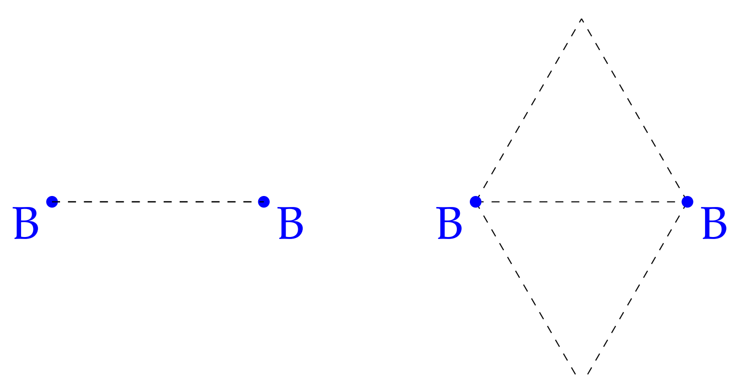
- La *topologia* è una teoria fondamentale per tutti i settori della matematica moderna e si è originata da domande come quella di questo problema. Ciò dovrebbe suggerire di non ignorare mai le domande che ci si pone, per quanto possano sembrare insignificanti, inutili o semplici curiosità. In particolare, la storia della matematica insegna a non sottovalutare mai l'importanza o l'utilità dello studio di un qualunque problema, per quanto possa apparire futile, in quanto queste possono emergere prepotentemente anche dopo parecchio tempo. Esempi (ve ne sono innumerevoli) in questo senso sono il *problema dei ponti di Königsberg*, risolto da Eulero, che è stato l'inizio della teoria dei grafi (in rete si trovano facilmente molte informazioni al riguardo, invitiamo il lettore curioso ad approfondire l'argomento), oppure il millenario studio delle proprietà dei numeri naturali, dei numeri primi in particolare, cioè la branca della matematica detta *teoria dei numeri*, che anche solo nella prima metà del secolo scorso veniva considerata (anche con un certo "snobismo" intellettuale) pura speculazione matematica senza alcuna utilità pratica (si veda il bellissimo libro di G. H. Hardy, "*Apologia di un matematico*") e che invece oggi è forse la matematica più utile e pervasiva nelle nostre vite in quanto sulle proprietà dei numeri primi sono basate molte delle tecniche di crittografia moderne, che permettono di tutelare la riservatezza delle informazioni in qualunque nostra telecomunicazione, interazione o dispositivo digitale.

## Triangoli monocolori

Coloriamo "a caso" tutti i punti del piano di blu o rosso. Esiste sempre un triangolo equilatero ***monocolore***, cioè con i tre vertici dello stesso colore, tutti e tre blu o tutti e tre rossi?

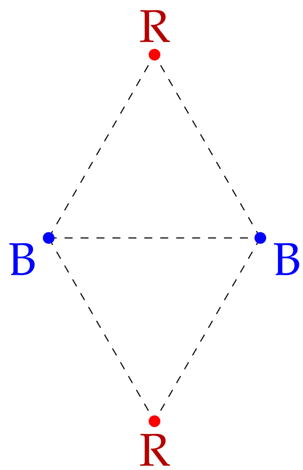
Sembra davvero una domanda da Settimana Enigmistica!

Cominciamo col considerare una coppia qualunque di punti blu. Se infatti ci fosse un unico punto blu, allora tutti gli altri punti dovrebbero essere rossi e dunque troveremmo facilmente un triangolo equilatero coi tre vertici rossi, concludendo positivamente. Tracciamo il segmento che unisce tali due punti blu e immaginiamolo come la base di due triangoli equilateri (uno sopra e uno sotto tale base).

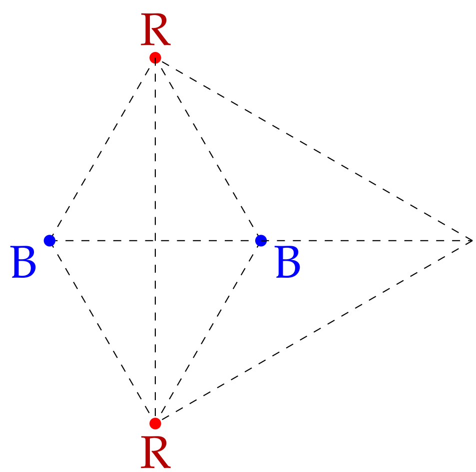



Se supponiamo che il triangolo monocolore non ci sia, i due "terzi" vertici dei due triangoli equilateri devono necessariamente essere rossi, altrimenti di nuovo concludiamo positivamente.

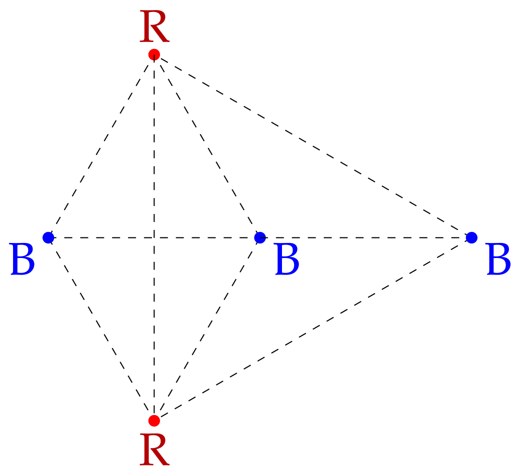
Si noti che anche stavolta stiamo facendo un ragionamento "per assurdo": assumiamo che esista una colorazione del piano senza un triangolo monocolore e argomentiamo su quella. Se troviamo una contraddizione (per esempio esibiamo in qualche modo un triangolo monocolore) abbiamo allora la conclusione che per qualunque colorazione, tale triangolo c'è.



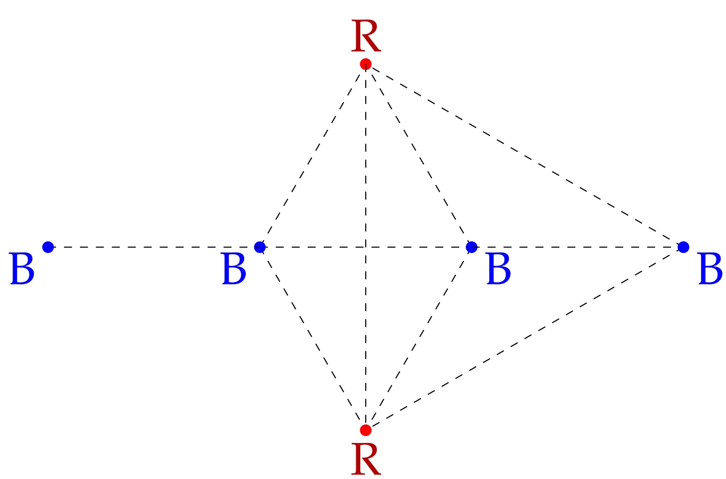

Essendo apparsi nella nostra figura due nuovi punti dello stesso colore, rosso stavolta (abbiamo determinato che devono essere rossi altrimenti abbiamo il triangolo cercato), possiamo ripetere il ragionamento precedente, costruendo/immaginando il triangolo equilatero che ha come base il segmento che li unisce.



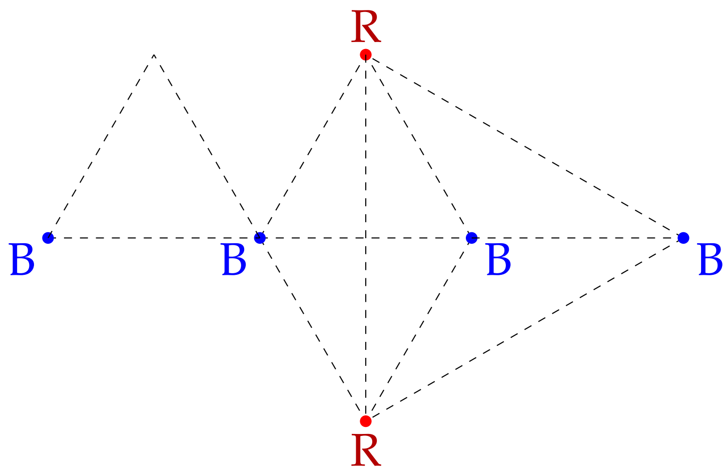

Per lo stesso argomento di cui sopra, il terzo vertice di quest'ultimo triangolo equilatero deve necessariamente essere blu, oppure abbiamo finito.

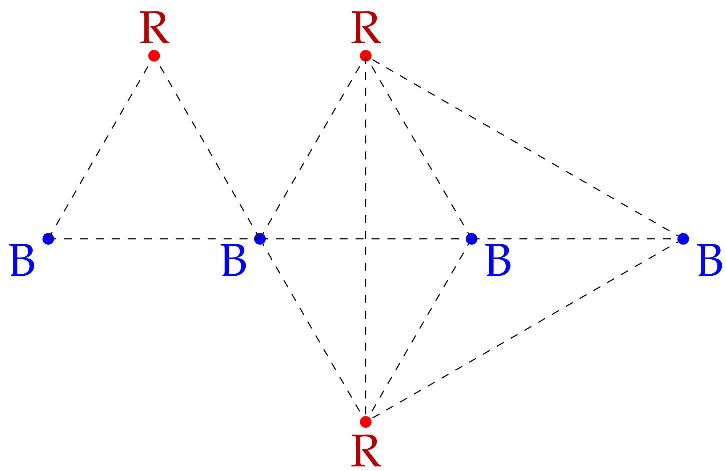


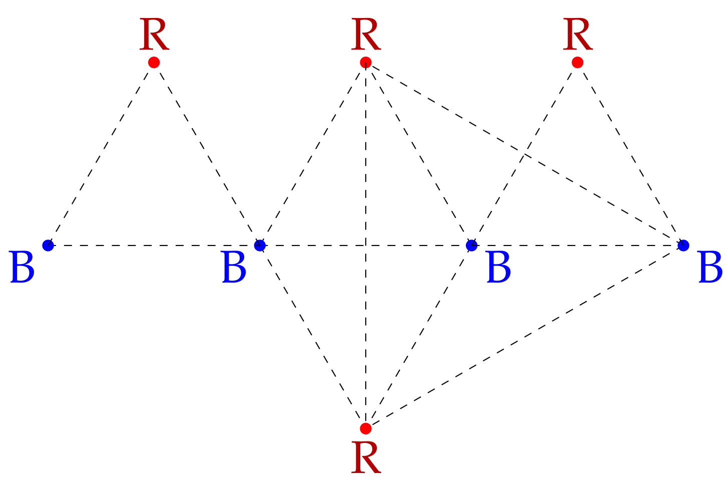

Lo stesso chiaramente vale per il triangolo equilatero con la stessa base, simmetrico del precedente, a sinistra (che non disegniamo, per mantenere la figura semplice). Dunque, sempre per l'ipotesi che il triangolo monocolore non ci sia, abbiamo determinato in questo modo due nuovi punti blu, chiaramente sulla stessa retta per i due punti blu iniziali e notiamo (punto cruciale) che i quattro punti blu determinano tre segmenti di stessa lunghezza, con facili considerazioni di geometria elementare.



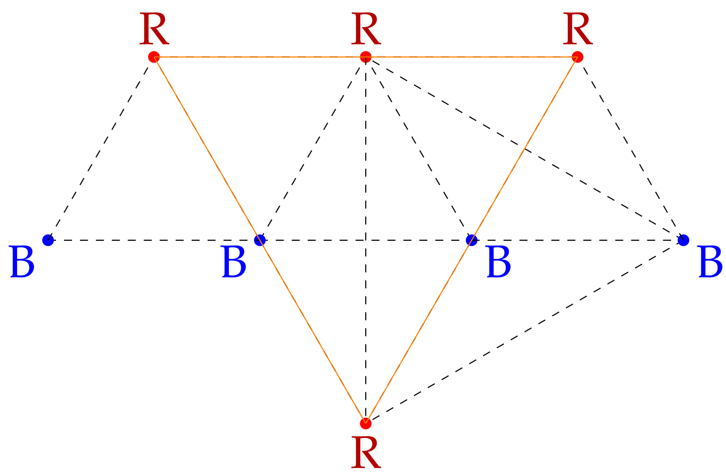

Possiamo allora ripetere il ragionamento iniziale sui primi due punti blu per gli altri due segmenti di stessa lunghezza tra punti blu, determinando (sempre per l'ipotesi per assurdo) altri due punti rossi, come nelle figure seguenti




Abbiamo infine la contraddizione, perché i tre punti rossi come nella figura che segue formano un triangolo equilatero, in quanto i suoi tre lati (evidenziati) hanno la stessa lunghezza, sempre con un facile ragionamento geometrico. Non siamo riusciti dunque, malgrado i nostri sforzi, a evitare che ad uno dei passi precedenti o in questo passo finale, "appaia" (si determini necessariamente) un triangolo monocolore e questo è ovviamente in contraddizione con l'ipotesi per assurdo che non esistesse.




La tesi allora segue e la risposta alla domanda se esiste sempre un triangolo equilatero ***monocolore*** in un qualunque piano colorato di due colori è **SI!**

## Osservazioni

- Nella soluzione di questo problema la tecnica di dimostrazione per assurdo è spinta all'estremo, a mio parere, tanto che può sembrare si utilizzi un'argomentazione diversa. I motivi sono due: il primo è che la contraddizione è data dal perfetto opposto (l'esistenza di un triangolo monocolore) dell'ipotesi per assurdo (la non esistenza di un triangolo monocolore), il secondo è che l'ipotesi viene utilizzata ripetutamente, ad ogni passo del ragionamento.

- Questo tipo di questioni non sono facilmente inquadrabili in un campo preciso della matematica, possiamo annoverarle alla *combinatoria* (parte della cosiddetta "matematica discreta") con un chiaro taglio geometrico. Un problema simile per un lettore curioso è mostrare che nella stessa situazione di piano colorato con due colori, c'è sempre un triangolo (non necessariamente equilatero) monocolore con anche il suo baricentro dello stesso colore dei suoi tre vertici (vale anche la versione tridimensionale: colorando ogni punto dello spazio in due colori, c'è sempre un tetraedro con vertici e baricentro dello stesso colore).

- A mia conoscenza, se in un piano colorato in due colori vi sia sempre un *quadrato* monocolore è un problema aperto.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "RENATO CACCIOPPOLI" – UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II & SCUOLA SUPERIORE MERIDIONALE, NAPOLI
*E-mail address*: carlo.mantegazza@unina.it